Spektraltheorie singulärer indefiniter Sturm-Liouville-Operatoren

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Friedrich M. Philipp

Von der Fakultät II – Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation.

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Stefan Felsner
Berichter: Prof. Dr. Jussi Behrndt
Berichter: Prof. Dr. Karl-Heinz Förster
Berichter: Prof. Dr. Carsten Trunk

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 22.02.2011

Berlin 2011
D 83

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Spektral- und Störungstheorie im Kreinraum **7**
1.1 Grundlagen der Operatortheorie im Kreinraum 7
1.2 Störungen definisierbarer Operatoren 17
1.3 Störungen lokal definisierbarer Operatoren 22
1.4 Störungen gleichmäßig positiver Operatoren 30
1.5 Randtripel 35

2 Singuläre indefinite Sturm-Liouville-Operatoren **45**
2.1 Grundlegende Definitionen 45
2.2 Der Fall eines singulären Endpunktes 52
2.3 Der Fall zweier singulärer Endpunkte 58

3 Sturm-Liouville-Operatoren mit periodischen Koeffizienten **65**
3.1 Multiplikation mit einer Schar selbstadjungierter Operatoren . . . 65
3.2 Die Gelfandtransformation 74
3.3 Die Operatoren $A(t)$ und die Floquet-Diskriminante 80
3.4 Der maximale Operator auf $\mathbb{R}$ 85

Danksagung **91**

Literatur **93**

Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir Sturm-Liouville-Differentialausdrücke der Form

$$\ell = \frac{1}{w}\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q\right) \tag{0.1}$$

mit reellwertigen und lokal integrierbaren Funktionen w, p^{-1} und q auf einem Intervall (a, b). Dabei seien $w(x) \neq 0$ und $p(x) > 0$ f.ü. auf (a, b).

Solche Differentialausdrücke werden – ausgehend von Arbeiten von C. Sturm und J. Liouville (siehe [70, 61, 62]) – seit fast 200 Jahren betrachtet. Zunächst wurde dabei ausschließlich der klassische Fall behandelt, in dem die Gewichtsfunktion w positiv ist. Den Beginn der *indefiniten* Sturm-Liouville-Theorie, bei der die Funktion w ihr Vorzeichen wechselt, markiert eine Arbeit von Richardson [67]. In dieser sowie in zahlreichen folgenden Arbeiten anderer Autoren wurde zunächst nur der reguläre Fall untersucht, in dem (a, b) beschränkt ist und $w, p^{-1}, q \in L^1(a, b)$. Dabei betrachtet man Randwertprobleme, bestehend aus der Eigenwertgleichung $\ell(f) = \lambda f$, also

$$-(pf')' + qf = \lambda wf,$$

und selbstadjungierten Randbedingungen bei a und b. Von Interesse sind z. B. die Rieszbasis-Eigenschaft der Eigenfunktionen oder die Lage der Eigenwerte in Abhängigkeit der Randbedingungen. Bereits Richardson bemerkte, dass bei solchen Randwertproblemen – im Gegensatz zum klassischen Fall – auch nichtreelle Eigenwerte auftreten können.

In den 1970er Jahren stellte sich heraus (siehe z. B. [25]), dass *singuläre* indefinite Sturm-Liouville-Probleme besonders effizient mithilfe von Methoden aus der Spektral- und Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren in Räumen mit indefiniter Metrik behandelt werden können. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die in den 1960er Jahren von H. Langer entwickelte Spektraltheorie für definisierbare Operatoren zu nennen (siehe [59]), die bereits auf eine relativ große Klasse singulärer indefiniter Probleme anwendbar ist. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir singuläre indefinite Sturm-Liouville-Operatoren, die im Allgemeinen nicht definisierbar sind, und zeigen, dass sie dennoch in Gebieten der Riemannschen Zahlenkugel die gleichen guten Spektraleigenschaften wie definisierbare Operatoren aufweisen.

Wir betrachten hier hauptsächlich den Fall, in dem der Differentialausdruck ℓ im Grenzpunktfall bei den Endpunkten a und b ist. Im Blickpunkt unseres Interesses stehen dann die Spektraleigenschaften des im gewichteten L^2-Raum $L^2_{|w|}(a, b)$ agierenden Operators A, welcher definiert ist durch

$$Af := \ell(f) = \frac{1}{w}\Big(-(pf')' + qf\Big), \tag{0.2}$$

wobei $f \in \operatorname{dom} A$,

$$\operatorname{dom} A := \{g \in L^2_{|w|}(a,b) : g, pg' \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(a,b),\ \ell(g) \in L^2_{|w|}(a,b)\}.$$

Das Skalarprodukt auf $L^2_{|w|}(a,b)$ ist gegeben durch

$$(f,g) := \int_a^b f\overline{g}|w|\,dx, \qquad f,g \in L^2_w(a,b). \tag{0.3}$$

Im klassischen Fall $w > 0$ ist der Operator A bekanntermaßen selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_{|w|}(a,b)$, und man kann auf die gut entwickelte und leistungsstarke Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum zurückgreifen. Wechselt die Gewichtsfunktion w jedoch ihr Vorzeichen auf (a,b), dann ist der Operator A weder symmetrisch noch selbstadjungiert in $L^2_{|w|}(a,b)$, sondern lediglich selbstadjungiert bezüglich des *indefiniten* Kreinraumproduktes

$$[f,g] := \int_a^b f\overline{g}w\,dx, \qquad f,g \in L^2_w(a,b). \tag{0.4}$$

Für die Spektralanalyse des Operators A aus (0.2) ist es in vielen Situationen sinnvoll, auch den *definiten* Differentialausdruck

$$\tau = \frac{1}{|w|}\left(-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q\right) \tag{0.5}$$

und den ihm zugeordneten Differentialoperator T zu betrachten. Der Operator T ist dann selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_{|w|}(a,b)$, und mit dem Multiplikationsoperator $J = \operatorname{sgn}(w(x))$ gelten die Beziehungen $T := JA$ und

$$[Af,g] = (Tf,g), \quad f,g \in \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} T. \tag{0.6}$$

Obwohl das Spektrum eines selbstadjungierten Operators in einem Kreinraum sehr kompliziert oder arm an Struktur sein kann (siehe Beispiele 1.1 und 2.5), gibt es einige Klassen selbstadjungierter Operatoren, deren Spektraleigenschaften gut bekannt sind. Dazu gehören die *definisierbaren* Operatoren. Ein selbstadjungierter Operator B im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ mit $\rho(B) \neq \varnothing$ heißt definisierbar, wenn es ein reelles Polynom $p \neq 0$ gibt mit $[p(B)f, f] \geq 0$ für alle $f \in \operatorname{dom} p(B)$. Ein definisierbarer Operator hat ähnliche Spektraleigenschaften wie ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum. Sein nichtreelles Spektrum besteht aus einer endlichen Anzahl von Eigenwerten, und auf $\mathbb{R}$ besitzt er eine Spektralfunktion E mit endlich vielen Singularitäten (siehe [59]). Mit Ausnahme einer endlichen Menge reeller Zahlen besitzt jeder reelle Punkt λ eine Umgebung $\Delta \subset \mathbb{R}$, so dass entweder $(E(\Delta)\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ oder $(E(\Delta)\mathcal{K}, -[\cdot\,,\cdot])$ ein Hilbertraum ist. Im ersten Fall heißt λ positiven Typs, im zweiten negativen Typs bezüglich B.

Im folgenden nehmen wir an, dass der im Hilbertraum $L^2_{|w|}(a,b)$ selbstadjungierte Differentialoperator $T = JA$ nach unten beschränkt ist. Ist T gleichmäßig positiv, dann ist A wegen (0.6) offenbar definisierbar, und das Spektrum von A ist reell (vgl. auch Satz 1.21). Solche sogenannten *links-definiten* Probleme werden in einer Fülle von Arbeiten in der bestehenden Literatur behandelt. Wir erwähnen hier nur [12, 13, 14, 16] sowie [56, 57, 63] und verweisen den Leser zwecks weiterer Referenzen und einer ausführlichen Behandlung links-definiter Probleme auf [75].

Ist $T \geq 0$, so ist das Spektrum des Operators A reell, sofern die Resolventenmenge von A nichtleer ist. In diesem Fall ist es von besonderem Interesse, ob der Operator A ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator im Hilbertraum ist. Bezüglich dieser Fragestellung seien die Arbeiten [23, 24, 50, 51, 52] erwähnt. Beispielsweise wird in [23] bewiesen, dass der maximale Operator bezüglich $\operatorname{sgn}(x)\frac{d^2}{dx^2}$ in $L^2(\mathbb{R})$ ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator im Hilbertraum ist.

Auch im Fall $\min \sigma_{\text{ess}}(T) > 0$ lässt sich zeigen, dass der Operator A definisierbar ist (siehe Satz 1.24). Insbesondere ist dann $\rho(A)$ nichtleer, und die (endlich vielen) nichtreellen Eigenwerte von A haben endliche algebraische Vielfachheiten (siehe auch [55, Theorem 1.2]). Dieser Fall wird beispielsweise in [7, 10, 15, 22] betrachtet.

Das oben bereits genannte Beispiel 1.1 zeigt, dass es im Fall $\min \sigma_{\text{ess}}(T) \leq 0$ zusätzlicher Annahmen bedarf, um eine reiche Struktur des Spektrums von A zu erhalten. Unter der Annahme $\mu := \min \sigma_{\text{ess}}(T) \leq 0$ betrachten wir in dieser Arbeit die folgenden zwei Fälle:

(i) Es gibt $a', b' \in (a,b)$, so dass die Gewichtsfunktion w auf jeweils (a,a') und (b',b) ihr Vorzeichen nicht wechselt;

(ii) Es ist $(a,b) = \mathbb{R}$, und die Funktionen w, p und q sind periodisch mit derselben Periode.

Ziel ist es, möglichst allgemeingültige Aussagen über das Spektrum des Differentialoperators A in diesen beiden Fällen zu treffen. Von besonderem Interesse sind dabei sowohl das Verhalten des nichtreellen Spektrums von A als auch die Verteilung der positiven und negativen Quadrate des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]$ aus (0.4) auf die Spektralräume von A bezüglich des reellen Spektrums.

Im Fall (i) erhält man durch Anwendung der Glasmannschen Zerlegungsmethode eine orthogonale Summe $\widetilde{A}$ dreier Differentialoperatoren, die jeweils mit ℓ auf den Intervallen (a,a'), (a',b') und (b',b) assoziiert sind. Mithilfe der Resultate aus [22] für reguläre indefinite Sturm-Liouville-Operatoren ist nun nicht schwer zu sehen, dass der Operator $\widetilde{A}$ über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$ definisierbar ist – dass sich $\widetilde{A}$ also für jede $\mathbb{C}$-offene Umgebung $\mathcal{U}$ des Intervalls $[\mu, -\mu]$ in die direkte Summe eines beschränkten Operators mit Spektrum in $\overline{\mathcal{U}}$ und eines definisierbaren Operators

mit Spektrum in $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ zerlegen lässt. Da der Operator $\widetilde{A}$ eine endlichdimensionale Störung von A ist, impliziert ein Störungssatz aus [4], dass der Operator A ebenfalls über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$ definisierbar ist, wenn nur seine Resolventenmenge nichtleer ist. Der Nachweis von $\rho(A) \neq \varnothing$ ist also wesentlich für die starke Aussage, dass der Operator A über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$ definisierbar ist, und es gelingt uns mithilfe der Weylfunktionen gewisser Randtripel, diesen zu erbringen. Aus den Spektraleigenschaften von $\widetilde{A}$ folgt zusätzlich, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass $(-\infty, -r)$ negativen Typs und (r, ∞) positiven Typs bezüglich des singulären indefiniten Sturm-Liouville-Operators A ist. Wir bemerken, dass dieselben Resultate in [5] unter einer zusätzlichen Voraussetzung erzielt wurden. Im Fall $a' = b'$ wurde $\rho(A) \neq \varnothing$ bereits in [50] gezeigt (siehe auch [49, Proposition 3.11]). Speziell für $w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ und $p = 1$ sind die o.g. Ergebnisse enthalten in [53].

Der Fall (ii) wurde in der bestehenden Literatur bisher nur in den Fällen $w > 0$ (siehe z. B. [73]) und $T \geq 0$ betrachtet (siehe [26] und [63]). Das Spektrum des Operators A ist dann reell und hat eine sogenannte „Bandstruktur“, d. h. es besteht aus kompakten Intervallen, die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden. Wir kommen hier völlig ohne Bedingungen an T aus und zeigen, dass die Resolventenmenge des periodischen Sturm-Liouville-Operators A stets nichtleer ist, dass A keine Eigenwerte hat, dass das nichtreelle Spektrum von A aus analytischen Kurven besteht und dass das reelle Spektrum eine Bandstruktur aufweist. Ein solches Spektralbild ist bekannt für Schrödinger-Operatoren auf $\mathbb{R}$ mit komplexwertigen $\mathcal{PT}$-symmetrischen periodischen Potentialen (siehe z.B. [11, 18, 69, 38]). Während sich das nichtreelle Spektrum solcher Schrödinger-Operatoren aber an unendlich vielen Stellen gegen die reelle Achse häufen kann (wie in [11] und [69] für das Potential $q(x) = i \sin(x)$ bewiesen), zeigen wir, dass es im Spektrum des Operators A nur endlich viele solcher Häufungspunkte gibt. Desweiteren beweisen wir, dass es wie im Fall (i) ein $r > 0$ gibt, so dass $(-\infty, -r)$ negativen Typs und (r, ∞) positiven Typs bezüglich A ist. Unter einer zusätzlichen Bedingung an die Funktionen w und p können wir zudem zeigen, dass der Operator A über einer Umgebung von ∞ definisierbar ist. Insbesondere ist das nichtreelle Spektrum von A in diesem Fall beschränkt.

Die vorliegende Arbeit besteht aus einem abstrakten Teil (Abschnitt 1) und einem angewandten Teil (Abschnitte 2 und 3), in dem die Ergebnisse aus dem ersten Abschnitt auf indefinite Sturm-Liouville-Operatoren angewandt werden. Im folgenden gehen wir näher auf die Inhalte der einzelnen Abschnitte ein.

Nach einer kurzen Einführung in die Operatortheorie in Kreinräumen in Unterabschnitt 1.1 beweisen wir in den drei darauffolgenden Unterabschnitten jeweils einen Satz aus dem Gebiet der Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren in Kreinräumen. Der erste dieser drei Sätze ist bereits in der Arbeit [1] veröffentlicht und besagt, dass eine endlichdimensionale Störung eines definisierbaren Operators ebenfalls definisierbar ist. Dabei nennen wir einen linearen Operator T eine

endlichdimensionale Störung des linearen Operators S, wenn der Schnitt $S \cap T$ endliche Kodimension in S (und dann auch in T) hat. In dieser Form verallgemeinert der Satz ein Resultat aus [48]. In Abschnitt 1.3 wird gezeigt, dass eine endlichdimensionale Störung einer orthogonalen Summe eines fundamental reduzierbaren Operators und eines Operators mit endlich vielen negativen Quadraten unter gewissen Bedingungen lokal definisierbar ist. Auch dieser Satz ist bereits veröffentlicht (siehe [8]). Diese beiden Störungssätze finden Verwendung in Abschnitt 2 bei der Behandlung des indefiniten Sturm-Liouville-Operators A im Fall (i). Den dritten Störungssatz wiederum wenden wir in Abschnitt 3 auf den Operator A im Fall (ii) an. Er sagt aus, dass eine beschränkte Störung eines gleichmäßig positiven Operators im Kreinraum, der ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator im Hilbertraum ist, definisierbar ist über einer Umgebung von ∞. Da in den Beweisen der zentralen Resultate in Abschnitt 2 intensiv mit Randtripeln gearbeitet wird, wird der Leser im Unterabschnitt 1.5 kurz in das Konzept der Randtripel eingeführt, welches einen abstrakten Rahmen für die Erweiterungstheorie symmetrischer Operatoren in Hilbert- und Kreinräumen darstellt (siehe z. B. [28], [30], [40]).

In Abschnitt 2 studieren wir die Spektraleigenschaften des singulären indefiniten Sturm-Liouville-Operators A aus (0.2) im Fall (i). Dort lassen wir auch zu, dass der definite Sturm-Liouville-Operator $T = JA$ nicht nach unten beschränkt ist. Nach einer ausführlichen Einführung in die Theorie der indefiniten Sturm-Liouville-Operatoren in Unterabschnitt 2.1 werden in Unterabschnitt 2.2 zunächst die selbstadjungierten Realisierungen von ℓ auf $[a', b)$ betrachtet. Unter anderem wird bewiesen, dass diese über $\mathbb{C}$ definisierbar sind. Wie oben bereits angedeutet, ist dabei wesentlich, dass die Resolventenmenge des betrachteten Operators nichtleer ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil an, wählen selbstadjungierte Realisierungen von ℓ auf $[a', b']$ und $[b', b)$ und beweisen, dass die Summe ihrer Weylfunktionen verschwindet. Zusammen mit einem Satz aus Unterabschnitt 1.5 folgt daraus, dass die selbstadjungierte Realisierung von ℓ auf (b', b) nach oben und unten beschränkt ist. Dies ist für definite Sturm-Liouville-Operatoren jedoch unmöglich.

Der zentrale Satz des Unterabschnitts 2.3 besteht aus einigen notwendigen Bedingungen für den Fall, dass die Resolventenmenge des Operators A leer ist. Mit diesem und dem Störungssatz aus Unterabschnitt 1.3 können wir u.a. zeigen, dass im Falle der Halbbeschränktheit von T die Resolventenmenge von A nichtleer ist und dass A über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$ definisierbar ist (siehe Satz 2.14).

In Abschnitt 3 behandeln wir den Fall (ii). Die Periode der Funktionen w, p und q sei $a > 0$. In Unterabschnitt 3.2 führen wir die mit ℓ auf $[0, a]$ assoziierten regulären Sturm-Liouville-Operatoren $A(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, ein, die durch die

Randbedingungen

$$f(a) = e^{it} f(0) \quad \text{und} \quad (pf')(a) = e^{it}(pf')(0) \tag{0.7}$$

definiert sind, und zeigen, dass der singuläre indefinite Sturm-Liouville-Operator A unitär äquivalent ist zu dem Multiplikationsoperator mit der Schar der Operatoren $A(t)$. In Unterabschnitt 3.1 definieren und untersuchen wir daher ganz allgemein den Multiplikationsoperator B mit einer Schar selbstadjungierter Operatoren $B(t)$ in einem Kreinraum $\mathcal{K}'$, wobei t ein kompaktes Intervall $\mathcal{I}$ durchläuft. Der Operator B agiert im Hilbertraum $\mathcal{K} := L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}')$, welcher in der Literatur bisweilen auch als das direkte Integral über $\mathcal{I}$ mit konstanter Faser $\mathcal{K}'$ bezeichnet wird (siehe z.B. [66, Abschnitt XIII.16]). Dieser wird auf natürliche Weise zu einem Kreinraum, in welchem der Operator B symmetrisch ist. Unter einer Bedingung, die im konkreten Fall der Differentialoperatoren $A(t)$ erfüllt ist, wird gezeigt, dass der Operator B selbstadjungiert ist in $\mathcal{K}$ und dass dessen Spektrum gerade die Vereinigung der Spektren der Operatoren $B(t)$ ist. Als Hauptergebnis des Unterabschnitts 3.1 zeigen wir, dass eine Menge genau dann positiven (negativen) Typs bezüglich B ist, wenn sie positiven (bzw. negativen) Typs bezüglich aller Operatoren $B(t)$ ist. Da die Spektren der $A(t)$ disjunkt sind, gelten also

$$\sigma(A) = \bigcup_{t\in[-\pi,\pi]} \sigma(A(t)) \quad \text{und} \quad \sigma_\pm(A) = \bigcup_{t\in[-\pi,\pi]} \sigma_\pm(A(t)), \tag{0.8}$$

wobei $\sigma_\pm$ das Spektrum positiven bzw. negativen Typs bezeichnet.

Ein weiteres Hilfsmittel bei der Spektralanalyse von A ist die sogenannte Floquetdiskriminante – eine ganze Funktion, in der die Spektraleigenschaften von A verschlüsselt sind. Mit ihrer Hilfe zeigen wir, dass die Resolventenmenge des Operators A stets nichtleer ist und dass das Spektrum von A aus analytischen Kurven besteht. Im dritten Unterabschnitt untersuchen wir diese Funktion genauer. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden dann zusammen mit (0.8) im Beweis des ersten Hauptresultates von Unterabschnitt 3.4 verwendet, welches besagt, dass ein $r > 0$ existiert, so dass $(-\infty, -r)$ negativen Typs und (r, ∞) positiven Typs bezüglich A ist. Zum Abschluss der Arbeit verwenden wir das Störungsresultat aus Unterabschnitt 1.4 und einen Satz aus [22], um zu zeigen, dass der Operator A unter einer gewissen Voraussetzung an die Funktionen w und p sogar definisierbar ist über einer Umgebung von ∞. Insbesondere folgt daraus die Beschränktheit des nichtreellen Spektrums von A in diesem Fall.

1 Spektral- und Störungstheorie im Kreinraum

In diesem Abschnitt beweisen wir drei Sätze aus dem Bereich der Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren in Kreinräumen. Zunächst definieren wir in Unterabschnitt 1.1 die in dieser Arbeit relevanten Klassen von Operatoren und geben einen zusammenfassenden Überblick über deren Eigenschaften. In Unterabschnitt 1.2 zeigen wir, dass die Definisierbarkeit eines selbstadjungierten Operators im Kreinraum stabil ist unter endlichdimensionalen Störungen. Das Hauptergebnis des dritten Unterabschnittes besagt, dass eine endlichdimensionale Störung einer orthogonalen Summe eines fundamental zerlegbaren Operators und eines Operators mit endlich vielen negativen Quadraten unter gewissen Bedingungen lokal definisierbar ist. Gegenstand des letzten Unterabschnittes sind beschränkte Störungen gleichmäßig positiver Operatoren in Kreinräumen. Wir zeigen darin, dass jede beschränkte Störung eines gleichmäßig positiven Operators über einer Umgebung von ∞ definisierbar ist, wenn der Punkt ∞ kein singulärer kritischer Punkt des gleichmäßig positiven Operators ist.

1.1 Grundlagen der Operatortheorie im Kreinraum

Ein *Innenproduktraum* ist ein Paar $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$, bestehend aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathcal{K}$ und einem *inneren Produkt* (d. h. einer hermiteschen Sesquilinearform) $[\cdot\,,\cdot]$ auf $\mathcal{K}$. Ein Innenproduktraum $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ heißt *Kreinraum*, falls der Vektorraum $\mathcal{K}$ eine Zerlegung

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dot{+} \mathcal{K}_- \tag{1.1}$$

mit Hilberträumen $(\mathcal{K}_+, [\cdot\,,\cdot])$ und $(\mathcal{K}_-, -[\cdot\,,\cdot])$ gestattet, die bezüglich des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]$ aufeinander senkrecht stehen:

$$[f_+, f_-] = 0 \quad \text{für alle } f_+ \in \mathcal{K}_+ \text{ und } f_- \in \mathcal{K}_-.$$

Dabei und im folgenden bezeichne das Symbol $\dot{+}$ die direkte Summe. Der Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ heißt *Pontrjaginraum* mit endlich vielen positiven (negativen) Quadraten, wenn $\mathcal{K}_+$ (bzw. $\mathcal{K}_-$) endlichdimensional ist.

Mit den Projektionen P_+ und P_- auf $\mathcal{K}_+$ bzw. $\mathcal{K}_-$ bezüglich der Zerlegung (1.1) definieren wir den Operator $J := P_+ - P_-$. Es ist leicht einzusehen, dass der Innenproduktraum $(\mathcal{K}, [J\cdot, \cdot])$ dann ein Hilbertraum ist. Die dadurch definierte Hilbertraumtopologie auf $\mathcal{K}$ is unabhängig von der Zerlegung (1.1), siehe [2]. Der zugehörige Operator $J = P_+ - P_-$ heißt *Fundamentalsymmetrie*.

In diesem Abschnitt seien $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ stets ein Kreinraum und J eine Fundamentalsymmetrie in $\mathcal{K}$. Diese induziert das Hilbertraum-Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot) := [J\cdot, \cdot]$ auf $\mathcal{K}$. Für einen dicht definierten linearen Operator T in $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit

T^* den zu T adjungierten Operator bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot\,,\cdot)$. Es gilt dann

$$J = J^* = J^{-1}.$$

Für eine Menge $M \subset \mathcal{K}$ ist der zu M orthogonale Raum bezüglich des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]$ definiert durch

$$M^{[\perp]} := \{g \in \mathcal{K} : [f,g] = 0 \text{ für alle } f \in M\}.$$

Offenbar gilt $M^{[\perp]} = (JM)^\perp = JM^\perp$, wobei $\perp$ das Orthogonalkomplement bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot\,,\cdot)$ bezeichne. Die Menge $M^{[\perp]}$ ist folglich ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{K}$.

Ein Vektor $f \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ heißt *positiv* (*negativ, nichtpositiv, nichtnegativ*), wenn der jeweilige Begriff auf den Wert $[f,f] \in \mathbb{R}$ zutrifft. Ist $[f,f] = 0$, dann heißt der Vektor f *neutral*. Ein Unterraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{K}$ heißt positiv (negativ, nichtpositiv, nichtnegativ, neutral), wenn der jeweilige Begriff für alle Vektoren $f \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$ zutrifft. Den neutralen Unterraum $\mathcal{M}^\circ := \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]}$ nennt man den *isotropen Teil* von $\mathcal{M}$. Zu einem abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{K}$ existiert stets eine Zerlegung

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{M}_- \,[\dot{+}]\, \mathcal{M}^\circ \tag{1.2}$$

mit einem positiven abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}_+$ und einem negativen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}_-$, siehe [17]. Eine solche Zerlegung heißt *Fundamentalzerlegung* (von $\mathcal{M}$). Das Symbol $[\dot{+}]$ bezeichnet dabei die direkte $[\cdot\,,\cdot]$-orthogonale Summe. Wie man leicht zeigt, sind die Dimensionen von $\mathcal{M}_+$ und $\mathcal{M}_-$ unabhängig von der Zerlegung (1.2) und hängen nur von $\mathcal{M}$ ab. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

$$\kappa_+(\mathcal{M}) := \dim \mathcal{M}_+, \quad \kappa_-(\mathcal{M}) := \dim \mathcal{M}_-, \quad \kappa_0(\mathcal{M}) := \dim \mathcal{M}^\circ.$$

Das Tripel $\{\kappa_+(\mathcal{M}), \kappa_-(\mathcal{M}), \kappa_0(\mathcal{M})\}$ heißt die *Signatur* von $\mathcal{M}$.

Es sei T ein dicht definierter linearer Operator in $\mathcal{K}$. Der bezüglich des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]$ zu T adjungierte Operator wird definiert durch

$$T^+ := JT^*J.$$

Es gilt dann

$$[Tf, g] = [f, T^+g] \quad \text{für alle } f \in \operatorname{dom} T,\ g \in \operatorname{dom} T^+.$$

Wie im Hilbertraumfall zeigt man die folgende Beziehung:

$$(\operatorname{ran} T)^{[\perp]} = \ker T^+. \tag{1.3}$$

Ist T abgeschlossen, dann ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild $\operatorname{ran} T$ abgeschlossen genau dann, wenn $\operatorname{ran} T^+ = J \operatorname{ran} T^*$ abgeschlossen ist. Demzufolge gilt

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^+) \tag{1.4}$$

für abgeschlossenes T.

Wir nennen einen linearen Operator T in $\mathcal{K}$ *symmetrisch*, falls $[Tf, g] = [f, Tg]$ für alle $f, g \in \operatorname{dom} T$ gilt. Ist T dicht definiert, dann ist dies gleichwertig zu $T \subset T^+$. Falls sogar $T = T^+$ gilt, so heißt T *selbstadjungiert*. Es ist leicht zu sehen, dass T genau dann symmetrisch (selbstadjungiert) ist, wenn JT symmetrisch (bzw. selbstadjungiert) im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,, \cdot))$ ist. Folglich besitzt ein symmetrischer Operator T in $\mathcal{K}$ genau dann selbstadjungierte Operatorerweiterungen, wenn die Defektzahlen des (Hilbertraum-)symmetrischen Operators JT übereinstimmen.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die spektralen Eigenschaften selbstadjungierter Operatoren im Kreinraum im Allgemeinen sehr kompliziert oder auch arm an Struktur sein können. Tatsächlich gibt es selbstadjungierte Operatoren, deren Spektrum leer ist oder auch die gesamte komplexe Ebene umfasst (siehe auch Beispiel 2.5 für einen Differentialoperator dieser Art).

Beispiel 1.1. Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und T ein unbeschränkter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$. Im Hilbertraum $\mathfrak{H} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ definieren wir die Operatoren

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\operatorname{dom} B = \operatorname{dom} T \oplus \mathcal{H}$. Der Operator J ist eine Fundamentalsymmetrie im Kreinraum $\mathcal{K} := (\mathfrak{H}, (J\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}})$. Da B selbstadjungiert ist in $\mathfrak{H}$, ist $A := JB$ selbstadjungiert in $\mathcal{K}$, und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\operatorname{ran}(A - \lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda f \\ Tf - \lambda g \end{pmatrix} : f \in \operatorname{dom} T,\, g \in \mathcal{H} \right\} \subset \operatorname{dom} T \oplus \mathcal{H}.$$

Also ist der Operator $A - \lambda$ für kein $\lambda \in \mathbb{C}$ surjektiv, und es folgt $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Mit $\overline{\mathbb{C}}$ ($\overline{\mathbb{R}}$) bezeichnen wir im folgenden die Einpunkt-Kompaktifizierung der komplexen Ebene (bzw. der reellen Achse). Wir sagen, eine Menge $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ sei *symmetrisch bezüglich der rellen Achse*, wenn $M = M^*$, wobei

$$M^* := \{\overline{\lambda} : \lambda \in M\}.$$

Die stärkste Aussage, die im Allgemeinen über das Spektrum eines selbstadjungierten Operators im Kreinraum gemacht werden kann, ist, dass sein Spektrum symmetrisch bezüglich der rellen Achse ist:

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T).$$

Dies folgt direkt aus (1.4).

Mit $\mathcal{B}(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten und auf ganz X definierten Operatoren, die von einem Banachraum X in einen Banachraum Y abbilden. Zudem setzen wir $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X,X)$. Das *erweiterte Spektrum* $\tilde{\sigma}(T)$ eines abgeschlossenen Operators T in $\mathcal{K}$ ist definiert durch $\tilde{\sigma}(T) := \sigma(T)$, falls $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, und $\tilde{\sigma}(T) := \sigma(T) \cup \{\infty\}$ andernfalls. Das Komplement $\tilde{\rho}(T) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}(T)$ nennen wir die *erweiterte Resolventenmenge* von T. Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *approximativer Eigenwert* von T, falls es eine Folge $(f_n) \subset \operatorname{dom} T$ gibt mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(T-\lambda)f_n \to 0$ für $n \to \infty$. Der Punkt ∞ heißt *approximativer Eigenwert* von T, falls $T \notin \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Die Menge aller approximativen Eigenwerte von T in $\overline{\mathbb{C}}$ (in $\mathbb{C}$) wird mit $\tilde{\sigma}_{ap}(T)$ (bzw. $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$) bezeichnet und wird *approximatives Punktspektrum* von T genannt. Die in den Komplementen $r(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ap}}(T)$ und $\tilde{r}(T) := \overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\sigma}_{ap}(T)$ enthaltenen Punkte heißen *Punkte regulären Typs* von T.

Ist T selbstadjungiert im Kreinraum $\mathcal{K}$, dann gehören alle reellen Spektralpunkte von T zu $\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$. Ist nämlich $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{R}$ kein Eigenwert von T, dann folgt

$$\overline{\operatorname{ran}(T-\lambda)} = \ker(T-\lambda)^{[\perp]} = \mathcal{K},$$

also $\lambda \in \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.

Definition 1.2. Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$. Ein Punkt $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ heißt *Spektralpunkt positiven* (*negativen*) *Typs* von A, falls für jede Folge $(f_n) \subset \operatorname{dom} A$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(A-\lambda)f_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] > 0 \quad \big(\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} [f_n, f_n] < 0\big).$$

Ist $\infty \in \tilde{\sigma}(A)$, dann heißt ∞ *Spektralpunkt positiven* (*negativen*) *Typs* von A, falls für jede Folge $(f_n) \subset \operatorname{dom} A$ mit $\|Af_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} [Af_n, Af_n] > 0 \quad \big(\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} [Af_n, Af_n] < 0\big).$$

Die Menge aller Spektralpunkte positiven (negativen) Typs wollen wir mit $\sigma_+(A)$ (bzw. $\sigma_-(A)$) bezeichnen. Eine Menge $\Delta \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt positiven (negativen) Typs bezüglich A, falls $\Delta \cap \tilde{\sigma}(A) \subset \sigma_+(A)$ (bzw. $\Delta \cap \tilde{\sigma}(A) \subset \sigma_-(A)$) gilt. Die Menge Δ heißt *definiten Typs* bezüglich A, falls sie positiven oder negativen Typs bezüglich A ist.

Es sei A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{K}$. Die Mengen $\sigma_+(A)$ und $\sigma_-(A)$ sind dann in $\overline{\mathbb{R}}$ enthalten. Ist nämlich $\lambda \in \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$ und $(f_n) \subset \operatorname{dom} A$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(A-\lambda)f_n \to 0$ für $n \to \infty$, dann folgt

$$(\operatorname{Im}\lambda)[f_n, f_n] = \operatorname{Im}[(\lambda - A)f_n, f_n] \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

also $\operatorname{Im}\lambda = 0$, da $\liminf_{n\to\infty}[f_n, f_n] > 0$ oder $\limsup_{n\to\infty}[f_n, f_n] < 0$. Desweiteren sind $\sigma_+(A)$ und $\sigma_-(A)$ offen in $\tilde{\sigma}(A)$, siehe z. B. [3, Lemma 2]. Daraus folgt sofort, dass sich das nichtreelle Spektrum von A nicht gegen $\sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$ häufen kann.

Die Spektralpunkte positiven und negativen Typs spielen eine wichtige Rolle bei der Spektralanalyse selbstadjungierter Operatoren im Kreinraum. Ist beispielsweise $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ eine zusammenhängende Menge positiven Typs bezüglich A, dann besitzt der Operator A auf Δ eine *lokale Spektralfunktion*. Eine solche ist eine Abbildung E von dem System $\mathfrak{B}_0(\Delta)$ der Borel-messbaren Teilmengen von Δ, deren Abschluss noch in Δ liegt, in die Menge der selbstadjungierten Projektionen in $\mathcal{K}$ mit den folgenden Eigenschaften ($\delta, \delta_1, \delta_2 \in \mathfrak{B}_0(\Delta)$):

(a) Sind $\delta_1, \delta_2, \ldots \in \mathfrak{B}_0(\Delta)$ paarweise disjunkt und $\delta = \bigcup_1^\infty \delta_k \in \mathfrak{B}_0(\Delta)$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{K}$:
$$E(\delta)f = \sum_{k=1}^{\infty} E(\delta_k)f.$$

(b) $E(\delta_1 \cap \delta_2) = E(\delta_1)E(\delta_2)$.

(c) $E(\delta)$ kommutiert mit jedem beschränkten Operator, der mit der Resolvente von A kommutiert.

(d) $\sigma(A \restriction E(\delta)\mathcal{K}) \subset \overline{\sigma(A) \cap \delta}$.

(e) $\sigma(A \restriction (I - E(\delta))\mathcal{K}) \subset \overline{\sigma(A) \setminus \delta}$.

Die Positivität spiegelt sich in der folgenden Eigenschaft wieder:

(f) $(E(\delta)\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ ist ein Hilbertraum.

Für jedes $\delta \in \mathfrak{B}_0(\Delta)$ gibt es also eine Zerlegung
$$\mathcal{K} = E(\delta)\mathcal{K}\,[\dot{+}]\,(I - E(\delta))\mathcal{K},$$
bestehend aus A-invarianten Unterräumen, so dass $A \restriction E(\delta)\mathcal{K}$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum ist. Mit anderen Worten: der Operator A agiert lokal wie ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum. Ist Δ negativen Typs bezüglich A, dann ist Δ positiven Typs bezüglich A im Kreinraum $(\mathcal{K}, -[\cdot\,,\cdot])$, und alles gilt genau wie oben – mit der Ausnahme, dass in (f) $[\cdot\,,\cdot]$ durch $-[\cdot\,,\cdot]$ zu ersetzen ist. Für Beweise der obigen Aussagen verweisen wir auf die Arbeiten [60] und [46].

Die folgende Definition sowie der Großteil der unten aufgeführten Begriffe und Aussagen sind [59] entnommen.

Definition 1.3. Ein selbstadjungierter Operator A in $\mathcal{K}$ heißt *definisierbar*, falls $\rho(A) \neq \varnothing$ und falls es ein Polynom $p \neq 0$ mit rellen Koeffizienten gibt, so dass für alle $f \in \operatorname{dom} p(A)$ gilt: $[p(A)f, f] \geq 0$. Ein solches Polynom p heißt *definisierend* für den Operator A.

Definisierbare Operatoren haben besonders gute Spektraleigenschaften. Wie man leicht zeigt (siehe [43, Lemma 1]) besteht das nichtreelle Spektrum eines definisierbaren Operators A aus endlich vielen Punkten, die Pole seiner Resolvente sind und gleichzeitig Nullstellen eines jeden definisierenden Polynoms. Desweiteren ist jeder reelle Spektralpunkt λ von A, für den es ein definisierendes Polynom p von A gibt mit $p(\lambda) > 0$ ($p(\lambda) < 0$) ein Spektralpunkt positiven (bzw. negativen) Typs von A. Diejenigen reellen Spektralpunkte von A, die Nullstelle eines jeden definisierenden Polynoms sind, nennt man die (endlichen) *kritischen Punkte* von A. Ist $\infty \in \tilde{\sigma}(A)$, so heißt der Punkt ∞ *kritischer Punkt* von A, wenn er nicht definiten Typs bezüglich A ist. Es lässt sich zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn sich $\sigma(A) \cap \mathbb{R}^+$ und $\sigma(A) \cap \mathbb{R}^-$ gegen ∞ häufen und es ein definisierendes Polynom für A mit ungeradem Grad gibt. Mit Ausnahme dieser endlich vielen kritischen Punkte besteht $\tilde{\sigma}(A) \cap \overline{\mathbb{R}}$ also nur aus Spektralpunkten definiten Typs. Insbesondere besitzt der Operator A eine Spektralfunktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ mit endlich vielen Singularitäten. Dies ist einerseits bewiesen in [59], folgt aber andererseits auch fast direkt aus den oben genannten Eigenschaften der lokalen Spektralfunktionen auf den Intervallen (bzw. zusammenhängenden Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$) definiten Typs. Die Spektralfunktion ist für alle Borelmengen in $\overline{\mathbb{R}}$ definiert, deren Randpunkte keine kritischen Punkte von A sind.

Die kritischen Punkte eines definisierbaren Operators A in $\mathcal{K}$ können in verschiedener Art und Weise klassifiziert werden. Es sei E die Spektralfunktion des Operators A. Zunächst unterscheidet man zwischen singulären und regulären kritischen Punkten. Der kritische Punkt $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ heißt *regulär*, wenn es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von λ in $\overline{\mathbb{R}}$ und ein $k > 0$ gibt, so dass $\|E(\Delta)\| \leq k$ für alle $\Delta \subset \mathcal{U}$ gilt, für die $E(\Delta)$ definiert ist. Ist λ ein regulärer kritischer Punkt von A, dann ist $E(\Delta)$ auch für solche Borelmengen Δ definiert, die λ als Randpunkt haben. Ein kritischer Punkt heißt *singulär*, wenn er nicht regulär ist.

Ein kritischer Punkt $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ von A heißt *wesentlich*, wenn $\kappa_+(E(\Delta)\mathcal{K})$ und $\kappa_-(E(\Delta)\mathcal{K})$ für jede $\overline{\mathbb{R}}$-offene Umgebung Δ von λ unendlich sind. In [3] wird unter anderem gezeigt, dass ein kritischer Punkt eines definisierbaren Operators genau dann nicht wesentlich ist, wenn er vom Typ π_+ oder vom Typ π_- gemäß der folgenden Definition ist.

Definition 1.4. Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$. Ein Punkt $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(A)$ heißt *Spektralpunkt vom Typ* π_+ (π_-) von A, falls es einen Unterraum $\mathcal{K}_\lambda$ mit endlicher Kodimension in $\mathcal{K}$ gibt, so dass für jede Folge $(f_n) \subset$

$\mathcal{K}_\lambda \cap \operatorname{dom} A$ mit $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(A-\lambda)f_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] > 0 \quad \big(\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} [f_n, f_n] < 0\big).$$

Ist $\infty \in \tilde{\sigma}(A)$, dann heißt ∞ *Spektralpunkt vom Typ* π_+ (π_-) von A, falls es einen Unterraum $\mathcal{K}_\infty$ mit endlicher Kodimension in $\mathcal{K}$ gibt, so dass für jede Folge $(f_n) \subset \mathcal{K}_\lambda \cap \operatorname{dom} A$ mit $\|Af_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} [Af_n, Af_n] > 0 \quad \big(\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} [Af_n, Af_n] < 0\big).$$

Die Menge aller Spektralpunkte vom Typ π_+ (π_-) wird mit $\sigma_{\pi_+}(A)$ (bzw. $\sigma_{\pi_-}(A)$) bezeichnet. Eine Menge $\Delta \subset \overline{\mathbb{C}}$ heißt vom Typ π_+ (π_-) bezüglich A, falls $\Delta \cap \tilde{\sigma}_{ap}(A) \subset \sigma_{\pi_+}(A)$ (bzw. $\Delta \cap \tilde{\sigma}_{ap}(A) \subset \sigma_{\pi_-}(A)$) gilt.

Man beachte, dass der Operator A in Definition 1.4 nicht notwendig definisierbar ist. Es lässt sich zeigen (siehe [9] und [3]), dass ein selbstadjungierter Operator A auf einem Intervall vom Typ π_+ oder π_- eine lokale Spektralfunktion besitzt, falls ein Punkt des Intervalls nicht im Innern von $\sigma(A)$ liegt. Diese Spektralfunktion hat ähnliche Eigenschaften wie die auf Intervallen definiten Typs. Die zugehörigen Spektralräume sind dann Pontrjaginräume.

Die einfachsten definisierbaren Operatoren sind die nichtnegativen Operatoren. Wir sagen, der selbstadjungierte Operator A in $\mathcal{K}$ sei *nichtnegativ*, falls $\rho(A) \neq \varnothing$ und $[Af, f] \geq 0$ gilt für alle $f \in \operatorname{dom} A$. Offenbar ist ein nichtnegativer Operator definisierbar mit definisierendem Polynom $p(\lambda) = \lambda$. Nach den obigen Ausführungen hat A demnach kein nichtreelles Spektrum, $(0, +\infty)$ ist positiven Typs, und $(-\infty, 0)$ ist negativen Typs bezüglich A. Die einzig möglichen kritischen Punkte von A sind 0 und ∞.

Eine größere Klasse definisierbarer Operatoren bilden die Operatoren mit *endlich vielen negativen Quadraten*. Ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{K}$ hat $\kappa \in \mathbb{N}$ negative Quadrate, falls $\rho(A) \neq \varnothing$ gilt und wenn das innere Produkt $[A\cdot, \cdot]$ (definiert auf $\operatorname{dom} A \times \operatorname{dom} A$) nur endlich viele negative Quadrate besitzt, d. h. jeder Unterraum von $\operatorname{dom} A$, der bezüglich des inneren Produktes $[A\cdot, \cdot]$ negativ ist, hat höchstens die Dimension κ, und es gibt einen solchen Unterraum, dessen Dimension genau κ ist. Dass Operatoren dieser Art definisierbar sind, wird z. B. in [59, I.3, Example (c)] gezeigt. Es gibt dann ein definisierendes Polynom der Form $p(\lambda) = \lambda q(\lambda)\overline{q}(\lambda)$, wobei q ein monisches Polynom ist vom Grad $\deg(q) \leq \kappa$. In der folgenden Proposition fassen wir einige spektrale Eigenschaften eines Operators mit κ negativen Quadraten zusammen. Einen Beweis findet man in [10].

Proposition 1.5. *Es sei A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{K}$ mit κ negativen Quadraten. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Das nichtreelle Spektrum von A besteht aus höchstens κ Paaren $\{\mu_i, \overline{\mu_i}\}$, $\mu_i \in \mathbb{C}^+$, von Eigenwerten von A mit endlichdimensionalen algebraischen Eigenräumen.*

(ii) $\sigma(A) \cap (0, \infty) \subset \sigma_{\pi_+}(A)$.

(iii) $\sigma(A) \cap (-\infty, 0) \subset \sigma_{\pi_-}(A)$.

(iv) *Bezeichnen wir für einen Eigenwert λ von A die Signatur der Einschränkung des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]$ auf den zugehörigen algebraischen Eigenraum mit $\{\kappa_-(\lambda), \kappa_0(\lambda), \kappa_+(\lambda)\}$, dann gilt*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(A) \\ \lambda < 0}} \big(\kappa_+(\lambda) + \kappa_0(\lambda)\big) + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(A) \\ \lambda > 0}} \big(\kappa_-(\lambda) + \kappa_0(\lambda)\big) + \sum_i \kappa_0(\mu_i) \le \kappa.$$

Im Falle $0 \notin \sigma_p(A)$ gilt Gleichheit.

Bemerkung 1.6. Da ein Spektralpunkt vom Typ π_+ (π_-) eines selbstadjungierten Operators A in $\mathcal{K}$, der nicht positiven (bzw. negativen) Typs ist, stets ein Eigenwert von A mit einem zugehörigen nichtpositiven (bzw. nichtnegativen) Eigenvektor ist (siehe [3]), folgt aus den Aussagen (ii)–(iv) in Proposition 1.5, dass das Spektrum eines Operators mit κ negativen Quadraten in $(0, \infty)$ (bzw. $(-\infty, 0)$) mit Ausnahme endlich vieler Punkte positiven Typs (bzw. negativen Typs) ist.

Das folgende Lemma gibt im Wesentlichen die Aussagen von [22, Lemma 1.1] und den dort folgenden Bemerkungen wieder und zeigt, dass die Voraussetzung $\rho(A) \neq \varnothing$ in der Definition der Operatoren mit endlich vielen negativen Quadraten stark abgeschwächt werden kann.

Lemma 1.7. *Es sei A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{K}$, so dass das innere Produkt $[A\cdot, \cdot]$ endlich viele negative Quadrate hat. Ist* $\operatorname{ran}(A - \lambda)$ *für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ abgeschlossen, dann gilt $\rho(A) \neq \varnothing$.*

Beweis. Das innere Produkt $[A\cdot, \cdot]$ habe κ negative Quadrate. Wir zeigen zunächst, dass es in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{C}^+$ höchstens κ Eigenwerte von A (geometrische Vielfachheiten mitgezählt) geben kann. Dazu nehmen wir das Gegenteil an. Es seien also $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\kappa+1} \in \mathbb{C}^+$ Eigenwerte von A, und $f_1, \ldots, f_{\kappa+1}$ seien zugehörige Eigenvektoren, so dass $\operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_{\kappa+1}\}$ linear unabhängig ist. Da $\operatorname{dom} A$ dicht liegt in $\mathcal{K}$, impliziert [17, Lemma I.10.4], dass es Vektoren $h_1, \ldots, h_{\kappa+1} \in \operatorname{dom} A$ gibt, so dass $[f_i, h_j] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, \kappa + 1$. Setzen wir $g_i := \lambda_i^{-1} f_i$, so erhalten wir $[Ag_i, h_j] = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, \kappa + 1$. Folglich ist

$$\mathcal{L} := \Big(\operatorname{span}\{g_1, \ldots, g_{\kappa+1}, h_1, \ldots, h_{\kappa+1}\}, [A\cdot, \cdot] \Big)$$

ein endlichdimensionaler nichtentarteter Innenproduktraum, der den neutralen Unterraum $\operatorname{span}\{g_1, \dots, g_{\kappa+1}\}$ enthält. Demnach enthält $\mathcal{L}$ auch einen $(\kappa+1)$-dimensionalen negativen Unterraum. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass die Form $[A\cdot,\cdot]$ genau κ negative Quadrate hat.

Genauso zeigt man, dass A höchstens κ Eigenwerte in der unteren Halbebene $\mathbb{C}^-$ haben kann. Es sei nun $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{ran}(A-\lambda)$ abgeschlossen ist. Es ist

$$\big(\operatorname{ran}(A-\lambda)\big)^\perp = \ker(A^* - \overline{\lambda}) = J\ker(A^*J - \overline{\lambda}J) = J\ker(A-\overline{\lambda}),$$

und dieser Raum ist nach den obigen Ausführungen endlichdimensional. Also ist $A-\lambda$ ein Fredholmoperator. Nach [54, Chapter IV, Theorem 5.31] gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von λ, so dass $A-\mu$ für alle $\mu \in \mathcal{U}\setminus\{\lambda\}$ ein Fredholmoperator ist mit trivialem Kern. Es folgt $\mathcal{U}\setminus\{\lambda\} \subset r(A)$. Da aber auch

$$\operatorname{ran}(A-\overline{\lambda}) = \operatorname{ran}(A^+ - \overline{\lambda}) = J\operatorname{ran}((A^*-\overline{\lambda})J) = J\operatorname{ran}(A^*-\overline{\lambda})$$

nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild abgeschlossen ist, folgt ebenso die Existenz einer Umgebung $\mathcal{V}$ von $\overline{\lambda}$, so dass $\mathcal{V}\setminus\{\overline{\lambda}\} \subset r(A)$. Wegen der Selbstadjungiertheit von A folgt schließlich $(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}^*)\setminus\{\lambda\} \subset \rho(A)$, wobei $\mathcal{V}^* = \{\overline{\mu} : \mu \in \mathcal{V}\}$. □

In Unterabschnitt 1.2 wird gezeigt, dass die Eigenschaft der Definisierbarkeit stabil ist unter endlichdimensionalen Störungen. Unter kompakten Störungen geht die Definisierbarkeit aber im Allgemeinen verloren. Dennoch bleiben die guten Spektraleigenschaften unter Umständen lokal erhalten, siehe z. B. [44, 45]. Dies führte zu dem Begriff der lokalen Definisierbarkeit. Die folgende Definition ist in äquivalenter Form in [46] zu finden.

Definition 1.8. Es sei Ω eine zusammenhängende offene Menge in $\overline{\mathbb{C}}$ mit $\Omega\cap\overline{\mathbb{R}} \neq \varnothing$, die symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist, so dass $\Omega\cap\mathbb{C}^+$ und $\Omega\cap\mathbb{C}^-$ einfach zusammenhängend sind. Ein selbstadjungierter Operator A in $\mathcal{K}$ heißt *definisierbar über* Ω, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(i) Die Menge $\sigma(A)\cap(\Omega\setminus\overline{\mathbb{R}})$ hat keinen Häufungspunkt in Ω und besteht aus Polen der Resolvente von A.

(ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge Δ von $\Omega\cap\overline{\mathbb{R}}$ existieren eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von Δ in $\overline{\mathbb{C}}$ und Zahlen $m \geq 1$, $M > 0$, so dass

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq M\,\frac{(1+|\lambda|)^{2m-2}}{|\operatorname{Im}\lambda|^m} \tag{1.5}$$

für alle $\lambda \in \mathcal{U}\setminus\overline{\mathbb{R}}$ gilt.

(iii) Zu jedem Punkt $\lambda \in \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ gibt es eine offene Umgebung I_λ in $\overline{\mathbb{R}}$, so dass beide Komponenten von $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ definiten Typs bezüglich A sind.

Diejenigen Punkte aus $\tilde{\sigma}(A) \cap \Omega$, die nicht definiten Typs sind, nennen wir die *kritischen Punkte* von A (in Ω).

Nach den oben genannten Spektraleigenschaften definisierbarer Operatoren liegt die Vermutung nahe, dass ein definisierbarer Operator definisierbar über $\overline{\mathbb{C}}$ ist. Tatsächlich ist dies der Fall, und in [46, Theorem 3.6] wird bewiesen, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 1.9. *Ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{K}$ ist genau dann definisierbar, wenn er definisierbar ist über $\overline{\mathbb{C}}$.*

Ein über Ω definisierbarer Operator A besitzt eine lokale Spektralfunktion E auf $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$ mit Singularitäten (in $\overline{\mathbb{R}}$), die sich höchstens zum Rand von Ω häufen können (siehe [46]). Der Operator $E(\Delta)$ ist definiert für alle Borel-messbaren Teilmengen Δ von $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}}$, deren Randpunkte keine kritischen Punkte von A (in Ω) sind. Natürlich kann $E(\Delta)$ gemäß dem Riesz-Dunford'schen Spektralkalkül auf alle Borelmengen $\Delta \subset \Omega$ erweitert werden, deren Abschluss in Ω liegt und so dass $E(\Delta \cap \overline{\mathbb{R}})$ definiert ist. Das System dieser Teilmengen von Ω bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(A, \Omega)$. Für jede Menge $\Delta \in \mathfrak{B}(A, \Omega)$ ist $E(\Delta)$ eine Projektion, und ist $\Delta = \Delta^*$, dann ist diese selbstadjungiert, und die Einschränkung $A \restriction E(\Delta)\mathcal{K}$ ist definisierbar mit Spektrum in $\overline{\Delta}$. Ein kritischer Punkt von A in $\Delta = \Delta^* \in \mathfrak{B}(A, \Omega)$ heißt regulär (singulär, wesentlich), wenn er ein regulärer (bzw. singulärer, wesentlicher) kritischer Punkt des definisierbaren Operators $A \restriction E(\Delta)\mathcal{K}$ ist. Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Definition unabhängig ist von Δ.

Für Anwendungen ist die folgende Charakterisierung des reellen Spektrums der Typen π_+ und π_- eines lokal definisierbaren Operators von Vorteil.

Lemma 1.10. *Es sei A ein über Ω definisierbarer Operator. Ein Punkt $\lambda_0 \in \sigma(A) \cap \Omega \cap \mathbb{R}$ ist genau dann ein Spektralpunkt vom Typ π_+ (π_-) von A, wenn es ein offenes Intervall Δ um λ_0 gibt, so dass $\Delta \setminus \{\lambda_0\}$ positiven (bzw. negativen) Typs ist und $\ker(A - \lambda_0) = \mathcal{H} \dot{+} \mathcal{N}$ gilt mit einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, [\cdot\,, \cdot])$ (bzw. $(\mathcal{H}, -[\cdot\,, \cdot])$) und $\dim \mathcal{N} < \infty$.*

Beweis. Es sei $\lambda_0 \in \sigma_{\pi_+}(A)$. Dann folgt die Behauptung aus den Theoremen 18 und 26 in [3]. Umgekehrt seien die Bedingung erfüllt und $\lambda_0 \notin \sigma_+(A)$. Wir dürfen $\Delta \in \mathfrak{B}(A, \Omega)$ annehmen. Der Operator $A \restriction E(\Delta)\mathcal{K}$ ist dann beschränkt und definisierbar mit Spektrum in $\overline{\Delta}$ und dem einzigen kritischen Punkt λ_0. Dieser ist nach [59, Proposition 5.4] ein Eigenwert. Es sei $\ker(A - \lambda_0) = \mathcal{N}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{N}_- \,[\dot{+}]\, \mathcal{N}_0$ eine Fundamentalzerlegung von $\ker(A - \lambda_0)$. Nach Voraussetzung ist $(\mathcal{N}_+, [\cdot\,, \cdot])$ ein

Hilbertraum, und $\mathcal{N}_- \dot{+} \mathcal{N}_0$ ist endlichdimensional. Mit $\mathcal{L}$ bezeichnen wir den algebraischen Eigenraum von A bezüglich λ_0. Da jede Jordankette von A bezüglich λ_0 wegen der Resolventenbedingung in Definition 1.8 endlich ist und der Eigenvektor einer solchen in $\mathcal{N}_0$ liegt, folgt $\mathcal{L} = \mathcal{N}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{N}_- \,[\dot{+}]\, \mathcal{L}'$ mit einem endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{L}'$. Es sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{L}_- \,[\dot{+}]\, \mathcal{L}^\circ$ eine Fundamentalzerlegung von $\mathcal{L}$. Dann ist $(\mathcal{L}_+, [\cdot\,,\cdot])$ ein Hilbertraum, und $\mathcal{L}_- \dot{+} \mathcal{L}^\circ$ ist endlichdimensional. Nach [17, Lemma I.10.4] existiert ein endlichdimensionaler Unterraum $\mathcal{P} \subset E(\Delta)\mathcal{K}$, so dass $\mathcal{L}^\circ \dot{+} \mathcal{P}$ nichtentartet ist. Mit dem Kreinraum $\mathcal{K}' := (\mathcal{L} \dot{+} \mathcal{P})^{[\perp]}$ gilt

$$E(\Delta)\mathcal{K} = \mathcal{L}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{L}_- \,[\dot{+}]\, (\mathcal{L}^\circ \dot{+} \mathcal{P}) \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}'.$$

Offenbar ist $\mathcal{L}^{[\perp]} \cap E(\Delta)\mathcal{K} = \mathcal{L}^\circ \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}'$. Nach [59, Proposition 5.2] ist dieser Raum nichtnegativ. Also ist $(\mathcal{K}', [\cdot\,,\cdot])$ ein Hilbertraum und $(E(\Delta)\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ somit ein Pontrjaginraum. Die Behauptung folgt nun aus [3, Theorem 26]. □

1.2 Störungen definisierbarer Operatoren

In diesem Unterabschnitt betrachten wir endlichdimensionale selbstadjungierte Störungen definisierbarer Operatoren. Das Hauptergebnis ist der folgende, bereits in [1] veröffentlichte Satz, welcher zeigt, dass – auch bei allgemeinster Auslegung des Terminus' „endlichdimensionale Störung" – die Definisierbarkeit erhalten bleibt.

Satz 1.11. *Es seien A_1 und A_2 selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{K}$ mit der Eigenschaft* $\dim(A_1/(A_1 \cap A_2)) < \infty$. *Dann gilt: A_1 ist genau dann definisierbar, wenn A_2 definisierbar ist.*

Um Satz 1.11 zu beweisen, werden wir einige Hilfssätze benötigen.

Lemma 1.12. *Es sei T ein abgeschlossener Operator im Banachraum X mit $r(T) \neq \varnothing$. Dann ist $p(T)$ für jedes Polynom p ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion nach $d := \deg(p)$, dem Grad des Polynoms p. Für $d \in \{0, 1\}$ ist nichts zu zeigen. Es gelte die Behauptung für ein $d \geq 1$. Das Polynom p habe den Grad $d+1$. Es sei $\alpha \in r(T)$. Dann ist $\ker(T-\alpha) = \{0\}$, und das Bild $\operatorname{ran}(T-\alpha)$ ist abgeschlossen. Die Inverse $(T-\alpha)^{-1}$ ist also ein beschränkter Operator auf $\operatorname{ran}(T-\alpha)$. Es gibt nun ein Polynom q mit $\deg(q) = d$, so dass

$$p(\lambda) - p(\alpha) = (\lambda - \alpha) q(\lambda)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Es seien $f, g \in X$ und $(f_n) \subset \operatorname{dom} T^{d+1}$ eine Folge mit $f_n \to f$ und $p(T)f_n \to g$ für $n \to \infty$. Dann gilt also $(T-\alpha)q(T)f_n \to g - p(\alpha)f$ für $n \to \infty$. Da $\operatorname{ran}(T-\alpha)$ abgeschlossen ist, ist $g - p(\alpha)f \in \operatorname{ran}(T-\alpha)$, und es folgt

$$q(T)f_n \to (T-\alpha)^{-1}(g - p(\alpha)f)$$

für $n \to \infty$. Nach Induktionsannahme ist $q(T)$ abgeschlossen, und wir erhalten $f \in \operatorname{dom} q(T) = \operatorname{dom} T^d$ und $q(T)f = (T-\alpha)^{-1}(g - p(\alpha)f)$. Das wiederum aber impliziert $q(T)f \in \operatorname{dom} T$ (also $f \in \operatorname{dom} T^{d+1}$) und $p(T)f - p(\alpha)f = (T-\alpha)q(T)f = g - p(\alpha)f$, was die Behauptung beweist. □

Es seien X ein Vektorraum und $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Unterräume von X. Nach [58, §7.6] existiert dann ein Unterraum $\mathcal{G} \subset X$ mit

$$X = \mathcal{M} \dotplus \mathcal{G} \quad \text{und} \quad \mathcal{N} = (\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) \dotplus (\mathcal{N} \cap \mathcal{G}). \tag{1.6}$$

Wir nennen die Unterräume $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ *isomorph* (in Zeichen: $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$), falls eine bijektive lineare Abbildung $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ existiert.

Proposition 1.13. *Es seien S und T lineare Operatoren im Vektorraum X mit $S \subset T$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$*

$$\frac{\operatorname{dom} T^n}{\operatorname{dom} S^n} \cong \frac{\operatorname{dom} T^k \cap \operatorname{ran} T^{n-k}}{\operatorname{dom} S^k \cap \operatorname{ran} S^{n-k}} \times \frac{\ker T^{n-k}}{\ker S^{n-k}}.$$

Beweis. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Wir setzen

$$\mathcal{Y} := \frac{\operatorname{dom} T^k \cap \operatorname{ran} T^{n-k}}{\operatorname{dom} S^k \cap \operatorname{ran} S^{n-k}} \quad \text{und} \quad \mathcal{Z} := \frac{\ker T^{n-k}}{\ker S^{n-k}}$$

und bezeichnen die Äquivalenzklassen in $\mathcal{Y}$ und $\mathcal{Z}$ mit jeweils $[\,\cdot\,]_{\mathcal{Y}}$ und $[\,\cdot\,]_{\mathcal{Z}}$. Wegen

$$\ker S^{n-k} = \ker T^{n-k} \cap \operatorname{dom} S^n$$

existiert nach (1.6) ein Unterraum $\mathcal{G} \subset \operatorname{dom} T^n$ mit

$$\operatorname{dom} T^n = \operatorname{dom} S^n \dotplus \mathcal{G} \tag{1.7}$$

$$\ker T^{n-k} = \ker S^{n-k} \dotplus (\ker T^{n-k} \cap \mathcal{G}). \tag{1.8}$$

Die Projektion in $\operatorname{dom} T^n$ auf $\operatorname{dom} S^n$ bezüglich der Zerlegung (1.7) bezeichnen wir mit Q. Weiterhin wählen wir Projektionen P_S in $\operatorname{dom} S^n$ auf $\ker S^{n-k}$ und $P_{\mathcal{G}}$ in $\mathcal{G}$ auf $\ker T^{n-k} \cap \mathcal{G}$ und definieren $P : \operatorname{dom} T^n \to \operatorname{dom} T^n$ durch

$$Pf := P_S Q f + P_{\mathcal{G}}(f - Qf), \quad f \in \operatorname{dom} T^n.$$

Dann ist P eine Projektion in $\operatorname{dom} T^n$ auf $\ker T^{n-k}$ mit

$$P \operatorname{dom} S^n = \ker S^{n-k}. \tag{1.9}$$

Definiere nun die lineare Abbildung $F : \operatorname{dom} T^n \to \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ durch

$$Ff := \big\{[T^{n-k} f]_{\mathcal{Y}}, [Pf]_{\mathcal{Z}}\big\}, \quad f \in \operatorname{dom} T^n.$$

Im folgenden zeigen wir

$$\ker F = \operatorname{dom} S^n \quad \text{und} \quad \operatorname{ran} F = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}. \tag{1.10}$$

Es sei dazu $f \in \operatorname{dom} T^n$ mit $Ff = 0$. Dann gelten $T^{n-k} f \in \operatorname{dom} S^k \cap \operatorname{ran} S^{n-k}$ und $Pf \in \ker S^{n-k}$. Demnach existiert $h \in \operatorname{dom} S^n$, so dass $T^{n-k} f = S^{n-k} h$, woraus $g := f - h \in \ker T^{n-k}$ folgt. Nach (1.9) ist also

$$g = Pg = Pf - Ph \in \ker S^{n-k},$$

und folglich $f = h + g \in \operatorname{dom} S^n$. Umgekehrt sei $f \in \operatorname{dom} S^n$. Dann gelten

$$T^{n-k} f = S^{n-k} f \in \operatorname{dom} S^k \cap \operatorname{ran} S^{n-k}$$

und $Pf \in \ker S^{n-k}$ (siehe (1.9)), d. h. $Ff = 0$. Um die Surjektivität von F zu sehen, seien $g \in \operatorname{dom} T^k \cap \operatorname{ran} T^{n-k}$ und $h \in \ker T^{n-k}$. Dann existiert $f' \in \operatorname{dom} T^n$ mit $T^{n-k} f' = g$, und für den Vektor $f := f' - Pf' + h$ gelten die Beziehungen $T^{n-k} f = g$ und $Pf = h$. Also folgt $Ff = \{[g]_{\mathcal{Y}}, [h]_{\mathcal{Z}}\}$. Damit ist (1.10) gezeigt, und wir erhalten

$$\frac{\operatorname{dom} T^n}{\operatorname{dom} S^n} = \frac{\operatorname{dom} F}{\ker F} \cong \operatorname{ran} F = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}.$$

□

Lemma 1.14. *Es seien $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1 \subset X$ Unterräume des Vektorraumes X, so dass $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}_1$. Dann gilt*

$$\dim \frac{\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1}{\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{N}_0} \leq \dim \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_0} + \dim \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_0}.$$

Beweis. Wir bezeichnen die Äquivalenzklassen in $(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1)/(\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{N}_0)$, $\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{N}_1/\mathcal{N}_0$ jeweils mit $[\,\cdot\,]_{\mathcal{M}\cap\mathcal{N}}$, $[\,\cdot\,]_{\mathcal{M}}$ und $[\,\cdot\,]_{\mathcal{N}}$. Die Abbildung

$$F : \frac{\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1}{\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{N}_0} \to \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_0} \times \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_0}, \quad F[f]_{\mathcal{M}\cap\mathcal{N}} := ([f]_{\mathcal{M}}, [f]_{\mathcal{N}})$$

ist dann wohldefiniert, linear und injektiv. □

Proposition 1.15. *Es seien S und T lineare Operatoren im Vektorraum X mit $S \subset T$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$*

$$\dim\left(\frac{\operatorname{dom} T^n}{\operatorname{dom} S^n}\right) \leq n \cdot \dim\left(\frac{\operatorname{dom} T}{\operatorname{dom} S}\right). \tag{1.11}$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit Induktion über n. Offenbar gilt (1.11) für $n = 1$. Gilt (1.11) für ein $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir mithilfe von Proposition 1.13 und Lemma 1.14

$$\begin{aligned}
\dim\left(\frac{\operatorname{dom} T^{n+1}}{\operatorname{dom} S^{n+1}}\right) &= \dim\left(\frac{\operatorname{dom} T^n \cap \operatorname{ran} T}{\operatorname{dom} S^n \cap \operatorname{ran} S}\right) + \dim\left(\frac{\ker T}{\ker S}\right) \\
&\leq \dim\left(\frac{\operatorname{dom} T^n}{\operatorname{dom} S^n}\right) + \left[\dim\left(\frac{\operatorname{ran} T}{\operatorname{ran} S}\right) + \dim\left(\frac{\ker T}{\ker S}\right)\right] \\
&\leq (n+1) \cdot \dim\left(\frac{\operatorname{dom} T}{\operatorname{dom} S}\right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die letzte Ungleichung erneut Proposition 1.13 im Fall $k = 0$ und $n = 1$ angewandt. □

Korollar 1.16. *Es seien S und T lineare Abbildungen im Vekorraum X mit $S \subset T$ und $\dim(\operatorname{dom} T/\operatorname{dom} S) < \infty$. Dann gilt $\dim(\operatorname{dom} p(T)/\operatorname{dom} p(S)) < \infty$ für jedes Polynom p.*

Beweis von Satz 1.11. Wir nehmen an, A_1 sei definisierbar, und setzen $S := A_1 \cap A_2$. Es sei $q \neq 0$ ein definisierendes Polynom (mit reellen Koeffizienten) für A_1. Nach [43, Lemma 1] (siehe auch [59]) ist das Spektrum von A_1 bis auf endlich viele Ausnahmepunkte reell, und die nichtreellen Spektralpunkte von A sind Nullstellen von q. Nach dem Spektralabbildungssatz für Polynome, [34, VII.9, Theorem 10], gilt $\sigma(q(A_1)) = q(\sigma(A_1))$, und es folgt

$$\sigma(q(A_1)) \subset \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Wegen $\rho(A_1) \subset r(S)$ (und deshalb $r(S) \neq \varnothing$) ist $q(S)$ nach Lemma 1.12 ein abgeschlossener Operator. Nach Korollar 1.16 gelten

$$\dim(q(A_1)/q(S)) < \infty \quad \text{und} \quad \dim(q(A_2)/q(S)) < \infty. \tag{1.13}$$

Daher ist auch $q(A_2)$ abgeschlossen.

Wir betrachten nun die abgeschlossenen (Hilbertraum-)symmetrischen Operatoren $Jq(S)$ und $Jq(A_2)$. Für alle $f \in \operatorname{dom} q(S)$ gilt $(Jq(S)f, f) = [q(A_1)f, f] \geq 0$. Die Menge $\mathbb{C}\setminus(0,\infty)$ gehört also zur Fredholm-Region von $Jq(S)$, und damit auch

zu der von $Jq(A_2)$, siehe (1.13). Wegen $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset r(Jq(A_2))$ ist $r(Jq(A_2))\cap(-\infty,0)$ nach [54, Chapter IV, Theorem 5.31] nichtleer. Folglich hat $Jq(A_2)$ gleiche Defektzahlen. Diese sind endlich, da die von $Jq(S)$ endlich sind. Der Operator $Jq(A_2)$ besitzt also eine (Hilbertraum-)selbstadjungierte Fortsetzung. Wendet man auf diese den Operator J an, ergibt sich eine selbstadjungierte Fortsetzung T des symmetrischen Operators $q(A_2)$ im Kreinraum $\mathcal{K}$.

Im folgenden zeigen wir, dass die Resolventenmenge von T nichtleer ist. Da die hermitesche Form $[q(S)\cdot,\cdot]$ auf $\operatorname{dom} q(S)$ nichtnegativ ist, hat die ebenfalls hermitesche Form $[T\cdot,\cdot]$ auf $\operatorname{dom} T$ höchstens $n := \dim(\operatorname{dom} T/\operatorname{dom}(q(S)))$ negative Quadrate. Und wegen $\sigma_{\mathrm{ap}}(q(S)) \subset \mathbb{R}$ (siehe (1.12)) ist $\operatorname{ran}(T-\lambda)$ abgeschlossen für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Mit Lemma 1.7 folgt, dass T ein Operator mit höchstens n negativen Quadraten ist und somit definisierbar. Insbesondere gehört die Menge $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ bis auf endlich viele Punkte zu $\rho(T)$.

Angenommen, für jedes $\lambda \in \mathbb{C}^+$ wäre $\lambda \in \sigma_p(A_2)$ oder $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A_2)$. Wegen $\sigma_p(q(A_2)) = q(\sigma_p(A_2))$ implizierte dies $q(\lambda) \in \sigma_p(T)$ oder $\overline{q(\lambda)} = q(\overline{\lambda}) \in \sigma_p(T)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^+$. Da $\sigma_p(T)$ symmetrisch bezüglich der reellen Achse ist, folgte $q(\mathbb{C}^+) \subset \sigma_p(T)$. Aber $\sigma_p(T)$ enthält keine inneren Punkte, so dass sich ein Widerspruch ergibt. Da $\operatorname{ran}(A_2-\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ abgeschlossen ist, existiert demnach ein $\lambda \in \mathbb{C}^+$ mit $\lambda, \overline{\lambda} \in r(A_2)$. Mit der Selbstadjungiertheit von A_2 ergibt sich $\lambda, \overline{\lambda} \in \rho(A_2)$, und insbesondere $\rho(A_2) \neq \varnothing$.

Es sei nun p ein definisierendes Polynom für T. Für $f \in \operatorname{dom}(p\circ q)(A_2)$ gilt dann

$$[(p\circ q)(A_2)f, f] = [p(q(A_2))f, f] = [p(T)f, f] \geq 0.$$

Folglich ist A_2 definisierbar mit dem definisierenden Polynom $p\circ q$. □

Das folgende Korollar wurde bereits 1972 in [48] bewiesen. Hier ist es eine direkte Konsequenz aus Satz 1.11.

Korollar 1.17. *Es seien A_1 und A_2 selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{K}$ mit $\rho(A_1)\cap\rho(A_2) \neq \varnothing$. Desweiteren gelte für ein (und dann für alle) $\lambda \in \rho(A_1)\cap\rho(A_2)$:*

$$\dim \operatorname{ran}\left((A_1-\lambda)^{-1} - (A_2-\lambda)^{-1}\right) < \infty.$$

Dann gilt: A_1 ist genau dann definisierbar, wenn A_2 definisierbar ist.

Auch das nächste Korollar folgt sofort aus Satz 1.11.

Korollar 1.18. *Existiert zu einem abgeschlossenen symmetrischen Operator S im Kreinraum $\mathcal{K}$ eine definisierbare selbstadjungierte Operatorerweiterung A mit definisierendem Polynom p, so dass $\dim(A/S) < \infty$ gilt, dann ist jede selbstadjungierte Operatorerweiterung von S definisierbar mit einem definisierenden Polynom der Form $q\circ p$, q ein Polynom.*

1.3 Störungen lokal definisierbarer Operatoren

In diesem Unterabschnitt beweisen wir, dass eine endlichdimensionale Störung der orthogonalen Summe eines fundamental reduzierbaren Operators und eines Operators mit endlich vielen negativen Quadraten unter gewissen Bedingungen definisierbar ist in einer Umgebung von ∞. Der Großteil dieses Unterabschnittes ist der Arbeit [8] entnommen.

Der im folgenden definierte Begriff der Nichtnegativität in einer Umgebung von ∞ nimmt in der vorliegenden Arbeit – und insbesondere in diesem Unterabschnitt – eine zentrale Rolle ein.

Definition 1.19. Ein im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ selbstadjungierter Operator A heißt *nichtnegativ in einer Umgebung von* ∞, falls er in einer Umgebung Ω (wie in Definition 1.8) von ∞ definisierbar ist, so dass $\Omega \cap (0, \infty)$ positiven Typs und $\Omega \cap (-\infty, 0)$ negativen Typs ist bezüglich A.

Beispielsweise sind Operatoren mit endlich vielen negativen Quadraten nichtnegativ in einer Umgebung von ∞ (siehe Proposition 1.5 und Bemerkung 1.6).

Bei unseren Betrachtungen machen wir Gebrauch von dem folgenden Satz, der in [4] bewiesen ist und eine Verallgemeinerung von Korollar 1.17 darstellt.

Satz 1.20. *Es seien $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Menge wie in* Definition 1.8 *und A_1 und A_2 selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{K}$ mit $\rho(A_1) \cap \rho(A_2) \cap \Omega \neq \varnothing$. Desweiteren gelte für ein (und dann für alle) $\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$:*

$$\dim \operatorname{ran} \left((A_1 - \lambda)^{-1} - (A_2 - \lambda)^{-1} \right) < \infty.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) *A_1 ist definisierbar über Ω genau dann, wenn A_2 über Ω definisierbar ist.*

(b) *Ist A_1 definisierbar über Ω, $\Delta \subset \Omega$ ein Intervall positiven (negativen) Typs bezüglich A_1 und $\mu \in \Omega$ ein Endpunkt von Δ, dann gibt es ein Intervall $\Delta' \subset \Delta$ mit dem Endpunkt μ, welches positiven (bzw. negativen) Typs bezüglich A_2 ist.*

Das Analogon zu Satz 1.11 für lokal definisierbare Operatoren gilt im Allgemeinen nicht. Für ein Gegenbeispiel siehe [4, §3.3].

Wie üblich definieren wir das *wesentliche Spektrum* eines abgeschlossenen Operators T in einem Banachraum durch

$$\sigma_{\text{ess}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ist kein Fredholmoperator}\}.$$

Es sei bemerkt, dass $\sigma_{\text{ess}}(T)$ abgeschlossen ist (siehe [54]).

In diesem Unterabschnitt sei T ein nach unten beschränkter selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot))$, wobei $(\cdot\,,\cdot) = [J\cdot,\cdot]$. Dann ist $A := JT$ selbstadjungiert im Kreinraum $\mathcal{K}$. Im folgenden wollen wir in gegebenen Situationen untersuchen, wie sich die Spektraleigenschaften von T auf die von A auswirken. Dazu definieren wir die Werte

$$\nu(T) := \min \sigma(T) \quad \text{und} \quad \mu(T) := \min \sigma_{\text{ess}}(T).$$

Falls $\sigma_{\text{ess}}(T)$ leer ist, setzen wir $\mu(T) := +\infty$. Offenbar gilt die Beziehung

$$-\infty < \nu(T) \leq \mu(T) \leq +\infty.$$

Der folgende Satz ist eine direkte Konsequenz aus $[Af, f] = (Tf, f)$, $f \in \operatorname{dom} A = \operatorname{dom} T$.

Satz 1.21. *Es sei $\nu(T) > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \{0\} \subset \rho(A)$.

(ii) $(-\infty, 0)$ *ist negativen Typs und* $(0, \infty)$ *ist positiven Typs bezüglich* A.

(iii) A *ist definisierbar mit definisierendem Polynom* $p(\lambda) = \lambda$.

Insbesondere ist A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞.

In der Situation von Satz 1.21 ist also der Nullpunkt in der Resolventenmenge von A enthalten. Eine natürliche Fragestellung besteht nun darin, wie sich die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte von A im Verhältnis zu denen von T verhalten und wie das Verhältnis von

$$\mu^+(A) = \min\big(\sigma_{\text{ess}}(A) \cap (0, \infty)\big) \quad \text{und} \quad \mu^-(A) = \max\big(\sigma_{\text{ess}}(A) \cap (-\infty, 0)\big)$$

(ist $\sigma_{\text{ess}}(A) \cap \mathbb{R}^\pm$ leer, dann setzen wir $\mu^\pm(A) := \pm\infty$) zu $\mu(T)$ ist. Der folgende Satz gibt darüber Aufschluss.

Satz 1.22. *Es seien A und T wie in Satz 1.21. Ferner seien $\lambda_k^+(A)$ $(\lambda_k^-(A))$, $k \in \mathbb{N}$, die in aufsteigender (bzw. absteigender) Reihenfolge und mit Vielfachheiten gezählten Eigenwerte von A in $(0, \mu^+(A))$ (bzw. $(\mu^-(A), 0)$). Existiert der Eigenwert $\lambda_k^\pm(A)$ nicht, dann setzen wir $\lambda_k^\pm(A) := \mu^\pm(A)$. Ebenso zählen wir die Eigenwerte $\lambda_k(T)$ von T in $(0, \mu(T))$ in aufsteigender Reihenfolge. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k^+(A) \geq \lambda_k(T) \quad \text{und} \quad -\lambda_k^-(A) \geq \lambda_k(T).$$

Insbesondere folgt

$$\mu^+(A) \geq \mu(T), \quad -\mu^-(A) \geq \mu(T) \quad \text{und} \quad (-\nu(T), \nu(T)) \subset \rho(A).$$

Beweis. Wir zeigen nur $\lambda_k^+(A) \geq \lambda_k(T)$. Die zweite Ungleichung kann analog bewiesen werden. Es sei $k \in \mathbb{N}$. Falls $\lambda_k^+(A) = \mu^+(A) = +\infty$, dann ist nichts zu zeigen. Es sei also $\lambda_k^+(A) < +\infty$. Wir wählen dann ein $\tau > \lambda_k^+(A)$ und definieren den Unterraum $\mathcal{H} := E_A((0,\tau])\mathcal{K}$, wobei E_A die Spektralfunktion von A bezeichne. Der Innenproduktraum $(\mathcal{H}, [\cdot\,,\cdot])$ ist dann ein in $\operatorname{dom} A$ enthaltener Hilbertraum. Zudem ist $\mathcal{H}$ invariant bezüglich A, $A \restriction \mathcal{H}$ ist selbstadjungiert in $(\mathcal{H}, [\cdot\,,\cdot])$, und $\mathcal{H}$ enthält alle Eigenvektoren bezüglich der Eigenwerte $\lambda_1^+(A), \dots, \lambda_k^+(A)$. Wegen $[Af, f] = (Tf, f)$ und $[f, f] \leq \|f\|^2$ für $f \in \operatorname{dom} A$ gilt also

$$\begin{aligned}
\lambda_k^+(A) &= \min_{\dim N = k,\, N \subset \mathcal{H}} \max_{f \in N \setminus \{0\}} \frac{[Af, f]}{[f, f]} \\
&\geq \min_{\dim N = k,\, N \subset \mathcal{H}} \max_{f \in N \setminus \{0\}} \frac{(Tf, f)}{\|f\|^2} \\
&\geq \min_{\dim N = k,\, N \subset \operatorname{dom} A} \max_{f \in N \setminus \{0\}} \frac{(Tf, f)}{\|f\|^2} \\
&= \lambda_k(T).
\end{aligned}$$

Dabei wurden die wohlbekannten Min-Max-Prinzipien für selbstadjungierte Operatoren im Hilbertraum angewandt, siehe [66, Abschnitt XIII.1]. □

Bemerkung 1.23. Die Aussagen von Satz 1.22 können alternativ auch mithilfe der Resultate aus [71] – angewandt auf A^{-1} bzw. T^{-1} – bewiesen werden.

Wir lockern nun die Voraussetzungen an T und erlauben $\nu(T) = \min \sigma(T) \leq 0$, fordern aber $\mu(T) = \min \sigma_{\mathrm{ess}}(T) > 0$. Dann gilt insbesondere $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$. Also ist auch $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, und es ist sinnvoll $\mu^+(A)$ und $\mu^-(A)$ wie oben zu definieren. Mit E_T bezeichnen wir das Spektralmaß des im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot))$ selbstadjungierten Operators T.

Satz 1.24. *Es sei $\mu(T) > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Das nichtreelle Spektrum von A besteht aus höchstens*

$$\kappa := \dim E_T((-\infty, 0))\mathcal{K} < \infty$$

Paaren von Eigenwerten von A mit endlichen algebraischen Vielfachheiten.

(ii) *$(-\infty, 0)$ ist vom Typ π_- und $(0, \infty)$ ist vom Typ π_+ bezüglich A.*

(iii) *A ist nichtnegativ in einer Umgebung von ∞ und definisierbar mit definisierendem Polynom $p(\lambda) = \lambda q(\lambda)\overline{q(\lambda)}$, wobei q ein monisches Polynom vom Grad $\deg(q) \leq \kappa$ ist.*

(iv) $\mu^+(A) \geq \mu(T)$ *und* $-\mu^-(A) \geq \mu(T)$.

Beweis. Das innere Produkt $[A\cdot,\cdot]$ hat offenbar κ negative Quadrate. Desweiteren ist $A = JT$ ein Fredholmoperator. Folglich (siehe [54]) existiert eine Umgebung $\mathcal{U}$ von 0, so dass $A - \lambda$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}$ ein Fredholmoperator ist. Insbesondere ist $\operatorname{ran}(A - \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}$ abgeschlossen. Mit Lemma 1.7 folgt $\rho(A) \neq \varnothing$, und der Operator A hat κ negative Quadrate. Die Behauptungen (i)–(iii) folgen demnach direkt aus Proposition 1.5. Um die Aussage (iv) zu beweisen, wählen wir ein $\delta \in (0, \mu(T))$ und stellen wir fest, dass die endlichdimensionale Störung

$$\widetilde{T} := E_T((-\infty), \delta]) + TE_T((\delta, \infty))$$

von T selbstadjungiert und gleichmäßig positiv ist. Mit der endlichdimensionalen Störung $\widetilde{A} := J\widetilde{T}$ von A gilt dann aufgrund von Satz 1.22

$$\mu^+(A) = \mu^+(\widetilde{A}) \geq \mu(\widetilde{T}) = \mu(T),$$

und der Satz ist bewiesen. □

Im Hinblick auf die Anwendungen auf indefinite Differentialoperatoren in Abschnitt 2 ist für uns der Fall $\mu(T) \leq 0$ von besonderem Interesse. Das Beispiel 1.1 (dort ist $0 \in \sigma_{\text{ess}}(B)$) zeigt, dass es zusätzlichen Annahmen bedarf, um weitergehende Aussagen über die spektrale Struktur des Operators A machen zu können.

Wir erinnern daran, dass die Fundamentalsymmetrie J in $\mathcal{K}$ eine Fundamentalzerlegung $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_-$ induziert vermittels $\mathcal{K}_\pm := \ker(J \mp I)$. Der folgende Satz stellt das Hauptergebnis dieses Unterabschnitts dar und ist der Arbeit [8] entnommen.

Satz 1.25. *Es sei T ein nach unten beschränkter selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot))$ mit $\mu := \mu(T) \leq 0$. Ferner seien $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{K}_\pm$ und $\mathcal{H}_d$ abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{K}$, so dass*

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_d \tag{1.14}$$

gilt. Desweiteren gebe es Unterräume $\mathcal{G}_i \subset \operatorname{dom} T \cap \mathcal{H}_i$, $i \in \{+, -, d\}$, mit den Eigenschaften

(i) $\dim\big(\operatorname{dom} T/(\mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_d)\big) < \infty$,

(ii) $T\,\mathcal{G}_\pm \subset \mathcal{H}_\pm$, $T\,\mathcal{G}_d \subset \mathcal{H}_d$,

(iii) $\sigma_{\text{ess}}(\overline{T \restriction \mathcal{G}_d}) \cap [\mu, 0] = \varnothing$.

Ist $\rho(A) \neq \varnothing$, dann gelten die folgenden Aussagen für den selbstadjungierten Operator A:

(a) *A ist definisierbar über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$ und nichtnegativ in einer Umgebung von ∞.*

(b) *$(-\infty, \mu)$ ist vom Typ π_- und $(-\mu, \infty)$ ist vom Typ π_+ bezüglich A.*

(c) *Die Menge $\sigma(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ ist beschränkt und besteht aus Eigenwerten von A mit endlichen algebraischen Vielfachheiten und kann sich höchstens nach $[\mu, -\mu]$ häufen.*

Beweis. Der Beweis besteht aus drei Schritten. Im ersten konstruieren wir eine endlichdimensionale selbstadjungierte Störung $\widetilde{A}$ von A, die bezüglich der Zerlegung (1.14) Diagonalgestalt hat. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass die Behauptungen (a)–(c) für $\widetilde{A}$ (anstatt A) gelten. Der Nachweis, dass diese auch für A gelten, wird mithilfe des Störungssatzes 1.20 im dritten Schritt vorgenommen.

Schritt 1: Mit $\widetilde{\mathcal{G}}_i$, $i \in \{+, -, d\}$, bezeichnen wir den Abschluss von $\mathcal{G}_i$ bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_T$ von T. Es ist leicht zu sehen, dass $\widetilde{\mathcal{G}}_i \subset \operatorname{dom} T \cap \mathcal{H}_i$ für $i \in \{+, -, d\}$ gilt und dass (i)–(iii) auch für $\widetilde{\mathcal{G}}_i$ anstatt $\mathcal{G}_i$ gelten (um dieses für (iii) einzusehen, beachte man $\overline{T \restriction \mathcal{G}_d} = T \restriction \widetilde{\mathcal{G}}_d$). Daher dürfen wir annehmen, dass $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_-$, $\mathcal{G}_d$ und auch

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_d$$

abgeschlossen sind in $(\operatorname{dom} T, \|\cdot\|_T)$. Damit und mit (ii) folgt, dass die Operatoren

$$S := T \restriction \mathcal{G}, \quad S_+ := T \restriction \mathcal{G}_+, \quad S_- := T \restriction \mathcal{G}_- \quad \text{und} \quad S_d := T \restriction \mathcal{G}_d,$$

jeweils abgeschlossene (aber nicht zwingend dicht definierte) symmetrische Operatoren in den Hilberträumen $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_d$ (jeweils mit der Einschränkung des Skalarproduktes $(\cdot\,, \cdot)$ ausgestattet) sind. Offenbar ist T eine selbstadjungierte Erweiterung von S. Folglich stimmen die Defektindizes $n_\pm(S) = \dim(\operatorname{ran}(S \pm i))^\perp$ von S überein. Nach Voraussetzung (i) sind sie zudem endlich. Wegen der Abgeschlossenheit von S und der Halbbeschränktheit von T (durch $\nu = \min \sigma(T)$) gilt weiter

$$\mathbb{C} \setminus [\nu, \infty) \subset r(S). \tag{1.15}$$

Bezüglich der Zerlegung (1.14) stellt sich der Operator S als Operatormatrix wie folgt dar:

$$S = \begin{pmatrix} S_+ & 0 & 0 \\ 0 & S_- & 0 \\ 0 & 0 & S_d \end{pmatrix}.$$

Daher gilt $r(S) = r(S_+) \cap r(S_-) \cap r(S_d)$, und aus (1.15) folgt, dass jeder der symmetrischen Operatoren S_+, S_- und S_d übereinstimmende und endliche Defektzahlen hat. Weiter gilt

$$n_\pm(S) = n_\pm(S_+) + n_\pm(S_-) + n_\pm(S_d) = \dim(\operatorname{dom} T / \mathcal{G}). \tag{1.16}$$

Wir wählen nun selbstadjungierte Fortsetzungen T_+, T_- und T_d von jeweils S_+, S_- und S_d (in den Hilberträumen $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_d$). Der Operator

$$\widetilde{T} := \begin{pmatrix} T_+ & 0 & 0 \\ 0 & T_- & 0 \\ 0 & 0 & T_d \end{pmatrix}$$

ist dann eine selbstadjungierte Fortsetzung von S in $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot))$. Da die Operatoren T und $\widetilde{T}$ auf dem Unterraum $\mathcal{G} = \operatorname{dom} S$ offenbar übereinstimmen, folgt mit (1.16) und der Bedingung (i) für alle $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(\widetilde{T})$:

$$\dim \operatorname{ran}\big((T-\lambda)^{-1} - (\widetilde{T}-\lambda)^{-1}\big) \leq n_\pm(S) < \infty. \tag{1.17}$$

Damit gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(T) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\widetilde{T})$ und insbesondere $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(\widetilde{T}) = \mu$. Desweiteren ist $\widetilde{T}$ nach unten beschränkt ([72, Korollar 10.21]).

Aus der Definition von μ und wegen $\dim(T/S) < \infty$ folgt, dass

$$\dim \ker(S-\lambda) < \infty \quad \text{und} \quad \overline{\operatorname{ran}(S-\lambda)} = \operatorname{ran}(S-\lambda) \tag{1.18}$$

für alle $\lambda < \mu$ gilt. Zudem sind die Eigenwerte von S in $[\nu, \mu)$ diskret mit μ als einzigem möglichen Häufungspunkt. Das gilt dann also auch für S_d. Wegen (iii) gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass (1.18) für S_d anstatt S für alle $\lambda \leq \varepsilon$ gilt. Folglich gilt (1.18) für T_d anstatt S und alle $\lambda \leq \varepsilon$. Dies impliziert insbesondere $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_d) > 0$.

Wegen $\mathcal{H}_\pm \subset \mathcal{K}_\pm$ ist $J \restriction \mathcal{H}_\pm = \pm I_{\mathcal{H}_\pm}$, und $\mathcal{H}_+$ und $\mathcal{H}_-$ sind J-invariant. Aus $J = J^*$ folgt dann auch die J-Invarianz von $\mathcal{H}_d = (\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-)^\perp$. Bezüglich der Zerlegung (1.14) hat die Fundamentalsymmetrie J also die Form

$$J = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}_+} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{\mathcal{H}_-} & 0 \\ 0 & 0 & J_d \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

wobei $J_d := J \restriction \mathcal{H}_d$. Daher hat der im Kreinraum $\mathcal{K}$ selbstadjungierte Operator $\widetilde{A} := J\widetilde{T}$ bezüglich der Zerlegung (1.14) die Darstellung

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} T_+ & 0 & 0 \\ 0 & -T_- & 0 \\ 0 & 0 & J_d T_d \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Man beachte, dass $\sigma(T_+)$ und $\sigma(-T_-)$ wegen der Hilbertraum-Selbstadjungiertheit der Operatoren T_+ und T_- reell sind.

Schritt 2: Wir wollen im folgenden zeigen, dass (a)–(c) für $\widetilde{A}$ anstatt für A gelten. Zunächst bemerken wir, dass der selbstadjungierte Operator $J_d T_d$ im Kreinraum $(\mathcal{H}_d, (J_d\cdot, \cdot))$ nach Satz 1.24 ein Operator mit endlich vielen negativen Quadraten ist, dass also $\sigma(J_d T_d) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ aus höchstens endlich vielen Eigenwerten

mit endlichen algebraischen Vielfachheiten besteht, dass $(0,\infty)$ vom Typ π_+ und dass $(-\infty,0)$ vom Typ π_- bezüglich J_dT_d ist. Zudem ist J_dT_d nichtnegativ in einer Umgebung von ∞. Da J_dT_d definisierbar ist, gibt es Konstanten $m_d \geq 1$ und $M_d > 0$, so dass für alle nichtreellen λ in einer $\overline{\mathbb{C}}$-offenen Umgebung von $\overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\left\|(J_dT_d - \lambda)^{-1}\right\| \leq M_d(1+|\lambda|)^{2m_d-2}|\operatorname{Im}\lambda|^{-m_d}. \tag{1.21}$$

Dies folgt direkt aus Satz 1.9.

Um die Definisierbarkeit von $\widetilde{A}$ über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu,-\mu]$ zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass $\sigma(\widetilde{A}) \cap (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ mit $\sigma(J_dT_d)\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})$ übereinstimmt und deswegen aus endlich vielen Polen der Resolvente von $\widetilde{A}$ besteht. Die Wachstumsbedingung (ii) in Definition 1.8 an die Resolvente von $\widetilde{A}$ ist erfüllt, da $\|(J_dT_d-\lambda)^{-1}\|$ wie in (1.21) abgeschätzt werden kann und die Normen der Resolventen von T_+ und $-T_-$ in $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ stets durch $|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$ nach oben abgeschätzt werden können.

Wir zeigen nun, dass die Bedingung (iii) in Definition 1.8 für alle $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}\setminus[\mu,-\mu]$ erfüllt ist. Dazu sei zunächst $\lambda \in (-\mu,\infty)$. Wir müssen die Existenz eines $\delta>0$ zeigen, so dass die Intervalle $(\lambda-\delta,\lambda)$ und $(\lambda,\lambda+\delta)$ definiten Typs bezüglich $\widetilde{A}$ sind. Dies ist klar, wenn $\lambda \in \rho(\widetilde{A})$. Sei also $\lambda \in \sigma(\widetilde{A})$. Wegen $\sigma_{\mathrm{ess}}(-T_-) \subset (-\infty,-\mu]$ ist dann $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(-T_-)$. Also existiert $\delta>0$, so dass $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\setminus\{\lambda\} \subset \rho(-T_-)$. Insbesondere ist $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\setminus\{\lambda\}$ positiven Typs bezüglich $-T_-$. Da das Intervall $(0,\infty)$ vom Typ π_+ bezüglich des definisierbaren Operators J_dT_d ist, dürfen wir nach Lemma 1.10 annehmen, dass $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\setminus\{\lambda\}$ auch positiven Typs bezüglich J_dT_d ist. Und da T_+ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $(\mathcal{H}_+,(\cdot\,,\cdot))$ ist, ist jeder reelle Spektralpunkt von T_+ positiven Typs bezüglich T_+. Es ist nun nicht schwer zu sehen, dass $(\lambda-\delta,\lambda+\delta)\setminus\{\lambda\}$ auch positiven Typs bezüglich der orthogonalen Summe $\widetilde{A}$ der Operatoren T_+, $-T_-$ und J_dT_d ist.

Der Fall $\lambda \in (-\infty,\mu)$ kann ähnlich abgehandelt werden. Wegen $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T_+)$ existiert $\delta'>0$, so dass $(\lambda-\delta',\lambda+\delta')\setminus\{\lambda\} \subset \rho(T_+)$, und nach Theorem 1.24 dürfen wir annehmen, dass $(\lambda-\delta',\lambda+\delta')\setminus\{\lambda\}$ negativen Typs bezüglich J_dT_d ist. Desweiteren ist jeder Spektralpunkt des selbstadjungierten Operators $-T_-$ in $(\mathcal{H}_-,-(\cdot\,,\cdot))$ negativen Typs bezüglich $-T_-$. Daher ist $(\lambda-\delta',\lambda+\delta')\setminus\{\lambda\}$ negativen Typs bezüglich $\widetilde{A}$.

Es bleibt, den Punkt ∞ zu behandeln. Dazu wählen wir $\eta>0$, so dass (η,∞) positiven Typs bezüglich J_dT_d ist (was nach Satz 1.24 möglich ist) und $(\eta,\infty) \subset \rho(-T_-)$. Da (η,∞) auch bezüglich T_+ positiven Typs ist, folgt, dass (η,∞) positiven Typs bezüglich der orthogonalen Summe $\widetilde{A}$ ist. Analog zeigt man, dass es $\eta'>0$ gibt, so dass das Intervall $(-\infty,-\eta')$ negativen Typs bezüglich $\widetilde{A}$ ist. Damit ist gezeigt, dass (a) für den Operator $\widetilde{A}$ gilt.

Aus der obigen Argumentation folgt insbesondere, dass das Intervall $(-\mu,\infty)$ – mit eventueller Ausnahme einer abzählbaren Menge von Punkten, die sich höchstens bei $-\mu$ häuft – positiven Typs ist bezüglich $\widetilde{A}$. Diese Ausnahmepunkte

sind entweder Eigenwerte von $-T_-$ oder Spektralpunkte von J_dT_d, die nicht positiven Typs sind. Wegen $(-\mu,\infty)\cap\sigma_{\mathrm{ess}}(-T_-)=\varnothing$ und da $(0,\infty)$ vom Typ π_+ bezüglich J_dT_d ist, folgt aus

$$\ker(\widetilde{A}-\lambda)=\ker(T_+-\lambda)\oplus\ker(-T_--\lambda)\oplus\ker(J_dT_d-\lambda)$$

und Lemma 1.10, dass die oben genannten Ausnahmepunkte Spektralpunkte vom Typ π_+ von $\widetilde{A}$ sind. Genauso zeigt man, dass $(-\infty,\mu)$ vom Typ π_- bezüglich $\widetilde{A}$ ist. Schließlich gilt (c) für $\widetilde{A}$, da das nichtreelle Spektrum von $\widetilde{A}$ aus den endlich vielen nichtreellen Eigenwerten von J_dT_d besteht. Diese haben nach Satz 1.24 endliche algebraische Vielfachheiten.

Schritt 3: Es ist nach den obigen Ausführungen klar, dass $\rho(A)\cap\rho(\widetilde{A})$ nichtleer ist. Da $\widetilde{A}$ und A auf $\operatorname{dom}(JS)$ übereinstimmen und

$$\dim(\operatorname{dom}\widetilde{A}/\operatorname{dom}(JS))=\dim(\operatorname{dom}\widetilde{T}/\operatorname{dom}S)=n_\pm(S)<\infty,$$

folgt

$$\dim\operatorname{ran}\big((A-\lambda)^{-1}-(\widetilde{A}-\lambda)^{-1}\big)\le n_\pm(S)<\infty$$

für alle $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(\widetilde{A})$ (siehe (1.17)). Satz 1.20(a) impliziert nun, dass A ebenfalls über $\overline{\mathbb{C}}\setminus[\mu,-\mu]$ definisierbar ist, und aus Satz 1.20(b) folgt, dass A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞ ist. Dass das Intervall $(-\mu,\infty)$ vom Typ π_+ und $(-\infty,\mu)$ vom Typ π_- bezüglich A ist, ist eine Konsequenz aus [3, Theorem 19] (siehe auch [4, Theorem 2.1]). Die nichtreellen Spektralpunkte von A haben als Pole der Resolvente von A und wegen $\sigma_{\mathrm{ess}}(\widetilde{A})\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})=\varnothing$ endliche algebraische Vielfachheiten. □

Bemerkung 1.26. Obwohl der Definisierbarkeitsbereich des Operators A in Satz 1.25 im Allgemeinen nicht größer ist als $\overline{\mathbb{C}}\setminus[\mu,-\mu]$, gibt es bereits einfache Beispiele, in denen dies jedoch der Fall ist. Beispielsweise sei μ ein isolierter Eigenwert von T unendlicher Vielfachheit und $(\mu,-\mu]\in\rho(T)$. Dann sieht man mit den im Beweis von Satz 1.25 verwendeten Methoden, dass der Operator $\widetilde{A}$ aus (1.20) definisierbar ist (über $\overline{\mathbb{C}}$). Demnach ist auch A definisierbar. Eine weitere Situation, in der das Resultat verbessert werden kann, ist gegeben, wenn z. B. $\mu=\min\sigma_{\mathrm{ess}}(T_+)$ und $\tau:=\min\sigma_{\mathrm{ess}}(T_-)>\mu$. Dabei sind T_+ und T_- die im Beweis von Satz 1.25 eingeführten selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{H}_+$ bzw. $\mathcal{H}_-$. Man zeigt dann leicht, dass $\widetilde{A}$ definisierbar ist über $\overline{\mathbb{C}}\setminus[\mu,-\tau]$ (oder über $\overline{\mathbb{C}}$, falls $\tau>-\mu$).

Ist entweder $\mathcal{H}_-=\{0\}$ oder $\mathcal{H}_+=\{0\}$, dann kann das Ergebnis von Satz 1.25 erheblich verbessert werden, wenn die dortige Bedingung (iii) durch eine etwas stärkere ersetzt wird. Wir betonen, dass dann die Voraussetzung $\rho(A)\neq\varnothing$ fallengelassen werden kann.

Korollar 1.27. *Es seien T und A wie in Satz* 1.25 *und $\mu := \mu(T) \leq 0$. Ferner seien $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{K}_+$ ($\mathcal{H}_- \subset \mathcal{K}_-$) und $\mathcal{H}_d$ abgeschlossene Unterräume, so dass*

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_d \quad (bzw.\ \mathcal{K} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_d)$$

gilt. Desweiteren gebe es Unterräume $\mathcal{G}_i \subset \operatorname{dom} T \cap \mathcal{H}_i$, $i \in \{+, d\}$ (bzw. $i \in \{-, d\}$), mit den Eigenschaften

(i)$^\pm$ $\dim(\operatorname{dom} T/(\mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_d)) < \infty$ (*bzw.* $\dim(\operatorname{dom} T/(\mathcal{G}_- \oplus \mathcal{G}_d)) < \infty$),

(ii)$^\pm$ $T\,\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{H}_+$ (*bzw.* $T\,\mathcal{G}_- \subset \mathcal{H}_-$), $T\,\mathcal{G}_d \subset \mathcal{H}_d$,

(iii)$^\pm$ $\sigma_{\mathrm{ess}}(\overline{T \restriction \mathcal{G}_d}) \cap [\mu, -\mu] = \varnothing$.

Dann ist A ist definisierbar (über $\overline{\mathbb{C}}$) und nichtnegativ in einer Umgebung von ∞.

Beweis. Wir benutzen dieselben Symbole wie im Beweis von Satz 1.25. Es sei $\mathcal{H}_- = \{0\}$. Den Fall $\mathcal{H}_+ = \{0\}$ behandelt man analog. Nach Satz 1.11 müssen wir nur nachweisen, dass der Operator $\widetilde{A} = T_+ \oplus J_d T_d$ über eine Umgebung von $[\mu, -\mu]$ definisierbar ist. Nach Voraussetzung (iii)$^+$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_d) \cap (-\infty, -\mu + \varepsilon] = \varnothing$. Und Satz 1.24(iv) impliziert

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(J_d T_d) \cap [\mu - \varepsilon, -\mu + \varepsilon] = \varnothing.$$

Das bedeutet aber, dass das Spektrum von $J_d T_d$ in $(\mu-\varepsilon, -\mu+\varepsilon)$ aus endlich vielen Eigenwerten besteht. Die Behauptung folgt nun mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 1.25. □

1.4 Störungen gleichmäßig positiver Operatoren

Ein selbstadjungierter Operator A im Kreinraum $\mathcal{K}$ heißt *gleichmäßig positiv*, falls es ein $\gamma > 0$ gibt, so dass $[Af, f] \geq \gamma \|f\|^2$ für alle $f \in \operatorname{dom} A$ gilt. Dies ist offenbar gleichbedeutend damit, dass A nichtnegativ und stetig invertierbar ist. Insbesondere ist das Spektrum von A reell, und der einzig mögliche kritische Punkt von A ist der Punkt ∞.

Das Hauptergebnis dieses Unterabschnittes ist der folgende Satz, welcher zeigt, dass die Nichtnegativität in einer Umgebung von ∞ eines gleichmäßig positiven Operators in $\mathcal{K}$ unter beliebigen beschränkten Störungen stabil ist, falls ∞ kein singulärer kritischer Punkt des Operators ist. Wir bemerken, dass bereits in [6] gezeigt wird, dass das nichtreelle Spektrum des gestörten Operators beschränkt ist. Die von uns verwendeten Methoden sind zu einem großen Teil aus [6] adaptiert. Wir geben hier dennoch einen kompletten Beweis an, da wir die entsprechenden Abschätzungen aus [6] für den Beweis der zusätzlichen Aussagen benötigen.

Satz 1.28. *Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$, und es gebe einen Operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $B = B^+$, so dass $C := A + B$ ein gleichmäßig positiver Operator ist und ∞ kein singulärer kritischer Punkt von C. Dann ist A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞, und ∞ ist kein singulärer kritischer Punkt von A.*

Beweis. Es sei E die Spektralfunktion von C. Da ∞ kein singulärer kritischer Punkt von C ist, sind die Projektionen $E(\mathbb{R}^+)$ und $E(\mathbb{R}^-)$ definiert, und es gilt

$$\mathcal{K} = E(\mathbb{R}^+)\mathcal{K} \,[\dot{+}]\, E(\mathbb{R}^-)\mathcal{K}.$$

Bezüglich dieser Zerlegung ist dann

$$\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} C = \big(\operatorname{dom} A \cap E(\mathbb{R}^+)\mathcal{K}\big) \,[\dot{+}]\, \big(\operatorname{dom} A \cap E(\mathbb{R}^-)\mathcal{K}\big),$$

und mit $C_\pm := C \restriction E(\mathbb{R}^\pm)\mathcal{K}$ gilt

$$C = \begin{pmatrix} C_+ & 0 \\ 0 & C_- \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\sigma(C_\pm) \subset \mathbb{R}^\pm$. Desweiteren definieren wir den Operator

$$\widetilde{J} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Da $(E(\mathbb{R}^\pm)\mathcal{K}, \pm[\cdot\,,\cdot])$ Hilberträume sind, ist $\widetilde{J}$ eine Fundamentalsymmetrie von $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$. Zudem sieht man leicht, dass C selbstadjungiert ist im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot)_\sim)$, wobei

$$(f, g)_\sim := [\widetilde{J}f, g] = (J\widetilde{J}f, g), \quad f, g \in \mathcal{K}.$$

Die von $(\cdot\,,\cdot)_\sim$ erzeugte Norm auf $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_\sim$. Die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\sim$ sind dann äquivalent (siehe z. B. [2]). Daher ist B im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot)_\sim)$ beschränkt und erlaubt somit eine Darstellung

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

mit jeweils beschränkten Operatoren B_{ij}, $i, j = 1, 2$.

Es sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ und

$$|\lambda| \;>\; \tau := 2\max\{1, \|B_{21}\|_\sim\} + \|B_{22}\|_\sim.$$

Wegen $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(C_-)) > \tau$ und der Selbstadjungiertheit von C_- im Hilbertraum $(E(\mathbb{R}^-)\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot)_\sim)$ gilt

$$\|(C_- - \lambda)^{-1}\|_\sim = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(C_-))} < \frac{1}{\tau}.$$

Weiter gilt

$$\|B_{22}(C_- - \lambda)^{-1}\|_\sim < \frac{\|B_{22}\|_\sim}{\tau} < 1.$$

Daher ist $I - B_{22}(C_- - \lambda)^{-1}$ ein stetig invertierbarer Operator in $E(\mathbb{R}^-)\mathcal{K}$ mit

$$\left\|\left(I - B_{22}(C_- - \lambda)^{-1}\right)^{-1}\right\|_\sim \le \frac{1}{1 - \|B_{22}(C_- - \lambda)^{-1}\|_\sim} \le \frac{1}{1 - \frac{\|B_{22}\|_\sim}{\tau}}\,.$$

Damit ist auch

$$C_- - B_{22} - \lambda = \left(I - B_{22}(C_- - \lambda)^{-1}\right)(C_- - \lambda)$$

stetig invertierbar in $E(\mathbb{R}^-)\mathcal{K}$, und nach der Wahl von τ gelten

$$\left\|(C_- - B_{22} - \lambda)^{-1}\right\|_\sim \le \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|B_{22}\|_\sim}{\tau}} = \frac{1}{\tau - \|B_{22}\|_\sim} \le \frac{1}{2} \tag{1.22}$$

sowie

$$\left\|(C_- - B_{22} - \lambda)^{-1} B_{21}\right\|_\sim \le \frac{\|B_{21}\|_\sim}{\tau - \|B_{22}\|_\sim} \le \frac{1}{2}\,. \tag{1.23}$$

Es sei $f \in \operatorname{dom} A$ beliebig. Wir setzen dann $g := (A - \lambda)f = (C - B - \lambda)f$ sowie $f_\pm := E(\mathbb{R}^\pm)f \in \operatorname{dom} A$, $g_\pm := E(\mathbb{R}^\pm)g$. Dann gilt $g_- = -B_{21}f_+ + (C_- - B_{22} - \lambda)f_-$, also

$$f_- = (C_- - B_{22} - \lambda)^{-1}(g_- + B_{21}f_+).$$

Mit (1.22) und (1.23) und wegen $\|v\|_\sim^2 = \|E(\mathbb{R}^+)v\|_\sim^2 + \|E(\mathbb{R}^-)v\|_\sim^2$ für $v \in \mathcal{K}$ folgt

$$\|f_-\|_\sim \le \frac{1}{2}\|g_-\| + \frac{1}{2}\|f_+\| \le \frac{1}{2}\|(A - \lambda)f\|_\sim + \frac{1}{2}\|f\|_\sim\,.$$

Quadrieren wir dies, so ergibt sich

$$\|f_-\|_\sim^2 \le \frac{1}{4}\|(A - \lambda)f\|_\sim^2 + \frac{1}{2}\|(A - \lambda)f\|_\sim\|f\|_\sim + \frac{1}{4}\|f\|_\sim^2\,.$$

Und damit

$$\begin{aligned}[f, f] &= \|f_+\|_\sim^2 - \|f_-\|_\sim^2 = \|f\|_\sim^2 - 2\|f_-\|_\sim^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\|f\|_\sim^2 - \frac{1}{2}\|(A - \lambda)f\|_\sim^2 - \|(A - \lambda)f\|_\sim\|f\|_\sim\,.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Anhand der obigen Ungleichung sieht man leicht, dass für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ und $|\lambda| > \tau$ gilt:

$$f \in \operatorname{dom} A,\ \|(A-\lambda)f\|_\sim \leq (\sqrt{5}-2)\|f\|_\sim \quad \Longrightarrow \quad [f,f] \geq (\sqrt{5}-2)\|f\|_\sim^2.$$

Daraus folgt

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \tau,\ \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \cap \sigma_{\mathrm{ap}}(A) \ \subset\ \sigma_+(A).$$

Auf analoge Weise zeigt man, dass es ein $\rho > 0$ gibt, so dass

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \rho,\ \operatorname{Re}\lambda \leq 0\} \cap \sigma_{\mathrm{ap}}(A) \ \subset\ \sigma_-(A).$$

Und wegen $\sigma_+(A) \cup \sigma_-(A) \subset \overline{\mathbb{R}}$ hat der Operator A die folgenden spektralen Eigenschaften ($R := \max\{\tau, \rho\}$):

(a) $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \setminus \overline{B_R(0)} \ \subset\ \rho(A)$.

(b) (R, ∞) ist positiven Typs bezüglich A.

(c) $(-\infty, -R)$ ist negativen Typs bezüglich A.

Für die Nichtnegativität von A in einer Umgebung von ∞ bleibt zu zeigen, dass die Resolvente von A das in (1.5) angegebene Wachstum hat. Dazu seien $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \setminus \overline{B_R(0)}$ und $f \in \operatorname{dom} A$. Es gilt dann (siehe (1.24))

$$\big|[f,f]\big| \ \geq\ \frac{1}{2}\|f\|_\sim^2 - \frac{1}{2}\|(A-\lambda)f\|_\sim^2 - \|(A-\lambda)f\|_\sim\|f\|_\sim\,.$$

Andererseits gilt auch

$$\big|(\operatorname{Im}\lambda)[f,f]\big| = \big|\operatorname{Im}[\lambda f, f]\big| = \big|\operatorname{Im}[(\lambda - A)f, f]\big| \ \leq\ \|(A-\lambda)f\|_\sim\|f\|_\sim\,,$$

und es folgt

$$\|(A-\lambda)f\|_\sim^2 + 2\left(1 + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\right)\|(A-\lambda)f\|_\sim\|f\|_\sim - \|f\|_\sim^2 \ \geq\ 0.$$

Wir setzen $t := 1 + \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$ und stellen fest, dass die quadratische Gleichung $x^2 + 2t\|f\|_\sim x - \|f\|_\sim^2 = 0$ eine negative Nullstelle und die positive Nullstelle $x = a(\lambda)\|f\|_\sim$ hat, wobei $a(\lambda) = \sqrt{1+t^2} - t$. Also folgt $\|(A-\lambda)f\|_\sim \geq a(\lambda)\|f\|_\sim$ für alle $f \in \operatorname{dom} A$. Demnach gilt

$$\|(A-\lambda)^{-1}\|_\sim \ \leq\ \frac{1}{a(\lambda)}.$$

Und wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t} &= \frac{|\operatorname{Im}\lambda|(\sqrt{1+t^2}+t)}{|\operatorname{Im}\lambda|} \\ &= \frac{\sqrt{|\operatorname{Im}\lambda|^2+(1+|\operatorname{Im}\lambda|)^2}+|\operatorname{Im}\lambda|+1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \\ &\le \frac{|\operatorname{Im}\lambda|+(1+|\operatorname{Im}\lambda|)+|\operatorname{Im}\lambda|+1}{|\operatorname{Im}\lambda|} \\ &\le 3\,\frac{1+|\lambda|}{|\operatorname{Im}\lambda|} \;\le\; 3\,\frac{(1+|\lambda|)^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2}\end{aligned}$$

folgt die Gültigkeit von (1.5) mit $M = 3$ und $m = 2$ für alle $\lambda \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})\setminus\overline{B_R(0)}$.

Es seien E_A die Spektralfunktion von A auf $\overline{\mathbb{R}}\setminus[-R,R]$, $r > R$ und $P := E_A(\overline{\mathbb{R}}\setminus(-r,r))$. Wir müssen zeigen, dass ∞ kein singulärer kritischer Punkt des in $(P\mathcal{K},[\cdot\,,\cdot])$ definisierbaren Operators $A_r := A\restriction P\mathcal{K}$ ist. Dazu setzen wir

$$W := P(\widetilde{J}\restriction P\mathcal{K}) \in \mathcal{B}(P\mathcal{K}).$$

Es sei $f \in \operatorname{dom} A_r$. Wegen $P\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} A$ ist dann $f \in \operatorname{dom} A$ und damit $\widetilde{J}f \in \operatorname{dom} A$, denn $\widetilde{J}\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} A$. Also ist $Wf = P\widetilde{J}f \in \operatorname{dom} A_r$. Desweiteren gilt für $f \in P\mathcal{K}$: $[Wf,f] = [P\widetilde{J}f,f] = [\widetilde{J}f,f] = \|f\|_\sim^2$. Also existiert ein gleichmäßig positiver und beschränkter Operator W im Kreinraum $P\mathcal{K}$ mit $W\operatorname{dom} A_r \subset \operatorname{dom} A_r$. Nach [21, Theorem 3.2(iii)] impliziert dies, dass der Punkt ∞ kein singulärer kritischer Punkt von A_r ist. □

Das folgende Korollar stellt eine Verallgemeinerung von [21, Theorem 3.2] dar.

Korollar 1.29. *Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Kreinraum $(\mathcal{K},[\cdot\,,\cdot])$. Gibt es ein (nicht notwendig positives) $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $[Af,f] \ge \gamma\|f\|^2$ für alle $f \in \operatorname{dom} A$ gilt, und einen gleichmäßig positiven Operator $W \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ mit $W\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} A$, dann ist A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞, und ∞ ist kein singulärer kritischer Punkt von A.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $\eta \ge 0$, so dass $C := A + \eta J$ gleichmäßig positiv ist. Es ist nun eine Folge aus $\operatorname{dom} C = \operatorname{dom} A$ sowie der Existenz des Operators W und [21, Theorem 3.2], dass der Punkt ∞ kein singulärer kritischer Punkt von C ist. Also erfüllt der Operator A die Bedingungen von Satz 1.28. □

1.5 Randtripel

Im folgenden führen wir in Kürze in die Theorie der Randtripel ein und geben einen Überblick über deren elementare Eigenschaften. Anschließend beweisen wir zwei Aussagen über die Weylfunktion eines Randtripels, die in Abschnitt 2 benötigt werden. Das Konzept der Randtripel stellt einen modernen Zugang zur Erweiterungstheorie symmetrischer Operatoren in Hilbert- und Kreinräumen bereit (siehe z. B. [28], [29], [30], [31], [40]).

Definition 1.30. Es sei S ein abgeschlossener und dicht definierter symmetrischer Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$. Ein Tripel $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{G}$ und linearen Abbildungen $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom} S^+ \to \mathcal{G}$, heißt *Randtripel für* S^+, falls die Abbildung $\Gamma := \binom{\Gamma_0}{\Gamma_1} : \operatorname{dom} S^+ \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ surjektiv ist und die abstrakte Green'sche Identität

$$[S^+ f, g] - [f, S^+ g] = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{G}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{G}}, \quad f, g \in \operatorname{dom} S^+,$$

gilt.

Ist S ein abgeschlossener und dicht definierter symmetrischer Operator im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot\,, \cdot])$, dann existiert ein Randtripel für S^+ genau dann, wenn S eine selbstadjungierte Erweiterung A hat. Ist nämlich $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ ein Randtripel für S^+, dann sind die Operatoren $S^+ \restriction \ker \Gamma_j$, $j = 0, 1$, selbstadjungierte Erweiterungen von S. Für die Umkehrung beachte man, dass der Operator JS symmetrisch im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot\,, \cdot))$ ist und selbstadjungierte Erweiterungen besitzt. Nach [29, Proposition 2.2] existiert daher ein Randtripel für $(JS)^* = S^* J$. Man erkennt nun leicht, dass dieses auch ein Randtripel für $S^+ = J(JS)^*$ ist.

Für den Rest dieses Unterabschnittes seien S ein abgeschlossener und dicht definierter symmetrischer Operator in $(\mathcal{K}, [\cdot\,, \cdot])$ und $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ ein Randtripel für S^+. Ferner nehmen wir an, dass die Resolventenmenge der selbstadjungierten Erweiterung

$$A_0 := S^+ \restriction \ker \Gamma_0$$

von S nichtleer sei. In [28] wird gezeigt, dass die linearen Operatoren

$$\Gamma_j \restriction \ker(S^+ - \lambda) : \ker(S^+ - \lambda) \to \mathcal{G}, \quad j = 0, 1,$$

für $\lambda \in \rho(A_0)$ beschränkt sind. Desweiteren ist leicht einzusehen, dass $\Gamma_0 \restriction \ker(S^+ - \lambda)$ sogar beschränkt invertierbar ist. Daher ist die folgende Definition des γ-*Feldes* und der *Weylfunktion* des Randtripels $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ sinnvoll:

$$\gamma : \rho(A_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{K}), \quad \gamma(\lambda) := (\Gamma_0 \restriction \ker(S^+ - \lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A_0)$$

und

$$M : \rho(A_0) \to \mathcal{B}(\mathcal{G}), \quad M(\lambda) := \Gamma_1 \gamma(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A_0).$$

Im folgenden Lemma fassen wir die wichtigsten Eigenschaften von γ-Feld und Weylfunktion zusammen (siehe auch [28]).

Lemma 1.31. *Die Resolventenmenge des Operators $A_0 := S^+ \restriction \ker \Gamma_0$ sei nichtleer. Für das γ-Feld γ und die Weylfunktion M des Randtripels $\{\mathcal{G}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ und alle $\lambda, \mu \in \rho(A_0)$ gelten dann die folgenden Aussagen:*

(i) $\gamma(\lambda) = [1 + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}]\gamma(\mu)$;
(ii) $\gamma(\lambda)^+ = \Gamma_1(A_0 - \overline{\lambda})^{-1}$;
(iii) $M(\lambda) - M(\mu)^* = (\lambda - \overline{\mu})\gamma(\mu)^+\gamma(\lambda)$;
(iv) $M(\lambda)^* = M(\overline{\lambda})$;
(v) *Ist* $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ *ein Hilbertraum, dann gilt* $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im} M(\lambda) \geq 0$;
(vi) $M(\lambda) = \operatorname{Re} M(\mu) + \gamma(\mu)^+[(\lambda - \operatorname{Re}\mu) + (\lambda - \mu)(\lambda - \overline{\mu})(A_0 - \lambda)^{-1}]\gamma(\mu)$;
(vii) M *und* γ *sind holomorph auf ihrem Definitionsbereich* $\rho(A_0)$.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{G}$. Setze $g := \gamma(\mu)x$ und $h := g + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}g$. Dann ist $g \in \ker(S^+ - \mu)$, also $h \in \ker(S^+ - \lambda)$. Aus $h - g \in \operatorname{dom}(A_0) = \ker\Gamma_0$ folgt nun $\Gamma_0 h = x$ und folglich $h = \gamma(\lambda)x$. Das zeigt (i). Für (ii) wählen wir $x \in \mathcal{G}$, $f \in \mathcal{K}$ und setzen $h := \gamma(\lambda)x$ sowie $g := (A_0 - \overline{\lambda})^{-1}f$. Wegen $g \in \operatorname{dom} A_0 = \ker\Gamma_0$ und $S^+g = f + \overline{\lambda}g$, folgt (ii) dann aus

$$(x, \Gamma_1 g)_{\mathcal{G}} = (\Gamma_0 h, \Gamma_1 g)_{\mathcal{G}} = [h, S^+g] - [S^+h, g] = [h, f].$$

Die Aussage (iii) folgt aus direkter Anwendung der abstrakten Green'schen Identität, (iv) und (v) folgen aus (iii), und (vi) kann wie folgt eingesehen werden:

$$\begin{aligned} M(\lambda) &\overset{\text{(iii)}}{=} M(\mu)^* + (\lambda - \overline{\mu})\gamma(\mu)^+\gamma(\lambda) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \operatorname{Re} M(\mu) - i \operatorname{Im} M(\mu) + (\lambda - \overline{\mu})\gamma(\mu)^+ \left(1 + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}\right)\gamma(\mu) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \operatorname{Re} M(\mu) + \gamma(\mu)^+ \left[-i \operatorname{Im}\mu + (\lambda - \overline{\mu})\left(1 + (\lambda - \mu)(A_0 - \lambda)^{-1}\right)\right]\gamma(\mu). \end{aligned}$$

Die Holomorphie von M und γ auf $\rho(A_0)$ folgt aus der Holomorphie der Resolvente von A_0 und den Beziehungen in (i) und (iii) (oder (vi)). □

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine *lineare Relation* in $\mathcal{H}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Jeder lineare Operator in $\mathcal{H}$ kann über seinen Graphen mit einer linearen Relation in $\mathcal{H}$ identifiziert werden. Demnach ist der Begriff der linearen Relation eine Verallgemeinerung des Operatorbegriffs. In Analogie zu linearen Operatoren kann man Definitionsbereich, Kern und Bildbereich sowie Summe und Produkt linearer Relationen definieren, siehe z.B. [33, S. 146]. Die Inverse einer linearen Relation R ist stets definiert:

$$R^{-1} := \left\{ \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R \right\}.$$

Dabei schreiben wir Elemente aus $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ als Spaltenvektoren. Wie für Operatoren besteht die Resolventenmenge $\rho(R)$ einer linearen Relation R in $\mathcal{H}$ aus allen $\lambda\in\mathbb{C}$, für die die Relation $(R-\lambda I)^{-1}$ ein Element von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist. Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum und Residualspektrum von R werden ebenfalls analog zum Operatorfall definiert. Die Adjungierte einer linearen Relation R in $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$R^*=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}:(y,u)_{\mathcal{H}}=(x,v)_{\mathcal{H}}\ \ \forall\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in R\right\}.$$

Die lineare Relation R heißt *symmetrisch* (*selbstadjungiert*), falls $R\subset R^*$ (bzw. $R=R^*$) gilt. Für eine Einführung in die Theorie der linearen Relationen in Hilbert- und Kreinräumen verweisen wir auf das Buch [20] und die Arbeit [33].

Es ist nicht schwer zu sehen (siehe auch [28]), dass alle abgeschlossenen Erweiterungen A von S in $\mathcal{K}$ mit $A\subset S^+$ via $\Theta\mapsto A_\Theta$ parametrisiert werden können, wobei Θ alle abgeschlossenen linearen Relationen in $\mathcal{G}$ durchläuft und A_Θ die Einschränkung von S^+ auf

$$\operatorname{dom}(A_\Theta):=\{f\in\operatorname{dom}(S^+):\Gamma f\in\Theta\}$$

ist. Desweiteren ist die Erweiterung A_Θ von S genau dann selbstadjungiert, wenn die lineare Relation Θ (im Hilbertraum $\mathcal{G}$) selbstadjungiert ist.

Die folgende Proposition zeigt, dass die spektralen Eigenschaften der in S^+ enthaltenen abgeschlossenen Erweiterungen von S eng zusammenhängen mit der Weylfunktion M. Die *Krein'sche Resolventenformel* ist dabei als Gleichung von Relationen aufzufassen. Da sie in dieser Form eine Verallgemeinerung der üblichen Formel darstellt (siehe z.B. [28]), geben wir hier einen Beweis an.

Proposition 1.32. *Für jede abgeschlossene Relation Θ in $\mathcal{G}$, jedes $\lambda\in\rho(A_0)$ und jedes $i\in\{p,c,r\}$ gilt*

$$\lambda\in\sigma_i(A_\Theta)\quad\text{genau dann, wenn}\quad 0\in\sigma_i(\Theta-M(\lambda)). \tag{1.25}$$

Desweiteren gilt für $\lambda\in\rho(A_0)$ die Krein'sche Resolventenformel:

$$(A_\Theta-\lambda)^{-1}=(A_0-\lambda)^{-1}+\gamma(\lambda)\big(\Theta-M(\lambda)\big)^{-1}\gamma(\overline{\lambda})^+. \tag{1.26}$$

Beweis. Es sei $\lambda\in\rho(A_0)$. Wir werden zunächst (1.26) zeigen. Mit T bezeichnen wir die lineare Relation auf der rechten Seite von (1.26). Nach Lemma 1.31(ii) gilt

$$T=\Big(I+\gamma(\lambda)\big(\Theta-M(\lambda)\big)^{-1}\Gamma_1\Big)\,(A_0-\lambda)^{-1}.$$

Sei $\hat{f} = \binom{f}{f'} \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}$. Man sieht leicht, dass $\hat{f} \in T$ gleichbedeutend ist mit der Existenz von $\binom{x}{y} \in \Theta$ mit

$$f' = (A_0 - \lambda)^{-1} f + \gamma(\lambda)x \quad \text{und} \quad \Gamma_1 f' = y. \tag{1.27}$$

Sei $\hat{f} \in T$. Dann existiert also $\binom{x}{y} \in \Theta$, so dass (1.27) gilt. Wegen $\Gamma_0 f' = \Gamma_0(A_0 - \lambda)^{-1} f + \Gamma_0\gamma(\lambda)x = \Gamma_0\gamma(\lambda)x = x$ folgt $\Gamma f' = \binom{x}{y} \in \Theta$. Also ist $f' \in \operatorname{dom} A_\Theta$ und $(A_\Theta - \lambda)f' = (S^+ - \lambda)f' = f + (S^+ - \lambda)\gamma(\lambda)x = f$. Das zeigt $\hat{f} \in (A_\Theta - \lambda)^{-1}$. Umgekehrt sei $\hat{f} \in (A_\Theta - \lambda)^{-1}$, d. h. $\Gamma f' \in \Theta$ und $(S^+ - \lambda)f' = f$. Setze $x := \Gamma_0 f'$ und $y := \Gamma_1 f'$. Dann ist $\binom{x}{y} \in \Theta$. Wegen $\Gamma_0(f' - \gamma(\lambda)x) = 0$ ist $f' - \gamma(\lambda)x \in \operatorname{dom}(A_0)$. Daher folgt

$$(A_0 - \lambda)(f' - \gamma(\lambda)x) = (S^+ - \lambda)(f' - \gamma(\lambda)x) = (S^+ - \lambda)f' = f.$$

Damit ist (1.26) bewiesen. Um (1.25) für $\lambda \in \rho(A_0)$ zu beweisen, zeigen wir

(i) $\lambda \in \rho(A_\Theta) \iff 0 \in \rho(\Theta - M(\lambda))$,

(ii) $\lambda \in \sigma_p(A_\Theta) \iff 0 \in \sigma_p(\Theta - M(\lambda))$,

(iii) $\lambda \in \sigma_r(A_\Theta) \iff 0 \in \sigma_r(\Theta - M(\lambda))$.

Die Implikation "$\Leftarrow$" in (i) ist nach (1.26) klar. Sei $\lambda \in \rho(A_\Theta)$. Dann folgt mit (1.26)

$$\Gamma_0 \left((A_\Theta - \lambda)^{-1} - (A_0 - \lambda)^{-1}\right) = (\Theta - M(\lambda))^{-1} \gamma(\overline{\lambda})^+,$$

woraus folgt, dass $(\Theta - M(\lambda))^{-1}$ der Graph eines Operators ist. Da $(\Theta - M(\lambda))^{-1}$ offenbar eine abgeschlossene lineare Relation ist, bleibt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen lediglich zu zeigen, dass der Definitionsbereich dieses Operators ganz $\mathcal{G}$ ist. Sei $x \in \mathcal{G}$ beliebig. Wähle dann ein $f \in \operatorname{dom}(S^+)$ mit $\Gamma_0 f = 0$ und $\Gamma_1 f = x$, und setze $g := (A_\Theta - \lambda)^{-1}(S^+ - \lambda)f$. Dann folgt $g - f \in \ker(S^+ - \lambda)$ und mit $z := \Gamma_0 g$ gilt

$$\begin{pmatrix} z \\ x + M(\lambda)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 g \\ \Gamma_1 f + \Gamma_1\gamma(\lambda)\Gamma_0(g - f) \end{pmatrix} = \Gamma g.$$

Wegen $g \in \operatorname{dom}(A_\Theta)$ folgt daraus $\binom{z}{x+M(\lambda)z} \in \Theta$, und deshalb $\binom{z}{x} \in \Theta - M(\lambda)$. Insbesondere gilt $x \in \operatorname{dom}(\Theta - M(\lambda))^{-1}$.

Die Aussage (ii) folgt mit der Beziehung

$$x \in \ker(\Theta - M(\lambda)) \iff \gamma(\lambda)x \in \ker(A_\Theta - \lambda),$$

die mithilfe von (1.26) leicht verifiziert werden kann. (iii) ist schließlich eine Konsequenz aus (ii): sei $\lambda \in \sigma_r(A_\Theta)$. Dann ist $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A_\Theta)$, was nach (ii) $0 \in$

$\sigma_p(\Theta - M(\overline{\lambda})) = \sigma_p((\Theta - M(\lambda))^*)$ impliziert. Daraus folgt $0 \in \sigma_r(\Theta - M(\lambda)) \cup \sigma_p(\Theta - M(\lambda))$. Aber $0 \in \sigma_p(\Theta - M(\lambda))$ ist nach (ii) unmöglich. Die Implikation "$\Leftarrow$" in (iii) wird analog bewiesen. □

Der nun folgende Satz 1.33 zeigt, dass in der Weylfunktion die Vorzeicheneigenschaften des selbstadjungierten Operators A_0 verschlüsselt sind. Wir bemerken, dass Satz 1.33 auch aus [47, Proposition 3.4] folgt.

Satz 1.33. *Es sei $\lambda_0 \in \sigma_+(A_0)$ ($\lambda_0 \in \sigma_-(A_0)$). Dann gibt es eine $\overline{\mathbb{C}}$-offene Umgebung $\mathcal{U}$ von λ_0 mit $\mathcal{U} \setminus \overline{\mathbb{R}} \subset \rho(A_0)$. Für jede Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}^+ \cap \mathcal{U}$ mit $\lambda_n \to \lambda_0$ für $n \to \infty$ und alle $x \in \mathcal{G}$ gilt dann*

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{Im}\big(M(\lambda_n)x, x\big)_{\mathcal{G}} \;\geq\; 0 \qquad \left(\text{bzw. } \limsup_{n\to\infty} \operatorname{Im}\big(M(\lambda_n)x, x\big)_{\mathcal{G}} \;\leq\; 0\right).$$

Beweis. Wir zeigen den Satz nur für $\lambda_0 \in \sigma_+(A_0)$. Die Existenz der Umgebung $\mathcal{U}$ folgt aus der Offenheit von $\sigma_+(A_0)$ und $\sigma_-(A_0)$ in $\tilde{\sigma}(A_0)$, siehe [3, Lemma 2]. Wir nehmen das Gegenteil der zweiten Behauptung an. Dann gibt es $x \in \mathcal{G}$, eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}^+ \cap \mathcal{U}$ mit $\lambda_n \to \lambda_0$ für $n \to \infty$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\operatorname{Im}\big(M(\lambda_n)x, x\big)_{\mathcal{G}} \;\leq\; -\varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Lemma 1.31 ist $M(\lambda_n) - M(\lambda_n)^* = (\lambda_n - \overline{\lambda_n})\gamma(\lambda_n)^+\gamma(\lambda_n)$, und damit

$$(\operatorname{Im}\lambda_n) \cdot [\gamma(\lambda_n)x, \gamma(\lambda_n)x] \;\leq\; -\varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt insbesondere $[g_n, g_n] \to -\infty$ für $n \to \infty$, wobei $g_n := \gamma(\lambda_n)x$. Mit $P_\pm$ bezeichnen wir die $(\cdot\,,\cdot)$-Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{K}_\pm$. Dann gelten

$$[g_n, g_n] = \|P_+ g_n\|^2 - \|P_- g_n\|^2 \quad \text{ und } \quad \|g_n\|^2 = \|P_+ g_n\|^2 + \|P_- g_n\|^2.$$

Also konvergiert $\|P_- g_n\|$ bestimmt gegen $+\infty$ und somit auch $\|g_n\|$. Sei $\lambda \in \rho(A_0) \cap \mathbb{C}^-$ fest. Wir definieren die Vektoren

$$f_n := \frac{g_n - \gamma(\lambda)x}{|\lambda_n - \lambda|\|g_n\|} \;\in\; \operatorname{dom} S^+.$$

Wegen $\Gamma_0\gamma(\mu)x = x$ für $\mu \in \rho(A_0)$ ist $f_n \in \ker\Gamma_0 = \operatorname{dom} A_0$. Ist $\lambda_0 \neq \infty$, dann gilt $\|f_n\| \to 1/|\lambda_0 - \lambda|$, und

$$(A_0 - \lambda_0)f_n = (S^+ - \lambda_0)f_n = \frac{\lambda_n - \lambda_0}{|\lambda_n - \lambda|} \cdot \frac{g_n}{\|g_n\|} - \frac{\lambda - \lambda_0}{|\lambda_n - \lambda|\|g_n\|}\gamma(\lambda)x$$

konvergiert gegen Null für $n \to \infty$. Ist $\lambda_0 = \infty$, dann gelten $f_n \to 0$ und $\|A_0 f_n\| \to 1$ für $n \to \infty$. Aufgrund von $\lambda_0 \in \sigma_+(A_0)$ folgt

$$\liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] > 0, \quad \text{falls } \lambda_0 \neq \infty$$
$$\liminf_{n\to\infty} [A_0 f_n, A_0 f_n] > 0, \quad \text{falls } \lambda_0 = \infty.$$

Für die Vektoren

$$h_n := \frac{g_n}{|\lambda_n - \lambda| \|g_n\|} \quad \text{und} \quad k_n := \frac{\lambda_n g_n}{|\lambda_n - \lambda| \|g_n\|}$$

gilt jedoch $\|h_n - f_n\| \to 0$, falls $\lambda_0 \neq \infty$, und $\|k_n - A_0 f_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\lambda_0 = \infty$. Damit folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{[g_n, g_n]}{|\lambda_n - \lambda|^2 \|g_n\|^2} = \liminf_{n\to\infty} [h_n, h_n] = \liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] > 0,$$

falls $\lambda_0 \neq \infty$, und

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\lambda_n|^2 [g_n, g_n]}{|\lambda_n - \lambda|^2 \|g_n\|^2} = \liminf_{n\to\infty} [k_n, k_n] = \liminf_{n\to\infty} [A_0 f_n, A_0 f_n] > 0,$$

falls $\lambda_0 = \infty$, was in beiden Fällen im Widerspruch steht zu $[g_n, g_n] \to -\infty$ für $n \to \infty$. □

Es seien X ein Banachraum und $F : \mathcal{O} \to X$ eine analytische Funktion, definiert auf der offenen Menge $\mathcal{O} \subset \overline{\mathbb{C}}$. Wir sagen, F lasse sich *analytisch fortsetzen in* $\lambda \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{O}$, falls es eine zusammenhängende offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{C}}$ von λ mit $\mathcal{U} \cap \mathcal{O} \neq \varnothing$ und eine analytische Funktion $G : \mathcal{O} \cup \mathcal{U} \to X$ gibt, so dass $G \restriction \mathcal{O} = F$. Wir bezeichnen die Vereinigung von $\mathcal{O}$ und der Menge aller Punkte, in die sich F analytisch fortsetzen lässt, mit $\tilde{\rho}(F)$:

$$\tilde{\rho}(F) := \mathcal{O} \cup \{\lambda \in \overline{\mathbb{C}} : F \text{ lässt sich in } \lambda \text{ analytisch fortsetzen}\}.$$

Diese Menge ist offenbar offen in $\overline{\mathbb{C}}$. Wir nennen sie den *Holomorphiebereich* von F. In Analogie zu Operatoren definieren wir noch $\rho(F) := \tilde{\rho}(F) \setminus \{\infty\}$.

Offensichtlich ist $\rho(A_0)$ als Definitionsbereich von M in $\rho(M)$ enthalten. Im folgenden zeigen wir anhand eines einfachen Beispiels, dass $\rho(M)$ größer sein kann als $\rho(A_0)$. Dazu nehmen wir an, es gelte $\dim(A_0/S) = 1$ und dass $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein einfacher isolierter Eigenwert von A_0 sei, der gleichzeitig auch ein Eigenwert von S ist. Dann ist $\ker(A_0 - \lambda_0) = \ker(S - \lambda_0) = \operatorname{span}\{f_0\}$ mit einem Vektor f_0. Da die Riesz-Dunford-Spektralprojektion E von A_0 bezüglich λ_0 selbstadjungiert ist,

folgt $[f_0, f_0] \neq 0$. Also ist $\mathcal{K} = \operatorname{span}\{f_0\} \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_1$ mit $\mathcal{K}_1 = (I - E)\mathcal{K}$. Für beliebiges $\lambda \in \rho(A_0)$ und $g \in \ker(S^+ - \lambda)$ gilt

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda})[f_0, g] = [Sf_0, g] - [f_0, S^+ g] = 0.$$

Daraus folgt $g \in \mathcal{K}_1$, und wegen $\lambda_0 \in \rho(A_0 \restriction \mathcal{K}_1)$, lässt sich die Abbildung $\lambda \mapsto (A_0 - \lambda)^{-1} g$ analytisch nach λ_0 fortsetzen. Mit Lemma 1.31(vi) folgt $\lambda_0 \in \rho(M)$.

Wir bemerken, dass der Spektralraum $\ker(A_0 - \lambda_0)$ von A_0 im obigen Beispiel nicht enthalten ist in der abgeschlossenen linearen Hülle der Defekträume von S:

$$\ker(A_0 - \lambda_0) \cap \text{c.l.s.}\,\{\ker(S^+ - \lambda) : \lambda \in \rho(A_0)\} = \{0\}.$$

Insbesondere ist der Operator S nicht A_0-einfach gemäß der folgenden Definition.

Definition 1.34. Es seien S ein abgeschlossener und dicht definierter symmetrischer Operator in $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$ und A eine selbstadjungierte Erweiterung von S. Der Operator S heißt *einfach* bezüglich der selbstadjungierten Erweiterung A (oder auch kurz *A-einfach*), wenn

$$\mathcal{K} = \text{c.\,l.\,s.}\{\ker(S^+ - \lambda) : \lambda \in \rho(A)\}.$$

Der Operator S heißt *einfach*, wenn er einfach ist bezüglich aller seiner selbstadjungierten Erweiterungen.

Ist der Operator S also nicht A_0-einfach, dann ist es möglich, dass $\rho(A_0) \neq \rho(M)$ gilt. In der folgenden Proposition wird eine lokale Variante der A_0-Einfachheit vorausgesetzt. Wie schon Satz 1.33 ist auch sie eine Folge aus [47, Proposition 3.4] (mit $\kappa_\pm(\Delta_0, G) = \kappa_\pm((E(\Delta_0, A)\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])) = l = 0$). Wir geben hier einen elementaren Beweis an, der sich stark an Techniken aus [32] orientiert.

Proposition 1.35. *Der Operator A_0 sei definisierbar über $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, und E bezeichne die lokale Spektralfunktion von A_0. Ist die Inklusion*

$$\text{c.l.s.}\,\{E(\Delta)\mathcal{K} : \Delta \in \mathfrak{B}(A, \Omega)\} \;\subset\; \text{c.l.s.}\,\{\ker(S^+ - \lambda) : \lambda \in \rho(A_0)\}, \tag{1.28}$$

erfüllt, dann gilt

$$\tilde{\rho}(M) \cap \Omega = \tilde{\rho}(A_0) \cap \Omega.$$

Beweis. Für $\lambda, \mu, \nu \in \rho(A_0)$ mit $\lambda \neq \nu$, $\lambda \neq \overline{\mu}$ und $\nu \neq \overline{\mu}$ gilt (siehe Lemma 1.31)

$$\begin{aligned}
\frac{M(\lambda) - M(\overline{\mu})}{\lambda - \overline{\mu}} &= \gamma(\mu)^+ \big(I + (\lambda - \nu)(A_0 - \lambda)^{-1}\big)\gamma(\nu) \\
&= \gamma(\mu)^+\gamma(\nu) + (\lambda - \nu)\gamma(\mu)^+(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma(\nu) \\
&= \frac{M(\nu) - M(\overline{\mu})}{\nu - \overline{\mu}} + (\lambda - \nu)\gamma(\mu)^+(A_0 - \lambda)^{-1}\gamma(\nu),
\end{aligned}$$

und daher

$$\gamma(\mu)^+(A_0-\lambda)^{-1}\gamma(\nu)=\frac{M(\lambda)-M(\overline{\mu})}{(\lambda-\nu)(\lambda-\overline{\mu})}-\frac{M(\nu)-M(\overline{\mu})}{(\lambda-\nu)(\nu-\overline{\mu})}\,.$$

Folglich ist die Funktion

$$G_{\mu,\nu}(\lambda):=\gamma(\mu)^+(A_0-\lambda)^{-1}\gamma(\nu),\quad \lambda\in\rho(A_0),$$

für alle $\mu,\nu\in\rho(A_0)$ holomorph auf $\rho(M)$ fortsetzbar.

Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt

$$\lambda_0\in\rho(M)\cap\Omega\cap\sigma(A_0)\cap(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}).$$

Zu $\mu,\nu\in\rho(A_0)$ wählen wir dann eine offene Kreisscheibe C mit Mittelpunkt λ_0, so dass $\overline{C}\cap\sigma(A_0)=\{\lambda_0\}$. Wegen $\lambda_0\in\rho(M)$ gilt dann

$$\begin{aligned}[E(\{\lambda_0\})\gamma(\nu)x,\gamma(\mu)y]&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\big[(A_0-\lambda)^{-1}\gamma(\nu)x,\gamma(\mu)y\big]\,d\lambda\\&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\big(G_{\mu,\nu}(\lambda)x,y\big)_{\mathcal{G}}\,d\lambda\\&=0\end{aligned}$$

für beliebige $x,y\in\mathcal{G}$. Damit folgt

$$[E(\{\lambda_0,\overline{\lambda_0}\})\gamma(\nu)x,\gamma(\mu)y]=0$$

für alle $\mu,\nu\in\rho(A_0)$ und alle $x,y\in\mathcal{G}$. Nach (1.28) ist $E(\{\lambda_0,\overline{\lambda_0}\})\mathcal{K}$ neutral. Da dieser Raum aber ein Kreinraum ist, ergibt sich ein Widerspruch zu $\lambda_0\in\sigma(A_0)$.

Für die Behandlung reeller Punkte nehmen wir an, es gäbe einen Punkt

$$\lambda_0\in\rho(M)\cap\Omega\cap\sigma(A_0)\cap\mathbb{R}.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}$ von λ_0 mit $\mathcal{U}\subset\rho(M)\cap\Omega$. Also existiert ein kompaktes Intervall $\Delta\in\mathfrak{B}(A,\Omega)$, $\Delta\subset\mathcal{U}\cap\mathbb{R}$, so dass λ_0 im ($\mathbb{R}$-)Inneren von Δ enthalten ist. Desweiteren gibt es eine Folge kompakter Intervalle $(\Delta_n)\subset\mathfrak{B}(A,\Omega)$ mit $\Delta_n\subset\mathcal{U}\cap\mathbb{R}$,

$$\Delta_1\supsetneq\Delta_2\supsetneq\Delta_3\supsetneq\ldots\quad\text{und}\quad\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Delta_n=\Delta.$$

Für $\mu,\nu\in\rho(A_0)$, $x,y\in\mathcal{G}$ und $f=\gamma(\nu)x$, $g=\gamma(\mu)y$ gilt (siehe [59])

$$\begin{aligned}[E(\Delta)f,g]&=\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\downarrow0}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_n}\Big[\big(A_0-(t-i\delta)\big)^{-1}f-\big(A_0-(t+i\delta)\big)^{-1}f,\,g\Big]\,dt\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{\delta\downarrow0}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_n}\Big(G_{\mu,\nu}(t-i\delta)x-G_{\mu,\nu}(t+i\delta)x,y\Big)_{\mathcal{G}}\,dt.\end{aligned}$$

Da $G_{\mu,\nu}$ in $\mathcal{U}$ holomorph ist, folgt

$$[E(\Delta)\gamma(\nu)x, \gamma(\mu)y] = 0$$

für alle $\mu, \nu \in \rho(A_0)$ und alle $x, y \in \mathcal{G}$. Nach (1.28) ist der Unterraum $E(\Delta)\mathcal{K}$ also neutral. Es folgt $E(\Delta)\mathcal{K} = \{0\}$ und damit $\lambda_0 \in \rho(A_0)$. Ein Widerspruch.

Es bleibt die Behandlung des Punktes ∞ (falls dieser in Ω enthalten ist). Sei also $\infty \in \tilde{\rho}(M) \cap \Omega$. Dann existiert eine $\overline{\mathbb{C}}$-offene Umgebung $\mathcal{U}$ von ∞ mit $\mathcal{U} \subset \tilde{\rho}(M) \cap \Omega$. Nach dem bereits Bewiesenen gilt $\mathcal{U} \setminus \{\infty\} \subset \rho(A_0)$. Und da ∞ kein isolierter Punkt von $\tilde{\sigma}(A_0)$ sein kann, folgt $\mathcal{U} \subset \tilde{\rho}(A_0)$. □

Bemerkung 1.36. Falls A_0 in Proposition 1.35 definisierbar ist über $\Omega = \overline{\mathbb{C}}$, dann ist (1.28) gleichbedeutend damit, dass S einfach ist bezüglich A_0. Ist S einfach bezüglich A_0, dann ist (1.28) trivialerweise erfüllt.

2 Singuläre indefinite Sturm-Liouville-Operatoren

In diesem Abschnitt betrachten wir singuläre Sturm-Liouville-Operatoren mit Gewichtfunktionen, die ihr Vorzeichen wechseln. Mithilfe der abstrakten Resultate aus dem vorangehenden Abschnitt zeigen wir, dass die betrachteten Differentialoperatoren unter gewissen Bedingungen außerhalb eines kompakten Intervalls definisierbar sind, wenn die Gewichtsfunktion in Umgebungen singulärer Endpunkte definit ist.

2.1 Grundlegende Definitionen

Wir betrachten gewöhnliche Differentialausdrücke der Form

$$\ell(f) = \frac{1}{w}\Big(-(pf')' + qf \Big) \tag{2.1}$$

auf einem offenen Intervall (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$. Dabei stellen wir an die Koeffizientenfunktionen w, p und q die folgenden Bedingungen:

- w, q und p sind reellwertig,
- $w, q, 1/p \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$,
- $w(x) \neq 0$ und $p(x) > 0$ fast überall auf (a,b).

Ein Differentialausdruck der Form (2.1) wird *Sturm-Liouville-Differentialausdruck* genannt. Die Funktion w nennen wir das *Gewicht* von ℓ. Die Funktion q heißt das *Potential* von ℓ.

Bekanntermaßen können dem Differentialausdruck ℓ im Fall $w(x) > 0$ f.ü. auf natürliche Weise ein *minimaler* Operator $A_{\min}(a,b)$ und ein *maximaler* Operator $A_{\max}(a,b)$ im gewichteten L^2-Raum

$$L^2_w(a,b) := \big\{ f : (a,b) \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } f\sqrt{w} \in L^2(a,b) \big\}$$

zugeordnet werden, so dass

$$A_{\min}(a,b) \subset A_{\min}(a,b)^* = A_{\max}(a,b)$$

gilt (siehe [73]). Die Adjungierte ist dabei bezüglich des Hilbertraum-Skalarproduktes

$$(f,g)_{L^2_w(a,b)} := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx, \quad f,g \in L^2_w(a,b),$$

aufzufassen. Der maximale Operator ist definiert durch

$$A_{\max}(a,b)f := \ell(f) = \frac{1}{w}\Big(-(pf')' + qf\Big), \quad f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b), \tag{2.2}$$

wobei

$$\mathcal{D}_{\max}(a,b) := \left\{u \in L^2_w(a,b) : u, pu' \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}((a,b)),\ \ell(u) \in L^2_w(a,b)\right\}. \tag{2.3}$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\Delta)$ für ein Intervall Δ den Raum der komplexwertigen und auf Δ definierten Funktionen, deren Einschränkung auf beliebige kompakte Teilintervalle von Δ absolutstetig ist. Da solche Funktionen bekanntermaßen fast überall auf Δ differenzierbar sind, ist die Definition von $A_{\max}(a,b)$ sinnvoll. Der minimale Operator wird als Abschluss des *präminimalen* Operators $A_{\mathrm{pmin}}(a,b)$ definiert, welcher ebenfalls via ℓ operiert:

$$A_{\mathrm{pmin}}(a,b)f := \ell(f), \quad f \in \operatorname{dom} A_{\mathrm{pmin}}(a,b), \tag{2.4}$$

wobei

$$\operatorname{dom} A_{\mathrm{pmin}}(a,b) := \{u \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : u \text{ hat kompakten Träger}\}. \tag{2.5}$$

Der minimale Operator $A_{\min}(a,b)$ ist dann dicht definiert und symmetrisch in $L^2_w(a,b)$, und es lässt sich zeigen, dass die Defektindizes von $A_{\min}(a,b)$ übereinstimmen und den Wert 2 nicht überschreiten. Demnach besitzt $A_{\min}(a,b)$ selbstadjungierte Erweiterungen.

In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf den Fall, in dem die Gewichtsfunktion w *indefinit* ist auf (a,b), d. h. die Mengen

$$\Delta_+(w) := \{x \in (a,b) : w(x) > 0\} \quad \text{und} \quad \Delta_-(w) := \{x \in (a,b) : w(x) < 0\}$$

haben nichtverschwindendes Lebesgue-Maß. Wir sagen, die Funktion w sei *definit* auf (a,b), wenn sie nicht indefinit ist. Im indefiniten Fall ergibt sich bei der Definition der Differentialoperatoren zunächst das Problem, dass die obige Definition des Raumes $L^2_w(a,b)$ nicht mehr sinnvoll ist. Daher betrachtet man stattdessen den Raum $L^2_{|w|}(a,b)$ und definiert darin den maximalen und den präminimalen Operator wie in (2.2)–(2.5)[1] sowie den minimalen Operator als Abschluss von $A_{\mathrm{pmin}}(a,b)$. Die größte Unannehmlichkeit bei indefinitem Gewicht besteht nun darin, dass der minimale Operator $A_{\min}(a,b)$ nicht symmetrisch bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot\,,\cdot)_{L^2_{|w|}(a,b)}$ ist. Dies ist anhand simpler Beispiele einzusehen. Wir definieren den Differentialausdruck

$$\tau(f) = \frac{1}{|w|}\Big(-(pf')' + qf\Big). \tag{2.6}$$

[1] Wobei $L^2_w(a,b)$ durch $L^2_{|w|}(a,b)$ zu ersetzen ist

Bezüglich τ können minimaler und maximaler Operator $T_{\min}(a,b)$ und $T_{\max}(a,b)$ wie oben definiert werden, und es gilt $T_{\min}(a,b) \subset T_{\min}(a,b)^* = T_{\max}(a,b)$, wobei die Adjungierte hier bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot\,,\cdot)_{L^2_{|w|}(a,b)}$ gebildet werde. Es ist nun leicht zu sehen, dass die folgenden Beziehungen zwischen definiten und indefiniten Differentialoperatoren bestehen:

$$A_{\min}(a,b) = J_{a,b}\, T_{\min}(a,b),$$
$$A_{\max}(a,b) = J_{a,b}\, T_{\max}(a,b),$$

wobei $J_{a,b} : L^2_{|w|}(a,b) \to L^2_{|w|}(a,b)$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\operatorname{sgn}(w(\cdot))$ ist:

$$(J_{a,b}f)(x) := \operatorname{sgn}(w(x)) \cdot f(x), \quad f \in L^2_{|w|}(a,b),\ x \in (a,b).$$

Dieser Operator ist offenbar beschränkt, und es gilt $J_{a,b} = J_{a,b}^{-1} = J_{a,b}^*$. Also ist $J_{a,b}$ eine Fundamentalsymmetrie in $L^2_{|w|}(a,b)$. Folglich ist $(L^2_{|w|}(a,b), [\cdot\,,\cdot]_{L^2_{|w|}(a,b)})$, wobei

$$[f,g]_{L^2_{|w|}(a,b)} := (J_{a,b}f, g)_{L^2_{|w|}(a,b)} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx, \quad f,g \in L^2_{|w|}(a,b),$$

ein Kreinraum, den wir im folgenden mit $L^2_w(a,b)$ bezeichnen wollen, und es gilt

$$A_{\min}(a,b) \subset A_{\min}(a,b)^+ = A_{\max}(a,b).$$

Dabei verwenden wir das Symbol $^+$ für die Adjungierte bezüglich des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]_{L^2_{|w|}(a,b)}$. Offenbar ist A eine (Kreinraum-)selbstadjungierte Erweiterung von $A_{\min}(a,b)$ genau dann, wenn $J_{a,b}A$ eine (Hilbertraum-)selbstadjungierte Erweiterung von $T_{\min}(a,b)$ ist. Die selbstadjungierten Erweiterungen von $T_{\min}(a,b)$ und $A_{\min}(a,b)$ nennen wir jeweils die *selbstadjungierten Realisierungen* von τ und ℓ auf (a,b). Im folgenden verwenden wir die Abkürzungen

$$(\cdot\,,\cdot)_{a,b} := (\cdot\,,\cdot)_{L^2_{|w|}(a,b)} \quad \text{und} \quad [\cdot\,,\cdot]_{a,b} := [\cdot\,,\cdot]_{L^2_{|w|}(a,b)}.$$

Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Wir sagen, f sei eine Lösung von $(\ell - \lambda)u = 0$ ($(\tau - \lambda)u = 0$), wenn $f, pf' \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und $\ell(f) = \lambda f$ (bzw. $\tau(f) = \lambda f$) fast überall auf (a,b) gilt. Der Raum $\mathbb{L}_\lambda(\ell)$ (bzw. $\mathbb{L}_\lambda(\tau)$) aller Lösungen von $(\ell - \lambda)u = 0$ (bzw. $(\tau - \lambda)u = 0$) ist bekanntlich 2-dimensional. Der folgende grundlegende Existenz- und Eindeutigkeitssatz (siehe z. B. [73, Korollar 13.3]) wird im Folgenden häufige Verwendung finden.

Satz 2.1. *Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$, $c \in (a,b)$ und $u_0, u_1 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathbb{L}_\lambda(\ell)$ mit $u(c) = u_0$ und $(pu')(c) = u_1$.*

Es sei $c \in (a,b)$ beliebig. Sind die Funktionen w, q und $1/p$ über (a,c) integrierbar und ist $a > -\infty$[2], dann heißen ℓ und τ *regulär* bei a. Ansonsten sagen wir, ℓ und τ seien *singulär* bei a. Analog definiert man die Begriffe Regularität und Singularität von ℓ und τ bei b. Die Differentialausdrücke ℓ und τ heißen regulär, wenn sie bei a und b regulär sind. Sie heißen singulär, wenn sie nicht regulär sind.

Die *Weylsche Alternative* (siehe [73]) für den definiten Differentialausdruck τ im Endpunkt a besagt: *Entweder gilt* $\mathbb{L}_\lambda(\tau) \subset L^2_{|w|}(a,c)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$*, oder zu jedem* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *gibt es ein* $u \in \mathbb{L}_\lambda(\tau)$*, welches nicht in* $L^2_{|w|}(a,c)$ *liegt.* Dabei identifizieren wir Lösungen auf (a,b) mit ihren Einschränkungen auf (a,c). Dies ist sinnvoll, denn jede Lösung von $(\tau-\lambda)u = 0$ auf (a,c) ist nach Satz 2.1 eindeutig zu einer Lösung auf ganz (a,b) fortsetzbar. Tritt der in der Weylschen Alternative zuerstgenannte Fall ein, so sagen wir, τ sei bei a im *Grenzkreisfall*. Im zweiten Fall sagen wir, dass τ bei a im *Grenzpunktfall* ist. Grenzkreis- und Grenzpunktfall von τ bei b werden analog definiert.

Wir betonen, dass die Weylsche Alternative in der obigen Form für ℓ im Allgemeinen nicht gilt. Dennoch läßt sich völlig analog zum definiten Fall beweisen (siehe [73, Satz 13.17]), dass $\mathbb{L}_{\lambda_0}(\ell)$ für ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in $L^2_{|w|}(a,c)$ (in $L^2_{|w|}(c,b)$) liegt genau dann, wenn $L_\lambda(\ell)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ in $L^2_{|w|}(a,c)$ (bzw. $L^2_{|w|}(c,b)$) liegt. In diesem Fall sagen wir, der Differentialausdruck ℓ sei bei a (bzw. b) im Grenzkreisfall. Im gegenteiligen Fall ist ℓ bei a (bzw. b) im Grenzpunktfall. Wegen $\mathbb{L}_0(\ell) = \mathbb{L}_0(\tau)$, ist ℓ im Grenzkreisfall bei a (bei b) genau dann, wenn τ im Grenzkreisfall bei a (bzw. b) ist. Sind ℓ und τ bei a (bei b) regulär, dann sind nach [75, Lemma 10.4.3] (siehe auch [73, Satz 13.5]) die Funktionen f und pf' für alle $f \in \mathcal{D}_{\max}(a,c)$ (bzw. $f \in \mathcal{D}_{\max}(c,b)$) nach a (bzw. b) stetig fortsetzbar. Daraus folgt sofort, dass ℓ und τ bei a (bzw. b) im Grenzkreisfall sind.

Aus der Weylschen Alternative folgt, dass $T_{\min}(a,b)$ die Defektzahlen $(2,2)$ hat, wenn τ bei a und b im Grenzkreisfall ist. Dann ist nämlich

$$\ker(T_{\min}(a,b)^* \pm i) = \ker(T_{\max}(a,b) \pm i) = \mathbb{L}_{\pm i}(\tau) \subset L^2_{|w|}(a,b).$$

Ebenso einfach sieht man, dass $T_{\min}(a,b)$ die Defektzahlen $(1,1)$ hat, wenn τ bei a und b in gegensätzlichen Fällen ist. Dass $T_{\min}(a,b)$ die Defektzahlen $(0,0)$ hat, wenn τ bei a und b im Grenzpunktfall ist, ist in [73, Satz 13.19] bewiesen. In diesem Fall ist $T_{\min}(a,b) = T_{\max}(a,b)$ selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_{|w|}(a,b)$ und damit die einzige selbstadjungierte Realisierung von τ auf (a,b).

Analog zu $\mathcal{D}_{\max}(a,b) = \operatorname{dom} T_{\max}(a,b)$ setzen wir $\mathcal{D}_{\min}(a,b) := \operatorname{dom} T_{\min}(a,b)$. Es ist wohlbekannt (siehe [73, Satz 13.8]), dass

$$\mathcal{D}_{\min}(a,b) = \big\{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : f(a) = (pf')(a) = f(b) = (pf')(b) = 0 \big\},$$

[2]Wir verwenden hier die klassische Definition aus [73]. In beispielsweise [75] wird die Endlichkeit des Endpunktes nicht verlangt. Es zeigt sich dort, dass diese für die Haupteigenschaften regulärer Ausdrücke unerheblich ist.

wenn τ regulär ist.

Lemma 2.2. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Ist τ regulär, so ist jede selbstadjungierte Realisierung T von τ nach unten beschränkt, und $\sigma(T)$ besteht aus isolierten (reellen) Eigenwerten, die sich gegen ∞ häufen.*

(b) *Ist τ singulär, so ist keine der selbstadjungierten Realisierungen von τ auf (a,b) nach oben beschränkt.*

Beweis. Einen Beweis der Aussage (a) findet man in [73, Sätze 13.13 und 13.14]. Sei τ nun singulär, und es existiere eine selbstadjungierte Realisierung von τ auf (a,b), die nach oben beschränkt ist. Dann ist $T_{\min}(a,b)$ nach oben beschränkt. Wir wählen ein Intervall $[a',b'] \subset (a,b)$. Für jede Funktion $g \in \mathcal{D}_{\min}(a',b')$ ist dann die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in [a',b'], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in $\operatorname{dom} T_{\mathrm{pmin}}(a,b)$ und damit auch in $\mathcal{D}_{\min}(a,b)$ enthalten. Wegen

$$\big(T_{\min}(a',b')g, g\big)_{a',b'} = \big(T_{\min}(a,b)f, f\big)_{a,b}$$

folgt, dass $T_{\min}(a',b')$ nach oben beschränkt ist. Ein Widerspruch. □

Bemerkung 2.3. Für die Gültigkeit von Lemma 2.2 ist die Bedingung $p > 0$ f.ü. wesentlich.

Der folgende Satz beschreibt das Spektrum der selbstadjungierten Realisierungen von ℓ auf (a,b) im regulären Fall. Die wesentlichen Aussagen sind in [22] zu finden.

Satz 2.4. *Es seien ℓ regulär und A eine beliebige selbstadjungierte Realisierung von ℓ auf (a,b). Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) *Der Operator A hat endlich viele negative Quadrate und ist demnach definisierbar und nichtnegativ in einer Umgebung von ∞. Insbesondere hat A die in Proposition 1.5 zusammengestellten Eigenschaften für ein $\kappa \in \mathbb{N}_0$.*

(ii) *Das Spektrum von A besteht aus isolierten Eigenwerten mit endlichen algebraischen Vielfachheiten und geometrischen Vielfachheiten ≤ 2.*

(iii) *Das nichtreelle Spektrum von A ist eine endliche Menge, und falls die Gewichtsfunktion w indefinit ist, ist das reelle Spektrum von A weder nach unten noch nach oben beschränkt.*

Beweis. Nach Lemma 2.2(a) ist das Spektrum der selbstadjungierten Realisierung $T := J_{a,b} A$ von τ auf (a,b) nach unten beschränkt und besteht aus isolierten (reellen) Eigenwerten, die sich gegen ∞ häufen. Bis auf die letzte Aussage in (iii) folgen also alle Aussagen des Satzes aus Satz 1.24. Wir nehmen an, das Spektrum von A sei nach unten beschränkt. Nach [59, S. 39] ist ∞ dann kein kritischer Punkt des Operators A, also $\infty \in \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A)$. Da aber $\sigma_-(A)$ offen ist in $\tilde{\sigma}(A)$, folgt $\infty \in \sigma_+(A)$. Mit E bezeichnen wir die Spektralfunktion des definisierbaren Operators A. Es gibt also ein $c > 0$, so dass der Innenproduktraum

$$\mathcal{K}_1 := \Big(\operatorname{ran} E\left(\overline{\mathbb{R}} \setminus [-c,c]\right), [\cdot\,,\cdot]_{a,b} \Big)$$

ein Hilbertraum ist. Wir dürfen $-c, c \in \rho(A)$ annehmen, so dass $E([-c,c])$ definiert ist. Wir setzen $\mathcal{K}_2 := \operatorname{ran} E([-c,c])$ und bezeichnen mit $\mathcal{K}_3$ den Spektralraum von A bezüglich des nichtreellen Spektrums von A. Wegen $\dim \mathcal{K}_2 \dot{+} \mathcal{K}_3 < \infty$ (siehe (ii) und (iii)) sowie

$$L^2_{|w|}(a,b) = \mathcal{K}_1 \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_2 \,[\dot{+}]\, \mathcal{K}_3$$

folgt $\kappa_-(L^2_{|w|}(a,b)) < \infty$. Aber das ist wegen

$$L^2_{|w|}(a,b) = L^2_{|w|}(\Delta_-(w)) \,[\dot{+}]\, L^2_{|w|}(\Delta_+(w))$$

unmöglich, da $L^2_{|w|}(\Delta_-(w))$ ein unendlichdimensionaler und negativer Unterraum von $(L^2_{|w|}(a,b), [\cdot\,,\cdot])$ ist. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Bedingung $p > 0$ f.ü. auch für die Gültigkeit von Satz 2.4 nicht redundant ist, siehe auch [64, Example 1.1].

Beispiel 2.5. Es sei ℓ der Differentialausdruck auf $(a,b) = (-1,1)$ wie in (2.1) mit $q = 0$ und $w(x) = p(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in (-1,1)$. Dann ist $\ell(f) = -f''$, und der maximale Definitionsbereich von ℓ auf $(-1,1)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{D}_{\max}(-1,1) = \big\{ f \in L^2(-1,1) : f, \operatorname{sgn} \cdot f' \in AC([-1,1]),\ f'' \in L^2(-1,1) \big\}.$$

Definiere die Funktionen $f_0(x) := |x| - 1$, $x \in [-1,1]$, und

$$f_\lambda(x) := \operatorname{sgn}(x) \cos(\sqrt{\lambda}) \sin(\sqrt{\lambda}x) - \sin(\sqrt{\lambda}) \cos(\sqrt{\lambda}x), \quad x \in [-1,1],$$

wobei $\sqrt{\lambda}$ eine beliebige Wurzel von $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei. Es ist leicht zu sehen, dass f_λ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{D}_{\max}(-1,1)$ enthalten ist. Wegen $f_\lambda(-1) = f_\lambda(1) = 0$ ist $f_\lambda \in \operatorname{dom} A_{0,0}(-1,1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, siehe Definition 2.6. Und da $(A_{0,0}(-1,1) - \lambda) f_\lambda = -f_\lambda'' - \lambda f_\lambda = 0$, folgt $\sigma(A_{0,0}(-1,1)) = \mathbb{C}$.

Wir werden in dieser Arbeit nur Sturm-Liouville-Differentialausdrücke betrachten, die bei den Endpunkten ihrer Definitionsintervalle entweder regulär sind oder im Grenzpunktfall. Für diese Fälle listen wir im folgenden Satz alle selbstadjungierten Realisierungen von τ und ℓ auf. Da all diese stets Einschränkungen des maximalen Operators sind, reicht es dafür, nur deren Definitionsbereiche anzugeben. Für einen Beweis verweisen wir auf [73, Sätze 13.15 und 13.21].

Satz und Definition 2.6. *Ist τ regulär, dann sind die selbstadjungierten Realisierungen $T_{\alpha,\beta}(a,b)$, $\alpha,\beta \in [0,\pi)$, von τ auf (a,b) mit getrennten Randbedingungen gegeben durch*

$$\operatorname{dom} T_{\alpha,\beta}(a,b) := \Big\{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : f(a)\cos(\alpha) + (pf')(a)\sin(\alpha) = 0 \\ f(b)\cos(\beta) + (pf')(b)\sin(\beta) = 0 \Big\}.$$

Die selbstadjungierten Realisierungen $T_B(a,b)$ von τ auf (a,b) mit gemischten Randbedingungen sind gegeben durch

$$\operatorname{dom} T_B(a,b) = \left\{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : \begin{pmatrix} f(b) \\ (pf')(b) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} f(a) \\ (pf')(a) \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $B = e^{it}R$ mit $t \in [0,2\pi)$ und $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\det R = 1$.

Ist τ regulär bei a und im Grenzpunktfall bei b, dann ist

$$\mathcal{D}_{\min}(a,b) = \{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : f(a) = (pf')(a) = 0 \},$$

und alle selbstadjungierten Realisierungen $T_{\alpha,\times}(a,b)$, $\alpha \in [0,\pi)$, von τ auf (a,b) sind gegeben durch

$$\operatorname{dom} T_{\alpha,\times}(a,b) := \Big\{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : \ f(a)\cos(\alpha) + (pf')(a)\sin(\alpha) = 0 \Big\}.$$

Ist τ im Grenzpunktfall bei a und regulär bei b, dann ist

$$\mathcal{D}_{\min}(a,b) = \{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : f(b) = (pf')(b) = 0 \},$$

und alle selbstadjungierten Realisierungen $T_{\times,\alpha}(a,b)$, $\alpha \in [0,\pi)$, von τ auf (a,b) sind gegeben durch

$$\operatorname{dom} T_{\times,\alpha}(a,b) := \Big\{ f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : \ f(b)\cos(\alpha) + (pf')(b)\sin(\alpha) = 0 \Big\}.$$

In den jeweiligen Fällen definieren wir

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}(a,b) &:= J_{a,b}\, T_{\alpha,\beta}(a,b), \\ A_B(a,b) &:= J_{a,b}\, T_B(a,b), \\ A_{\alpha,\times}(a,b) &:= J_{a,b}\, T_{\alpha,\times}(a,b), \\ A_{\times,\alpha}(a,b) &:= J_{a,b}\, T_{\times,\alpha}(a,b). \end{aligned}$$

Dies sind dann die selbstadjungierten Realisierungen von ℓ auf (a,b).

In den folgenden zwei Unterabschnitten wollen wir die folgende Bedingung an die Gewichtsfunktion w stellen:

(A) Ist ℓ bei a (bei b) singulär, dann gibt es $a' \in (a,b)$ (bzw. $b' \in (a,b)$), so dass w auf (a,a') (bzw. (b',b)) definit ist.

Unter dieser Bedingung werden wir Definisierbarkeitsaussagen über die selbstadjungierten Realisierungen von ℓ auf (a,b) machen können. Dabei verwenden wir die Methoden und Resultate aus Abschnitt 1. Es wird sich als entscheidend erweisen, zu zeigen, dass die Resolventenmenge der jeweiligen selbstadjungierten Realisierung nichtleer ist.

Das folgende Lemma wird bei unseren Betrachtungen Verwendung finden.

Lemma 2.7. *Ist* **(A)** *erfüllt, dann gilt*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(A_{\min}(a,b)\big) \subset \mathbb{R}.$$

Beweis. Es sei ℓ bei beiden Endpunkten singulär. Es gibt dann $a', b' \in (a,b)$, $a' < b'$, so dass w definit ist auf jeweils (a,a') und (b',b). Bezüglich der Zerlegung

$$L^2_{|w|}(a,b) = L^2_{|w|}(a,a') \oplus L^2_{|w|}(a',b') \oplus L^2_{|w|}(b',b)$$

definieren wir den Operator

$$S := A_{\min}(a,a') \oplus A_{\min}(a',b') \oplus A_{\min}(b',b).$$

Offensichtlich gilt

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\min}(a,a')) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\min}(a',b')) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\min}(b',b)).$$

Nach Satz 2.4 ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\min}(a',b')) = \varnothing$, und da $A_{\min}(a,a')$ und $A_{\min}(b',b)$ Hilbertraum-symmetrisch sind, folgt $\sigma_{\mathrm{ess}}(S) \subset \mathbb{R}$. Nun ist S aber eine vierdimensionale Einschränkung von $A_{\min}(a,b)$. Daher ist $\operatorname{ran}(A_{\min}(a,b) - \lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nach [54, Lemma III-1.9] abgeschlossen und wegen $\dim\ker(A_{\max}(a,b) - \overline{\lambda}) \leq 2$ auch endlich-kodimensional.

Im Falle, dass ℓ nur bei einem Endpunkt singulär ist, kann ähnlich wie oben verfahren werden, und falls ℓ regulär ist, gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\min}(a,b)) = \varnothing$, vgl. Satz 2.4. □

2.2 Der Fall eines singulären Endpunktes

In diesem Unterabschnitt nehmen wir an, dass der Differentialausdruck ℓ aus (2.1) auf (a,b) bei einem Endpunkt regulär und beim anderen im Grenzpunktfall ist. Unter anderem zeigt sich, dass unter der Voraussetzung **(A)** die Resolventenmenge jeder selbstadjungierten Realisierung von ℓ auf (a,b) nichtleer ist. Das Hauptergebnis dieses Unterabschnittes ist der folgende Satz.

Satz 2.8. *Der Differentialausdruck ℓ sei regulär bei a und im Grenzpunktfall bei b. Desweiteren gebe es ein $c \in (a,b)$, so dass die Gewichtsfunktion w auf (c,b) definit ist. Für beliebiges $\alpha \in [0,\pi)$ gelten dann die folgenden Aussagen für den Operator $A := A_{\alpha,\times}(a,b)$:*

(i) *Die Resolventenmenge von A ist nichtleer: $\rho(A) \neq \varnothing$.*

(ii) *A ist definisierbar über $\mathbb{C}$.*

(iii) *Für die lokale Spektralfunktion E von A gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{c.\,l.\,s.}\{E(\Delta)L^2_{|w|}(a,b) : \Delta \in \mathfrak{B}(A,\mathbb{C})\}\\ \subset\ \mathrm{c.\,l.\,s.}\{\ker(A_{\max}(a,b)-\lambda) : \lambda \in \rho(A)\}.\end{aligned}$$

(iv) *Mit $T = JA = T_{\alpha,\times}(a,b)$ gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T)$, falls w auf (c,b) positiv ist, und $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = -\sigma_{\mathrm{ess}}(T)$, falls w auf (c,b) negativ ist.*

Beweis. Wir nehmen $w > 0$ f.ü. auf (c,b) an. Der Fall $w < 0$ f.ü. auf (c,b) kann analog behandelt werden. Zunächst definieren wir die Operatoren

$$A_0 := A_{\alpha,0}(a,c) \oplus A_{0,\times}(c,b) \quad \text{und} \quad S := A_0 \cap A,$$

wobei die orthogonale Summe bezüglich der Zerlegung $L^2_{|w|}(a,b) = L^2_{|w|}(a,c) \oplus L^2_{|w|}(c,b)$ zu interpretieren ist. Der Definitionsbereich des Operators S ist dann

$$\operatorname{dom} S = \{f \in \mathcal{D}_{\max}(a,b) : f(a)\cos(\alpha) + (pf')(a)\sin(\alpha) = f(c) = 0\}.$$

Desweiteren ist die Kreinraumadjungierte von S gegeben durch

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} S^+ = \{\{u,v\} : u \in \mathcal{D}_{\max}(a,c),\ v \in \mathcal{D}_{\max}(c,b),\ u(c) = v(c),\\ u(a)\cos(\alpha) + (pu')(a)\sin(\alpha) = 0\}\end{aligned}$$

und $S^+\{u,v\} = \{A_{\max}(a,c)u,\ A_{\max}(c,b)v\}$ für $\{u,v\} \in \operatorname{dom} S^+$.

Wegen $\dim(A/S) = \dim(A_0/S) = 1$ gilt $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(S) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A_0)$. Damit folgt die Aussage (iv):

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\alpha,0}(a,c)) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{0,\times}(c,b)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{0,\times}(c,b)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T),$$

denn $A_{0,\times}(c,b) = T_{0,\times}(c,b)$ und $\sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\alpha,0}(a,c)) = \varnothing$ nach Satz 2.4.

Wir definieren nun einige Operatoren und Randtripel. Zunächst ist ein Randtripel für S^+ gegeben durch $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ mit $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom} S^+ \to \mathbb{C}$,

$$\Gamma_0\{u,v\} := v(c) \quad \text{und} \quad \Gamma_1\{u,v\} := (pv')(c) - (pu')(c), \quad \{u,v\} \in \operatorname{dom} S^+.$$

Die Surjektivität von $\binom{\Gamma_0}{\Gamma_1}$ ist leicht einzusehen (siehe z. B. [73, Satz 13.5(c)]). Desweiteren gilt für $f = \{u, v\}$, $g = \{w, z\} \in \operatorname{dom} S^+$:

$$\begin{aligned}[S^+f, g] - [f, S^+g] &= [\ell(u), w]_{a,c} - [u, \ell(w)]_{a,c} + [\ell(v), z]_{c,b} - [v, \ell(z)]_{c,b} \\ &= u(c)\overline{(pw')(c)} - (pu')(c)\overline{w(c)} - v(c)\overline{(pz')(c)} + (pv')(c)\overline{z(c)} \\ &= (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathbb{C}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathbb{C}}\,,\end{aligned}$$

siehe [73, Sätze 13.4(a) und 13.19(a)]. Mit S_{ac} bezeichnen wir die Einschränkung von $A_{\alpha,0}(a, c)$ auf

$$\operatorname{dom} S_{ac} := \{u \in \mathcal{D}_{\max}(a, c) : u(a)\cos(\alpha) + (pu')(a)\sin(\alpha) = u(c) = (pu')(c) = 0\}.$$

Dann ist

$$\operatorname{dom} S^+_{ac} := \{u \in \mathcal{D}_{\max}(a, c) : u(a)\cos(\alpha) + (pu')(a)\sin(\alpha) = 0\},$$

und $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,ac}, \Gamma_{1,ac}\}$ mit $\Gamma_{0,ac}, \Gamma_{1,ac} : \operatorname{dom} S^+_{ac} \to \mathbb{C}$,

$$\Gamma_{0,ac}u := u(c), \quad \Gamma_{1,ac}u := -(pu')(c), \quad u \in \operatorname{dom} S^+_{ac},$$

ist ein Randtripel für S^+_{ac}. Mit den Abbildungen $\Gamma_{0,cb}, \Gamma_{1,cb} : \operatorname{dom} A_{\max}(c, b) \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\Gamma_{0,cb}v := v(c), \quad \Gamma_{1,cb}v := (pv')(c), \quad v \in \operatorname{dom} A_{\max}(c, b),$$

ist zudem ein Randtripel für $A_{\max}(c, b)$ gegeben durch $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,cb}, \Gamma_{1,cb}\}$.

Mit M (M_{ac}, M_{cb}) bezeichnen wir die Weylfunktion bezüglich des Randtripels $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ (bzw. $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,ac}, \Gamma_{1,ac}\}$, $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,cb}, \Gamma_{1,cb}\}$). Es seien nun $\lambda \in \rho(A_0)$ und $f = \{u, v\} \in \ker(S^+ - \lambda)$. Dann ist $u \in \ker(S^+_{ac} - \lambda)$, $v \in \ker(A_{\max}(c, b) - \lambda)$, und es gilt

$$\begin{aligned}M_{ac}(\lambda)\Gamma_0 f + M_{cb}(\lambda)\Gamma_0 f &= M_{ac}(\lambda)\Gamma_{0,ac}u + M_{cb}(\lambda)\Gamma_{0,cb}v \\ &= \Gamma_{1,ac}u + \Gamma_{1,cb}v \\ &= (pv')(c) - (pu')(c) = \Gamma_1 f = M(\lambda)\Gamma_0 f.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$M(\lambda) = M_{ac}(\lambda) + M_{cb}(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A_0) = \rho(A_{\alpha,0}(a, c)) \cap \rho(A_{0,\times}(c, b)).$$

Wir nehmen nun an, die Aussage (i) gelte nicht. Wegen Lemma 2.7 und

$$f \in \ker(A_{\alpha,\times}(a, b) - \lambda) \quad \Longrightarrow \quad \overline{f} \in \ker(A_{\alpha,\times}(a, b) - \overline{\lambda})$$

ist dann jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A_{\alpha,\times}(a,b)$. Für $\lambda \in \rho(A_0) \setminus \mathbb{R}$ ist dies nach (1.25) in Proposition 1.32 gleichbedeutend mit $M(\lambda) = 0$. Es gilt also

$$M_{ac}(\lambda) = -M_{cb}(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in \rho(A_0) \setminus \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Nach Satz 2.4 ist der Operator $A_{\alpha,0}(a,c)$ nichtnegativ in einer Umgebung von ∞. Daher existiert $R > 0$, so dass (R,∞) positiven Typs ist bezüglich $A_{\alpha,0}(a,c)$. Es sei $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}^+ \cap \rho(A_{\alpha,0}(a,c))$ eine Folge, die gegen ein $\lambda \in (R,\infty)$ konvergiert. Nach Satz 1.33 gilt dann (ist $\lambda \in \rho(A_{\alpha,0}(a,c))$, dann folgt dies trivialerweise)

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{Im} M_{ac}(\lambda_n) \geq 0.$$

Wegen (2.7) folgt daraus

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{Im} M_{cb}(\lambda_n) \leq 0.$$

Da $(L^2_{|w|}(c,b), [\cdot\,,\cdot]_{c,b})$ aber ein Hilbertraum ist, ist M_{cb} eine Nevanlinnafunktion (siehe Lemma 1.31(v)). Folglich gilt $\operatorname{Im} M_{cb}(\lambda_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit sogar

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} M_{cb}(\lambda_n) = 0.$$

Aus dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip (siehe z.B. [68, Satz 11.14]) folgt nun, dass M_{cb} auf (R,∞) holomorph fortsetzbar ist: $(R,\infty) \subset \rho(M_{cb})$. Aufgrund der Tatsache, dass der minimale Operator $A_{\min}(c,b)$ einfach ist (siehe [39] oder den Beweis von (iii)), gehört das Intervall (R,∞) nach Proposition 1.35 zur Resolventenmenge des Operators $A_{0,\times}(c,b) = A_{\max}(c,b) \restriction \ker \Gamma_{0,cb}$. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 2.2(b), und (i) ist gezeigt.

Für den Beweis der Aussage (ii) genügt es nach Satz 1.20 zu zeigen, dass der Operator A_0 über $\mathbb{C}$ definisierbar ist. Da $A_{0,\times}(c,b)$ selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_w(c,b)$ ist und $A_{\alpha,0}(a,c)$ nach Satz 2.4 endlich viele negative Quadrate hat (und damit insbesondere definisierbar ist), sind die Bedingungen (i) und (ii) in Definition 1.8 für den Operator A_0 offenbar erfüllt. Es sei $\lambda \in \sigma(A_0) \cap \mathbb{R}$. Da $\sigma(A_{\alpha,0}(a,c))$ aus isolierten Eigenwerten besteht, gibt es ein offenes Intervall I_λ mit $\lambda \in I_\lambda$, so dass $I_\lambda \setminus \{\lambda\} \subset \rho(A_{\alpha,0}(a,c))$. Daraus folgt nun fast unmittelbar, dass beide Zusammenhangskomponenten von $I_\lambda \setminus \{\lambda\}$ positiven Typs bezüglich A_0 sind. Damit ist gezeigt, dass A_0 über $\mathbb{C}$ definisierbar ist.

Es bleibt, die Aussage (iii) zu beweisen. Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ seien φ_λ und ψ_λ die Lösungen von $(\ell - \lambda)u = 0$ auf (a,b), die den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(a) &= \cos\alpha\,, \quad (p\varphi'_\lambda)(a) = \sin\alpha \\ \psi_\lambda(a) &= -\sin\alpha\,, \quad (p\psi'_\lambda)(a) = \cos\alpha \end{aligned}$$

genügen. Für $\lambda \in \rho(A)$ gibt es nach der Weylschen Alternative genau eine Lösung g_λ von $(\ell - \lambda)u = 0$ mit $g(a)\cos(\alpha) + g'(a)\sin(\alpha) = 1$, die in $L^2_{|w|}(a,b)$ liegt. Mit dieser kann die Resolvente von A in λ wie folgt dargestellt werden:

$$\big((A-\lambda)^{-1}h\big)(x) = \int_a^b G_\lambda(x,y)h(y)w(y)\,dy \quad \big(h \in L^2_{|w|}(a,b),\ \lambda \in \rho(A)\big).$$

Dabei ist der Kern G_λ definiert durch

$$\begin{aligned} G_\lambda(x,y) &= \begin{cases} g_\lambda(x)\psi_\lambda(y), & y \in [a,x) \\ \psi_\lambda(x)g_\lambda(y), & y \in [x,b). \end{cases} \\ &= \psi_\lambda(x)g_\lambda(y) + \begin{cases} \varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(y) - \psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y), & y \in [a,x) \\ 0, & y \in [x,b). \end{cases} \end{aligned}$$

Es sei nun f eine Funktion, so dass $f\,[\perp]\,\ker(A_{\max}(a,b) - \lambda)$ für alle $\lambda \in \rho(A)$ gilt. Wegen $f\,[\perp]\,g_{\overline{\lambda}}$ und $g_{\overline{\lambda}} = \overline{g_\lambda}$ gilt für $\lambda \in \rho(A)$:

$$\Phi(x,\lambda) := \big((A-\lambda)^{-1}f\big)(x) = \varphi_\lambda(x) \cdot \int_a^x \psi_\lambda f w\,dy \;-\; \psi_\lambda(x) \cdot \int_a^x \varphi_\lambda f w\,dy.$$

Offenbar ist die Funktion Φ auf $[a,b) \times \mathbb{C}$ stetig.

Es seien g eine Funktion in $L^2_{|w|}(a,b)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp}(g)$ und $\Delta \in \mathfrak{B}(A,\mathbb{C})$, $\Delta = [-R,R]$, $R > 0$. Dann gilt (siehe [59])

$$E(\Delta)f = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-R-\delta}^{R+\delta} \big[(A - (t+i\varepsilon))^{-1} - (A - (t-i\varepsilon))^{-1}\big]\, f\,dt.$$

Es sei $[a',b'] \subset (a,b)$ ein Intervall, so dass $\operatorname{supp}(g) \subset [a',b']$. Dann folgt

$$[E(\Delta)f,g] = \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-R-\delta}^{R+\delta} \int_{a'}^{b'} F_\varepsilon(x,t)\,dx\,dt,$$

wobei

$$F_\varepsilon(x,t) := \big(\Phi(x,t+i\varepsilon) - \Phi(x,t-i\varepsilon)\big)\,\overline{g(x)}\,w(x).$$

Es sei $\varepsilon' > 0$ gegeben. Dann existiert $\delta' > 0$, so dass $|\Phi(x,\lambda) - \Phi(y,\mu)| < \varepsilon'$, falls $|x-y| + |\lambda - \mu| < \delta'$, $x,y \in [a',b']$, $|\lambda| \le 2R$ und $|\mu| \le 2R$. Für $\varepsilon < \delta'/2$ gilt also

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R-\delta}^{R+\delta} \int_{a'}^{b'} F_\varepsilon(x,t)\,dx\,dt \right| &\le \varepsilon' \int_{-R-\delta}^{R+\delta} \int_{a'}^{b'} |g(x)|\,|w(x)|\,dx\,dt \\ &\le 2(R+\delta)\|g\|_{L^2_{|w|}(a,b)}\|w\|_{L^1(a',b')}\varepsilon', \end{aligned}$$

und es folgt $[E(\Delta)f, g] = 0$. Da die betrachteten Funktionen g dicht in $L^2_{|w|}(a,b)$ liegen, erhalten wir $E(\Delta)f = 0$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass auch $E(\{\lambda_0\})f = 0$ für jeden nichtreellen Eigenwert λ_0 von A gilt. Seien also $\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \mathbb{R}$ und g eine Funktion mit kompaktem Träger wie oben. Dann gilt für jedes hinreichend kleine $\delta > 0$

$$[E(\{\lambda_0\})f, g] = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{a'}^{b'} H_\delta(x,t)\, dx\, dt,$$

wobei

$$H_\delta(x,t) = \delta e^{it}\, \Phi(x, \lambda_0 + \delta e^{it})\, \overline{g(x)}\, w(x).$$

Lassen wir nun δ gegen Null streben, erhalten wir mit einer ähnlichen Argumentation wie oben $E(\{\lambda_0\})f = 0$. □

Für den Fall, dass w auf (a,b) definit ist, folgt aus Satz 2.8(iii) das folgende Korollar.

Korollar 2.9. *Der Differentialausdruck ℓ sei regulär bei a und im Grenzpunktfall bei b. Ist w definit auf (a,b), dann ist $A_{\min}(a,b)$ einfach.*

Es sei bemerkt, dass diese Aussage wohlbekannt und, zumindest für den Fall $w = 1$, $p \in C^2([a,b))$ und $q \in C([a,b))$, in [39] bewiesen ist. Die hier angewandten Methoden sind denen in [39] sehr ähnlich.

Wir erhalten ein besseres Ergebnis als Satz 2.8, wenn der minimale Operator $T_{\min}(a,b)$ nach unten beschränkt ist.

Satz 2.10. *Der Differentialausdruck ℓ sei regulär bei a und im Grenzpunktfall bei b. Es seien* **(A)** *erfüllt und $\alpha \in [0,\pi)$ beliebig. Ist $T_{\min}(a,b)$ nach unten beschränkt, dann gelten die folgenden Aussagen für den Operator $A := A_{\alpha,\times}(a,b)$:*

(i) *Die Resolventenmenge von A ist nichtleer: $\rho(A) \neq \varnothing$.*

(ii) *A ist definisierbar (über $\overline{\mathbb{C}}$) und nichtnegativ in einer Umgebung von ∞.*

(iii) *$A_{\min}(a,b)$ ist einfach.*

Ist $T_{\min}(a,b)$ nicht *nach unten beschränkt und die Gewichtsfunktion w indefinit, dann ist A* nicht *definisierbar.*

Beweis. Ist $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(a,b)) > 0$, dann folgt (ii) aus Satz 1.24. Es sei also $\min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(a,b)) \leq 0$. Desweiteren sei $c \in (a,b)$, so dass w f.ü. auf (c,b) definit ist. Ohne Einschränkung nehmen wir an, w sei positiv f.ü. auf (c,b), und setzen

$$\mathcal{H}_+ := L^2_{|w|}(c,b),\ \mathcal{H}_d := L^2_{|w|}(a,c),\ \mathcal{G}_+ := \mathcal{D}_{\min}(c,b),\ \mathcal{G}_d := \mathcal{D}_{\min}(a,c).$$

Dann sind die Bedingungen (i)$^+$–(iii)$^+$ aus Korollar 1.27 erfüllt (mit $T := J_{a,b}A$), und A ist definisierbar. Aus Satz 2.8(iii) folgt dass $A_{\min}(a,b)$ einfach ist bezüglich aller Operatoren $A_{\alpha,\times}(a,b)$, $\alpha \in [0,\pi)$. Da dies nach Satz 2.6 aber bereits alle selbstadjungierten Erweiterungen von $A_{\min}(a,b)$ sind, folgt (iii). Die letzte Behauptung folgt aus Satz 1.20 und der Tatsache, dass der Operator $A_0 = A_{\alpha,0}(a,c) \oplus A_{0,\times}(c,b)$ in keiner Umgebung von ∞ definisierbar ist, wenn der Operator $T_{\min}(a,b)$ nach unten unbeschränkt ist. □

2.3 Der Fall zweier singulärer Endpunkte

Im folgenden werden wir Differentialausdrücke ℓ betrachten, die bei beiden Endpunkten a und b im Grenzpunktfall sind. In diesem Fall ist

$$A := A_{\max}(a,b) = A_{\min}(a,b)$$

die einzige selbstadjungierte Realisierung von ℓ auf (a,b). Im nachfolgenden Satz stellen wir einige notwendige Bedingungen für den Fall zusammen, in dem die Resolventenmenge von A leer ist.

Satz 2.11. *Der Differentialausdruck ℓ sei im Grenzpunktfall bei a und b. Desweiteren gebe es $a', b' \in (a,b)$, $a' < b'$, so dass die Gewichtsfunktion w definit ist auf jeweils (a,a') und (b',b). Ist die Resolventenmenge von A leer, dann sind die folgenden Bedingungen erfüllt.*

(i) *Für alle $\alpha \in [0,\pi)$ gelten*

$$\sigma\big(A_{\alpha,\times}(a',b)\big) = \sigma\big(A_{\times,\alpha}(a,a')\big) \quad \text{und} \quad \sigma\big(A_{\times,\alpha}(a,b')\big) = \sigma\big(A_{\alpha,\times}(b',b)\big).$$

Diese Spektren sind insbesondere reell.

(ii) *Für alle $\alpha \in [0,\pi)$ ist $\mathbb{R}$ positiven (negativen) Typs bzgl. $A_{\alpha,\times}(a',b)$, wenn w auf (a,a') negativ (bzw. positiv) ist.*

(iii) *Für alle $\alpha \in [0,\pi)$ ist $\mathbb{R}$ positiven (negativen) Typs bzgl. $A_{\times,\alpha}(a,b')$, wenn w auf (b',b) negativ (bzw. positiv) ist.*

(iv) *$\sigma_{\mathrm{ess}}\big(T_{\max}(a,b)\big) = -\sigma_{\mathrm{ess}}\big(T_{\max}(a,b)\big)$, falls w auf (a,a') und (b',b) unterschiedliche Vorzeichen hat.*

Beweis. Es sei $\alpha \in [0,\pi)$. Wir definieren Abbildungen $\Gamma_{0,a'b}, \Gamma_{1,a'b} : \mathcal{D}_{\max}(a',b) \to \mathbb{C}$ durch

$$\Gamma_{0,a'b}y := y(a')\cos(\alpha) + (py')(a')\sin(\alpha)$$
$$\Gamma_{1,a'b}y := (py')(a')\cos(\alpha) - y(a')\sin(\alpha)$$

für $y \in \mathcal{D}_{\max}(a', b)$ und $\Gamma_{0,aa'}, \Gamma_{1,aa'} : \mathcal{D}_{\max}(a, a') \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,aa'} g &:= g(a')\cos(\alpha) + (pg')(a')\sin(\alpha)\\ \Gamma_{1,aa'} g &:= -(pg')(a')\cos(\alpha) + g(a')\sin(\alpha)\end{aligned}$$

für $g \in \mathcal{D}_{\max}(a, a')$. Dann ist $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,a'b}, \Gamma_{1,a'b}\}$ ein Randtripel für $A_{\max}(a', b)$, und $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,aa'}, \Gamma_{1,aa'}\}$ ist ein Randtripel für $A_{\max}(a, a')$.

Es sei weiter $S := A \restriction \operatorname{dom} S$, wobei

$$\operatorname{dom} S := \{f \in \mathcal{D}_{\max}(a, b) : f(a')\cos(\alpha) + (pf')(a')\sin(\alpha) = 0\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} S^+ = \{\{g, y\} :\ & g \in \mathcal{D}_{\max}(a, a'),\ y \in \mathcal{D}_{\max}(a', b),\\ & g(a')\cos(\alpha) + (pg')(a')\sin(\alpha) = y(a')\cos(\alpha) + (py')(a')\sin(\alpha)\}\end{aligned}$$

und $S^+\{g, y\} = \{\ell(g), \ell(y)\}$ für $\{g, y\} \in \operatorname{dom} S^+$. Mit den Abbildungen $\Gamma_0, \Gamma_1 : \operatorname{dom} S^+ \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\Gamma_0\{g, y\} &:= y(a')\cos(\alpha) + (py')(a')\sin(\alpha),\\ \Gamma_1\{g, y\} &:= (py')(a')\cos(\alpha) - y(a')\sin(\alpha) - (pg')(a')\cos(\alpha) + g(a')\sin(\alpha),\end{aligned}$$

$\{g, y\} \in \operatorname{dom} S^+$, ist $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ ein Randtripel für S^+.

Es sei M ($M_{aa'}$, $M_{a'b}$) die Weylfunktion bezüglich des Randtripels $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ (bzw. $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,aa'}, \Gamma_{1,aa'}\}$, $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,a'b}, \Gamma_{1,a'b}\}$). Desweiteren sei

$$A_0 := S^+ \restriction \ker \Gamma_0 = A_{\times,\alpha}(a, a') \oplus A_{\alpha,\times}(a', b).$$

Für $\lambda \in \rho(A_0)$ und $f = \{g, y\} \in \ker(S^+ - \lambda)$ gilt

$$\begin{aligned}M_{aa'}(\lambda)\Gamma_0 f + M_{a'b}(\lambda)\Gamma_0 f &= M_{aa'}(\lambda)\Gamma_{0,aa'} g + M_{a'b}(\lambda)\Gamma_{0,a'b} y\\ &= \Gamma_{1,aa'} g + \Gamma_{1,a'b} y = \Gamma_1 f\\ &= M(\lambda)\Gamma_0 f,\end{aligned}$$

und es folgt

$$M(\lambda) = M_{aa'}(\lambda) + M_{a'b}(\lambda), \quad \lambda \in \rho(A_0). \tag{2.8}$$

Wegen $\rho(A) = \varnothing$ und $A = S^+ \restriction \ker \Gamma_1$ ist nach Proposition 1.32 $M(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \rho(A_0)$. Mithilfe von Satz 2.8 und (2.8) erhalten wir

$$M_{aa'} = -M_{a'b}. \tag{2.9}$$

Insbesondere gilt $\rho(M_{aa'}) = \rho(M_{a'b})$. Da w auf (a, a') definit ist, ist der minimale Operator $A_{\min}(a, a')$ nach Korollar 2.9 einfach, und mit Anwendung von

Proposition 1.35 ergibt sich $\rho(M_{aa'}) = \rho(A_{\times,\alpha}(a,a'))$. Nach Satz 2.8 ist der Operator $A_{\alpha,\times}(a',b)$ definisierbar über $\mathbb{C}$, und für die lokale Spektralfunktion E von $A_{\alpha,\times}(a',b)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{c.\,l.\,s.}\{E(\Delta)L^2_{|w|}(a',b) : \Delta \in \mathfrak{B}(A_{\alpha,\times}(a',b),\mathbb{C})\} \\ \subset \ \mathrm{c.\,l.\,s.}\{\ker(A_{\max}(a',b)-\lambda) : \lambda \in \rho(A_{\alpha,\times}(a',b))\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Mit Proposition 1.35 folgt $\rho(M_{a'b}) = \rho(A_{\alpha,\times}(a',b))$. Damit ist die erste Gleichung in (i) gezeigt. Die zweite ergibt sich mit ähnlichen Betrachtungen.

Um (ii) zu zeigen sei w auf (a,a') negativ. Dann ist $(L^2_{|w|}(a,a'), -[\cdot\,,\cdot]_{a,a'})$ ein Hilbertraum. Mit $\gamma_{aa'}$ ($\gamma_{a'b}$) bezeichnen wir das Gammafeld des Randtripels $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,aa'}, \Gamma_{1,aa'}\}$ (bzw. $\{\mathbb{C}, \Gamma_{0,a'b}, \Gamma_{1,a'b}\}$). Es sei

$$y \in \mathrm{span}\{\ker(A_{\max}(a',b)-\lambda) : \lambda \in \rho(A_{\alpha,\times}(a',b)\},$$

also $y = \sum_{k=1}^n z_k \gamma_{a'b}(\lambda_k)$ mit $z_k \in \mathbb{C}$ und $\lambda_k \in \rho(A_{\alpha,\times}(a',b))$, $k = 1,\dots,n$. Mit $g := \sum_{k=1}^n z_k \gamma_{aa'}(\lambda_k)$ gilt dann

$$\begin{aligned} [y,y]_{a',b} &= \sum_{j,k=1}^n [\gamma_{a'b}(\lambda_k)z_k, \gamma_{a'b}(\lambda_j)z_j]_{a',b} = \sum_{j,k=1}^n \overline{z_j}\, \gamma_{a'b}(\lambda_j)^+ \gamma_{a'b}(\lambda_k) z_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{M_{a'b}(\lambda_k) - M_{a'b}(\overline{\lambda_j})}{\lambda_k - \overline{\lambda_j}}\, z_k \overline{z_j} \\ &= -\sum_{j,k=1}^n \frac{M_{aa'}(\lambda_k) - M_{aa'}(\overline{\lambda_j})}{\lambda_k - \overline{\lambda_j}}\, z_k \overline{z_j} \\ &= -[g,g]_{a,a'} = \|g\|^2_{a,a'}\,. \end{aligned}$$

Der Unterraum

$$\mathrm{c.\,l.\,s.}\{\ker(A_{\max}(a',b)-\lambda) : \lambda \in \rho(A_{\alpha,\times}(a',b))\}$$

ist also bezüglich des inneren Produktes $[\cdot\,,\cdot]_{a',b}$ nichtnegativ. Aus (2.10) folgt nun, dass der Kreinraum

$$\Big(E(\Delta)L^2_{|w|}(a',b), [\cdot\,,\cdot]_{a',b}\Big)$$

für jedes Intervall $\Delta \in \mathfrak{B}(A_{\alpha,\times}(a',b),\mathbb{C})$ tatsächlich ein Hilbertraum ist. Folglich ist $\mathbb{R}$ positiven Typs bezüglich $A_{\alpha,\times}(a',b)$. Die Behauptung im Falle der Positivität von w auf (a,a') zeigt man analog. Auch die Aussage (iii) zeigt man mit ähnlichen Methoden.

Es bleibt, (iv) zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei w positiv auf (b',b) und negativ auf (a,a'). Es sei $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\max}(a,b))$. Dann ist

$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\times,0}(a,a'))$ oder $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{0,\times}(b',b))$. Ohne Einschränkung sei $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{0,\times}(b',b))$. Dann ist auch $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{0,\times}(a',b))$, und mit Satz 2.8(iv) folgt $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{0,\times}(a',b))$. Da $\mathbb{R}$ nach (ii) positiven Typs ist bezüglich $A_{0,\times}(a',b)$, muss λ_0 ein Häufungspunkt des Spektrums von $A_{0,\times}(a',b)$ sein. Nach (i) ist λ_0 also auch ein Häufungspunkt des Spektrums von $A_{\times,0}(a,a') = -T_{\times,0}(a,a')$. Dies impliziert $-\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\times,0}(a,a')) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\max}(a,b))$, und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 2.12. Die notwendigen Bedingungen für eine leere Resolventenmenge des Operators A in Satz 2.11 zeigen, dass dieser Fall „höchstunwahrscheinlich“ ist. Bedauerlicherweise ist es uns nicht gelungen, diesen Fall komplett auszuschließen. Wir bemerken, dass diese Frage im Spezialfall $a' = b'$ in [50, Problem 3.3] als „offenes Problem“ formuliert wird.

Wir verwenden nun die Ergebnisse aus Satz 2.11, um in einigen Spezialfällen zu zeigen, dass die Resolventenmenge von A nichtleer ist. Zudem werden die Störungssätze aus Abschnitt 1 angewandt, um Definisierbarkeitsaussagen über den Operator A zu machen.

Satz 2.13. *Der Differentialausdruck ℓ sei im Grenzpunktfall bei a und b, und es gebe $a', b' \in (a,b)$, $a' < b'$, so dass die Gewichtsfunktion w auf (a,a') und (b',b) gleiches Vorzeichen hat. Ist $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\max}(a,b)) \neq \varnothing$, dann ist $\rho(A) \neq \varnothing$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Funktion w auf $(a,a') \cup (b',b)$ positiv ist. Es sei $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\max}(a,b))$. Wäre die Resolventenmenge von A leer, dann wäre nach Satz 2.11(i) und Satz 2.8(iv)

$$\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{\alpha,\times}(a',b)) \tag{2.11}$$

für alle $\alpha \in [0,\pi)$. Wir wählen ein $\alpha \in [0,\pi)$, so dass $\lambda_0 \in \rho(A_{\alpha,0}(a',b'))$. Das ist nach Satz 2.1 möglich. Dann ist offenbar ein offenes Intervall um λ_0 positiven Typs bezüglich des Operators $A_{\alpha,0}(a',b') \oplus A_{0,\times}(b',b)$. Nach Satz 1.20 gibt es also eine offene Umgebung Δ von λ_0, so dass $\Delta \setminus \{\lambda_0\}$ positiven Typs ist bezüglich $A_{\alpha,\times}(a',b)$. Da die reelle Achse nach Satz 2.11 aber negativen Typs ist bezüglich $A_{\alpha,\times}(a',b)$, muss λ_0 ein isolierter Punkt des Spektrums von $A_{\alpha,\times}(a',b)$ sein. Und da dieser Operator über $\mathbb{C}$ definisierbar ist, ist λ_0 daher ein isolierter Eigenwert von $A_{\alpha,\times}(a',b)$ mit endlicher algebraischer Vielfachheit. Das widerspricht aber (2.11). □

Satz 2.14. *Der Differentialausdruck ℓ sei im Grenzpunktfall bei a und b. Desweiteren gebe es $a', b' \in (a,b)$, $a' < b'$, so dass die Gewichtsfunktion w definit ist auf jeweils (a,a') und (b',b). Ist einer der Operatoren $T_{\min}(a,a')$ und $T_{\min}(b',b)$ nach unten beschränkt, dann ist $\rho(A) \neq \varnothing$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $T_{\min}(b',b)$ nach unten beschränkt und w auf (b',b) positiv. Dann ist auch $T_{\min}(a',b)$ nach unten beschränkt, und nach Satz 2.10 ist der Operator $A_{0,\times}(a',b)$ definisierbar. Wir nehmen $\rho(A) = \varnothing$ an. Dann folgt aus der Definisierbarkeit von $A_{0,\times}(a',b)$, aus $\sigma(A_{0,\times}(a',b)) \subset \mathbb{R}$ nach Satz 2.11(i) und aus der Tatsache, dass nach Satz 2.11(ii) die ganze reelle Achse definiten Typs ist bezüglich $A_{0,\times}(a',b)$, dass $(L^2_{|w|}(a',b), [\cdot\,,\cdot]_{a',b})$ ein Hilbertraum ist (denn w ist nach Annahme positiv auf (b',b)). Insbesondere ist dann $A_{0,\times}(a',b) = T_{0,\times}(a',b)$. Ist w auch auf (a,a') positiv, dann ist $(L^2_{|w|}(a,b), [\cdot\,,\cdot]_{a,b})$ ein Hilbertraum, und $A = T_{\max}(a,b)$ ist selbstadjungiert in diesem. Dies widerspricht aber der Annahme $\rho(A) = \varnothing$. Ist andernfalls w negativ auf (a,a'), dann folgt aus Satz 2.11(i):

$$\sigma(T_{\times,0}(a,a')) = -\sigma(A_{\times,0}(a,a')) = -\sigma(A_{0,\times}(a',b)) = -\sigma(T_{0,\times}(a',b)),$$

und diese Menge ist nach oben beschränkt. Also ist der Operator $T_{\times,0}(a,a')$ nach oben beschränkt, was einen Widerspruch zu Lemma 2.2(b) darstellt. □

Satz 2.15. *Der Differentialausdruck ℓ sei im Grenzpunktfall bei a und b. Desweiteren gebe es $a', b' \in (a,b)$, $a' < b'$, so dass die Gewichtsfunktion w definit ist auf jeweils (a,a') und (b',b). Ist der Operator $T_{\min}(a,b)$ nach unten beschränkt, dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Hat w auf (a,a') und (b',b) gleiche Vorzeichen, dann ist A definisierbar.*

(b) *Hat w auf (a,a') und (b',b) verschiedene Vorzeichen, dann ist A definisierbar über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$, wobei $\mu = \min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(a,b))$.*

In jedem Fall ist A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞.

Beweis. Da $T_{\min}(a,b)$ nach unten beschränkt ist, sind die Operatoren $T_{\min}(a,a')$ und $T_{\min}(b',b)$ ebenfalls nach unten beschränkt. Daher ist die Resolventenmenge von A nach Satz 2.14 nichtleer. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei w auf (b',b) positiv. Es sei $T := J_{ab}A = T_{\min}(a,b) = T_{\max}(a,b)$, und μ sei definiert wie in (b). Ist $\mu > 0$, dann folgen die Behauptungen aus Satz 1.24. Sei also $\mu \leq 0$. Im Fall (a) setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+ &:= L^2_{|w|}(a,a') \oplus L^2_{|w|}(b',b), \quad \mathcal{H}_d := L^2_{|w|}(a',b'), \\ \mathcal{G}_+ &:= \mathcal{D}_{\min}(a,a') \oplus \mathcal{D}_{\min}(b',b), \quad \mathcal{G}_d := \mathcal{D}_{\min}(a',b'). \end{aligned}$$

Dann sind die Bedingungen $(\mathrm{i})^+$–$(\mathrm{iii})^+$ in Korollar 1.27 erfüllt, und es folgt die Behauptung. Im Fall (b) ist w negativ auf (a,a'), und wir definieren die Unterräume

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_+ &:= L^2_{|w|}(b',b), \quad \mathcal{H}_- := L^2_{|w|}(a,a'), \quad \mathcal{H}_d := L^2_{|w|}(a',b'), \\ \mathcal{G}_+ &:= \mathcal{D}_{\min}(b',b), \quad \mathcal{G}_- := \mathcal{D}_{\min}(a,a'), \quad \mathcal{G}_d := \mathcal{D}_{\min}(a',b'). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 1.25. □

Im folgenden Korollar stellen wir Bedingungen an die Koeffizientenfunktionen w, p und q, so dass die Voraussetzungen von Satz 2.15 erfüllt sind.

Korollar 2.16. *Es sei $(a,b) = \mathbb{R}$, und es gebe $a', b' \in \mathbb{R}$, $a' < b'$, so dass die Gewichtsfunktion w definit ist auf jeweils $(-\infty, a')$ und (b', ∞). Zusätzlich seien die Funktionen $s_\pm(x) = \int_0^x \frac{1}{p(t)} dt$, $x \in \mathbb{R}^\pm$, jeweils keine Elemente von $L^2_{|w|}(\mathbb{R}^\pm)$ und*

$$Q_{\pm\infty} := \liminf_{x \to \pm\infty} \frac{q(x)}{|w(x)|} > -\infty. \tag{2.12}$$

Dann ist der Differentialausdruck ℓ im Grenzpunktfall bei $\pm\infty$, der Operator $T_{\min}(-\infty, \infty)$ ist nach unten beschränkt, und es gilt

$$\min\{Q_{-\infty}, Q_{+\infty}\} \leq \min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(-\infty, \infty)).$$

Insbesondere gelten die Aussagen aus Satz 2.15 für den indefiniten Sturm-Liouville-Operator A.

Beweis. Wegen $s_\pm \notin L^2_{|w|}(\mathbb{R}^\pm)$ und (2.12) folgt aus [73, Satz 13.24], dass τ (und damit auch ℓ) im Grenzpunktfall ist bei $\pm\infty$. Es seien $\gamma_\pm < Q_{\pm\infty}$ reelle Zahlen. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass a' und b' so gewählt sind, dass

$$\frac{q(x)}{|w(x)|} \geq \gamma_+, \quad x \in (b', \infty), \quad \text{und} \quad \frac{q(x)}{|w(x)|} \geq \gamma_-, \quad x \in (-\infty, a')$$

gilt. Mit [74, Theorem 6.A.1 (Seite 104)] folgt daraus, dass $T_{\min}(-\infty, a')$ durch γ_- und $T_{\min}(b', \infty)$ durch γ_+ nach unten beschränkt ist. Dies impliziert einerseits, dass $T_{\min}(-\infty, \infty)$ nach unten beschränkt ist und andererseits

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(-\infty, \infty)) = \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(-\infty, a')) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(b', \infty)) \subset [\min\{\gamma_-, \gamma_+\}, \infty).$$

Mit $\gamma_\pm \to Q_{\pm\infty}$ ist das Korollar bewiesen. □

Ein Spezialfall von Korollar 2.16 ist gegeben, wenn $p = 1$, $w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ außerhalb eines kompakten Intervalls und wenn die Grenzwerte von $q(x)$ für $x \to \pm\infty$ existieren. Es ist dann leicht zu sehen, dass $\sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(-\infty, \infty)) = [\min\{q_{+\infty}, q_{-\infty}\}, \infty)$ gilt. In diesem Fall reduziert sich Satz 2.15 auf das folgende Korollar.

Korollar 2.17. *Es seien $(a,b) = \mathbb{R}$, $p \equiv 1$, $a', b' \in \mathbb{R}$, $a' < b'$, und $w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für fast alle $x \in (-\infty, a') \cup (b', \infty)$. Wenn die Grenzwerte*

$$q_{-\infty} := \lim_{x \to -\infty} q(x) \qquad \text{und} \qquad q_{+\infty} := \lim_{x \to +\infty} q(x)$$

existieren, dann ist

$$\mu := \min \sigma_{\mathrm{ess}}(T_{\min}(-\infty, \infty)) = \min\{q_{-\infty}, q_{+\infty}\},$$

der Operator A ist definisierbar über $\overline{\mathbb{C}} \setminus [\mu, -\mu]$, nichtnegativ in einer Umgebung von ∞ und $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = (-\infty, -q_{-\infty}] \cup [q_{+\infty}, \infty)$.

Wir bemerken, dass Korollar 2.17 im Fall $a' = b'$ einen Spezialfall von Theorem 3.11 in [53] darstellt. Dort wird der Definisierbarkeitsbereich von A auch für den Fall angegeben, in dem die Grenzwerte $q_{\pm\infty}$ nicht existieren, der Differentialausdruck τ aber dennoch im Grenzpunktfall bei $\pm\infty$ ist. In diesem Fall folgt $\rho(A) \neq \varnothing$ aus einer Betrachtung des asymptotischen Verhaltens der Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten von τ auf $\mathbb{R}^{\pm}$ (siehe [52, Proposition 2.5] und [36]). Unter der zusätzlichen Bedingung $q - q_{-\infty} \in L^1(-\infty, a')$ und $q - q_{+\infty} \in L^1(b', \infty)$ ist Korollar 2.17 als Corollary 3.4 in [5] zu finden.

3 Sturm-Liouville-Operatoren mit periodischen Koeffizienten

In diesem Abschnitt wollen wir den Differentialausdruck ℓ aus (2.1) auf $(a, b) = \mathbb{R}$ betrachten und annehmen, dass die Koeffizientenfunktionen w, p und q periodisch sind mit der Periode $a > 0$. Es ist bekannt (siehe [73, Kapitel 16]), dass das Spektrum des maximalen Operators A bezüglich ℓ im definiten Fall (d. h. $w > 0$ f.ü.) nach unten beschränkt ist[3] und eine sogenannte „Bandstruktur“ aufweist, d. h. aus abgeschlossenen, nichtentarteten Intervallen besteht, die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden. Ist w indefinit und A gleichmäßig positiv, dann ergibt sich ein ähnliches Bild – mit dem Unterschied, dass das Spektrum von A auch nach unten unbeschränkt ist. Dies wird in [63] gezeigt und folgt auch aus unseren Betrachtungen (siehe Korollar 3.18). Im allgemeinen Fall kann der Operator A auch nichtreelles Spektrum haben, und es ist zunächst nicht klar, welche Vorzeicheneigenschaften das reelle Spektrum hat. Wir werden unter anderem zeigen, dass das reelle Spektrum von A außerhalb eines kompakten Intervalls ganz ähnliche Strukturen aufweist wie das der Operatoren, die in [63] betrachtet werden. Unter gewissen Bedingungen an die Funktionen w und p zeigen wir zudem, dass der Operator A sogar nichtnegativ in einer Umgebung von ∞ ist. Insbesondere folgt daraus, dass das nichtrelle Spektrum von A in diesem Fall beschränkt ist. Für den Beweis dieser Aussagen machen wir uns zunutze, dass der Operator A unitär äquivalent ist zu dem Multiplikationsoperator bezüglich einer gewissen Schar $\{A(t) : t \in [0, \pi]\}$ regulärer Sturm-Liouville-Operatoren in $L^2_w(0, a)$.

3.1 Multiplikation mit einer Schar selbstadjungierter Operatoren

Es seien $\mathcal{H}'$ ein Hilbertraum, $\mathcal{I}$ ein kompaktes Intervall und $\{A(t) : t \in \mathcal{I}\}$ eine Schar selbstadjungierter Operatoren in $\mathcal{H}'$. Unter der Bedingung, dass die Abbildung $t \mapsto (A(t) + i)^{-1}$ messbar ist, wird in [66] gezeigt, dass sich im Hilbertraum $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{H}')$ auf natürliche Weise ein selbstadjungierter Multiplikationsoperator A mit der Schar $\{A(t) : t \in \mathcal{I}\}$ definieren lässt. Zwischen dem Multiplikationsoperator A und der Schar $\{A(t) : t \in \mathcal{I}\}$ bestehen dann gewisse Zusammenhänge (siehe [66, Theorem XIII.85]).

Anstatt eines Hilbertraumes wollen wir hier einen Kreinraum betrachten und annehmen, dass die Operatoren der Schar $\{A(t) : t \in \mathcal{I}\}$ in diesem selbstadjungiert sind. Unter einer Bedingung an die Resolventen der Operatoren $A(t)$ können

[3] Ist die Koeffizientenfunktion p nicht f.ü. positiv, dann kann das Spektrum auch nach unten unbeschränkt sein. Auch die im folgenden vorgestellten Ergebnisse sind stark abhängig von der Annahme $p > 0$ f.ü..

wir dann analog zu [66] einen Multiplikationsoperator A definieren und zeigen, dass dieser selbstadjungiert ist in einem Kreinraum. Desweiteren beweisen wir, dass das Spektrum von A gerade die Vereinigung der Spektren der $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$, ist. Unser Hauptaugenmerk richtet sich dann auf den Zusammenhang zwischen den Vorzeichentypen der Spektren der Operatoren A und $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$. Als Hauptergebnis zeigen wir, dass eine Menge genau dann positiven Typs bezüglich A ist, wenn sie positiven Typs ist bezüglich aller Operatoren $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$.

In diesem Unterabschnitt seien $(\mathcal{K}', [\cdot\,,\cdot]')$ ein separabler Kreinraum mit Fundamentalsymmetrie J', die das Hilbertraum-Skalarprodukt $(\cdot\,,\cdot)' := [J'\cdot,\cdot]'$ auf $\mathcal{K}'$ induziert, $\mathcal{I}$ ein kompaktes reelles Intervall und

$$\mathcal{K} := L^2\big(\mathcal{I}, \mathcal{K}'\big) \tag{3.1}$$

der Raum der Äquivalenzklassen (modulo Gleichheit fast überall) von messbaren Funktionen $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ mit

$$\int_{\mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathcal{K}'}^2 \, dt \, < \, \infty.$$

Dabei heißt $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ messbar, falls für jedes $x \in \mathcal{K}'$ die komplexwertige Funktion $t \mapsto (f(t), x)'$ $(t \in \mathcal{I})$ Borel-messbar ist. Mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{\mathcal{I}} \big(f(t), g(t)\big)' \, dt, \quad f, g \in \mathcal{K},$$

ist $(\mathcal{K}, (\cdot\,,\cdot))$ dann bekanntermaßen ein Hilbertraum.

Wir bemerken, dass eine Funktion $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ nach [65, Theorem IV.22] genau dann messbar ist, wenn es eine Folge einfacher Funktionen[4] $f_n : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ gibt mit $\|f_n(t) - f(t)\|_{\mathcal{K}'} \to 0$ für fast alle $t \in \mathcal{I}$. Demnach ist insbesondere $t \mapsto (f(t), g(t))'$ messbar, wenn $f, g : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ messbar sind.

Es ist leicht zu sehen, dass der Operator J, definiert duch $(Jf)(t) := J'f(t)$ für $f \in \mathcal{K}$ und $t \in \mathcal{I}$, eine Fundamentalsymmetrie in $\mathcal{K}$ ist (d. h. $J = J^{-1} = J^*$) und damit das Kreinraumprodukt

$$[f, g] := (Jf, g) = \int_{\mathcal{I}} \big[f(t), g(t)\big]' \, dt, \quad f, g \in \mathcal{K},$$

definiert.

Wir nennen eine Abbildung $T : \mathcal{I} \to \mathcal{B}(\mathcal{K}')$ messbar, wenn für alle $x \in \mathcal{K}'$ die $\mathcal{K}'$-wertige Funktion $t \mapsto T(t)x$ messbar ist. Mit $L^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{B}(\mathcal{K}'))$ bezeichnen wir den Raum aller (Äquivalenzklassen von) messbaren Abbildungen $T : \mathcal{I} \to \mathcal{B}(\mathcal{K}')$ mit

$$\operatorname{esssup}\{\|T(t)\| : t \in \mathcal{I}\} = \inf\big\{b \in \mathbb{R} : \lambda_{\mathcal{I}}\big(\{t \in \mathcal{I} : \|T(t)\| > b\}\big) = 0\big\} \, < \, \infty.$$

[4] Eine messbare Funktion $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ heißt *einfach*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.

Dabei bezeichnet $\lambda_{\mathcal{I}}$ das Lebesguemaß auf $\mathcal{I}$. In [66, Theorem XIII.83] wird gezeigt, dass für jede Abbildung $T \in L^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{B}(\mathcal{K}'))$ vermittels

$$(Tf)(t) := T(t)f(t), \quad f \in \mathcal{K},\ t \in \mathcal{I},$$

ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ definiert wird mit

$$\|T\| = \operatorname{esssup}\{\|T(t)\| : t \in \mathcal{I}\}. \tag{3.2}$$

Diesen nennen wir den *Multiplikationsoperator* bezüglich der Schar $\{T(t) : t \in \mathcal{I}\}$.

Für den Rest dieses Unterabschnittes sei $\{A(t) : t \in \mathcal{I}\}$ eine Schar (eventuell unbeschränkter) selbstadjungierter Operatoren im Kreinraum $(\mathcal{K}', [\cdot\,,\cdot]')$. Bezüglich dieser Schar wollen wir ebenfalls einen Multiplikationsoperator definieren. Dazu machen wir die folgende Generalannahme:

(R) Es gibt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, so dass $\lambda_0 \in \rho(A(t))$ für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt und die Abbildung $t \mapsto (A(t) - \lambda_0)^{-1}$ (von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{B}(\mathcal{K}')$) stetig ist.

Lemma 3.1. *Ist* **(R)** *erfüllt und ist $f : \mathcal{I} \to \mathcal{K}'$ messbar mit $f(t) \in \operatorname{dom} A(t)$ für fast alle $t \in \mathcal{I}$, dann ist auch die Abbildung $t \mapsto A(t)f(t)$ messbar.*

Beweis. Für $t \in \mathcal{I}$ sei E_t das Spektralmaß des im Hilbertraum $(\mathcal{K}', (\cdot\,,\cdot)')$ selbstadjungierten Operators $T(t) := J'A(t)$. Wegen der leicht zu verifizierenden und für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gültigen Formel

$$(T(t) - \lambda)^{-1} = (A(t) - \lambda_0)^{-1}\big(I + (\lambda_0 - \lambda J')(A(t) - \lambda_0)^{-1}\big)^{-1} J', \quad t \in \mathcal{I},$$

ist die Abbildung $t \mapsto (T(t) - \lambda)^{-1}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ stetig. Durch Approximation des Integrals in der Stone'schen Formel [35, Chapter XII.2, Theorem 10] durch Riemann-Summen folgt, dass die Abbildung $t \mapsto E_t(\Delta)$ für jedes reelle Intervall Δ messbar ist. Es seien $y \in \mathcal{K}'$ fest aber beliebig und (τ_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit kompakten Trägern auf $\mathbb{R}$, so dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $|\tau_n(\lambda)| \le |\lambda|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tau_n(\lambda) \to \lambda$ für $n \to \infty$. Dann ist

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda)\, d\big(f(t), E_t(\lambda)y\big)'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ als endliche Summe messbarer Funktionen wieder messbar. Also ist auch

$$t \mapsto \big(T(t)f(t), y\big)' = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\big(f(t), E_t(\lambda)y\big)' = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda)\, d\big(f(t), E_t(\lambda)y\big)'$$

messbar. Wegen $(A(t)f(t), J'y) = (T(t)f(t), y)$ und der Surjektivität von $J' : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}'$ folgt die Messbarkeit von $t \mapsto A(t)f(t)$. □

Wir erinnern an die Definition (3.1) und setzen

$$\operatorname{dom} A := \{f \in \mathcal{K} : f(t) \in \operatorname{dom}(A(t)) \text{ für f.a. } t \in \mathcal{I},\ A(\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{K}\}$$

sowie

$$(Af)(t) := A(t)f(t), \quad f \in \operatorname{dom} A,\ t \in \mathcal{I}.$$

Der so definierte Operator A ist symmetrisch in $(\mathcal{K}, [\cdot\,,\cdot])$, denn für $f \in \operatorname{dom} A$ gilt

$$[Af, f] = \int_{\mathcal{I}} \big[(Af)(t), f(t)\big]'\, dt = \int_{\mathcal{I}} \big[A(t)f(t), f(t)\big]'\, dt \ \in\ \mathbb{R}.$$

Satz 3.2. *Es sei* **(R)** *erfüllt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Der Operator A ist selbstadjungiert.*

(ii) $\sigma(A) = \bigcup_{t\in\mathcal{I}} \sigma(A(t))$.

(iii) *Für alle $\lambda \in \rho(A)$ ist $t \mapsto (A(t) - \lambda)^{-1}$ stetig.*

Beweis. Es sei $R(t) := (A(t)-\lambda_0)^{-1}$, $t \in \mathcal{I}$. Die Abbildung $t \mapsto R(t)$ ist wegen der Kompaktheit von $\mathcal{I}$ und **(R)** ein Element von $L^\infty(\mathcal{I}, \mathcal{B}(\mathcal{K}'))$. Also ist der Operator $R \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, definiert durch

$$(Rf)(t) := R(t)f(t), \quad f \in \mathcal{K},\, t \in \mathcal{I},$$

wohldefiniert (siehe [66, Theorem XIII.83]). Im folgenden zeigen wir, dass R die Resolvente von A in λ_0 darstellt. Ist $(A - \lambda_0)f = 0$ für ein $f \in \operatorname{dom} A$, dann ist $(A(t) - \lambda_0)f(t) = 0$ und damit $f(t) = 0$ für fast alle t. Sei nun $g \in \mathcal{K}$. Wir müssen zeigen, dass $f := Rg \in \mathcal{K}$ in $\operatorname{dom} A$ liegt. Das folgt aber aus $f(t) = (A(t) - \lambda_0)^{-1}g(t) \in \operatorname{dom} A(t)$ für alle $t \in \mathcal{I}$ und

$$\|A(t)f(t)\|_{\mathcal{K}'} \le \big(1 + |\lambda_0| \max_{\tau\in\mathcal{I}} \|(A(\tau) - \lambda_0)^{-1}\|\big)\|g(t)\|_{\mathcal{K}'}.$$

Also wird $\operatorname{dom} A$ durch $A-\lambda_0$ bijektiv auf $\mathcal{K}$ abgebildet, und es gilt $(A-\lambda_0)Rg = g$. Die Inverse $R = (A-\lambda_0)^{-1}$ ist demnach ein beschränkter Operator. Insbesondere folgt daraus, dass der Operator A abgeschlossen ist.

Da $R(t)$ stetig von t abhängt und $\operatorname{dom} R(t) = \mathcal{K}'$ für alle $t \in \mathcal{I}$, gilt nach [27, Theorem 3.1]:

$$\sigma(R) = \bigcup_{t\in\mathcal{I}} \sigma(R(t)).$$

Daraus folgt (ii), denn es ist $\lambda \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $(\lambda - \lambda_0)^{-1} \in \sigma(R)$ und $\lambda \in \sigma(A(t))$ für ein $t \in \mathcal{I}$ genau dann, wenn $(\lambda - \lambda_0)^{-1} \in \sigma(R(t))$ für dieses t.

Desweiteren ist auch (i) erfüllt, da aus $\lambda_0 \in \rho(A(t))$ auch $\overline{\lambda_0} \in \rho(A(t))$ für alle $t \in \mathcal{I}$, und damit $\overline{\lambda_0} \in \rho(A)$ folgt. Die Aussage (iii) folgt aus der Identität

$$(A(t)-\lambda)^{-1} = \frac{(A(t)-\lambda_0)^{-1}}{\lambda_0-\lambda}\Big((A(t)-\lambda_0)^{-1} - (\lambda-\lambda_0)^{-1}\Big)^{-1},$$

die für alle $\lambda \in \rho(A) \setminus \{\lambda_0\}$ gilt. □

Im folgenden verzichten wir der Einfachheit halber auf den Strich bei der Notation der inneren Produkte auf $\mathcal{K}'$ und schreiben $\|\cdot\|$ anstatt $\|\cdot\|_{\mathcal{K}'}$.

Lemma 3.3. *Es gelte* **(R)**, *und die kompakte Menge* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *sei positiven* (*negativen*) *Typs bezüglich aller Operatoren* $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$. *Dann existieren eine* $\mathbb{C}$*-offene Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* Δ *und* $\varepsilon > 0$, *so dass für alle* $t \in \mathcal{I}$ *und alle* $\lambda \in \mathcal{U}$ *die folgende Implikation gilt:*

$$x \in \operatorname{dom} A(t),\ \|x\| = 1,\ \|(A(t)-\lambda)x\| \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad [x,x] \ge \varepsilon \ \ (\textit{bzw. } -[x,x] \ge \varepsilon).$$

Beweis. Die Menge Δ sei positiven Typs bezüglich aller $A(t)$. Der andere Fall kann analog behandelt werden. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann gibt es zu jeder $\mathbb{C}$-offenen Umgebung $\mathcal{U}$ von Δ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $t \in \mathcal{I}$, ein $\lambda \in \mathcal{U}$ und ein $x \in \operatorname{dom} A(t)$ mit $\|x\| = 1$, so dass $\|(A(t)-\lambda)x\| \le \varepsilon$ und $[x,x] < \varepsilon$ gelten. Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in \mathcal{I}$, ein $\lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{dist}(\lambda_n, \Delta) < \frac{1}{n}$ und ein $x_n \in \operatorname{dom} A(t_n)$ mit $\|x_n\| = 1$, so dass $\|(A(t_n)-\lambda_n)x_n\| \le \frac{1}{n}$ und $[x_n,x_n] < \frac{1}{n}$ gelten. Wir dürfen annehmen, dass die Folgen (λ_n) und (t_n) jeweils gegen ein $\lambda \in \Delta$ und ein $t \in \mathcal{I}$ konvergieren. Wir setzen

$$y_n := (A(t)-\lambda_0)^{-1}(A(t_n)-\lambda_0)x_n \ \in \operatorname{dom} A(t),$$

wobei $\lambda_0 \in \rho(A) \setminus \{\lambda\}$ beliebig sei. Dann konvergieren

$$x_n - y_n = \big((A(t_n)-\lambda_0)^{-1} - (A(t)-\lambda_0)^{-1}\big)\big((A(t_n)-\lambda_n)x_n + (\lambda_n-\lambda_0)x_n\big)$$

und

$$(A(t)-\lambda)y_n = (A(t_n)-\lambda_n)x_n + (\lambda_n-\lambda)x_n + (\lambda_0-\lambda)(y_n-x_n)$$

gegen Null für $n \to \infty$. Also ist $\lambda \in \sigma_{\mathrm{ap}}(A(t))$ und daher nach Annahme $\lambda \in \sigma_+(A(t))$. Es folgt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n,x_n] = \liminf_{n\to\infty} [y_n,y_n] > 0,$$

was aber $[x_n,x_n] < \frac{1}{n}$ widerspricht. □

Eine ähnliche Aussage wie die von Lemma 3.3 gilt für den Punkt ∞.

Lemma 3.4. *Es gelte* **(R)**, *und es sei* $\infty \in \sigma_+(A(t)) \cup \tilde{\rho}(A(t))$ *für alle* $t \in \mathcal{I}$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$, *so dass für alle* $t \in \mathcal{I}$ *die folgende Implikation gilt:*

$$x \in \operatorname{dom} A(t),\ \|A(t)x\| = 1,\ \|x\| \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad [A(t)x, A(t)x] \ge \varepsilon.$$

Im Falle $\infty \in \sigma_-(A(t)) \cup \tilde{\rho}(A(t))$ *für alle* $t \in \mathcal{I}$ *existiert ein* $\varepsilon > 0$, *so dass für alle* $t \in \mathcal{I}$ *die folgende Implikation gilt.*

$$x \in \operatorname{dom} A(t),\ \|A(t)x\| = 1,\ \|x\| \le \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad -[A(t)x, A(t)x] \ge \varepsilon.$$

Beweis. Es sei $\infty \in \sigma_+(A(t)) \cup \tilde{\rho}(A(t))$ für alle $t \in \mathcal{I}$. Den anderen Fall behandelt man analog. Wäre die Aussage falsch, dann gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in \mathcal{I}$ und $x_n \in \operatorname{dom} A(t_n)$, so dass $\|A(t_n)x_n\| = 1$, $\|x_n\| \le \frac{1}{n}$ und $[A(t_n)x_n, A(t_n)x_n] < \frac{1}{n}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, die Folge (t_n) konvergiere für $n \to \infty$ gegen ein $t \in \mathcal{I}$. Mit $y_n := (A(t) - \lambda_0)^{-1}(A(t_n) - \lambda_0)x_n \in \operatorname{dom} A(t)$ gilt dann

$$\|y_n - x_n\| \ \le\ \|(A(t) - \lambda_0)^{-1} - (A(t_n) - \lambda_0)^{-1}\| \cdot \big(\|(A(t_n)x_n\| + |\lambda_0|\|x_n\|\big).$$

Und dieser Ausdruck konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null. Zudem folgt $\|A(t)y_n\| \to 1$ für $n \to \infty$ aus $A(t)y_n - A(t_n)x_n = \lambda_0(y_n - x_n)$. Nach Annahme folgt $\infty \in \sigma_+(A(t))$, was

$$\liminf_{n\to\infty} [A(t_n)x_n, A(t_n)x_n] = \liminf_{n\to\infty} [A(t)y_n, A(t)y_n] \ > \ 0.$$

impliziert. Dies steht aber im Widerspruch zu $[A(t_n)x_n, A(t_n)x_n] < \frac{1}{n}$. □

Korollar 3.5. *Es gelte* **(R)**, *und* Δ *sei ein kompaktes Intervall positiven* (*negativen*) *Typs bezüglich aller* $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$. *Dann gibt es eine* $\mathbb{C}$*-offene Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* Δ, *so dass die folgenden Aussagen gelten:*

(i) *Für alle* $t \in \mathcal{I}$ *ist*

$$\mathcal{U} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A(t)),$$

und es gibt ein (*von* t *unabhängiges*) $C > 0$, *so dass für alle* $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \mathbb{R}$ *und alle* $t \in \mathcal{I}$ *gilt:*

$$\|(A(t) - \lambda)^{-1}\| \ \le\ \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{U} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(A)$, *und für alle* $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \mathbb{R}$ *gilt*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\| \ \le\ \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

(ii) $\mathcal{U} \cap \mathbb{R}$ *ist positiven* (*bzw. negativen*) *Typs bezüglich aller Operatoren* $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$.

Beweis. Wir wählen $\mathcal{U}$ und $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 3.3 und nehmen ohne Einschränkung $|\operatorname{Im}\lambda| < 1$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{U} = \mathcal{U}^*$ an. Die Aussage (ii) folgt dann sofort. Für den Beweis von (i) seien $\lambda \in \mathcal{U} \setminus \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{I}$ und $x \in \operatorname{dom} A(t)$ mit $\|x\| = 1$. Gilt $\|(A(t) - \lambda)x\| \le \varepsilon$, dann folgt

$$|\operatorname{Im}\lambda|\varepsilon \le |\operatorname{Im}[\lambda x, x]| = |\operatorname{Im}[(\lambda - A(t))x, x]| \le \|(A(t) - \lambda)x\|.$$

Also gilt für alle $x \in \operatorname{dom} A(t)$:

$$\|(A(t) - \lambda)x\| \ \ge\ \min\{\varepsilon, |\operatorname{Im}\lambda|\varepsilon\}\|x\| = \varepsilon|\operatorname{Im}\lambda|\,\|x\|.$$

Das gleiche gilt für $\overline{\lambda}$ anstatt λ. Also ist $\lambda \in \rho(A(t))$, und es folgt

$$\|(A(t) - \lambda)^{-1}\| \ \le\ \frac{\varepsilon^{-1}}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Da $t \in \mathcal{I}$ beliebig war und ε nicht von t abhängt, folgt die erste Behauptung in (i). Die zweite folgt aus Satz 3.2 und (3.2). □

Der folgende Satz stellt das Hauptergebnis dieses Unterabschnittes dar.

Satz 3.6. *Es gelte* **(R)**. *Dann ist die Menge* $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ *genau dann positiven* (*negativen*) *Typs bezüglich* A, *wenn sie positiven* (*bzw. negativen*) *Typs ist bezüglich aller Operatoren* $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$.

Beweis. Es sei Δ positiven Typs bezüglich aller $A(t)$. Zu zeigen ist $\tilde{\sigma}(A) \cap \Delta \subset \sigma_+(A)$. Es sei zunächst $\lambda \in \tilde{\sigma}(A) \cap \Delta$, $\lambda \neq \infty$. Nach Lemma 3.3 gibt es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt:

$$x \in \operatorname{dom} A(t),\ \ \|(A(t) - \lambda)x\| \le \varepsilon\|x\| \quad \Longrightarrow \quad [x, x] \ge \varepsilon\|x\|^2.$$

Es sei $(f_n) \subset \operatorname{dom} A$ mit $\|f_n\|_{\mathcal{K}} = 1$ und $\|(A - \lambda)f_n\|_{\mathcal{K}} \to 0$ für $n \to \infty$, d. h.

$$a_n := \int_{\mathcal{I}} \|(A(t) - \lambda)f_n(t)\|^2\,dt \ \to\ 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{I}} \|f_n(t)\|^2\,dt = 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die messbare Menge

$$M_n := \{t \in \mathcal{I} : \|(A(t) - \lambda)f_n(t)\| > \varepsilon\|f_n(t)\|\}$$

Dann gilt

$$\int_{M_n} \|f_n(t)\|^2\,dt \ \le\ \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{M_n} \|(A(t) - \lambda)f_n(t)\|^2\,dt \ \le\ \frac{a_n}{\varepsilon^2} \ \to\ 0$$

für $n \to \infty$. Weiter ist

$$[f_n, f_n] = \int_{\mathcal{I}} [f_n(t), f_n(t)]\,dt \;\geq\; \int_{M_n} [f_n(t), f_n(t)]\,dt + \varepsilon \int_{\mathcal{I}\setminus M_n} \|f_n(t)\|^2\,dt.$$

Und da

$$\left| \int_{M_n} [f_n(t), f_n(t)]\,dt \right| \;\leq\; \int_{M_n} \|f_n(t)\|^2\,dt \;\to\; 0$$

für $n \to \infty$, folgt

$$\liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] \;\geq\; \varepsilon \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{I}\setminus M_n} \|f_n(t)\|^2\,dt = \varepsilon.$$

Das zeigt $\lambda \in \sigma_+(A)$. Falls $\infty \in \tilde{\sigma}(A) \cap \Delta$, dann gilt nach Annahme $\infty \in \sigma_+(A(t)) \cap \tilde{\rho}(A(t))$ für alle $t \in \mathcal{I}$. Nach Lemma 3.4 gibt es daher ein $\varepsilon > 0$, so dass die Implikation

$$x \in \operatorname{dom} A(t), \;\; \|x\| \leq \varepsilon \|A(t)x\| \quad\Longrightarrow\quad [A(t)x, A(t)x] \geq \varepsilon \|A(t)x\|^2$$

für alle $t \in \mathcal{I}$ gilt. Es sei $(f_n) \subset \operatorname{dom} A$ mit $\|Af_n\|_{\mathcal{K}} = 1$ und $\|f_n\|_{\mathcal{K}} \to 0$ für $n \to \infty$, d. h.

$$b_n := \int_{\mathcal{I}} \|f_n(t)\|^2\,dt \;\to\; 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{I}} \|A(t)f_n(t)\|^2\,dt = 1.$$

Mit den messbaren Mengen

$$N_n := \{t \in \mathcal{I} : \|f_n(t)\| \;>\; \varepsilon \|A(t)f_n(t)\|\}$$

gilt

$$\int_{N_n} \|A(t)f_n(t)\|^2\,dt \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{N_n} \|f_n(t)\|^2\,dt \;\leq\; \frac{b_n}{\varepsilon^2}.$$

Da dies für $n \to \infty$ gegen Null strebt, strebt die rechte Seite der für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Ungleichung

$$[Af_n, Af_n] \;\geq\; \int_{N_n} [A(t)f_n(t), A(t)f_n(t)]\,dt + \varepsilon \int_{\mathcal{I}\setminus N_n} \|A(t)f_n(t)\|^2\,dt$$

gegen ε, und es folgt $\infty \in \sigma_+(A)$.

Für den Beweis der Rückrichtung seien λ_0 wie in (**R**), $t_0 \in \mathcal{I}$ fest aber beliebig und $\lambda \in \tilde{\sigma}(A(t_0)) \cap \Delta$. Ferner sei $(x_n) \subset \operatorname{dom} A(t_0)$ eine Folge mit $\|x_n\| = 1$ und $(A(t_0) - \lambda)x_n \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\lambda \neq \infty$, und $\|A(t_0)x_n\| = 1$ und $x_n \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\lambda = \infty$. Wir wählen offene Intervalle $\mathcal{I}_n$ um t_0 in $\mathcal{I}$, so dass

$$\big\|(A(t) - \lambda_0)^{-1} - (A(t_0) - \lambda_0)^{-1}\big\| \;\leq\; \frac{1}{n} \quad \text{für alle } t \in \mathcal{I}_n$$

gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die messbare Funktion

$$f_n(t) := \frac{\mathbf{1}_{\mathcal{I}_n}(t)}{\sqrt{|\mathcal{I}_n|}} \, (A(t) - \lambda_0)^{-1}(A(t_0) - \lambda_0)x_n \in \operatorname{dom} A(t),$$

wobei $|\mathcal{I}_n|$ die Länge und $\mathbf{1}_{\mathcal{I}_n}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $\mathcal{I}_n$ bezeichne. Wir setzen $g_n(t) := (A(t) - \lambda_0)^{-1}(A(t_0) - \lambda_0)x_n$ und bemerken, dass es in beiden Fällen $\lambda \neq \infty$ und $\lambda = \infty$ ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\|g_n(t) - x_n\| \, \leq \, \frac{1}{n} \, \|(A(t_0) - \lambda_0)x_n\| \, \leq \, \frac{C}{n}$$

für alle $n \geq N$ und $t \in \mathcal{I}_n$ gilt. Dies impliziert, dass

$$\int_{\mathcal{I}} \|f_n(t)\|^2 \, dt = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} \|g_n(t)\|^2 \, dt$$

für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, wenn $\lambda \neq \infty$, und gegen 0 konvergiert, wenn $\lambda = \infty$. Insbesondere ist $f_n \in \mathcal{K}$ für $n \geq N$. Desweiteren folgt aus $A(t)g_n(t) = A(t_0)x_n + \lambda_0(g_n(t) - x_n)$, dass

$$\int_{\mathcal{I}} \|(A(t) - \lambda)f_n(t)\|^2 \, dt = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} \|(A(t) - \lambda)g_n(t)\|^2 \, dt$$

im Falle $\lambda \neq \infty$ gegen 0 konvergiert und dass

$$\int_{\mathcal{I}} \|A(t)f_n(t)\|^2 \, dt = \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} \|A(t)g_n(t)\|^2 \, dt$$

gegen 1 konvergiert, wenn $\lambda = \infty$. Damit ist $f_n \in \operatorname{dom} A$ für $n \geq N$ gezeigt sowie $\|f_n\|_{\mathcal{K}} \to 1$ und $\|(A - \lambda)f_n\|_{\mathcal{K}} \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\lambda \neq \infty$, und $\|Af_n\|_{\mathcal{K}} \to 1$ und $\|f_n\|_{\mathcal{K}} \to 0$ für $n \to \infty$, falls $\lambda = \infty$. Im Fall $\lambda \neq \infty$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} [x_n, x_n] = \liminf_{n\to\infty} [f_n, f_n] > 0,$$

denn

$$\begin{aligned} [f_n, f_n] &= \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} [g_n(t), g_n(t)] \, dt \\ &= [x_n, x_n] + \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} \big([g_n(t), g_n(t)] - [x_n, x_n] \big) \, dt, \end{aligned}$$

wobei der zweite Summand gegen Null strebt. Und ist $\lambda = \infty$, dann gilt

$$\begin{aligned} [Af_n, Af_n] &= \frac{1}{|\mathcal{I}_n|} \int_{\mathcal{I}_n} [A(t_0)x_n + \lambda_0(g_n(t) - x_n), A(t_0)x_n + \lambda_0(g_n(t) - x_n)] \, dt \\ &= [A(t_0)x_n, A(t_0)x_n] + \delta_n, \end{aligned}$$

mit einer Nullfolge (δ_n). Damit folgt

$$\liminf_{n\to\infty} [A(t_0)x_n, A(t_0)x_n] = \liminf_{n\to\infty} [Af_n, Af_n] > 0,$$

und der Satz ist bewiesen. □

3.2 Die Gelfandtransformation

Wir beginnen nun die Untersuchung des Differentialausdrucks ℓ mit den a-periodischen Koeffizientenfunktionen w, p und q. Da auch $|w|$ die Periode a hat, ist der Differentialausdruck τ aus (2.6) nach [73, Satz 16.2(c)] im Grenzpunktfall bei $-\infty$ und $+\infty$. Daher ist der Operator $T := T_{\max}(-\infty, +\infty)$ selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ und $A := A_{\max}(-\infty, +\infty)$ somit selbstadjungiert im Kreinraum $L^2_w(\mathbb{R}) = (L^2_{|w|}(\mathbb{R}), [\cdot\,,\cdot])$, wobei

$$[f, g] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx, \quad f, g \in L^2_{|w|}(\mathbb{R}).$$

Auf dem Intervall $[0, a]$ definieren wir die Sturm-Liouville-Operatoren $A(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, durch $A(t)f = \ell(f)$ für $f \in \operatorname{dom} A(t)$, wobei

$$\operatorname{dom} A(t) := \{f \in \mathcal{D}_{\max}(0, a) : f(a) = e^{it}f(0),\ (pf')(a) = e^{it}(pf')(0)\}.$$

Nach Satz 2.6 ist jeder Operator $A(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, selbstadjungiert im Kreinraum $L^2_w(0, a) = (L^2_{|w|}(0, a), [\cdot\,,\cdot]_a)$, wobei

$$[u, v]_a := \int_0^a u(x)\overline{v(x)}w(x)\,dx, \quad u, v \in L^2_{|w|}(0, a).$$

Da der Differentialausdruck ℓ auf $(0, a)$ regulär ist, haben die Operatoren $A(t)$ die in Satz 2.4 zusammengestellten Eigenschaften.

Auf $L^2_{|w|,0}(\mathbb{R})$, dem Raum aller Funktionen aus $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger, definieren wir die Abbildung

$$U_0 : L^2_{|w|,0}(\mathbb{R}) \to L^2\left([-\pi, \pi], L^2_{|w|}(0, a)\right)$$

durch

$$(U_0 f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-int} f(\,\cdot + na), \quad t \in [-\pi, \pi],\ f \in L^2_{|w|,0}(\mathbb{R}).$$

Diese Definition ist wegen der Endlichkeit der darin vorkommenden Summe sinnvoll. Da die Funktionen $e_n(t) := (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis von $L^2(-\pi, \pi)$ bilden, gilt für $f \in L^2_{|w|,0}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\|U_0 f\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \left|\big((U_0 f)(t)\big)(x)\right|^2 |w(x)|\, dx\, dt \\
&= \int_0^a \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-int} f(x+na) \right|^2 dt \right) |w(x)|\, dx \\
&= \int_0^a \left\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+na) e_{-n} \right\|^2_{L^2(-\pi,\pi)} |w(x)|\, dx \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^a |f(x+na)|^2 |w(x)|\, dx \\
&= \|f\|^2_{L^2_{|w|}(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichheit die Periodizität von w ausgenutzt haben. Also ist U_0 ein dicht definierter isometrischer Operator und besitzt daher eine auf ganz $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ definierte isometrische Fortsetzung U. Diese nennen wir die *Gelfandtransformation*. Nach [73, Lemma 16.7] ist die Gelfandtransformation U ein isometrischer Isomorphismus zwischen den Hilberträumen $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ und $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$, wobei

$$\mathcal{I} := [-\pi, \pi] \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_a := L^2_{|w|}(0, a).$$

Desweiteren (siehe [73, Satz 16.9]) ist der Operator

$$\widetilde{T} := UTU^{-1}$$

der Multiplikationsoperator mit den Operatoren $T(t) := J_a A(t)$ (wobei wir $J_a := J_{0,a}$ setzen), d. h.

$$\operatorname{dom} \widetilde{T} = \{F \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a) : F(t) \in \operatorname{dom} T(t) \text{ f.ü. und } T(\cdot)F(\cdot) \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)\},$$

und

$$\left(\widetilde{T}F\right)(t) = T(t)F(t), \quad t \in \mathcal{I},\ F \in \operatorname{dom} \widetilde{T}.$$

Wie in Unterabschnitt 3.1 definieren wir die Fundamentalsymmetrie $\widetilde{J}$ im Hilbertraum $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$ als Multiplikationsoperator durch

$$\left(\widetilde{J}F\right)(t) := J_a F(t), \quad t \in \mathcal{I},\ F \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a).$$

Wir setzen $J := J_{-\infty,\infty}$. Für $f \in L^2_{|w|,0}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathcal{I}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{J}U_0 f\right)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-int} \operatorname{sgn}(w(\cdot)) f(\cdot + na) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-int} \operatorname{sgn}(w(\cdot + na)) f(\cdot + na) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-int} (Jf)(\cdot + na) \\ &= (U_0 J f)(t),\end{aligned}$$

also $\widetilde{J}U_0 f = U_0 J f$. Aus Stetigkeitsgründen folgt

$$\widetilde{J} = UJU^{-1}. \tag{3.3}$$

Demnach ist

$$\widetilde{A} := \widetilde{J}\widetilde{T} = UJTU^{-1} = UAU^{-1}, \quad \operatorname{dom}\widetilde{A} = \operatorname{dom}\widetilde{T}.$$

Genauer gelten

$$\operatorname{dom}\widetilde{A} = \{F \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a) : F(t) \in \operatorname{dom} A(t) \text{ f.ü. und } A(\cdot)F(\cdot) \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)\}$$

und

$$\left(\widetilde{A}F\right)(t) = (\widetilde{J}\widetilde{T}F)(t) = J_a T(t) F(t) = A(t)F(t), \quad F \in \operatorname{dom}\widetilde{A}.$$

Folglich ist der Operator A unitär äquivalent zu dem Multiplikationsoperator mit den $A(t)$. Wir fassen die Ergebnisse in dem folgenden Satz zusammen.

Satz 3.7. *Es sei $\widetilde{A}$ der Multiplikationsoperator im Raum $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$ mit der Schar der Operatoren $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$, und $\widetilde{J}$ bezeichne den Multiplikationsoperator in $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$ mit dem konstanten Operator J_a. Mit der Gelfandtransformation U gilt dann*

$$\widetilde{A} = UAU^{-1} \quad \textit{und} \quad \widetilde{J} = UJU^{-1}.$$

Um zu sehen, dass die Generalvoraussetzung **(R)** aus Unterabschnitt 3.1 für die Schar der Operatoren $A(t)$ erfüllt ist, stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Spektren der Operatoren $A(t)$ und der sogenannten Floquet-Diskriminante von ℓ her. Dazu seien φ_λ und ψ_λ für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Lösungen von $(\ell - \lambda)u = 0$, die den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(0) &= 1, \quad (p\varphi_\lambda')(0) = 0, \\ \psi_\lambda(0) &= 0, \quad (p\psi_\lambda')(0) = 1\end{aligned} \tag{3.4}$$

genügen. Mit diesen definieren wir die Funktion

$$D(\lambda) := \varphi_\lambda(a) + (p\psi'_\lambda)(a).$$

Dies ist offenbar eine ganze Funktion mit der Eigenschaft $D(\overline{\lambda}) = \overline{D(\lambda)}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und ist gleichzeitig die Spur der Matrix

$$L(\lambda) := \begin{pmatrix} \varphi_\lambda(a) & \psi_\lambda(a) \\ (p\varphi'_\lambda)(a) & (p\psi'_\lambda)(a) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Wegen $\det L(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mu \in \sigma(L(\lambda)) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^{-1} \in \sigma(L(\lambda)). \tag{3.5}$$

Insbesondere ist $L(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ eine reguläre Matrix, und $D(\lambda)$ ist stets die Summe der Eigenwerte von $L(\lambda)$. Die beiden Eigenwerte von $L(\lambda)$ werden *Floquet-Multiplikatoren* von ℓ genannt. Die Funktion D heißt *Floquet-Diskriminante* von ℓ, vgl. z.B. [38].

Lemma 3.8. *Es seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $t \in [-\pi, \pi]$. Dann gilt*

$$\lambda \in \sigma(A(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(L(\lambda)) = \{e^{it}, e^{-it}\} \quad \Longleftrightarrow \quad D(\lambda) = 2\cos(t).$$

Beweis. Es sei $\lambda \in \sigma(A(t))$. Nach Satz 2.4 ist λ ein Eigenwert von $A(t)$. Also existiert eine Lösung f von $(\ell - \lambda)u = 0$ mit $f(a) = e^{it} f(0)$ und $(pf')(a) = e^{it}(pf')(0)$. Es gibt nun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so dass $f = \alpha\varphi_\lambda + \beta\psi_\lambda$, und es folgt

$$L(\lambda) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{it} \\ \beta e^{it} \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Wegen (3.5) ist also $\sigma(L(\lambda)) = \{e^{it}, e^{-it}\}$ und somit auch $D(\lambda) = e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$. Ist andersherum $D(\lambda) = 2\cos(t)$ und ist μ ein Eigenwert von $L(\lambda)$, dann gilt $\mu D(\lambda) = \mu(\mu + \mu^{-1}) = \mu^2 + 1$, und damit

$$\left(\mu - \frac{D(\lambda)}{2}\right)^2 = \mu^2 - \mu D(\lambda) + \frac{D(\lambda)^2}{4} = \frac{D(\lambda)^2 - 4}{4} = -\sin^2(t).$$

Es folgt

$$\mu = \frac{D(\lambda)}{2} \pm i\sin(t) = \cos(t) \pm i\sin(t) = e^{\pm it}.$$

Demnach existiert ein Vektor $\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$, so dass $(L(\lambda) - e^{it}) \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = 0$. Die Funktion $\alpha\varphi_\lambda + \beta\psi_\lambda$ ist dann ein Eigenvektor von $A(t)$ bezüglich λ. □

Nun können wir zeigen, dass die Bedingung **(R)** in der gegebenen Situation erfüllt ist.

Lemma 3.9. *Es existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, so dass die folgenden Aussagen gelten:*

(a) $\lambda_0 \in \rho(A(t))$ *für alle* $t \in [-\pi, \pi]$.

(b) *Die Abbildung* $t \mapsto (A(t) - \lambda_0)^{-1}$ *(von* $[-\pi, \pi]$ *nach* $\mathcal{B}(\mathcal{K}_a)$*) ist stetig.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ein $t \in [-\pi, \pi]$, so dass $\lambda \in \sigma(A(t))$ gilt, dann folgte $D(\lambda) \in [-2, 2]$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ nach Lemma 3.8. Da $D(\cdot)$ eine ganze Funktion ist, wäre sie also konstant mit einem Wert in $[-2, 2]$. Folglich gäbe es $t_0 \in [-\pi, \pi]$, so dass $D(\lambda) = 2\cos(t_0)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. Mit Lemma 3.8 folgte daraus aber $\sigma(A(t_0)) = \mathbb{C}$, was im Widerspruch zu Satz 2.4 steht.

Es seien λ_0 wie in (a) und μ_1, μ_2 die Eigenwerte von $L(\lambda_0)$. Mit Eigenvektoren $\binom{\alpha_i}{\beta_i}$, $i = 1, 2$, bezüglich dieser Eigenwerte und den Fundamentallösungen aus (3.4) setzen wir

$$u_i := \alpha_i \varphi_{\lambda_0} + \beta_i \psi_{\lambda_0}, \quad i = 1, 2.$$

Dann gelten $(\ell - \lambda_0)u_i = 0$,

$$u_i(a) = \mu_i u_i(0) \quad \text{und} \quad (pu_i')(a) = \mu_i (pu_i')(0)$$

für $i = 1, 2$. Wir dürfen annehmen, dass die Wronski-Determinante von u_1 und u_2 gleich 1 ist, d. h. $u_1(pu_2') - (pu_1')u_2 = 1$. Es seien $t \in [-\pi, \pi]$ und $g \in L^2_{|w|}(0, a)$. Wie man leicht verifiziert, ist die Lösung von $(\ell - \lambda_0)u = g$, die in $\operatorname{dom} A(t)$ liegt, gegeben durch

$$f(x) = \left(\frac{\mu_1 \, [u_2, \overline{g}]_a}{e^{it} - \mu_1} + \int_0^x u_2 g w \, dy \right) u_1(x) - \left(\frac{\mu_2 \, [u_1, \overline{g}]_a}{e^{it} - \mu_2} + \int_0^x u_1 g w \, dy \right) u_2(x).$$

Damit hat die Resolvente von $A(t)$ in λ_0 die Form

$$\big((A(t) - \lambda_0)^{-1} g\big)(x) = \int_0^a G(t, x, y) g(y) w(y) \, dy, \quad g \in L^2_{|w|}(0, a),$$

wobei

$$G(t, x, y) = \begin{cases} \frac{e^{it}}{e^{it} - \mu_1} u_2(y) u_1(x) - \frac{e^{it}}{e^{it} - \mu_2} u_1(y) u_2(x) & \text{für } y < x \\ \frac{\mu_1}{e^{it} - \mu_1} u_2(y) u_1(x) - \frac{\mu_2}{e^{it} - \mu_2} u_1(y) u_2(x) & \text{für } y \geq x \end{cases}, \quad x, y \in [0, a].$$

Weiter ist leicht zu sehen, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in [0, a]$ und alle $s, t \in [-\pi, \pi]$ die Ungleichung

$$|G(t, x, y) - G(s, x, y)| \leq C|t - s|$$

gilt. Dies ist eine Folge der Lipschitz-Stetigkeit der Funktion $t \mapsto e^{it}$, der Beschränktheit der Funktionen u_1 und u_2 auf $[0,a]$ und der Tatsache, dass der Abstand von jeweils μ_1 und μ_2 zur Einheitskreislinie positiv ist (siehe Lemma 3.8). Damit folgt

$$\big\|(A(t)-\lambda_0)^{-1}g-(A(s)-\lambda_0)^{-1}g\big\|_{\mathcal{K}_a} \le C|t-s|\|w\|_{L^1(0,a)}\|g\|_{\mathcal{K}_a}$$

für alle $g \in \mathcal{K}_a$. □

Im folgenden benötigen wir den Begriff der *analytischen Kurve*. Die folgende Definiton findet sich z. B. auf Seite 284 in [37]. Mit $\mathbb{D}$ bezeichnen wir die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$.

Definition 3.10. Eine Kurve $\gamma \subset \mathbb{C}$ heißt *analytische Kurve*, falls es zu jedem Punkt in γ eine in $\mathbb{C}$ offene Umgebung $\mathcal{U}$ und eine konforme Abbildung $f : \mathbb{D} \to \mathcal{U}$ gibt, so dass $f((-1,1)) = \mathcal{U} \cap \gamma$.

Mithilfe der bisher erzielten Ergebnisse lässt sich bereits ein guter Einblick in die Struktur des Spektrums von A gewinnen.

Satz 3.11. *Der Operator A hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\sigma(A) = \bigcup\limits_{t\in[0,\pi]} \sigma(A(t)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : D(\lambda) \in [-2,2]\}$.

(ii) $\sigma_+(A) = \bigcup\limits_{t\in[0,\pi]} \sigma_+(A(t)), \quad \sigma_-(A) = \bigcup\limits_{t\in[0,\pi]} \sigma_-(A(t))$

(iii) *Es gibt weder innere noch isolierte Punkte von $\sigma(A)$.*

(iv) $\sigma(A) = \sigma_c(A)$.

(v) *Das Spektrum von A besteht aus den Abschlüssen analytischer Kurven.*

(vi) *Falls die Gewichtsfunktion w indefinit ist, ist das reelle Spektrum von A weder nach oben noch nach unten beschränkt.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für $t \in [-\pi,\pi]$ gilt:

$$\sigma(A(t)) = \sigma(A(-t)), \quad \sigma_+(A(t)) = \sigma_+(A(-t)) \quad \text{und} \quad \sigma_-(A(t)) = \sigma_-(A(-t)).$$

Dies folgt sofort aus

$$f \in \ker(A(t)-\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \overline{f} \in \ker(A(-t)-\overline{\lambda}).$$

Nach Satz 3.7 genügt es zudem, den Satz für den Multiplikationsoperator $\widetilde{A}$ anstatt für A zu beweisen. Die Aussagen (i) und (vi) folgen dann direkt aus den Sätzen 2.4 und 3.2. Das Lemma 3.8 impliziert, dass die Spektren der $A(t)$, $t \in [0, \pi]$, paarweise disjunkt sind. Daher ist (ii) eine Konsequenz aus Satz 3.6. Gäbe es einen inneren Punkt von $\sigma(\widetilde{A})$, dann wäre die Funktion D nach (i) konstant. Diesen Fall hatten wir aber bereits im Beweis von Lemma 3.9 ausgeschlossen. Dass es keine isolierten Punkte von $\sigma(\widetilde{A})$ gibt, folgt sofort aus den Eigenschaften holomorpher Funktionen. Um (iv) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, es gäbe einen Eigenwert λ von $\widetilde{A}$. Dann gäbe es ein $F \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$, $F \neq 0$, so dass $A(t)F(t) = \lambda F(t)$ für fast alle $t \in \mathcal{I}$ gilt. Da aber $D(\lambda) = 2\cos(t)$ nur für höchstens zwei $t \in [-\pi, \pi]$ gelten kann, folgt $F = 0$ mit Lemma 3.8. Ein Widerspruch! Die Aussage (iv) folgt nun aus der für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gültigen Implikation

$$\lambda \in \sigma_r(\widetilde{A}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma_p(\widetilde{A}).$$

Es sei $\lambda \in \sigma(\widetilde{A})$, so dass die Ableitung von D in λ nicht verschwindet und $D(\lambda) \notin \{-2, 2\}$. Dann gibt es Umgebungen $\mathcal{U}$ von λ und $\mathcal{V}$ von $D(\lambda)$, so dass die Einschränkung $D_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ von D auf $\mathcal{U}$ konform abbildet. Wir dürfen annehmen, dass $\mathcal{V}$ eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $D(\lambda)$ ist mit $\mathcal{V} \cap \mathbb{R} \subset (-2, 2)$. Es gibt dann eine konforme Abbildung $g : \mathcal{V} \to \mathbb{D}$ mit $g(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}) = (-1, 1)$. Die Abbildung $f := D_{\mathcal{U}}^{-1} \circ g^{-1}$ bildet dann $\mathbb{D}$ konform auf $\mathcal{U}$ ab, und es gilt $f((-1, 1)) = \sigma(\widetilde{A}) \cap \mathcal{U}$. Dies beweist, dass $\sigma(\widetilde{A}) \cap \mathcal{U}$ eine analytische Kurve ist. □

3.3 Die Operatoren $A(t)$ und die Floquet-Diskriminante

Lemma 3.8 zeigt, dass zwischen den Spektren der $A(t)$ und der Floquet-Diskriminante D ein enger Zusammenhang besteht. In diesem Unterabschnitt untersuchen wir das Verhalten der Funktion D auf $\mathbb{R}$ und stellen eine Beziehung zwischen den Werten der Ableitung von D und den Vorzeichentypen der Spektren der Operatoren $A(t)$, $t \in (0, \pi)$, her.

Die *Ordnung* einer ganzen Funktion $v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch das Infimum über alle $c > 0$, so dass

$$v(\lambda) = O\left(e^{|\lambda|^c}\right) \quad (|\lambda| \to \infty).$$

Falls kein solches $c > 0$ existiert, sagen wir, die Funktion v habe unendliche Ordnung.

Lemma 3.12. *Die Ordnung der ganzen Funktion D ist höchstens* 1.

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ seien φ_λ und ψ_λ die Fundamentallösungen von $(\ell - \lambda)u = 0$ mit (3.4). Für $x \in [0, a]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ definieren wir die Matrix

$$L_\lambda(x) := \begin{pmatrix} \phi_\lambda(x) & \psi_\lambda(x) \\ (p\phi'_\lambda)(x) & (p\psi'_\lambda)(x) \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\frac{d}{dx} L_\lambda(x) = H_\lambda(x) L_\lambda(x)$, wobei

$$H_\lambda(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda w(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$L_\lambda(x) = I + \int_0^x H_\lambda(y) L_\lambda(y)\, dy.$$

Es sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Mit den λ-unabhängigen Matrizen $H_1(x) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ q(x) & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $H_2(x) := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ w(x) & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und mithilfe des Gronwall'schen Lemmas (siehe z. B. [75, Theorem 1.4.1]) erhalten wir

$$\|L_\lambda(a)\| \;\le\; e^{\int_0^a \|H_\lambda(x)\|\, dx} \;\le\; e^{\int_0^a (\|H_1(x)\| + |\lambda|\, \|H_2(x)\|)\, dx}.$$

Die Behauptung folgt nun mit $w, q \in L^1(0, a)$ und der Stetigkeit des linearen Funktionals spur : $\mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$. □

Im folgenden werden wir die Ableitung einer auf einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ definierten analytischen Funktion f mit $\dot{f}$ bezeichnen.

Lemma 3.13. *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante ganze Funktion mit maximal der Ordnung eins. Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von f (Vielfachheiten mitgezählt) seien in betragsmäßig aufsteigender Reihenfolge angeordnet. Dann gilt für $\lambda \notin \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$:*

$$\frac{f(\lambda)\ddot{f}(\lambda) - \dot{f}(\lambda)^2}{f(\lambda)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2}.$$

Beweis. Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ die Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ von f. Setze

$$\mu_0 := \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^m}{f(\lambda)} \quad \text{und} \quad g(\lambda) := \mu_0 \frac{f(\lambda)}{\lambda^m}.$$

Die Funktion g hat dann ebenfalls maximal die Ordnung eins, und die Nullstellen von g sind gerade die nichtverschwindenden Nullstellen von f. Zudem ist $g(0) = 1$. Nach [19, Chapter XI, Lemma 3.1] gilt die Behauptung für g:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\dot{g}(\lambda)}{g(\lambda)} = -\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_k)^2} \quad (\lambda \notin \{\lambda_k : k \ge m+1\}).$$

Es sei nun $\lambda \notin \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt $\frac{\dot f(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{m}{\lambda} + \frac{\dot g(\lambda)}{g(\lambda)}$, und somit

$$\frac{f(\lambda)\ddot f(\lambda) - \dot f(\lambda)^2}{f(\lambda)^2} = \frac{d}{d\lambda}\frac{\dot f(\lambda)}{f(\lambda)} = -\frac{m}{\lambda^2} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2},$$

was der Behauptung entspricht. □

Ist die Gewichtsfunktion w positiv, dann ist bekannt (siehe [73, Satz 16.6]), dass die Funktion D in reellen Punkten λ mit $D(\lambda) \in (-2,2)$ eine nichtverschwindende Ableitung besitzt. Der folgende Satz zeigt, dass D dieses Verhalten außerhalb eines beschränkten offenen Intervalls auch im allgemeinen Fall aufweist. Wir wollen an dieser Stelle daran erinnern, dass das nichtreelle Spektrum der Operatoren $A(t)$, $t \in [-\pi,\pi]$, jeweils eine endliche Menge ist (siehe Satz 2.4).

Satz 3.14. *Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-R,R)$, wobei*

$$R := \sqrt{2}\,\max\big\{|\lambda| : \lambda \in \big(\sigma(A(0)) \cup \sigma(A(\pi))\big) \setminus \mathbb{R}\big\},$$

so dass $\dot D(\lambda) = 0$. Dann gelten

$$|D(\lambda)| \geq 2 \quad \textit{und} \quad \ddot D(\lambda) \neq 0.$$

Ist $D(\lambda) \geq 2$, dann ist $\ddot D(\lambda) < 0$, und im Falle $D(\lambda) \leq -2$ ist $\ddot D(\lambda) > 0$. Folglich ist λ ein Maximum von $D \restriction \mathbb{R}$, wenn $D(\lambda) \geq 2$, und ein Minimum, falls $D(\lambda) \leq -2$.

Beweis. Es sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (-R,R)$, so dass $\dot D(\lambda) = 0$. Mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezeichnen wir die Nullstellen von $D(\cdot) - 2$ (und damit die Eigenwerte von $A(0)$, siehe Lemma 3.8), die in $\mathbb{C}^+$ liegen. Wegen $|\lambda| \geq \sqrt{2}\,\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j|$ ist

$$\begin{aligned}|\lambda - \operatorname{Re}\lambda_j| &\geq |\lambda| - |\operatorname{Re}\lambda_j| \geq \sqrt{2((\operatorname{Re}\lambda_j)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_j)^2)} - |\operatorname{Re}\lambda_j| \\ &\geq \sqrt{(|\operatorname{Re}\lambda_j| + |\operatorname{Im}\lambda_j|)^2} - |\operatorname{Re}\lambda_j| = |\operatorname{Im}\lambda_j|\end{aligned}$$

für $j = 1, \ldots, n$, und mit einer einfachen Rechnung folgt

$$(\lambda - \lambda_j)^{-2} + (\lambda - \overline{\lambda_j})^{-2} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Da alle anderen Nullstellen von $D(\cdot) - 2$ reell sind, erhalten wir mit Anwendung von Lemma 3.13 die nachstehende Folgerung:

$$D(\lambda) \neq 2 \quad \Longrightarrow \quad (D(\lambda) - 2)\ddot D(\lambda) < 0.$$

Eine analoge Behandlung der Funktion $D(\cdot)+2$ liefert

$$D(\lambda) \neq -2 \quad \Longrightarrow \quad (D(\lambda)+2)\ddot{D}(\lambda) < 0.$$

Mit diesen Implikationen folgt das Behauptete. □

Im folgenden untersuchen wir, wie die Vorzeichentypen der Spektra der Operatoren $A(t)$ mit der Floquet-Diskriminante zusammenhängen. Dazu machen wir zunächst die folgende einfache Beobachtung.

Lemma 3.15. *Es seien $t \in [-\pi,\pi]$ und $\lambda \in \sigma(A(t))$. Ist $\psi_\lambda(a) = 0$ oder $(p\varphi'_\lambda)(a) = 0$, dann folgt*

$$\varphi_\lambda(a) = e^{\pm it} \quad \text{und} \quad (p\psi'_\lambda)(a) = e^{\mp it}.$$

Insbesondere sind $\psi_\lambda(a) \neq 0$ und $(p\varphi'_\lambda)(a) \neq 0$, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \notin \{-\pi, 0, \pi\}$.

Beweis. Im Falle von $\psi_\lambda(a) = 0$ oder $(p\varphi'_\lambda)(a) = 0$ ist die Matrix $L(\lambda)$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix. Die Eigenwerte $e^{\pm it}$ stehen dann also auf der Diagonalen von $L(\lambda)$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Funktionen φ_λ und ψ_λ reellwertig. □

Es sei $g \in L^2_{|w|}(0,a)$. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$(\ell - \lambda)u = g, \quad u(0) = (pu')(0) = 0$$

ist dann bekanntermaßen gegeben durch

$$u(x) = \varphi_\lambda(x) \cdot \int_0^x \psi_\lambda g w \, dt \; - \; \psi_\lambda(x) \cdot \int_0^x \varphi_\lambda g w \, dt.$$

Da die Funktion $f := \varphi_\lambda - \varphi_\mu$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Eigenschaften $f(0) = (pf')(0) = 0$ und $(\ell - \lambda)f = (\lambda - \mu)\varphi_\mu$ hat, gilt

$$\frac{\varphi_\lambda(x) - \varphi_\mu(x)}{\lambda - \mu} = \varphi_\lambda(x) \cdot \int_0^x \psi_\lambda \varphi_\mu w \, dt \; - \; \psi_\lambda(x) \cdot \int_0^x \varphi_\lambda \varphi_\mu w \, dt.$$

Gehen wir genauso mit der Funktion $\psi_\lambda - \psi_\mu$ vor, erhalten wir die Formeln

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}\,\varphi_\lambda(a) &= \varphi_\lambda(a)\,[\psi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}]_a - \psi_\lambda(a)\,[\varphi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}]_a \\
\frac{d}{d\lambda}\,(p\varphi'_\lambda)(a) &= (p\varphi'_\lambda)(a)\,[\psi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}]_a - (p\psi'_\lambda)(a)\,[\varphi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}]_a \\
\frac{d}{d\lambda}\,\psi_\lambda(a) &= \varphi_\lambda(a)\,[\psi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a - \psi_\lambda(a)\,[\varphi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a \\
\frac{d}{d\lambda}\,(p\psi'_\lambda)(a) &= (p\varphi'_\lambda)(a)\,[\psi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a - (p\psi'_\lambda)(a)\,[\varphi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\dot{D}(\lambda) = -\psi_\lambda(a)\,[\varphi_\lambda, \overline{\varphi_\lambda}]_a + \big(\varphi_\lambda(a) - (p\psi'_\lambda)(a)\big)\,[\varphi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a \\ + (p\varphi'_\lambda)(a)\,[\psi_\lambda, \overline{\psi_\lambda}]_a.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Lemma 3.16. *Es seien $t \in [-\pi, \pi]$ und $\lambda \in \sigma(A(t))$. Ferner seien f_λ und $f_{\overline{\lambda}}$ Eigenfunktionen von $A(t)$ bezüglich der Eigenwerte λ bzw. $\overline{\lambda}$. Dann gelten*

$$\psi_\lambda(a)\,[f_\lambda, f_{\overline{\lambda}}]_a = -f_\lambda(0)\overline{f_{\overline{\lambda}}(0)} \cdot \dot{D}(\lambda)$$

und

$$(p\varphi'_\lambda)(a)\,[f_\lambda, f_{\overline{\lambda}}]_a = (pf'_\lambda)(0)\overline{(pf'_{\overline{\lambda}})(0)} \cdot \dot{D}(\lambda).$$

Beweis. Wegen $\varphi_{\overline{\lambda}} = \overline{\varphi_\lambda}$ und $\psi_{\overline{\lambda}} = \overline{\psi_\lambda}$ gibt es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, so dass

$$f_\lambda = \alpha\varphi_\lambda + \beta\psi_\lambda \quad \text{und} \quad f_{\overline{\lambda}} = \gamma\overline{\varphi_\lambda} + \delta\overline{\psi_\lambda}.$$

Offenbar gilt

$$\alpha = f_\lambda(0), \quad \beta = (pf'_\lambda)(0), \quad \gamma = f_{\overline{\lambda}}(0), \quad \delta = (pf'_{\overline{\lambda}})(0). \tag{3.7}$$

Der Kürze halber setzen wir $\varphi := \varphi_\lambda$ und $\psi := \psi_\lambda$. Aus $f_\lambda, f_{\overline{\lambda}} \in \operatorname{dom} A(t)$ folgen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}\big(\varphi(a) - e^{it}\big)\,\alpha &= -\psi(a)\beta \\ \big((p\psi')(a) - e^{it}\big)\,\beta &= -(p\varphi')(a)\alpha \\ \big(\varphi(a) - e^{-it}\big)\,\overline{\gamma} &= -\psi(a)\overline{\delta} \\ \big((p\psi')(a) - e^{-it}\big)\,\overline{\delta} &= -(p\varphi')(a)\overline{\gamma}.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mithilfe von (3.6)

$$\begin{aligned}-\psi(a)\,[f_\lambda, f_{\overline{\lambda}}]_a &= -\psi(a)\Big(\alpha\overline{\gamma}\,[\varphi, \overline{\varphi}]_a + (\beta\overline{\gamma} \;+ \alpha\overline{\delta})\,[\varphi, \overline{\psi}]_a + \beta\overline{\delta}\,[\psi, \overline{\psi}]_a\Big) \\ &= -\alpha\overline{\gamma}\,\psi(a)\,[\varphi, \overline{\varphi}]_a + \alpha\overline{\gamma}\,\big(2\varphi(a) - e^{it} - e^{-it}\big)\;[\varphi, \overline{\psi}]_a \\ &\qquad + \alpha\,\big(\varphi(a) - e^{it}\big)\,\overline{\delta}\,[\psi, \overline{\psi}]_a \\ &= -\alpha\overline{\gamma}\,\psi(a)\,[\varphi, \overline{\varphi}]_a + \alpha\overline{\gamma}\big(\varphi(a) - (p\psi')(a)\big)\,[\varphi, \overline{\psi}]_a \\ &\qquad + \alpha\,\big(D(\lambda) - (p\psi')(a) - e^{it}\big)\,\overline{\delta}\,[\psi, \overline{\psi}]_a \\ &= \alpha\overline{\gamma}\,\big(\dot{D}(\lambda) - (p\varphi')(a)\,[\psi, \overline{\psi}]_a\big) + \alpha\,\big(e^{-it} - (p\psi')(a)\big)\,\overline{\delta}\,[\psi, \overline{\psi}]_a \\ &= \alpha\overline{\gamma}\,\dot{D}(\lambda)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(p\varphi')(a)\,[f_\lambda, f_{\overline{\lambda}}]_a &= (p\varphi')(a)\left(\alpha\overline{\gamma}\,[\varphi,\overline{\varphi}]_a + (\beta\overline{\gamma}\ + \alpha\overline{\delta})\,[\varphi,\overline{\psi}]_a + \beta\overline{\delta}\,[\psi,\overline{\psi}]_a\right)\\ &= \left(e^{it} - (p\psi')(a)\right)\beta\overline{\gamma}\,[\varphi,\overline{\varphi}]_a\\ &\quad + \left(\beta\left(e^{-it} - (p\psi')(a)\right)\overline{\delta} - \left((p\psi')(a) - e^{it}\right)\beta\overline{\delta}\right)[\varphi,\overline{\psi}]_a\\ &\quad + \beta\overline{\delta}\,(p\varphi')(a)\,[\psi,\overline{\psi}]_a\\ &= \left(\varphi(a) - e^{-it}\right)\beta\overline{\gamma}\,[\varphi,\overline{\varphi}]_a + \beta\overline{\delta}\left(\varphi(a) - (p\psi')(a)\right)[\varphi,\overline{\psi}]_a\\ &\qquad\qquad + \beta\overline{\delta}\,(p\varphi')(a)\,[\psi,\overline{\psi}]_a\\ &= \beta\overline{\delta}\,\dot{D}(\lambda).\end{aligned}$$

Mit (3.7) folgt die Behauptung. □

Satz 3.17. *Es seien $t \in (0,\pi)$ und $\lambda \in \sigma(A(t)) \cap \mathbb{R}$. Dann gelten*

$$\lambda \in \sigma_+(A(t)) \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{\dot{D}(\lambda)}{\psi_\lambda(a)} > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\dot{D}(\lambda)}{(p\varphi'_\lambda)(a)} > 0$$

und

$$\lambda \in \sigma_-(A(t)) \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{\dot{D}(\lambda)}{\psi_\lambda(a)} < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\dot{D}(\lambda)}{(p\varphi'_\lambda)(a)} < 0.$$

Beweis. Es gelten

$$\varphi_\lambda \notin \ker(A(t)-\lambda) \quad \text{und} \quad \psi_\lambda \notin \ker(A(t)-\lambda).$$

Wäre nämlich z. B. $\varphi_\lambda \in \ker(A(t)-\lambda)$, dann folgte $\varphi_\lambda(a) = e^{it}\varphi_\lambda(0) = e^{it}$. Mit der Reellwertigkeit der Funktion φ_λ (und der Voraussetzung $t \in (0,\pi)$) ergibt sich also ein Widerspruch. Insbesondere ist $\ker(A(t)-\lambda)$ eindimensional. Es sei $f_\lambda (= f_{\overline{\lambda}})$ der Eigenvektor von $A(t)$ bezüglich des Eigenwertes λ mit $f_\lambda(0) = 1$. Dieser existiert, denn sonst wäre $\psi_\lambda \in \ker(A(t)-\lambda)$. Mit Lemma 3.16 folgt $[f_\lambda, f_\lambda]_a = -\dot{D}(\lambda)/\psi_\lambda(a)$ und somit die Behauptung für die jeweils erste Äquivalenz. Die jeweils zweite zeigt man ganz analog. □

3.4 Der maximale Operator auf $\mathbb{R}$

In diesem Unterabschnitt verwenden wir die oben erzielten Ergebnisse, um weitere Aussagen über das Spektrum von A – und insbesondere dessen Vorzeichentypen – zu machen.

Das folgende Korollar umfasst das Hauptergebnis von [63] als Spezialfall. Dort nehmen die Autoren an, dass der Operator A gleichmäßig positiv ist. Dies ist der sogenannte links-definite Fall.

Korollar 3.18. *Die Funktion w sei indefinit. Genau dann ist der Operator A im Kreinraum $L^2_w(\mathbb{R})$ nichtnegativ, wenn alle $A(t)$, $t \in \mathcal{I}$, nichtnegativ im Kreinraum $L^2_w(0,a)$ sind. In diesem Fall ist das Spektrum von A reell, nach oben und unten unbeschränkt und besteht aus kompakten Intervallen $[\alpha,\beta]$ (die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden), so dass $D(\alpha) = \pm 2$, $D(\beta) = \mp 2$ und $\pm\dot{D}(\lambda) < 0$ für $\lambda \in (\alpha,\beta)$ gilt.*

Beweis. Der Operator A ist genau dann nichtnegativ im Kreinraum $L^2_w(\mathbb{R})$, wenn $T = JA$ nichtnegativ im Hilbertraum $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ ist. Dies ist nach Satz 3.11(i) (angewandt auf τ anstatt auf ℓ) genau dann der Fall, wenn alle $J_a A(t)$, $t \in \mathcal{I}$, nichtnegativ im Hilbertraum $L^2_{|w|}(0,a)$ sind. Dies zeigt die erste Behauptung. Ist A nichtnegativ in $L^2_w(\mathbb{R})$, dann folgt die Aussage über die Struktur des Spektrums von A aus den Sätzen 3.11 und 3.14. □

Das folgende Korollar ist im Wesentlichen in [26] bewiesen. Hier folgt es fast direkt aus Korollar 3.18.

Korollar 3.19. *Ist $q \geq 0$ f.ü., dann ist A nichtnegativ in $L^2_w(\mathbb{R})$, und das Spektrum von A hat die in Korollar* 3.18 *angegebene Struktur.*

Beweis. Tatsächlich gilt in diesem Fall für jedes $t \in \mathcal{I}$ und jedes $f \in \operatorname{dom} A(t)$

$$[A(t)f,f]_a = \int_0^a \big(-(pf')'\overline{f} + q|f|^2 \big)\, dx \;\geq\; -\int_0^a (pf')'\overline{f}\, dx = \int_0^a p|f'|^2\, dx \;\geq\; 0.$$

Mit Korollar 3.18 folgt, dass A nichtnegativ ist in $L^2_w(\mathbb{R})$. □

Der nächste Satz ist das erste Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 3.20. *Es gibt ein $R > 0$, so dass $(-\infty,-R)$ negativen und (R,∞) positiven Typs bezüglich des Operators A ist.*

Beweis. Es sei $t_0 \in (0,\pi)$ beliebig. Weiter sei $R_1 > 0$ so gewählt, dass $(-\infty,-R_1)$ negativen und (R_1,∞) positiven Typs bezüglich der Operatoren $A(0)$, $A(t_0)$ und $A(\pi)$ ist. Nach den Sätzen 3.14 und 3.11 sowie Lemma 3.8 existiert $R \geq R_1$, so dass das Spektrum von A in $\mathbb{R} \setminus (-R,R)$ aus kompakten Intervallen $[\alpha,\beta]$ (deren Endpunkte zusammenfallen dürfen) mit den Eigenschaften

$$D(\alpha) = \pm 2, \quad D(\beta) = \mp 2 \quad \text{und} \quad \pm\dot{D}(\lambda) < 0 \text{ für } \lambda \in (\alpha,\beta) \tag{3.8}$$

besteht. Es sei $[\alpha,\beta]$ ein solches Intervall mit $\alpha > R$. Ohne Einschränkung sei $D(\alpha) = 2$. Dies ist gleichbedeutend mit $\alpha \in \sigma(A(0))$. Nach der Wahl von R ist $\alpha \in \sigma_+(A(0))$. Und da $\alpha \in \rho(A(t))$ für alle $t \in (0,\pi]$ gilt, ist $\{\alpha\}$ positiven Typs

bezüglich aller $A(t)$, $t \in [0,\pi]$. Das gleiche gilt für $\{\beta\}$. Wegen (3.8) gibt es $\lambda_0 \in (\alpha,\beta)$ mit $D(\lambda_0) = 2\cos(t_0)$. Dann ist $\lambda_0 \in \sigma(A(t_0))$ und daher $\lambda_0 \in \sigma_+(A(t_0))$. Mit Satz 3.17 folgt

$$-\frac{\dot{D}(\lambda_0)}{\psi_{\lambda_0}(a)} > 0.$$

Wegen $\psi_\lambda(a) \neq 0$ für alle $\lambda \in (\alpha,\beta)$ (siehe Lemma 3.15) und (3.8) ändert die Funktion $\lambda \mapsto -\dot{D}(\lambda)/\psi_\lambda(a)$ ihr Vorzeichen auf (α,β) nicht. Also gilt

$$-\frac{\dot{D}(\lambda)}{\psi_\lambda(a)} > 0 \quad \text{für alle } \lambda \in (\alpha,\beta).$$

Die wiederholte Anwendung von Satz 3.17 impliziert, dass das gesamte Intervall $[\alpha,\beta]$ – und damit auch (R,∞) – positiven Typs ist bezüglich aller $A(t)$, $t \in [0,\pi]$. Nach Satz 3.11 ist (R,∞) auch positiven Typs bezüglich A. Analog wird bewiesen, dass $(-\infty,-R)$ negativen Typs bezüglich A ist. □

Wir werden nun gewisse Bedingungen an die Funktionen w und p stellen, die unter anderem die Beschränktheit des nichtreellen Spektrums von A garantieren.

Definition 3.21. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Vorzeichenwechsel* der Funktion w, wenn es $\delta > 0$ gibt, so dass w auf $(x_0-\delta,x_0)$ und $(x_0,x_0+\delta)$ jeweils definit ist aber verschiedene Vorzeichen hat. Wir nennen einen Vorzeichenwechsel x_0 von w *einfach*, wenn es $\delta > 0$, $\tau_+,\tau_- > -1$ sowie Funktionen $\rho_+ \in C^1([x_0,x_0+\delta])$ und $\rho_- \in C^1([x_0-\delta,x_0])$ mit $\rho_+(x_0) \neq 0$, $\rho_-(x_0) \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(\rho_+(x_0+x)) = -\operatorname{sgn}(\rho_-(x_0-x)) = \text{const}$ für $x \in [0,\delta]$ gibt, so dass

$$w(x) = \rho_\pm(x)|x-x_0|^{\tau_\pm}, \quad \pm(x-x_0) \in (0,\delta).$$

Der folgende Satz stellt das zweite Hauptergebnis dieses Abschnittes dar.

Satz 3.22. *Es gebe endlich viele $[0,a)$ überdeckende Intervalle, auf denen die Gewichtsfunktion w jeweils f.ü. definit ist, jeder Vorzeichenwechsel von w in $\mathbb{R}$ sei einfach, und die Funktionen p und $1/p$ seien in Umgebungen der Vorzeichenwechsel von w wesentlich beschränkt. Dann ist der indefinite periodische Sturm-Liouville Operator A nichtnegativ in einer Umgebung von ∞, und ∞ ist kein singulärer kritischer Punkt von A. Insbesondere ist das nichtreelle Spektrum von A beschränkt.*

Beweis. Es sei $\nu \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $\hat{w} : x \mapsto w(x+\nu)$ keinen Vorzeichenwechsel in Null hat. Für eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ setzen wir $\hat{h} : x \mapsto h(x+\nu)$. Der Operator

$$\hat{U} : L^2_{|w|}(\mathbb{R}) \to L^2_{|\hat{w}|}(\mathbb{R}), \quad (\hat{U}f)(x) := f(x+\nu),\ f \in L^2_{|w|}(\mathbb{R}),$$

ist dann unitär, und es gilt $A = \hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$, wobei $\hat{A}$ der maximale Operator auf $\mathbb{R}$ bezüglich des Sturm-Liouville-Differentialausdrucks

$$\hat{\ell}f := \frac{1}{\hat{w}}\left(-(\hat{p}f')' + \hat{q}f\right)$$

ist. Und wegen $(\hat{U}J\hat{U}^{-1}f)(x) = \operatorname{sgn}(\hat{w}(x))f(x)$ für $f \in L^2_{|\hat{w}|}(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ sind auch die Vorzeichentypen der Spektralpunkte von A und $\hat{A}$ dieselben.

Mithin dürfen wir annehmen, dass w in Umgebungen von Null und a das gleiche Vorzeichen hat. Folglich hat w in $(0, a)$ eine gerade Anzahl von Vorzeichenwechseln. Es ist bekannt (siehe [73]), dass der im Hilbertraum $L^2_{|w|}(\mathbb{R})$ selbstadjungierte Operator $T = JA$ nach unten beschränkt ist. Also gibt es ein $\eta > 0$, so dass $S := T + \eta$ gleichmäßig positiv ist. Demnach ist der Operator $B := JS = A + \eta J$ gleichmäßig positiv im Kreinraum $L^2_w(\mathbb{R})$. Im folgenden werden wir zeigen, dass der Punkt ∞ unter den Voraussetzungen des Satzes kein singulärer kritischer Punkt von B ist. Aus Satz 1.28 folgen dann die Behauptungen.

Zunächst bemerken wir, dass B gerade der maximale Operator bezüglich des indefiniten Sturm-Liouville-Differentialausdrucks

$$\ell_\eta(f) := \frac{1}{w}\Big(-\big(pf'\big)' + \big(q + \eta|w|\big)f\Big)$$

auf $\mathbb{R}$ ist. Auch dessen Koeffizienten sind a-periodisch, und wir definieren die regulären Operatoren $B(t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, bezüglich ℓ_η analog zu der Definition der $A(t)$ bezüglich ℓ. Die Operatoren $S(t) := J_a B(t)$ sind selbstadjungiert im Hilbertraum $L^2_{|w|}(0, a)$ und gemäß Satz 3.11 gleichmäßig positiv mit

$$\inf_{t\in[-\pi,\pi]} \min \sigma(S(t)) = \min \sigma(S) > 0.$$

Desweiteren ist S (via Gelfandtransformation) unitär äquivalent zu dem Multiplikationsoperator in $L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a)$ mit den $S(t)$.

Es sei $B_{\min}$ der minimale Operator bezüglich ℓ_η auf $[0, a]$. Aus der gleichmäßigen Positivität von z. B. $S(0)$ folgt, dass der in $L^2_{|w|}(0, a)$ symmetrische Operator $S_{\min} := J_a B_{\min}$ gleichmäßig positiv ist. Die Friedrichserweiterung und die Krein-von Neumann-Erweiterung von $S_{\min}$ wollen wir mit S_F bzw. S_N bezeichnen. Wir definieren die Mengen

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_N &:= \{f \in \mathrm{AC}([0, a]) : |f'|^2 p \in L^1(0, a)\},\\
\mathcal{D}(t) &:= \{f \in \mathcal{D}_N : f(a) = e^{it} f(0)\},\ t \in [-\pi, \pi],\\
\mathcal{D}_F &:= \{f \in \mathcal{D}_N : f(a) = f(0) = 0\}.
\end{aligned}$$

Offenbar gilt $\mathcal{D}_F \subset \mathcal{D}(t) \subset \mathcal{D}_N$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$, und es ist bekannt (vgl. [22]), dass

$$\operatorname{dom} S_N^{1/2} = \mathcal{D}_N, \quad \operatorname{dom} S(t)^{1/2} = \mathcal{D}(t) \quad \text{und} \quad \operatorname{dom} S_F^{1/2} = \mathcal{D}_F.$$

Dies sind zugleich die Definitionsbereiche der Abschlüsse der jeweils durch S_N, $S(t)$ und S_F definierten Formen (vgl. [54, Chapter VI, Theorem 2.23]). Zudem (siehe [41, Theorem 4.1] und [54, Chapter VI, Theorem 2.21]) gelten für alle $t \in [-\pi, \pi]$ die Relationen

$$\|S_N^{1/2} f\|_a \leq \|S(t)^{1/2} f\|_a \quad \text{für } f \in \mathcal{D}(t) \tag{3.9}$$

und

$$\|S(t)^{1/2} f\|_a \leq \|S_F^{1/2} f\|_a \quad \text{für } f \in \mathcal{D}_F, \tag{3.10}$$

wobei $\|\cdot\|_a := \|\cdot\|_{\mathcal{K}_a}$.

Wir nehmen im folgenden Bezug auf [22] und insbesondere auf den Beweis des darin zu findenden Theorems 3.6. Gemäß [22] bezeichnen wir für ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset (0, a)$ und eine Menge $\mathcal{D} \subset \mathrm{AC}([0, a])$ mit $\mathcal{D} \,|\, [\alpha, \beta]$ die Menge der Einschränkungen der Funktionen aus $\mathcal{D}$ auf $[\alpha, \beta]$. Wie im Beweis von [22, Theorem 3.6] sei

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} < x_{2n+1} < a$$

eine Zerlegung des Intervalls $[0, a]$, so dass die x_{2j}, $j = 1, \ldots, n$, gerade die Vorzeichenwechsel von w sind. Nach [22, Lemma 3.2] gibt es dann für jedes $i \in \{1, \ldots, 2n\}$ einen gleichmäßig positiven Operator $X_i \in \mathcal{B}(L^2_{|w|}(x_i, x_{i+1}))$, so dass

$$X_i\big(\mathcal{D}_N \,|\, [x_i, x_{i+1}]\big) \subset \mathcal{D}_N \,|\, [x_i, x_{i+1}].$$

Mit diesen Operatoren wird bezüglich der Zerlegung

$$L^2_{|w|}(0, a) = L^2_{|w|}(0, x_1) \oplus L^2_{|w|}(x_1, x_2) \oplus \ldots \oplus L^2_{|w|}(x_{2n}, x_{2n+1}) \oplus L^2_{|w|}(x_{2n+1}, a)$$

der Operator

$$X := I_1 \oplus X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_{2n} \oplus I_2$$

definiert, wobei I_1 (I_2) den Identitätsoperator auf $L^2_{|w|}(0, x_1)$ (bzw. $L^2_{|w|}(x_{2n+1}, a)$) bezeichne. Im Beweis von [22, Theorem 3.6] wird gezeigt, dass der Operator $W_a := J_a X$ ein beschränkter und gleichmäßig positiver Operator im Kreinraum $L^2_w(0, a)$ ist mit

$$W_a \mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}_N \quad \text{und} \quad W_a \mathcal{D}(t) \subset \mathcal{D}(t) \ \text{ für alle } t \in [-\pi, \pi]. \tag{3.11}$$

Es sei $\iota \in \{-1, 1\}$ das Vorzeichen von w auf $[0, x_1) \cup (x_{2n+1}, a]$. Nach Konstruktion von X und W_a sowie (3.11) gilt dann

$$(W_a - \iota I)\mathcal{D}_N \subset \mathcal{D}_F. \tag{3.12}$$

Wir definieren nun den Operator $\widetilde{W} \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a))$ durch

$$\big(\widetilde{W} F\big)(t) := W_a F(t), \quad F \in L^2(\mathcal{I}, \mathcal{K}_a),\ t \in \mathcal{I}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass dieser Operator beschränkt und gleichmäßig positiv im Kreinraum $(L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a),[\cdot\,,\cdot]_\sim)$ ist, wobei $[\cdot\,,\cdot]_\sim := (\widetilde{J}\cdot,\cdot)_{L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)}$. Es sei $\widetilde{S}$ der Multiplikationsoperator mit den $S(t)$ in $L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$. Dieser ist nach Lemma 3.9 und Satz 3.2 selbstadjungiert und offenbar ebenfalls gleichmäßig positiv. Im folgenden zeigen wir, dass

$$\widetilde{W}\operatorname{dom}\widetilde{S}^{1/2} \subset \operatorname{dom}\widetilde{S}^{1/2} \tag{3.13}$$

gilt. Dazu wollen wir zunächst einsehen, dass $\widetilde{S}^{1/2}$ gerade der Multiplikationsoperator M mit den $S(t)^{1/2}$ ist. Wir wählen eine Folge (p_k) von Polynomen, die gleichmäßig auf $[0,1/\min\sigma(S)]$ gegen die Wurzelfunktion konvergiert. Für jedes $t\in\mathcal{I}$ konvergiert dann $p_k(S(t)^{-1})$ gegen $S(t)^{-1/2}$ in der Operatornorm. Und da die Abbildung $t\mapsto S(t)^{-m}$ für jedes $m\in\mathbb{N}$ stetig ist (siehe Lemma 3.9), ist $t\mapsto (S(t)^{-1/2}f,g)_a$ für alle $f,g\in\mathcal{K}_a$ als punktweiser Grenzwert stetiger Funktionen messbar. Also ist M nach [66, Theorem XIII.85 (a)] ein selbstadjungierter und gleichmäßig positiver Operator in $L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$. Weiter impliziert [66, Theorem XIII.85 (c)], dass M^{-2} der Multiplikationsoperator mit $S(t)^{-1}$ ist. Also gilt $M^{-2}=\widetilde{S}^{-1}$ und damit $M^2=\widetilde{S}$, was $M=\widetilde{S}^{1/2}$ zeigt. Daher ist

$$\operatorname{dom}\widetilde{S}^{1/2} = \big\{F\in L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a) : F(t)\in\mathcal{D}(t)\text{ f.ü., }\ S(\cdot)^{1/2}F(\cdot)\in L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)\big\}.$$

Für den Beweis von (3.13) sei $F\in\operatorname{dom}\widetilde{S}^{1/2}$. Dann ist natürlich $\widetilde{W}F\in L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$, und mit (3.11) gilt $(\widetilde{W}F)(t)=W_aF(t)\in\mathcal{D}(t)$ für fast alle $t\in[-\pi,\pi]$. Um $S(\cdot)^{1/2}W_aF(\cdot)\in L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$ nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass es ein $c>0$ gibt, so dass

$$\|S_F^{1/2}(W_a-\iota I)f\|_a^2 \le c\left(\|f\|_a^2+\|S_N^{1/2}f\|_a^2\right),\quad f\in\mathcal{D}_N$$

gilt. Dies ist eine einfache Konsequenz aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen und (3.12). Damit sowie mit Anwendung von (3.9) und (3.10) erhalten wir

$$\begin{aligned}\|S(t)^{1/2}(W_a-\iota I)F(t)\|_a^2 &\le \|S_F^{1/2}(W_a-\iota I)F(t)\|_a^2\\ &\le c\left(\|F(t)\|_a^2+\|S_N^{1/2}F(t)\|_a^2\right)\\ &\le c\Big(\|F(t)\|_a^2+\|S(t)^{1/2}F(t)\|_a^2\Big).\end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Funktion $t\mapsto S(t)^{1/2}W_aF(t)-\iota S(t)^{1/2}F(t)$ ein Element von $L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$ ist. Daher ist auch $t\mapsto S(t)^{1/2}W_aF(t)$ ein Element von $L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a)$, und (3.13) ist bewiesen.

Es folgt nun aus (3.13) und [21, Proposition 3.5], dass der Punkt ∞ kein singulärer kritischer Punkt des im Kreinraum $(L^2(\mathcal{I},\mathcal{K}_a),[\cdot\,,\cdot]_\sim)$ selbstadjungierten Operators $\widetilde{B}:=\widetilde{J}\widetilde{S}$ ist. Und wegen $B=U^{-1}\widetilde{B}U$ und $J=U^{-1}\widetilde{J}U$ hat auch der Operator B in $L^2_w(\mathbb{R})$ diese Eigenschaft. □

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei den Professoren Jussi Behrndt und Carsten Trunk bedanken, die mir während meiner Zeit als Doktorand stets mit wertvollen Anregungen und Kommentaren zur Seite gestanden und meine eigenwillige Arbeitsweise geduldet haben. Ganz speziell danke ich Herrn Prof. Jussi Behrndt für die Hauptzutaten zum Beweis von Satz 1.28. Außerdem gilt mein Dank der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), die meine Arbeit auf finanzieller Ebene unterstützt und gefördert hat.

Literatur

[1] T.Ya. Azizov, J. Behrndt, F. Philipp, C. Trunk, On domains of powers of linear operators and finite rank perturbations, Oper. Theory: Adv. Appl. **188**, 31–37, 2008.

[2] T.Ya. Azizov, I.S. Iokhvidov, Linear operators in spaces with an indefinite metric, John Wiley & Sons, 1989.

[3] T.Ya. Azizov, P. Jonas, C. Trunk, Spectral Points of Type π_+ and π_- of Selfadjoint Operators in Krein Spaces, J. Funct. Anal. **226**, 115–137, 2005.

[4] J. Behrndt, Finite rank perturbations of locally definitizable self-adjoint operators in Krein spaces, J. Operator Theory **58** (2), 101–126, 2007.

[5] J. Behrndt, On the spectral theory of singular indefinite Sturm-Liouville operators, J. Math. Anal. Appl. **334**, 1439–1449, 2007.

[6] J. Behrndt, Spectral theory of elliptic differential operators with indefinite weights, eingereicht.

[7] J. Behrndt, Q. Katatbeh, C. Trunk, Non-real eigenvalues of singular indefinite Sturm-Liouville operators, Proc. Amer. Math. Soc. **137**, 3797–3806, 2009.

[8] J. Behrndt, F. Philipp, Spectral analysis of singular ordinary differential operators with indefinite weights, J. Differential Equations **248** (8), 2015–2037, 2010.

[9] J. Behrndt, F. Philipp, C. Trunk, Properties of the spectrum of type π_+ and type π_- of self-adjoint operators in Krein spaces, Methods Funct. Anal. Topology **12** (4), 326–340, 2006.

[10] J. Behrndt, C. Trunk, On the negative squares of indefinite Sturm-Liouville operators, J. Differential Equations **238**, 491–519, 2007.

[11] C.M. Bender, G.V. Dunne, P.N. Meisinger, Complex periodic potentials with real band spectra, Phys. Lett. A **252**, 272-276, 1999.

[12] C. Bennewitz, N. Everitt, On second-order left-definite boundary value problems, Lect. Notes Math. **1032**, 31–67, 1983.

[13] P. Binding, P. Browne, Left definite Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Differ. Integral Equ. **12**, 167–182, 1999.

[14] P. Binding, P. Browne, B. Watson, Inverse spectral problems for left-definite Sturm-Liouville equations with indefinite weight, J. Math. Anal. Appl. **271**, 383–408, 2002.

[15] P. Binding, M. Möller, Negativity indices for definite and indefinite Sturm-Liouville problems, Math. Nachr. **283** (2), 180–192, 2010.

[16] P. Binding, H. Volkmer, Eigencurves for two-parameter Sturm-Liouville equations, SIAM Rev. **38**, 27–48, 1996.

[17] J. Bognar, Indefinite inner product spaces, Springer, 1974.

[18] E. Caliceti, S. Graffi, A criterion for the reality of the spectrum of $\mathcal{PT}$-symmetric Schrdinger operators with complex-valued periodic potentials, Rendiconti Lincei - Matematica e Applicazioni **19**, 163-173, 2008.

[19] J.B. Conway, Functions of one complex variable, Springer, 1978.

[20] R. Cross, Multivalued Linear Operators, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics 213, Marcel Dekker, Inc., 1998.

[21] B. Ćurgus, On the regularity of the critical point infinity of definitizable operators, Integral Equations Operator Theory **8**, 462–488, 1985.

[22] B. Ćurgus, H. Langer, A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function, J. Differential Equations **79**, 31–61, 1989.

[23] B. Ćurgus, B. Najman, The operator $(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to a selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$, Proc. Am. Math. Soc. **123** (4), 1125–1128, 1995.

[24] B. Ćurgus, B. Najman, Positive differential operators in Krein space $L^2(\mathbb{R})$, Oper. Theory Adv. Appl. **87**, 95–104, 1996.

[25] K. Daho, H. Langer, Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **78**, 161–191, 1977.

[26] K. Daho, H. Langer, Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function: The periodic case, Rad. Mat. **2**, 165–188, 1986.

[27] R. Denk, M. Möller, C. Tretter, The spectrum of the multiplication operator associated with a family of operators in a Banach space, Oper. Theory: Adv. Appl. **162**, 103–116, 2005.

[28] V. Derkach, On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Krein space, Integral Equations Operator Theory **23**, 387–415, 1995.

[29] V. Derkach, On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces, J. Math. Sci. **97**, 4420–4460, 1999.

[30] V. Derkach, M.M. Malamud, Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps, J. Funct. Anal. **95**, 1–95, 1991.

[31] V. Derkach, M.M. Malamud, The extension theory of Hermitian operators and the moment problem, Journal of mathematical sciences **73** (2), 141–242, 1995.

[32] A. Dijksma, H. Langer, H. de Snoo, Eigenvalues and pole functions of Hamiltonian systems with eigenvalue depending boundary conditions, Math. Nachr. **161**, 107–154, 1993.

[33] A. Dijksma, H. de Snoo, Symmetric and selfadjoint relations in Krein spaces I, Oper. Theory: Adv. Appl. **24**, 145–166, 1987.

[34] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators. Part I: General Theory, John Wiley & Sons, 1957.

[35] N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators. Part II: Spectral Theory, John Wiley & Sons, 1963.

[36] W.N. Everitt, On a property of the m-coefficient of a second-order linear differential equation, J. London Math. Soc. **4** (2), 443–457, 1972.

[37] T.W. Gamelin, Complex analysis, Springer, 2001.

[38] F. Gesztesy, V. Tkachenko, A criterion for Hill operators to be spectral operators of scalar type, J. Anal. Math. **107**, 287–353, 2009.

[39] R. Gilbert, Simplicity of linear ordinary differential operators, J. Differential Equations **11**, 672–681, 1972.

[40] V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk, Boundary value problems for operator differential equations, Kluwer Academic Publishers, 1991.

[41] S. Hassi, M.M. Malamud, H. de Snoo, On Krein's extension theory of nonnegative operators, Math. Nachr. **274–275**, 40–73, 2004.

[42] S. Hassi, H. de Snoo, H. Winkler, On exceptional extensions close to the generalized Friedrichs Extension of symmetric operators, Oper. Theory: Adv. Appl. **175**, 111–120, 2007.

[43] P. Jonas, On the functional calculus and the spectral function for definitizable operators in Krein space, Beiträge zur Analysis **16**, 121–135, 1981.

[44] P. Jonas, On a class of selfadjoint operators in Krein space and their compact perturbations, Integral Equations Operator Theory **11**, 351–384, 1988.

[45] P. Jonas, A note on perturbations of selfadjoint operators in Krein spaces, Oper. Theory Adv. Appl. **43**, 229–235, 1990.

[46] P. Jonas, On locally definite operators in Krein spaces, in: Spectral Theory and its Applications, Ion Colojoară Anniversary Volume, Theta, 95–127, 2003.

[47] P. Jonas, On operator representations of locally definitizable functions, Oper. Theory Adv. Appl. **162**, 165-190, 2005.

[48] P. Jonas, H. Langer, Compact perturbations of definitizable operators, J. Operator Theory **2**, 63–77, 1979.

[49] I.M. Karabash, A functional model, eigenvalues, and finite singular critical points for indefinite Sturm-Liouville operators, Oper. Theory Adv. Appl. **203**, 247–287, 2010.

[50] I.M. Karabash, A. Kostenko, Indefinite Sturm-Liouville operators with the singular critical point zero, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **138**, 801–820, 2008.

[51] I.M. Karabash, A. Kostenko, M.M. Malamud, The similarity problem for J-nonnegative Sturm-Liouville operators, J. Differential Equations **246**, 964–997, 2009.

[52] I.M. Karabash, M.M. Malamud, Indefinite Sturm-Liouville operators $\operatorname{sgn} x$ $(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x))$ with finite-zone potentials, Operators and Matrices (1) **3**, 301–368, 2007.

[53] I.M. Karabash, C. Trunk, Spectral properties of singular Sturm-Liouville operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139**, 483–503, 2009.

[54] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Second Edition, Springer, 1976.

[55] Q. Kong, M. Möller, H. Wu, A. Zettl, Indefinite Sturm-Liouville problems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **133 A**, 639–652, 2003.

[56] Q. Kong, H. Wu, A. Zettl, Left-definite Sturm-Liouville problems, J. Differential Equations **177**, 1–26, 2001.

[57] Q. Kong, H. Wu, A. Zettl, Singular left-definite Sturm-Liouville problems, J. Differential Equations **206**, 1–29, 2004.

[58] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer, 1969.

[59] H. Langer, Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces, Lect. Notes Math. **948**, 1–46, 1982.

[60] H. Langer, A. Markus, V. Matsaev, Locally definite operators in indefinite inner product spaces, Math. Ann. **308**, 405–424, 1997.

[61] J. Liouville, C. Sturm, Note sur un théorème de M. Cauchy relatif aux racines des équations simultannées, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris **4**, 720–739, 1837.

[62] J. Liouville, C. Sturm, Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable, Journ. Math. Pures Appl. **2**, 220–233, 1837.

[63] M. Marletta, A. Zettl, Floquet theory for left-definite Sturm-Liouville problems, J. Math. Anal. Appl. **305**, 477–482, 2005.

[64] A.B. Mingarelli, Characterizing degenerate Sturm-Liouville problems, Electr. J. of Diff. Eq. **130**, 1–8, 2004.

[65] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics I. Functional Analysis, Academic Press, 1980.

[66] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of operators, Academic Press, 1978.

[67] R.G.D. Richardson, Contributions to the study of oscillation properties of the solutions of linear differential equations of the second order, Amer. J. Math. **40**, 283–316, 1918.

[68] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill Inc., 1970.

[69] K.C. Shin, On the shape of spectra for non-self-adjoint periodic Schrödinger operators, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 8287–8291, 2004.

[70] C. Sturm, Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journ. Math. Pures Appl. **1**, 106–186, 1836.

[71] B. Textorius, Minimaxprinzipe zur Bestimmung der Eigenwerte J-nichtnegativer Operatoren, Math. Scand. **35**, 105–114, 1974.

[72] J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil I: Grundlagen, Teubner, 2000.

[73] J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil II: Anwendungen, Teubner, 2003.

[74] J. Weidmann, Spectral theory of ordinary differential operators, Lect. Notes Math. **1258**, Springer, 1987.

[75] A. Zettl, Sturm-Liouville theory, Mathematical surveys and monographs, v. 121, American Mathematical Society, 2005.