

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Zahlen, Operationen und Strategien „verstehen“ – einige Grundlagen . .</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1      | „Verstehen“ und Grundvorstellungen . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Verstehen untersuchen . . . . .  | 2         |
| 1.3      | Aufbau von Grundvorstellungen . . . . .  | 3         |
| 1.4      | Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen . . . . .  | 4         |
| 1.5      | Bedeutung der Prozessorientierung . . . . .  | 5         |
| <b>2</b> | <b>Ist die Bruchrechnung heute noch nötig? . . . . .</b>   | <b>7</b>  |
| 2.1      | Die Bruchrechnung ist überflüssig –<br>einige häufiger genannte Argumente . . . . .                    | 7         |
| 2.2      | Die Bruchrechnung ist keineswegs überflüssig –<br>einige ausgewählte Argumente . . . . .               | 8         |
| 2.2.1    | Anschauliche Fundierung des Dezimalbruchbegriffs<br>mittels Brüchen . . . . .                          | 9         |
| 2.2.2    | Einsichtige Fundierung des Rechnens mit Dezimalbrüchen<br>mittels Brüchen . . . . .                    | 10        |
| 2.2.3    | Prävention und Intervention bei Problembereichen der<br>Dezimalbruchrechnung mittels Brüchen . . . . . | 10        |
| 2.2.4    | Leichtere Begründung algebraischer Eigenschaften von $\mathbb{Q}^+$<br>mittels Brüchen . . . . .       | 11        |
| 2.2.5    | Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .  | 12        |
| 2.2.6    | Gleichungslehre . . . . .  | 14        |
| 2.2.7    | Algebra . . . . .  | 15        |
| 2.2.8    | Reichhaltige und vielseitige Möglichkeiten<br>zur Prozessorientierung . . . . .                        | 16        |
| 2.3      | Resümee . . . . .  | 16        |
| <b>3</b> | <b>Zur Einführung von Brüchen . . . . .</b>  | <b>17</b> |
| 3.1      | Zentrale Grundvorstellungen . . . . .  | 17        |
| 3.1.1    | Einige Verwendungssituationen von Brüchen . . . . .  | 17        |
| 3.1.2    | Zwei zentrale Grundvorstellungen . . . . .   | 21        |
| 3.1.3    | Alternative Zugänge . . . . .  | 22        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.2      | Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte . . . . .  | 24        |
| 3.2.1    | Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen . . . . .   | 24        |
| 3.2.2    | Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer . . . . .  | 28        |
| 3.3      | Bruch als Anteil – zwei sachorientierte Bemerkungen . . . . .                                  | 31        |
| 3.4      | Schreibweisen und Repräsentanten . . . . .   | 31        |
| 3.5      | Bruchalbum und Stationenlernen – zwei innovative Ansätze . . . . .                             | 33        |
| 3.6      | Drei Grundaufgaben . . . . .   | 34        |
| 3.7      | Anschauliche Vorkenntnisse zu Brüchen . . . . .  | 36        |
| 3.8      | Ein unterrichtlicher Zugang zu den Bruchzahlen . . . . .                                       | 37        |
| 3.9      | Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und Bruchzahlen . . . . .                         | 38        |
| <b>4</b> | <b>Erweitern/Kürzen von Brüchen . . . . .</b>  | <b>41</b> |
| 4.1      | Anschauliche Vorkenntnisse . . . . .   | 41        |
| 4.2      | Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege . . . . .                                      | 43        |
| 4.3      | Erweitern – systematische Behandlung . . . . .   | 47        |
| 4.4      | Kürzen – systematische Behandlung . . . . .  | 48        |
| 4.5      | Variationsreiches Üben . . . . .   | 50        |
| 4.6      | Mögliche Problembereiche und Hürden/<br>Prävention und Intervention . . . . .                  | 52        |
| 4.7      | Vertiefung . . . . .   | 54        |
| <b>5</b> | <b>Größenvergleich von Brüchen . . . . .</b>   | <b>55</b> |
| 5.1      | Anschauliche Vorkenntnisse . . . . .   | 55        |
| 5.2      | Anschauliche Wege zum Größenvergleich . . . . .  | 57        |
| 5.3      | Systematische Behandlung . . . . .   | 62        |
| 5.4      | Variationsreiches Üben . . . . .   | 63        |
| 5.5      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 64        |
| 5.6      | Prävention und Intervention . . . . .  | 67        |
| 5.7      | Vertiefung . . . . .   | 70        |
| <b>6</b> | <b>Addition und Subtraktion von Brüchen . . . . .</b>  | <b>73</b> |
| 6.1      | Anschauliche Vorkenntnisse . . . . .   | 73        |
| 6.2      | Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und<br>Subtraktion von Brüchen . . . . . | 74        |
| 6.3      | Addition und Subtraktion – systematische Behandlung . . . . .                                  | 78        |
| 6.4      | Gemischte Zahlen . . . . .   | 79        |
| 6.5      | Variationsreiches Üben . . . . .   | 80        |
| 6.6      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 82        |
| 6.6.1    | Grundvorstellungen und Rechenkalkül . . . . .  | 83        |
| 6.6.2    | Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlanzeige . . . . .   | 84        |
| 6.6.3    | Schwierigkeitsfaktoren . . . . .   | 85        |
| 6.6.4    | Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick . . . . .  | 86        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 6.6.5    | Bruch plus Bruch/Bruch minus Bruch . . . . .   | 87         |
| 6.6.6    | Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl) . . . . .  | 90         |
| 6.7      | Prävention und Intervention . . . . .  | 91         |
| 6.8      | Vertiefung . . . . .   | 94         |
| <b>7</b> | <b>Multiplikation von Brüchen . . . . .</b>  | <b>99</b>  |
| 7.1      | Anschauliche Vorkenntnisse . . . . .   | 100        |
| 7.2      | Anschauliche Wege zur Multiplikation . . . . .   | 101        |
| 7.3      | Natürliche Zahl mal Bruch – Grundvorstellung<br>und systematische Behandlung . . . . .                       | 105        |
| 7.4      | Bruch mal natürliche Zahl – Grundvorstellung<br>und systematische Behandlung . . . . .                       | 106        |
| 7.5      | Bruch mal Bruch – Grundvorstellungen<br>und systematische Behandlung . . . . .                               | 108        |
| 7.5.1    | Grundvorstellung: Anteil vom Anteil . . . . .  | 108        |
| 7.5.2    | Grundvorstellung: Flächeninhalt . . . . .  | 110        |
| 7.5.3    | Vergleich beider Wege . . . . .  | 111        |
| 7.6      | Variationsreiches Üben . . . . .   | 112        |
| 7.7      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 114        |
| 7.7.1    | Multiplizieren vergrößert immer . . . . .  | 114        |
| 7.7.2    | Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick . . . . .  | 115        |
| 7.7.3    | Multiplikation gleichnamiger Brüche . . . . .  | 116        |
| 7.7.4    | Multiplikation ungleichnamiger Brüche . . . . .  | 117        |
| 7.7.5    | Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl . . . . .  | 117        |
| 7.7.6    | Multiplikation gemischter Zahlen . . . . .   | 118        |
| 7.7.7    | Regelformulierung und Begründung . . . . .   | 119        |
| 7.8      | Prävention und Intervention . . . . .  | 120        |
| 7.9      | Vertiefung . . . . .   | 121        |
| <b>8</b> | <b>Division von Brüchen . . . . .</b>  | <b>125</b> |
| 8.1      | Anschauliche Vorkenntnisse . . . . .   | 125        |
| 8.2      | Anschauliche Wege zur Division . . . . .   | 128        |
| 8.3      | Bruch durch natürliche Zahl – Grundvorstellung<br>und systematische Behandlung . . . . .                     | 133        |
| 8.4      | Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch –<br>Grundvorstellungen und systematische Behandlung . . . . . | 134        |
| 8.4.1    | Grundvorstellung Messen . . . . .  | 134        |
| 8.4.2    | Grundvorstellung Umkehroperation . . . . .   | 135        |
| 8.4.3    | Vergleich der beiden Wege . . . . .  | 137        |
| 8.5      | Natürliche Zahl durch natürliche Zahl . . . . .  | 138        |
| 8.6      | Variationsreiches Üben . . . . .   | 139        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 8.7       | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 140        |
| 8.7.1     | Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick . . . . .  | 140        |
| 8.7.2     | Bruch durch Bruch . . . . .  | 141        |
| 8.7.3     | Bruch durch natürliche Zahl/Natürliche Zahl durch Bruch . . . . .  | 142        |
| 8.7.4     | Natürliche Zahl durch natürliche Zahl . . . . .  | 143        |
| 8.7.5     | Grundvorstellungsumbrüche bei der Division . . . . .   | 143        |
| 8.7.6     | Division von Brüchen und praktische Anwendungen . . . . .  | 144        |
| 8.7.7     | Regelformulierung und Begründung . . . . .   | 145        |
| 8.8       | Prävention und Intervention . . . . .  | 146        |
| 8.9       | Vertiefung . . . . .   | 148        |
| <b>9</b>  | <b>Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten,<br/>aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen . . . . .</b> | <b>151</b> |
| <b>10</b> | <b>Resümee Brüche . . . . .</b>  | <b>155</b> |
| 10.1      | Vorkenntnisse über Brüche überraschend gering . . . . .  | 155        |
| 10.2      | Gründliche Fundierung des Bruchbegriffs erforderlich . . . . .   | 155        |
| 10.3      | Grundvorstellungen sorgfältig erarbeiten . . . . .   | 156        |
| 10.4      | Mögliche Problembereiche und Hürden geschickt thematisieren . . . . .  | 158        |
| 10.5      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .   | 159        |
| <b>11</b> | <b>Prozessorientierter Zugang zu Dezimalbrüchen . . . . .</b>  | <b>161</b> |
| 11.1      | Zur Bedeutung von Dezimalbrüchen . . . . .   | 161        |
| 11.2      | Vorteile der Schreibweise als Dezimalbruch . . . . .   | 162        |
| 11.3      | Zielsetzung des Dezimalbruchlehrgangs . . . . .  | 163        |
| 11.4      | Bedeutung der Prozessorientierung und Vernetzung . . . . .   | 164        |
| 11.5      | Grundvorstellungen aufbauen . . . . .  | 165        |
| 11.6      | Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen . . . . .  | 166        |
| <b>12</b> | <b>Veranschaulichungen zu Dezimalbrüchen . . . . .</b>   | <b>167</b> |
| 12.1      | Rolle von Anschauungsmitteln . . . . .   | 167        |
| 12.2      | Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln . . . . .   | 168        |
| 12.3      | Konkrete Arbeitsmittel für Dezimalbrüche . . . . .   | 169        |
| 12.3.1    | Zehnersystemblöcke/Dienes-Material . . . . .   | 169        |
| 12.3.2    | Lineare Arithmetikblöcke . . . . .   | 169        |
| 12.3.3    | Decimats . . . . .   | 170        |
| 12.3.4    | Millimeterpapierquadrate . . . . .   | 170        |
| 12.3.5    | Stellenwerttafeln . . . . .  | 171        |
| 12.3.6    | Zahlengerade . . . . .   | 171        |
| 12.4      | Arbeitsmittel sind nicht selbsterklärend . . . . .   | 172        |
| 12.5      | Vom konkreten Material zur Grundvorstellung . . . . .  | 173        |
| 12.6      | Übersetzen in Sachsituationen . . . . .  | 174        |

---

|           |  |     |
|-----------|--|-----|
| <b>13</b> | <b>Erweiterung des Stellenwertsystems</b> . . . . .  | 177 |
| 13.1      | Stellenwerte und deren Zusammenhänge . . . . .   | 177 |
| 13.2      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 179 |
| 13.3      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .   | 180 |
| <b>14</b> | <b>Darstellen, Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen</b> . . . . .                                    | 181 |
| 14.1      | Brüche in Stellenwertschreibweise darstellen . . . . .   | 181 |
| 14.2      | Schreib- und Sprechweisen . . . . .  | 182 |
| 14.3      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 183 |
| 14.3.1    | Probleme beim Übersetzen in eine<br>nichtsymbologische Darstellung . . . . .                           | 183 |
| 14.3.2    | Probleme beim Lesen und Schreiben . . . . .  | 184 |
| 14.4      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .   | 186 |
| 14.5      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .   | 187 |
| <b>15</b> | <b>Erweitern und Kürzen bei Dezimalbrüchen</b> . . . . .   | 191 |
| 15.1      | Verfeinern und Vergrößern einer Unterteilung . . . . .   | 191 |
| 15.2      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .   | 192 |
| <b>16</b> | <b>Größenvergleich und Anordnung bei Dezimalbrüchen</b> . . . . .                                      | 195 |
| 16.1      | Wege zum Größenvergleich . . . . .   | 195 |
| 16.1.1    | Über die Stellenwerte an flächigen Veranschaulichungen . . . . .                                       | 195 |
| 16.1.2    | Über die Zahlengerade . . . . .  | 196 |
| 16.1.3    | Über Größen . . . . .  | 196 |
| 16.1.4    | Über Stellenwerttafeln . . . . .   | 196 |
| 16.1.5    | Beispiel . . . . .   | 196 |
| 16.1.6    | Vergleich der verschiedenen Wege . . . . .   | 196 |
| 16.2      | Anordnung von Dezimalbrüchen . . . . .   | 198 |
| 16.3      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 198 |
| 16.3.1    | Probleme beim Vergleichen von Dezimalbrüchen . . . . .   | 198 |
| 16.3.2    | Probleme bei der Anordnung von Dezimalbrüchen . . . . .  | 201 |
| 16.4      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .   | 201 |
| 16.5      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .   | 203 |
| <b>17</b> | <b>Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen</b> . . . . .                                      | 207 |
| 17.1      | Umwandlung von Bruch- in Dezimalbruchschreibweise . . . . .  | 207 |
| 17.2      | Umwandlung von Dezimalbruch- in Bruchschreibweise . . . . .  | 210 |
| 17.3      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .  | 211 |
| 17.4      | Typische Fehlerstrategien bei der Umwandlung<br>zwischen Dezimalbruch- und Bruchschreibweise . . . . . | 212 |
| 17.5      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .   | 213 |

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| <b>18</b> | <b>Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen</b> . . . . .                                | 215 |
| 18.1      | Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion . . . . .                                   | 215 |
| 18.2      | Rechenstrategien und -methoden zur Addition und Subtraktion . . . . .                       | 216 |
| 18.3      | Operative Additions- und Subtraktionsstrategien . . . . .                                   | 217 |
| 18.4      | Stellenweises Rechnen und schriftlicher Algorithmus . . . . .                               | 218 |
| 18.5      | Weitere Strategien . . . . .  | 220 |
| 18.5.1    | Rechnen im kleinsten Stellenwert . . . . .  | 220 |
| 18.5.2    | Zehnerbrüche . . . . .  | 221 |
| 18.5.3    | Größen . . . . .  | 221 |
| 18.6      | Zusammenfassung und Bewertung . . . . .   | 222 |
| 18.7      | Lösungsquoten und -wege . . . . .   | 223 |
| 18.8      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .   | 224 |
| 18.8.1    | Stellenwertprobleme . . . . .   | 224 |
| 18.8.2    | Komma-trennt-Strategie . . . . .  | 225 |
| 18.9      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .  | 227 |
| 18.10     | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .  | 228 |
| <b>19</b> | <b>Multiplikation von Dezimalbrüchen</b> . . . . .  | 231 |
| 19.1      | Grundvorstellungen zur Multiplikation . . . . .   | 231 |
| 19.2      | Multiplizieren von Stellenwerten . . . . .  | 234 |
| 19.2.1    | Multiplikation mit Zehnerpotenzen . . . . .   | 234 |
| 19.2.2    | Multiplikation mit Stellenwerten kleiner 1 . . . . .  | 235 |
| 19.3      | Strategien zur Berechnung von Multiplikationstermen . . . . .                               | 236 |
| 19.3.1    | Nutzen des Flächeninhalts am Rechteckmodell . . . . .                                       | 236 |
| 19.3.2    | Malkreuz . . . . .  | 237 |
| 19.3.3    | Größen . . . . .  | 237 |
| 19.3.4    | Rechnen mit Zehnerbrüchen . . . . .   | 239 |
| 19.3.5    | Rechnen mit kleinsten Stellenwerten . . . . .   | 239 |
| 19.3.6    | Regel zur Multiplikation von Dezimalbrüchen . . . . .                                       | 239 |
| 19.3.7    | Sonderfall: Multiplikation mit natürlichen Zahlen . . . . .                                 | 240 |
| 19.4      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .   | 240 |
| 19.4.1    | Gering ausgeprägte Grundvorstellungen . . . . .   | 240 |
| 19.4.2    | Fehlvorstellungen . . . . .   | 241 |
| 19.4.3    | Probleme bei Rechenstrategien . . . . .   | 242 |
| 19.5      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .  | 245 |
| 19.5.1    | Diagnostische Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte . . . . .                               | 245 |
| 19.5.2    | Fördervorschläge: Grundvorstellung<br>und Grundvorstellungsumbruch Multiplikation . . . . . | 246 |
| 19.5.3    | Fördervorschläge: Rechenstrategien . . . . .  | 247 |
| 19.6      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .  | 248 |

|           |   |     |
|-----------|---|-----|
| <b>20</b> | <b>Division von Dezimalbrüchen</b> . . . . .  | 251 |
| 20.1      | Grundvorstellungen zur Division . . . . .   | 251 |
| 20.2      | Strategien zur Division durch Dezimalbrüche . . . . .                                   | 252 |
| 20.2.1    | Anschauliche Division am Modell . . . . .   | 252 |
| 20.2.2    | Division über Zehnerbrüche . . . . .  | 253 |
| 20.2.3    | Rückgriff auf Größen . . . . .  | 253 |
| 20.2.4    | Umkehroperation . . . . .   | 254 |
| 20.2.5    | Gleichsinniges Verändern . . . . .  | 254 |
| 20.3      | Sonderfall: Division durch Zehnerpotenzen . . . . .                                     | 256 |
| 20.4      | Sonderfall: Divisionsstrategien Dezimalbruch<br>geteilt durch natürliche Zahl . . . . . | 257 |
| 20.5      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .   | 258 |
| 20.5.1    | Fehlende Grundvorstellungen . . . . .   | 258 |
| 20.5.2    | Fehlerstrategien . . . . .  | 259 |
| 20.6      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .  | 263 |
| 20.6.1    | Diagnostische Aufgaben . . . . .  | 263 |
| 20.6.2    | Fördervorschläge . . . . .  | 263 |
| 20.7      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .  | 264 |
| 20.7.1    | Wahl der Rechenoperation . . . . .  | 264 |
| 20.7.2    | Divisionsstrategien . . . . .   | 265 |
| <b>21</b> | <b>Runden, Überschlagen und Schätzen</b> . . . . .                                      | 269 |
| 21.1      | Runden . . . . .  | 270 |
| 21.2      | Überschlagen von Rechenausdrücken . . . . .   | 271 |
| 21.3      | Schätzen von Zahlen und Größen . . . . .  | 272 |
| 21.4      | Mögliche Problembereiche und Hürden . . . . .   | 273 |
| 21.5      | Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern . . . . .  | 274 |
| 21.6      | Variationsreiches Üben und Vertiefen . . . . .  | 275 |
| <b>22</b> | <b>Resümee und Konsequenzen</b> . . . . .   | 277 |
| 22.1      | Zielsetzung: Verstehen und Prozesse . . . . .   | 277 |
| 22.2      | Modelle: Tragfähigkeit statt Vielfalt . . . . .   | 278 |
| 22.3      | Inhalte: Zahlen statt Ziffern . . . . .   | 279 |
| 22.4      | Zahlvorstellungen im Stellenwertsystem . . . . .  | 279 |
| 22.5      | Vorwissen aufgreifen, gegenüberstellen, Umbrüche vollziehen . . . . .                   | 280 |
| 22.6      | Probleme bei mangelnden Grundvorstellungen . . . . .                                    | 281 |
| 22.7      | Fehlerstrategien beim syntaktischen Arbeiten . . . . .                                  | 281 |
| 22.8      | Fehlvorstellungen . . . . .   | 282 |
| 22.9      | Diagnose: Erfassung von Prozessen . . . . .   | 283 |

---

|   |            |
|---|------------|
| 22.10 Förderung und Förderkonzepte . . . . .  | 283        |
| 22.10.1 Aktivieren von Grundvorstellungen . . . . .   | 283        |
| 22.10.2 Überwinden von Fehlvorstellungen . . . . .  | 284        |
| 22.10.3 Fehlerstrategien erkennen und überwinden . . . . .  | 285        |
| 22.11 Vernetzung: eine Herausforderung . . . . .  | 286        |
| <b>Diagnostische Tests . . . . .</b>  | <b>289</b> |
| <b>Zitierte Literatur . . . . .</b>   | <b>291</b> |
| <b>Zitierte Schulbücher . . . . .</b>   | <b>305</b> |
| <b>Vertiefende Literatur . . . . .</b>  | <b>307</b> |
| <b>Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und<br/>Sekundarstufe I + II . . . . .</b> | <b>315</b> |