

Einführung in die reelle Analysis

I Funktionen einer reellen Veränderlichen

von
Georg Aumann und Otto Haupt

3., völlig neugestaltete Auflage des Werkes
Haupt · Aumann · Pauc, Differential- und Integralrechnung



Walter de Gruyter · Berlin · New York 1974

Inhalt

Erster Teil

Einführung: Grundbegriffe, die natürlichen und die rationalen Zahlen

1 Grundbegriffe	9	in \mathbb{N}^+	53
1.1 Gleichheit	9	2.3 Die Ordnung in \mathbb{N}^+	55
1.2 Mengen und Teilmengen	11	3 Die ganzen und die rationalen Zahlen	58
1.3 Logische Symbole, sonstige Bezeichnungen	14	3.0 Überblick	58
1.4 Das Operieren mit Mengen ..	18	3.1 Erweiterung des Systems \mathbb{N}^+ der natürlichen Zahlen zum In- tegritätsbereich \mathbb{Z} der ganzen Zahlen	59
1.5 Produktmengen, Relationen, Abbildungen, Äquivalenzen, Ordnungen	19	3.2 Erweiterung des Integritäts- bereiches der ganzen Zahlen zum Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen	63
1.6 Ergänzungen und Aufgaben ..	33	3.3 Abzählbare Mengen	66
2 Die natürlichen Zahlen	45	3.4 Ergänzungen und Aufgaben zu 1 und 2	67
2.0 Katalog der Rechengesetze ..	46		
2.1 Konstruktion und Axiome des Systems \mathbb{N}^+ der natürlichen Zahlen	49		
2.2 Addition und Multiplikation			

Zweiter Teil

Die reellen Zahlen

4 Analysis der rationalen Zahlen ...	75	5 Analysis der reellen Zahlen (ein- schliesslich topologischer Grund- begriffe)	90
4.0 Einleitung	75	5.0 Überblick	90
4.1 Der Ring $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathbb{Q})$ der Folgen über dem Körper \mathbb{Q} der ratio- nalen Zahlen	76	5.1 Ordnungskonvergenz in \mathbb{R} ; Vollständigkeit von \mathbb{R}	91
4.2 Konvergente Folgen	78	5.2 Metrische Konvergenz in \mathbb{R} ..	97
4.3 Nullfolgen	80	5.3 Unendliche Reihen	99
4.4 Der Körper der Äquivalenz- klassen (rational) konvergenter Folgen, Rechnen mit Grenzwerten	82	5.4 Uneigentliche Konvergenz, uneigentliche reelle Zahlen ...	105
4.5 Konzentrierte und Cauchysche Folgen; Erweiterung von \mathbb{Q} zum Körper \mathbb{R} der reellen Zah- len	84	5.5 Der Körper \mathbb{R} als Zahlgerade, Topologie in \mathbb{R}	107
		5.6 Ergänzungen und Aufgaben zu 4 und 5	118

Dritter Teil

Reelle Funktionen einer reellen Variablen

6 Stetige Funktionen, Exponentialfunktion, Logarithmus	129	tionen, insbesondere Funktionen endlicher Variation; Kreis- und Hyperbelfunktionen	158
6.1 Allgemeines	129	7.1 Die lateral konvergenten Funktionen	158
6.2 Stetige Funktionen	132	7.2 Darstellung monotoner Funktionen	162
6.3 Polynome und rationale Funktionen	141	7.3 Funktionen von endlicher Variation	165
6.4 Potenzreihen	144	7.4 Kreis- und Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrung . .	169
6.5 Gleichmässige Konvergenz . .	148	7.5 Ergänzungen und Aufgaben zu 6 und 7	172
6.6 Gleichgradige Stetigkeit von Funktionenfolgen	153		
6.7 Monotone Funktionen	155		
7 Die lateral konvergenten Funk-			

Vierter Teil

Elemente der Differential- und Integralrechnung für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen

8 Differentialrechnung	185	9 Integralrechnung	245
8.1 Differenzen- und Differentialquotient; Tangente	185	9.0 Einleitung	245
8.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	191	9.1 Existenz und Eigenschaften von Stammfunktionen lateral konvergenter Funktionen . . .	246
8.3 Rechnen mit differenzierbaren Funktionen	192	9.2 Integration „in geschlossener Form“	252
8.4 Die elementaren Funktionen; Exponential- und Kreisfunktionen; Parameterdarstellungen	199	9.3 Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung	258
8.5 Differentialquotienten höherer Ordnung	205	9.4 Integration einiger einfacher Differentialgleichungen	265
8.6 Schrankensatz; Anwendungen; Kurvendiskussion	207	9.5 Riemann-Integral	267
8.7 Taylorformel und Taylorreihe	216	9.6 Uneigentliche Integrale	284
8.8 Asymptotisches Verhalten; Bestimmung von Grenzwerten	224	9.7 Ergänzungen und Aufgaben zu 9	288
8.9 Ergänzungen und Aufgaben zu 8	231	Sachverzeichnis	311
		Verzeichnis der verwendeten Symbole	318
		Literaturnachweis	320