

Inhaltsverzeichnis

Über die Autoren	10
Danksagung	10
Einleitung	21
Zweiter Teil für Naturwissenschaftler oder höhere Mathematik	21
Ein leicht verständlicher Einstieg in die höhere Mathematik anhand von Beispielen	21
Überall praktische Beispiele	22
Törichte Annahmen über den Leser	22
Konventionen in diesem Buch	23
Wie dieses Buch strukturiert ist	23
Teil I: Eindimensionale Analysis	23
Teil II: Lineare Algebra	24
Teil III: Komplexe Analysis und Differentialgleichungen	24
Teil IV: Mehrdimensionale Analysis	24
Teil V: Der Top-Ten-Teil	25
Die Symbole in diesem Buch	25
Den modularen Aufbau für sich nutzen	25
Teil I	
Eindimensionale Analysis	27
Kapitel 1	
Grundlagen der Analysis	29
Was Funktionen eigentlich sind	29
Graphische Darstellung von Funktionen	31
Polynome einfach verstehen	32
Bruchrechnung: Rationale Funktionen	35
Rasch wachsende Exponentialfunktionen	36
Umgekehrt betrachtet: Logarithmusfunktionen	38
Von Umkehr- und inversen Funktionen	39
Trigonometrische Funktionen	40
Trigonometrische Funktionen zeichnen	41
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten	42
Grenzwerte einer Funktion verstehen	42
Drei Funktionen erklären den Grenzwertbegriff	43
Links- und rechtsseitige Grenzwerte	44
Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!	44
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	45
Grenzwerte für x gegen unendlich	46

Mathematik der Physik für Dummies

Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen	46
Einfache Grenzwerte auswerten	49
Einfachste Methode: Einsetzen und Auswerten	49
Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	49
Methode 1: Faktorisieren	49
Methode 2: Konjugierte Multiplikation	50
Methode 3: Einfache algebraische Umformungen	51
Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich	51
Grenzwerte bei unendlich auswerten	53
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	53
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	54

Kapitel 2

Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen

55

Erste Schritte des Ableitens	55
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	56
Grundlegende Regeln der Differentiation	58
Die Konstantenregel	58
Die Potenzregel	58
Die Koeffizientenregel	59
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	59
Trigonometrische Funktionen differenzieren	59
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	59
Fortgeschrittene Regeln der Differentiation	61
Die Produktregel	61
Die Quotientenregel	61
Die Kettenregel	61
Implizite Differentiation	65
Logarithmische Differentiation	66
Differentiation von Umkehrfunktionen	66
Keine Angst vor höheren Ableitungen	68
Kurvendiskussion: Extrem-, Wende- und Sattelpunkte	69
Berg und Tal: Positive und negative Steigungen	70
Bauchgefühle: Konvexität und Wendepunkte	70
Am Tiefpunkt angelangt: Ein lokales Minimum	71
Atemberaubender Blick: Das globale Maximum	71
Achtung – Nicht auf der Spitze stecken bleiben	71
Halten Sie sich fest – nun geht's bergab!	71
Jetzt wird's kritisch an den Punkten!	72
Lokale Extremwerte finden	73
Die kritischen Werte suchen	73
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	74
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	75
Globale Extremwerte finden	76
Konvexität und Wendepunkte praktisch bestimmen	78

Inhaltsverzeichnis

Die Graphen von Ableitungen – jetzt wird gezeichnet!	80
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	83
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	85
Das nützliche Taylorpolynom	86
Die Regel von l'Hospital	90
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	91
Kombinieren der Methoden – nur Geduld!	92

Kapitel 3

Von Folgen und Reihen

93

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	93
Folgen aneinanderreihen	93
Reihen summieren	96
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	99
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	99
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	100
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	102
Quotienten- und Wurzelkriterium	105
Alternierende Reihen	108
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	108
Leibniz und das Kriterium für alternierende Reihen	109
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	112
Eine erste spezielle Reihenart, die Potenzreihen	114
Potenzreihen (er)kennen	114
Konvergenzbereich von Potenzreihen	115
Rechnen Sie mit Potenzreihen	117
Eine zweite spezielle Reihenart, die Taylorreihen	117

Kapitel 4

Eindimensionale Integration

119

Das bestimmte Integral – Flächen berechnen	119
Stammfunktionen suchen – rückwärts Ableiten	121
Flächenfunktionen beschreiben	122
Achtung Tusch: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	122
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	124
Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	127
Umkehrregeln für Stammfunktionen	127
Genial einfach: Raten und Prüfen	128
Die Substitutionsmethode	129
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	131
Partielle Integration: Teile und Herrsche!	132
Wählen Sie weise!	134
Partielle Integration: Immer wieder dasselbe!	136
Im Kreis gelaufen und doch am Ziel	136

Mathematik der Physik für Dummies

Integrale mit Sinus und Kosinus	137
Fall 1: Die Potenz vom Sinus ist ungerade und positiv	137
Fall 2: Die Potenz vom Kosinus ist ungerade und positiv	138
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade aber nicht negativ	138
Integrieren mit dem A-B-C der Partialbrüche	139
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	140
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	141
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	142
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	142
Integrale rationaler Funktionen von Sinus und Kosinus	143
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	144
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	144
Bogenlängen bestimmen	147
Oberflächen von einfachen Rotationskörpern bestimmen	149

Teil II

Lineare Algebra

151

Kapitel 5

Die Grundlagen: Vektorräume und lineare Gleichungssysteme

153

Vektoren erleben	153
Vektoren veranschaulichen	155
Mit Vektoren anschaulich rechnen	156
Mit Vektoren rechnen	157
Betrag eines Vektors berechnen	160
Das Skalarprodukt von Vektoren berechnen	161
Schöne Vektorraumteilmengen: Untervektorräume bestimmen	164
Vektoren und ihre Koordinaten bestimmen	166
Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	169
Arten von Linearen Gleichungssystemen	170
Homogene Gleichungssysteme	171
Inhomogene Gleichungssysteme	171
Überbestimmte Gleichungssysteme	172
Unterbestimmte Gleichungssysteme	172
Quadratische Gleichungssysteme	173
Nicht lösbare Gleichungssysteme	174
Graphische Lösungsansätze für LGS	174

Kapitel 6

Überleben in der Welt der Matrizen 175

Was Matrizen eigentlich wirklich sind	175
Addition von Matrizen	176
Skalarmultiplikation von Matrizen	176
Multiplikation von Matrizen	177
Matrizen in Produktionsprozessen	178
Transponierte und symmetrische Matrizen	180
Keine Angst vor inversen Matrizen	180
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	181
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	182
Der Rang von Matrizen	186
Matrizen invertieren in der Praxis	188
Kriterien für die Lösbarkeit von homogenen Gleichungssystemen	189
Kriterien für die Lösbarkeit von inhomogenen Gleichungssystemen	190
Matrizen und lineare Abbildungen	190
Lineare Abbildungen an Beispielen	191
Matrizen als lineare Abbildungen	192
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie	192
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis	193
Lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen	195
Matrizen und ihre Determinanten	196
Determinanten von 2×2 -Matrizen	196
Determinanten von 3×3 -Matrizen	197
Determinanten von allgemeinen Matrizen	197
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	200
Die Cramersche Regel	201
Die Inversen mittels der Adjunktenformel berechnen	203
Flächen und Volumina mittels Determinanten berechnen	205
Kreuzprodukt von Vektoren	206

Kapitel 7

Das Matrizen-Finale: Hauptachsentransformationen und euklidische Vektorräume 209

Basistransformation	209
Auf den Maßstab kommt es an!	210
Geben Sie mir Ihre Koordinaten!	211
Matrixdarstellung bei unterschiedlichen Basen	212
Basistransformationsmatrizen	214
Überzeugende Diagramme	215
Eigenwerte und Eigenvektoren	217
Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren?	217
Eigenwerte einer Matrix berechnen	218
Eigenvektoren einer Matrix berechnen	219
Eigenräume finden und analysieren	221

Mathematik der Physik für Dummies

Matrizen diagonalisieren	221
Drehungen und Spiegelungen	226
Drehungen in der Ebene	226
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene	228
Spiegelungen in der Ebene	229
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene	231
Drehungen im dreidimensionalen Raum	233
Mit Skalarprodukten messen können	236
Starten mit dem Standard-Skalarprodukt	237
Die allgemeinen Skalarprodukte	239
Die Norm als Längenbegriff verstehen	240
Wichtige Eigenschaften der Norm	240
Alles Senkrecht? – Orthogonalität erwünscht	241
Den Öffnungswinkel zwischen Vektoren (er)kennen	241
Allgemeine euklidische Vektorräume untersuchen	242
Orthogonale Vektoren allgemein beschreiben	243
Orthogonalsysteme und orthogonale Basen	243
Orthonormale Systeme und orthonormale Basen	244

Teil III

Komplexe Analysis, Fourieranalysis und Differentialgleichungen

247

Kapitel 8

Nicht reell aber real – die komplexen Zahlen

249

Was komplexe Zahlen wirklich sind	249
Komplexe Rechenoperationen	251
Die komplexe Addition	251
Die komplexe Multiplikation	251
Die Konjugierte einer komplexen Zahl	252
Die komplexe Division	252
Zusammenhänge zwischen den komplexen Operationen	253
Komplexe quadratische Gleichungen	253
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen	255
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	256
Der Betrag einer komplexen Zahl	256
Einmal Polarkoordinaten und zurück	257
Umwandlung in Polarkoordinaten aus Koordinaten	257
Umwandlung in Koordinaten aus Polarkoordinaten	258
Komplexe Potenzen und Wurzeln	258
Anwendungen komplexer Zahlen	260

Kapitel 9	
Funktionentheorie: Komplexe Funktionen	263
Tusch bitte: Holomorphe Funktionen	263
Komplexe versus reelle Differenzierbarkeit	267
Elementare komplexe Funktionen	268
Komplexe Exponentialfunktion	268
Komplexe Logarithmusfunktion	268
Komplexe trigonometrische Funktionen	269
Nicht über isolierte Singularitäten stolpern	270
Noch mehr Reihen: die Laurentreihen	271
(Fast) Keine Angst vor den Residuen	273
Komplexe Kurvenintegrale berechnen	273
Integrale mittels Parametrisierungen lösen	274
Integrale mittels Stammfunktionen lösen	275
Integrale mittels Residuensatz lösen	275
Integrale mittels Cauchyscher Integralformeln lösen	276
Praktische Anwendung der komplexen auf reelle Integrale	277
Kapitel 10	
Fourierreihen und -integrale	279
Periodische Funktionen erkennen und erschaffen	279
Der periodische Fall: Fourierreihen	281
Die komplexe Form der Fourierreihe	285
Der nicht-periodische Fall: Fouriertransformation	286
Praktische Berechnung der Fouriertransformierten	288
Anwendung der Fourieranalyse – kurzgefasst	289
Kapitel 11	
Gewöhnliche Differentialgleichungen	291
Einführende Gedanken zu Differentialgleichungen	291
Mit Isoklinen zur Lösung	293
Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit	295
Einfache Spezialfälle von Differentialgleichungen	296
Der einfachste Fall: $y' = f(x)$	296
Der Fall: $y' = f(x) \cdot g(y)$ – Trennung der Variablen	297
Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	298
Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	298
Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	299
Praktische Lösungsmethode: Variation der Konstanten	301
Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung	302
Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	303
Inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	306
Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	307

Mathematik der Physik für Dummies

Äquivalenz einer Differentialgleichung n -ter Ordnung mit einem System erster Ordnung	309
Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung lösen	309
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	310
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	311
Spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung	312
Anwendungen in der Schwingungslehre	314

Teil IV

Mehrdimensionale Analysis

315

Kapitel 12

Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler

317

Funktionen mehrerer Variabler graphisch darstellen	317
Mit Schnitten und Niveau zum Erfolg	321
Schnitte von Graphen	321
Höhen- und Niveaulinien von Graphen	322
Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler	324
Partielle Ableitungen – auch hier ein Kinderspiel	326
Unabhängiges Pärchen: Partielle Ableitungen und Stetigkeit	328
Tangentialebenen als Tangenten-Alternative	329
Volles Programm: Totale Differenzierbarkeit	329
Gewünschte Zugabe: Totales Differential	330
Rechenregeln des Ableitens für Funktionen mehrerer Variabler	331
Implizite Funktionen differenzieren können	333
Höhere Ableitungen: Hilfe durch den Satz von Schwarz	334
Kurvendiskussion für Funktionen mehrerer Variabler	336
Kritische Punkte von Funktionen in höheren Dimensionen	336
Hinreichende Kriterien für Extrema und Sattelpunkte	337
Hinreichende Kriterien für Funktionen in zwei Variablen	339
Extremwerte unter Nebenbedingungen	341
Nebenbedingung mithilfe des Lagrangeschen Ansatzes lösen	341
Nebenbedingung mithilfe des Einsetzverfahrens lösen	344
Kopf an Kopf Rennen – beide Verfahren im direkten Vergleich	345

Kapitel 13

Mehrdimensionale Integration

349

Flächenintegrale – ein Einstieg	349
Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten verstehen	352
Das Prinzip des Cavalieri – Volumen der Drehkörper	355
Volumenintegrale – der Aufstieg	356

Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel	358
Volumen eines dreidimensionalen Rotationskörpers	360
Das Volumen des Torus auf zwei Arten berechnen	361
Parametrisierung des Torus	362
Volumen des Torus als Rotationskörper	362
Volumen des Torus mithilfe der zweiten Guldinschen Regel	364
Integrierbare Funktionen mehrerer Variabler – der Gipfel	365
Mit feinsten (Quader-)Rasterung zum Ziel kommen	365
Endlich Gebiete erkennen	366
Offene und (weg-)zusammenhängende Mengen	367
Integrale überzeugend definieren und verstehen	369
Substitution durch Transformation	370

Kapitel 14

Vektoranalysis in drei Dimensionen

373

Skalar- und Vektorfelder	373
Keine Angst vor Differentialoperatoren	375
Gradient eines Skalarfeldes	376
Divergenz eines Vektorfeldes	376
Rotation eines Vektorfeldes	377
Rechenregeln für Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace und Nabla	379
Das übersichtliche Nabla-Kalkül	380
Langsam durch Kurven und ihre Integrale	381
Kurven in der Ebene und im Raum	381
Kurven und ihre (Bogen-)Länge	384
Massen, Schwerpunkte und Oberflächen rotierender Kurven	386
Die Oberfläche des Torus auf zwei Arten berechnen	388
Skalare Kurvenintegrale – der Länge nach integrieren	389
Vektorielle Kurvenintegrale – gut für die Zirkulation	390
Wegunabhängigkeit von Gradientenfeldern	391
Integrale über geschlossenen Kurven	392
Integrabilitätsbedingung für Gradientenfelder	393
Oberflächlich durch den Raum	395
Flächen im dreidimensionalen Raum	395
Massen und Schwerpunkte von Flächen im Raum	397
Flächen orientieren – Außenseiten bestimmen	397
Skalare Oberflächenintegrale – Oberflächen berechnen	399
Vektorielle Oberflächenintegrale – im Fluss stehen	399
Den Fluss am Kreiskegel schrittweise berechnen	401
Formeln von Gauß, Stokes, Green und Maxwell	404
Gaußscher Integralsatz – der erste Höhepunkt	404
Stokesscher Integralsatz – der zweite Höhepunkt	405
Greensche Formeln – in Kürze und Würze	409
Maxwellgleichungen – kurz und knapp!	409

Teil V

Der Top-Ten-Teil

411

Kapitel 15

Mehr als zehn wichtige Formeln

413

Wichtiger Grenzwert	413
Wichtiger Mittelwertsatz	413
Wichtiger Taylorreihenansatz	413
Wichtiger Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	413
Wichtiger Betrag eines Vektors	414
Wichtiger Dimensionssatz für lineare Abbildungen	414
Wichtiges Orthonormalisierungsverfahren	414
Wichtige komplexe Wurzeln	414
Wichtiger Residuensatz	415
Wichtige Fouriertransformation	415
Wichtige Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung	415
Wichtige Hessematrix	415
Wichtige Integrale über Gebieten	416
Wichtige Sätze von Gauß und Stokes	416
Bonusrunde: Wichtige Gleichung	416

Kapitel 16

Zehn interessante Ansätze der Physik

417

Lorentz und die relativen Geschwindigkeiten	417
Dopplers Effekte	419
Keplers Planetengesetze	419
Galileis Fallgesetz	419
Newtons Trägheitsgesetz	420
Maxwell und seine Gleichungen	420
Plancks Wirkung	420
Schrödingers Gleichung	421
Heisenbergsche Unschärfe	421
Einsteins $E=mc^2$ und seine spezielle Theorie zur Relativität	422
Bonusrunde: Einsteins allgemeine Relativitätstheorie	422

Stichwortverzeichnis

424