

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Das Grundbildungskonzept von PISA.....	5
2.1	Das Grundbildungskonzept als Orientierungsrahmen der PISA-Studie	5
2.1.1	Mathematical Literacy“ und „Mathematische Grundbildung“ – mathematikdidaktische Hintergründe.....	5
2.1.2	Die übergreifenden Ideen und Kompetenzklassen als Konstruktionsmerkmale des internationalen PISA-Tests	10
2.1.3	Realisierung „mathematischer Grundbildung“ in den drei „Typen mathematischen Arbeitens“ beim nationalen PISA-Test.....	12
2.1.4	Die Struktur des Aufgabenmodells beim nationalen PISA-Test.....	13
2.1.5	Anlage und Umsetzung bei PISA 2003.....	20
2.2	Operationalisierung des Grundbildungskonzepts	24
2.2.1	Zur Multiperspektivität der Schulgeometrie.....	25
2.2.2	Geometrie in den NCTM-Standards, im britischen Geometry-Report und in den deutschen Bildungsstandards	28
2.2.3	Umsetzung von geometrischen Basiskompetenzen in den nationalen Geometrieaufgaben der PISA-Studie	31
3	Geometrisches Denken und Begriffsbildung im Mathematikunterricht..	37
3.1	Grundlegende Aspekte geometrischen Denkens.....	37
3.1.1	Geometrisches Denken, geometrische Begriffsbildung und geometrische Denkweisen – Terminologisches.....	37
3.1.2	Geometrie als Vorbild für die Mathematik – zur Bedeutung geometrischen Denkens	38
3.1.3	Bilden geometrischer Begriffe.....	43
3.1.4	Die Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“ in der Schulgeometrie.....	51
3.1.5	Besondere Aspekte des Geometrielerlerns in der Hauptschule	58
3.2	Sichtweisen aus Kognitionspsychologie und Mathematikdidaktik.....	62
3.2.1	Das van-Hiele-Modell zur Entwicklung geometrischer Begriffe	62
3.2.2	Aebli's Unterrichtsversuch über die Berechnung von Umfang und Fläche des Rechtecks	67
3.2.3	Das operative Prinzip im Geometrieunterricht	70
3.2.4	Schwierigkeiten bei der Vermittlung geometrischer Begriffe.....	73
4	Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion als Orientierungsrahmen	77
5	Methodologie und methodisches Vorgehen.....	81

5.1	Methodologische Grundlagen	81
5.1.1	Zur Verbindung quantitativer und qualitativer Ansätze	81
5.1.2	Analysen von PISA-Daten	85
5.1.3	Analysen der ergänzenden, qualitativen Studie.....	88
5.1.4	Geltungsanspruch und Gültigkeit.....	97
5.2	Design und Datenerhebung	100
5.2.1	Kriterien zur Auswahl der Untersuchungsaufgaben.....	100
5.2.2	Auswahl der Probanden	104
5.2.3	Ein vierphasiges Design als Hintergrundmodell für die qualitativen Analysen.....	105
5.2.4	Entwicklung des Interviewleitfadens	109
5.3	Auswertung und Auswertungsmethoden	112
5.3.1	Dokumentation der Ergebnisse und nachfolgende Beschreibung und Strukturierung geometrischer Denkweisen	112
5.3.2	Horizontale Analyse der Daten	112
5.3.3	Kodieren des Datenmaterials	114
6	Analysen der Untersuchungsaufgaben	119
6.1	Vorgehensweisen bei den Analysen der Untersuchungsaufgaben.....	119
6.2	Rechteck – die Einstiegsaufgabe zum geometrischen Grundwissen.....	120
6.2.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe.....	120
6.2.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA	122
6.2.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM-Standards	122
6.2.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler	124
6.2.5	PISA-Ergebnisse einer ähnlichen Aufgabe aus PISA 2000	125
6.2.6	Die Verwendung von Beschriftungen, Variablen und Formeln als Aspekt für die Auswertung und Analyse.....	126
6.3	L-Fläche – Berechnung einer zusammengesetzten Figur.....	128
6.3.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe.....	128
6.3.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA	129
6.3.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM Standards	130
6.3.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler	132
6.3.5	PISA-Ergebnisse der Aufgabe „L-Fläche“	138
6.3.6	Ergänzende Analysen von PISA-Bearbeitungen zu individuellen Vorgehensweisen	139

6.3.7	Wege der Berechnung über Teilfiguren als Aspekt für die Auswertung und Analyse	154
6.4	Wandfläche – eine Aufgabe mit außermathematischem Kontext	156
6.4.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe	156
6.4.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA	157
6.4.3	Einordnung in die Bildungsstandards, den Lehrplan und die NCTM Standards	158
6.4.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler	159
6.4.5	PISA Ergebnisse der Aufgabe „Wandfläche“	163
6.4.6	Ergänzende Analysen der Aufgabe „Wandfläche“ zum Vorkommen von Rechnungen und Skizzen	165
6.4.7	Erfassen des Aufgabenkontexts als Aspekt für die Auswertung und Analyse	179
6.5	Zimmermann – eine internationale PISA-Aufgabe	181
6.5.1	Umsetzung von Geometrie in der Aufgabe	181
6.5.2	Eigenschaften der Aufgabe im Modell mathematischer Aufgaben bei PISA	183
6.5.3	Einordnung in den Lehrplan, die Bildungsstandards und die NCTM-Standards	184
6.5.4	Mögliche Lösungswege, Schwierigkeiten und Fehler	185
6.5.5	Bericht der PISA-Ergebnisse der Aufgabe	187
6.5.6	Erfassen inhaltlicher Vorstellungen zum Begriff „Umfang“ als Aspekt für die Auswertung und Analyse	188
7	Dokumentation der Ergebnisse	191
7.1	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Rechteck“	191
7.1.1	Zur Verwendung von Beschriftungen, Variablen und Formeln und weitere Ergebnisse	191
7.1.2	Schwierigkeiten und Fehler	194
7.2	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „L-Fläche“	196
7.2.1	Verschiedene Wege der Berechnung über Teilfiguren und weitere Ergebnisse	196
7.2.2	Schwierigkeiten und Fehler	198
7.3	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Wandfläche“	203
7.3.1	Vorgehensweisen in Bezug auf den Aufgabenkontext und weitere Ergebnisse	203
7.3.2	Schwierigkeiten und Fehler	209
7.4	Ergebnisse der Untersuchungsaufgabe „Zimmermann“	212

7.4.1	Hinweise zu inhaltlichen Vorstellungen des Begriffs „Umfang“ und weitere Ergebnisse	212
7.4.2	Schwierigkeiten und Fehler	219
7.5	Vorstellungen der Begriffe „Umfang“ und „Flächeninhalt“	222
8	Analysen der Ergebnisse	231
8.1	Verbindung qualitativer und quantitativer Ergebnisse	231
8.1.1	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der ähnlichen Aufgabe „Rechteck“ aus PISA 2000	231
8.1.2	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „L-Fläche“	231
8.1.3	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „Wandfläche“	234
8.1.4	Verbindung mit den PISA-Ergebnissen der Aufgabe „Zimmermann“	236
8.2	Von den Daten zur Theorie	237
8.3	Strukturierung geometrischer Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben	247
8.3.1	Begriff ist Formel	247
8.3.2	Dominanz des Berechnens	253
8.3.3	Einschränkung auf Bekanntes	258
8.3.4	Messen statt Strukturieren	260
9	Zusammenfassung und Ausblick	265
9.1	Zusammenfassung	265
9.2	Ausblick	268
	Literaturverzeichnis	273