

# Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	9
Danksagung	9
<b>Einleitung</b>	<b>23</b>
Ein leicht verständlicher Einstieg in die höhere Mathematik anhand vieler Beispiele	23
Überall praktische Beispiele	23
Törichte Annahmen über den Leser	24
Konventionen in diesem Buch	24
Wie dieses Buch strukturiert ist	25
Teil I: Zahlen und Rechenoperationen	25
Teil II: Keine Angst vor Gleichungen, Vektoren und Matrizen	25
Teil III: Funktionen, Folgen und Reihen	25
Teil IV: Keine Angst vor Geometrie	26
Teil V: Differentiation und Integralrechnung	26
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	26
Die Symbole in diesem Buch	26
Den modularen Aufbau für sich nutzen	27
<b>Teil I</b>	
<b>Zahlen und Rechenoperationen</b>	<b>29</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Zahlen und Grundrechenarten</b>	<b>31</b>
Mathematik und ihre natürlichen Zahlen	31
Eigenschaften der Grundrechenarten	33
Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen	34
Aufgaben mit Klammern richtig lösen	37
Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders	37
Rationale Zahlen und ihre Dezimalbrüche	40
Und plötzlich wird's irrational... und reell	42
Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen	44
Das Summenzeichen	45

## Kapitel 2

### Rechnen mit Polynomen, Potenzen und Logarithmen

47

Alles über Mengen	47
Mengen im Supermarkt?	47
Alles, nichts, oder? – Spezielle Mengen	48
Von Zahlen, Mengen und Intervallen	50
Mit Mengen einfach rechnen können	50
Venn-Diagramme	54
Prozentrechnung für den Alltag	56
Nur zwei Prozent Mieterhöhung	57
Das eigene Heim trotz Provision?	57
Die Bären kommen – Sinkende Aktienkurse	57
Bullen im Vormarsch – Steigende Kurse	57
Wie viele Bullen hätten die Bären gezähmt?	58
Immer auf die genaue Formulierung achten	58
Preissenkungsschnäppchen mitnehmen	58
Zinsrechnung zum Verstehen	59
Lohnender Zinsertrag	59
Höhe des Zinssatzes für Ihre Träume	59
Suche nach dem Startkapital	60
Taggenaue Zinsen	60
Kapitalwachstum: Zinseszins	60
Eine feste Anlage für zehn Jahre	61
Das sich verdoppelnde Kapital bei festem Zins	61
Das sich verdoppelnde Kapital bei fester Jahresanzahl	62
Keine Angst vor Wurzeln und Potenzen	62

## Kapitel 3

### Logische Grundlagen und Beweismethoden

63

Logische Grundlagen	63
Wahre und falsche Aussagen	63
Aussagen verknüpfen	64
Die Mathematik als Sprache erkennen	65
Terme als die Worte im mathematischen Satz	66
Formeln sind die Sätze der mathematischen Sprache	66
Mit Quantoren neue Formeln bilden	67
Notwendige und hinreichende Bedingungen	69
Die Unendlichkeit – unzählige Welten?	71
Mit abzählbaren Mengen zählen lernen	71
Jenseits der Zählbarkeit – überabzählbare Mengen	73
Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik	74
Methode 1: Direkter Beweis	75
Methode 2: Indirekter Beweis	75
Methode 3: Beweis durch Fallunterscheidung	77
Methode 4: Beweis durch vollständige Induktion	78

## **Kapitel 4**

<b>Grundlagen der Gleichungen und Ungleichungen</b>	<b>81</b>
Gleichungen in Angriff nehmen	81
Ungleichungen in den Griff bekommen	85
Beträge ins Spiel bringen	87

## **Teil II**

<b>Keine Angst vor Gleichungen, Vektoren und Matrizen</b>	<b>91</b>
---	-----------

## **Kapitel 5**

<b>Nicht reell aber real – die komplexen Zahlen</b>	<b>93</b>
Was komplexe Zahlen wirklich sind	93
Komplexe Rechenoperationen	94
Die komplexe Addition	95
Die komplexe Multiplikation	95
Die Konjugierte einer komplexen Zahl	95
Die komplexe Division	96
Zusammenhänge zwischen den komplexen Operationen	96
Komplexe quadratische Gleichungen	97
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen	98
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten	99
Der Betrag einer komplexen Zahl	99
Einmal Polarkoordinaten und zurück	100
Umwandlung in Polarkoordinaten aus Koordinaten	101
Umwandlung in Koordinaten aus Polarkoordinaten	101
Komplexe Potenzen und Wurzeln	102
Anwendungen komplexer Zahlen	104

## **Kapitel 6**

<b>Die Grundlagen: Allgemeine Vektorräume und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>107</b>
Vektoren erleben	107
Vektoren veranschaulichen	109
Mit Vektoren anschaulich rechnen	110
Mit Vektoren rechnen	111
Betrag eines Vektors berechnen	114
Das Skalarprodukt von Vektoren berechnen	115
Schöne Vektorraumteilmengen: Untervektorräume bestimmen	117
Vektoren und ihre Koordinaten bestimmen	120
Arten von Linearen Gleichungssystemen	123
Homogene Gleichungssysteme	124
Inhomogene Gleichungssysteme	124
Überbestimmte Gleichungssysteme	125
Unterbestimmte Gleichungssysteme	126

Quadratische Gleichungssysteme	126
Nicht lösbare Gleichungssysteme	127
Graphische Lösungsansätze für LGS	128

## **Kapitel 7**

### **Vektoren im dreidimensionalen Raum: Punkte, Geraden und Ebenen 129**

Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	129
Punkte im Raum	129
Parametergleichung für Geraden	130
Zweipunktgleichung für Geraden	132
Parametergleichung für Ebenen	133
Dreipunktgleichung für Ebenen	134
Koordinatengleichung für Ebenen	134
Umrechnungen der einzelnen Ebenengleichungen	135
Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen	137
Kollision während einer Flugshow in Las Vegas?	144

## **Kapitel 8**

### **Überleben in der Welt der Matrizen 147**

Was Matrizen eigentlich sind	147
Addition von Matrizen	148
Skalarmultiplikation von Matrizen	149
Multiplikation von Matrizen	149
Matrizen in Produktionsprozessen	150
Transponierte und symmetrische Matrizen	152
Keine Angst vor inversen Matrizen	152
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	153
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	154
Der Rang von Matrizen	159
Matrizen invertieren in der Praxis	160
Kriterien für die Lösbarkeit von homogenen Gleichungssystemen	161
Kriterien für die Lösbarkeit von inhomogenen Gleichungssystemen	162
Matrizen und lineare Abbildungen	162
Lineare Abbildungen an Beispielen	163
Matrizen als lineare Abbildungen	164
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie	164
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis	165
Lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen	167
Matrizen und ihre Determinanten	169
Determinanten von $2 \times 2$ -Matrizen	169
Determinanten von $3 \times 3$ -Matrizen	169
Determinanten von allgemeinen Matrizen	170
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	173
Die Cramersche Regel	173

Die Inversen mittels der Adjunktenformel berechnen	176
Flächen und Volumina mittels Determinanten berechnen	177
Kreuzprodukt von Vektoren	178
Praktische Anwendung: Spiegelungen und Drehungen in der Ebene	180
Drehungen in der Ebene	180
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene	183
Spiegelungen in der Ebene	183
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene	185

## **Teil III**

### **Funktionen, Folgen und Reihen**

**187**

#### **Kapitel 9**

##### **Was Funktionen sind!**

**189**

Was Funktionen eigentlich sind	189
Graphische Darstellung von Funktionen	191
Polynome einfach verstehen	192
Bruchrechnung: Rationale Funktionen	195
Keine Angst vor der Polynomdivision	196
Rasch wachsende Exponentialfunktionen	198
Umgekehrt betrachtet: Logarithmusfunktionen	199
Von Umkehr- und inversen Funktionen	200
Trigonometrische Funktionen	201
Trigonometrische Funktionen zeichnen	202
Identifikation (von und) mit trigonometrischen Identitäten	203
Trigonometrische Kehrwert- und Umkehrfunktionen	203

#### **Kapitel 10**

##### **Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen**

**207**

Grenzwerte einer Funktion verstehen	207
Drei Funktionen erklären den Grenzwertbegriff	207
Links- und rechtsseitige Grenzwerte	208
Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!	209
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	209
Grenzwerte für $x$ gegen unendlich	210
Stetigkeit von Funktionen	211
Einfache Grenzwerte auswerten	214
Einfachste Methode: Einsetzen und Auswerten	214
Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	215
Methode 1: Faktorisieren	215
Methode 2: Konjugierte Multiplikation	215
Methode 3: Einfache algebraische Umformungen	216
Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich	216
Grenzwerte bei unendlich auswerten	219

Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	219
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	220

## **Kapitel 11**

### ***Von Folgen und Reihen***

**221**

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	221
Folgen aneinanderreihen	221
Reihen summieren	225
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	227
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	227
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	228
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	231
Quotienten- und Wurzelkriterium	234
Alternierende Reihen	236
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	236
Leibniz und das Kriterium für alternierende Reihen	237
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	240
Eine erste spezielle Reihenart, die Potenzreihen	242
Potenzreihen (er)kennen	242
Konvergenzbereich von Potenzreihen	244
Rechnen Sie mit Potenzreihen	245
Eine zweite spezielle Reihenart, die Taylorreihen	246

## **Teil IV**

### ***Keine Angst vor Geometrie***

**249**

## **Kapitel 12**

### ***Von Winkeln, Geraden und Dreiecken: Grundlagen der Geometrie***

**251**

Geraden, Strahlen und Winkel	251
Winkel an geschnittenen Geraden	254
Strecken in der Ebene	255
Mit den Strahlensätzen rechnen	255
Goldener Schnitt	257
Das allgemeine Dreieck	259
Das gleichschenklige Dreiecke	260
Das gleichseitige Dreieck	261
Das rechtwinklige Dreieck	261
Interessante Schnittpunkte in Dreiecken	262
Dreiecke und ihre Seitenhalbierende samt Schwerpunkte	263
Dreiecke und ihr Mittelsenkrechte samt Umkreise	263
Dreiecke und ihre Winkelhalbierende samt Inkreisen	264
Dreiecke und ihre Höhenschnittpunkt	264
Kongruenz von Dreiecken	265
Ähnlichkeit von Dreiecken	267

## **Kapitel 13**

### **Elementare Figuren der Geometrie in Ebene und Raum 269**

Die zweidimensionale Welt: Von Vierecken über $n$ -Ecke zu Kreisen	269
Vierecke (er)kennen lernen	269
Allgemeine und regelmäßige $n$ -Ecke	275
Keine Angst vor Kreisen	277
Geometrische Körper – die dreidimensionale Welt	281
Die Welt der Prismen	282
Es mit Pyramiden auf die Spitze treiben	284
Zylinder aus Prismen entwickeln	287
Aus Pyramiden werden Kegel	288
Die Kugel – schlicht und makellos	289
Ein komplexeres Beispiel aus der Praxis: Optimale Blechbehälter gesucht!	290
Platonische Körper genießen	292

## **Teil V**

### **Differential- und Integralrechnung für eine Variable 295**

#### **Kapitel 14**

#### **Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen 297**

Erste Schritte des Ableitens	297
Steigungen gesucht!	297
Steigung von Geraden	298
Steigungen von Parabeln	300
Der Differenzenquotient	301
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	305
Grundlegende Regeln der Differentiation	307
Die Konstantenregel	307
Die Potenzregel	307
Die Koeffizientenregel	308
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	308
Trigonometrische Funktionen differenzieren	308
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	308
Fortgeschrittene Regeln der Differentiation	310
Die Produktregel	310
Die Quotientenregel	310
Die Kettenregel	310
Implizite Differentiation	314
Logarithmische Differentiation	315
Differentiation von Umkehrfunktionen	315
Keine Angst vor höheren Ableitungen	317

## Kapitel 15

### Kurvendiskussion: Extrem-, Wende- und Sattelpunkte

319

Kurvendiskussion einmal praktisch veranschaulicht	319
Berg und Tal: Positive und negative Steigungen	320
Bauchgefühle: Konvexität und Wendepunkte	320
Am Tiefpunkt angelangt: Ein lokales Minimum	321
Atemberaubender Blick: Das globale Maximum	321
Achtung – Nicht auf der Spitze stecken bleiben	321
Halten Sie sich fest – nun geht's bergab!	321
Jetzt wird's kritisch an den Punkten!	322
Lokale Extremwerte finden	323
Die kritischen Werte suchen	323
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	324
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	325
Globale Extremwerte über einem abgeschlossenem Intervall finden	326
Globale Extrempunkte über den gesamten Definitionsbereich finden	328
Konvexität und Wendepunkte praktisch bestimmen	330
Die Graphen von Ableitungen – jetzt wird gezeichnet!	331
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	334
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	335
Das nützliche Taylorpolynom	337
Die Regel von l'Hospital	341
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	342
Kombinieren der Methoden – nur Geduld!	342

## Kapitel 16

### Eindimensionale Integration

345

Flächenberechnung – eine Einführung	345
Flächen mithilfe von Rechtecksummen annähern	346
Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln	350
Stammfunktionen suchen – rückwärts Ableiten	352
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	354
Flächenfunktion beschreiben	354
Achtung Tusch: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	356
Die erste Version des Hauptsatzes	357
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	360
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen	361

## Kapitel 17

### Integrale praktisch lösen – Tipps und Tricks

365

Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	365
Umkehrregeln für Stammfunktionen	365
Genial einfach: Raten und Prüfen	366
Die Substitutionsmethode	367

Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	370
Partielle Integration: Teile und Herrsche!	371
Wählen Sie weise!	372
Partielle Integration: Immer wieder dasselbe!	374
Im Kreis gelaufen und doch am Ziel	374

## **Kapitel 18**

### **Spezielle Integrale praktisch lösen – Tipps und Tricks 377**

Integrale mit Sinus und Kosinus	377
Fall 1: Die Potenz vom Sinus ist ungerade und positiv	377
Fall 2: Die Potenz vom Kosinus ist ungerade und positiv	378
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade aber nicht negativ	378
Integrieren mit dem A-B-C der Partialbrüche	379
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	380
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	381
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	382
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	383
Integrale rationaler Funktionen von Sinus und Kosinus	384
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	385
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	385
Bogenlängen bestimmen	387
Oberflächen von einfachen Rotationskörpern bestimmen	389

## **Teil VI**

### **Der Top-Ten-Teil 389**

#### **Kapitel 19**

##### **Zehn häufig gemachte Fehler im (Stochastik-)Alltag 391**

Vergessen, dass eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegen muss	391
Kleine Wahrscheinlichkeiten fehlinterpretieren	392
Falsche Schlussfolgerungen durch Vergleiche ziehen	392
Wahrscheinlichkeiten für kurzfristige Vorhersagen verwenden	392
Nicht glauben, dass 1-2-3-4-5-6 gewinnen kann	392
An Serien beim Würfeln glauben	393
Jeder Situation eine 50-50-Chance einräumen	393
Bedingte Wahrscheinlichkeiten verwechseln	393
Unabhängigkeit von Ereignissen annehmen	394
Und zu guter Letzt: Das Ziegenproblem	394

#### **Kapitel 20**

##### **Zehn interessante Ansätze der Physik 397**

Lorentz und die relativen Geschwindigkeiten	397
Dopplers Effekte	399

Keplers Planetengesetze	399
Galileis Fallgesetz	399
Newtons Trägheitsgesetz	400
Maxwell und seine Gleichungen	400
Plancks Wirkung	400
Schrödingers Gleichung	401
Heisenbergsche Unschärfe	401
Einsteins $E=mc^2$ und seine spezielle Theorie zur Relativität	402
Bonusrunde: Einsteins allgemeine Relativitätstheorie	402

## **Kapitel 21**

### **Zehn Ratschläge für einen erfolgreichen Abschluss Ihres Mathekurses** **405**

Der Kurs beginnt pünktlich in der ersten Vorlesung	405
Besuchen Sie die Vorlesungen und Übungen	405
Verschaffen Sie sich ordentliche Mitschriften	406
Schauen Sie auch in die Bücher	406
Lösen Sie die wöchentlichen Übungsaufgaben	406
Gruppenarbeit nicht ausnutzen	406
Lernen Sie nicht nur für die Klausur	407
Klausurvorbereitung beginnt nicht einen Tag vorher	407
Aus Fehlern lernen	407
Der eigene Kurs ist immer der wichtigste!	408
Zu guter Letzt...	408

### **Stichwortverzeichnis** **409**