W. P. Minorski

Aufgabensammlung der höheren Mathematik

13. Auflage

Mit 92 Bildern und 2570 Aufgaben mit Lösungen



Fachbuchverlag Leipzig-Köln

Inhaltsverzeichnis

1. *Analytische Geometrie der Ebene* 11

1.1. Punktkoordinaten auf der Geraden und in der Ebene. Der Abstand zweier Punkte 11

1.2. Teilung einer Strecke im gegebenen Verhältnis. Flächeninhalt eines Dreiecks, Flächeninhalt von Vielecken 12

1.3. Gleichung einer Kurve 14

1.4. Gleichung der Geraden: 1. in Normalform, 2. in allgemeiner Form, 3. in Achsenabschnittsform..... 16

1.5. Winkel zwischen zwei Geraden. Gleichung des Büschels aller Geraden, die durch einen gegebenen Punkt gehen. Gleichung der Geraden, die durch zwei gegebene Punkte geht (Zweipunktegleichung). Schnittpunkt zweier Geraden 18

1.6. Die (*Hesse*sche) Normalform der Geradengleichung. Abstand eines Punktes von einer Geraden. Gleichungen der Winkelhalbierenden. Gleichung eines Büschels von Geraden, die durch den Schnittpunkt zweier gegebener Geraden gehen . 20

1.7. Vermischte Aufgaben zur Geometrie der Geraden 22

1.8. Kreis..... 24

1.9. Ellipse 25

1.10. Hyperbel 28

1.11. Parabel 30

1.12. Leitlinien, Durchmesser und Tangenten von Kurven 2. Ordnung ... 32

1.13. Transformation cartesischer Koordinaten. Die Parabeln $y = ax^2 + bx + c$ und $x = ay^2 + by + c$. Die Hyperbel $x \cdot y = k$ 36

1.14. Vermischte Aufgaben zu Kurven 2. Ordnung 39

1.15. Allgemeine Gleichung einer Kurve 2. Ordnung 41

1.16. Polarkoordinaten 44

1.17. Algebraische Kurven 3. und höherer Ordnung 47

1.18. Transzendente Kurven 48

2. *Vektoralgebra* 50

2.1. Addition von Vektoren. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar 50

2.2. Rechtwinklige Koordinaten eines Punktes und eines Vektors im Raum 53

2.3. Skalarprodukt zweier Vektoren .. 55

2.4. Vektorprodukt zweier Vektoren .. 57

2.5. Gemischtes Produkt dreier Vektoren (Spatprodukt)..... 59

3. *Analytische Geometrie des Raumes* 61

3.1. Gleichung einer Ebene 61

3.2. Grundlegende Aufgaben zur Ebene 62

3.3. Gleichungen der Geraden..... 64

3.4. Gerade und Ebene 67

3.5. Sphärische und zylindrische Flächen 69

3.6. Konische Flächen und Rotationsflächen 71

3.7. Ellipsoid, Hyperboloide, Paraboloide..... 72

4. *Höhere Algebra* 76
4.1. Determinanten 76
4.2. Lineare Gleichungssysteme 78
4.3. Komplexe Zahlen 81
4.4. Gleichungen höheren Grades. Näherungsweise Lösung einer Gleichung 84

5. *Einführung in die Analysis* 87
5.1. Veränderliche Größen und Funktionen 87
5.2. Zahlenfolgen. Grenzwert einer Veränderlichen. Grenzwert einer Funktion 89
5.3. Grenzwerteigenschaften. Bestimmung einfacher „unbestimmter Ausdrücke" der Form $\frac{0}{0}$" und $\frac{\infty}{\infty}$" 93
5.4. $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ 95
5.5. „Unbestimmte Ausdrücke" der Form „$\infty - \infty$" und „$0 \cdot \infty$" 96
5.6. Vermischte Beispiele zur Berechnung von Grenzwerten 96
5.7. Ordnung kleiner – gegen Null strebender Größen 97
5.8. Stetigkeit einer Funktion 98
5.9. Asymptoten 101
5.10. Die Zahl e 102

6. *Ableitung und Differential* 104
6.1. Ableitung algebraischer und trigonometrischer Funktionen 104
6.2. Ableitung der Funktion einer Funktion 106
6.3. Tangente und Normale einer ebenen Kurve 107
6.4. Fälle der Nichtdifferenzierbarkeit stetiger Funktionen 108
6.5. Ableitung der Logarithmus- und Exponentialfunktion 110
6.6. Ableitung der Arkusfunktion 111
6.7. Ableitung der Hyperbelfunktionen 112
6.8. Vermischte Beispiele und Aufgaben zur Differentiation 113
6.9. Ableitungen höherer Ordnung 114
6.10. Ableitung impliziter Funktionen .. 115
6.11. Differential einer Funktion 117
6.12. Parameterdarstellung einer Kurvengleichung 118

7. *Anwendungen der Ableitung einer Funktion* 120
7.1. Geschwindigkeit und Beschleunigung 120
7.2. Hauptsätze der Differentialrechnung 121
7.3. Bestimmung unbestimmter Ausdrücke; *l'Hospital*sche Regel 124
7.4. Steigen und Fallen einer Funktion. Maximum und Minimum 125
7.5. Extremwertaufgaben 129
7.6. Konvexität und Konkavität. Wendepunkte einer Kurve. Kurvendiskussion 131

8. *Unbestimmtes Integral* 133
8.1. Unbestimmtes Integral. Integral einer Summe 133
8.2. Integration durch Substitution ... 134
8.3. Integrale von der Form $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$ mit Angabe geeigneter Substitutionen 136
8.4. Partielle Integration 137
8.5. Integration trigonometrischer Funktionen 138
8.6. Integration rationaler algebraischer Funktionen 140

8.7. Integration einiger irrationaler algebraischer Funktionen 141
8.8. Integration einiger transzendenter Funktionen 144
8.9. Integration der Hyperbelfunktionen. Substitution durch Hyperbelfunktionen 145
8.10. Vermischte Beispiele zur Integration 146

9. *Bestimmtes Integral* 148
9.1. Berechnung des bestimmten Integrals 148
9.2. Flächenberechnung 150
9.3. Volumen eines Rotationskörpers . 152
9.4. Bogenlänge eines ebenen Kurvenstücks 153
9.5. Oberfläche eines Rotationskörpers 155
9.6. Aufgaben aus der Physik 155
9.7. Uneigentliche Integrale 158
9.8. Mittelwert einer Funktion 160
9.9. Die (Sehnen-) Trapezformel und die *Simpson*sche Regel 160

10. *Krümmung ebener und räumlicher Kurven* 163
10.1. Krümmung einer ebenen Kurve. Krümmungsmittelpunkt und Krümmungsradius. Evolute 163
10.2. Bogenlänge einer Raumkurve 164
10.3. Ableitung einer Vektorfunktion nach einem Skalar und ihre mechanische und geometrische Bedeutung. Begleitendes Dreibein einer Kurve 165
10.4. Krümmung und Windung einer Raumkurve 167

11. *Partielle Ableitungen, vollständige Differentiale und deren Anwendung* 169
11.1. Funktionen zweier Veränderlicher und ihre geometrische Darstellung 169
11.2. Partielle Ableitungen 1. Ordnung . 171
11.3. Vollständiges Differential 1. Ordnung 172
11.4. Ableitungen mittelbarer Funktionen 174
11.5. Ableitungen impliziter Funktionen 175
11.6. Partielle Ableitungen und vollständige Differentiale höherer Ordnung 176
11.7. Integration vollständiger Differentiale 179
11.8. Singuläre Punkte einer ebenen Kurve 180
11.9. Enveloppe einer ebenen Kurvenschar 181
11.10. Tangentialfläche und Flächennormale 182
11.11. Skalares Feld. Niveaulinien und Niveauflächen. Ableitung nach einer gegebenen Richtung. Gradient ... 184
11.12. Extremum einer Funktion zweier Veränderlicher 185

12. *Differentialgleichungen* 187
12.1. Begriff der Differentialgleichung .. 187
12.2. Integration der Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Trennung der Veränderlichen. Orthogonale Trajektorien 188
12.3. Differentialgleichungen 1. Ordnung 1. homogene, 2. lineare, 3. *Bernoulli*sche 191
12.4. Differentialgleichungen, die Differentiale eines Produkts oder Quotienten enthalten 192
12.5. Differentialgleichungen 1. Ordnung, die ein vollständiges Differential enthalten. Integrierender Faktor .. 193
12.6. Differentialgleichungen 1. Ordnung, die nicht nach y' aufgelöst sind. Gleichungen von *Lagrange* und *Clairaut* 194

12.7. Differentialgleichungen höherer Ordnung, die sich auf Gleichungen niedrigerer Ordnung zurückführen lassen 196
12.8. Lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 197
12.9. Lineare inhomogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 198
12.10. Beispiele von Differentialgleichungen verschiedener Typen 200
12.11. Lineare *Euler*sche Differentialgleichung 201
12.12. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 201
12.13. Lineare (partielle) Differentialgleichungen 2. Ordnung (Methode der Charakteristiken) 202

13. *Doppel-, Dreifach- und Kurvenintegrale* 204
13.1. Flächenberechnung mit Hilfe des Doppelintegrals 204
13.2. Schwerpunkt und Trägheitsmoment einer Fläche bei homogener Massenverteilung (Dichte $\varrho = 1$) 205
13.3. Berechnung des Rauminhalts mit Hilfe des Doppelintegrals 206
13.4. Inhalt gekrümmter Flächen 208
13.5. Dreifachintegral und seine Anwendung 208
13.6. Kurvenintegral. *Green*scher Integralsatz 210
13.7. Oberflächenintegrale. Integralsätze von *Gauß-Ostrogradski* und *Stokes* 213

14. *Reihen* 216
14.1. Zahlenreihen 216
14.2. Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe 218
14.3. Potenzreihen 220
14.4. *Taylor- und MacLaurin*-Reihen ... 221
14.5. Anwendung von Reihen bei Näherungsberechnungen 223
14.6. *Taylor*-Reihe einer Funktion zweier Veränderlicher 225
14.7. *Fourier*-Reihe. *Fourier*sches Integral 226

Lösungen 230

Anhang (Kurven, Tabellen) 305