

Inhalt

Vorwort	5
Aufbau und Themen des Buches	7
Einführung	13
Erster Abschnitt: Die Sprache der Mathematik	17
1.1 Mathematisches Argumentieren	19
Aussagen und Junktoren	19
Semantik der Junktoren	21
Aussagenlogische Beweismuster	27
Die Sprache der Mathematik	30
Aussagenlogische Tautologien	33
Quantorenregeln	35
Übungen	36
1.2 Mengen	41
Extensionalität	42
Komprehensionen mit Hilfe von Eigenschaften	43
Einfache Mengenbildungen	45
Operationen mit Mengen	46
Potenzmengen	48
Mengensysteme	49
Übungen	50
1.3 Relationen und Funktionen	55
Relationen und ihre Struktureigenschaften	55
Äquivalenzrelationen	57
Ordnungen	61
Funktionen	63
Wohldefiniertheit und Kongruenzrelationen	69
Isomorphismen	70
Übungen	72
Exkurs: Mächtigkeiten	77
Mächtigkeitsvergleiche	77
Der Satz von Cantor-Bernstein	78
Unendlichkeiten	81
Übungen	83

Zweiter Abschnitt: Zahlen 85**2.1 Natürliche Zahlen 87**

Nachfolger und Induktion	87
Dedekind-Strukturen	88
Die Arithmetik der natürlichen Zahlen	92
Die Ordnung der natürlichen Zahlen	93
Starke Induktion und Prinzip des kleinsten Elements	94
Rekursive Funktionen und algorithmische Berechenbarkeit	95
Übungen	98

2.2 Ganze und rationale Zahlen 103

Konstruktion der ganzen Zahlen	103
Rechengesetze und Ordnung der ganzen Zahlen	105
Konstruktion der rationalen Zahlen	107
Rechengesetze und Ordnung der rationalen Zahlen	108
Körper	109
Angeordnete Körper	110
Übungen	111

2.3 Reelle und komplexe Zahlen 115

Obere Schranken und Suprema	115
Lineare Vollständigkeit	116
Konstruktion der reellen Zahlen	118
Das archimedische Axiom	120
Charakterisierung der reellen Zahlen	121
Komplexe Zahlen und Quaternionen	122
Übungen	128

Dritter Abschnitt: Erste Erkundungen 133**3.1 Teiler 135**

Teilbarkeit	135
Größter gemeinsamer Teiler	137
Der Euklidische Algorithmus	140
Linearkombinationen	142
Primzahlen	144
Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung	148
Übungen	151

3.2 Grenzwerte 157

Konvergente Folgen	157
Häufungspunkte	160
Reihen	162
Stetige Funktionen	164
Offene Mengen und Umgebungen	168
Metrische Vollständigkeit	171
Übungen	172

3.3 Matrizen	177
Vektoren	177
Lineare Gleichungssysteme	178
Das Gauß-Jordansche Eliminationsverfahren	182
Lineare Abbildungen	186
Matrizenmultiplikation	187
Relationen und Matrizen	188
Übungen	192
3.4 Gruppen	197
Der Begriff der Gruppe	197
Folgerungen aus den Gruppenaxiomen	200
Exponentiation und Vervielfachung	201
Untergruppen	202
Nebenklassen und Faktorgruppen	205
Der Satz von Lagrange	207
Übungen	208
3.5 Graphen	213
Endliche Graphen	213
Kantenzüge, Wege und Kreise	216
Erreichbarkeit und Zusammenhang	217
Eulerzüge	218
Erkundung eines Labyrinths	220
Hamiltonkreise	222
Übungen	224
3.6 Wahrscheinlichkeiten	229
Abzählbare Wahrscheinlichkeitsräume	229
Additivität und Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen	236
Summen als Integrale	238
Unabhängigkeit	240
Zufallsvariable	241
Das Gesetz der großen Zahl	244
Übungen	247
Lösungsvorschläge	253
1.1 Mathematisches Argumentieren	253
1.2 Mengen	256
1.3 Relationen und Funktionen	261
Literatur	265
Notationen	269
Index	271