

Untersuchung und Evaluierung von Bildqualitätsverlusten nach verlustbehafteter Bilddatenkompression

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Oliver Kalthoff
aus Siegen

eingereicht beim Fachbereich 7
der Universität-Gesamthochschule-Siegen

Siegen 1999

1. Gutachter:	Prof. Dr. N. Pavel
2. Gutachter:	Prof. Dr. G. Zech
Datum der Disputation:	20. August 1999

Abstract

The advantages of digitizing medical radiographs are twofold. First, they can be transmitted via networks, second, they may be archived on appropriate storage devices. Modern equipment for medical imaging already provides digital images, therefore post-digitization can be discarded. Depending on medical investigation the amount of image data to be stored can be very large. As a consequence digital image compression schemes have been developed in order to reduce transmission times on networks and seizure on digital storage media. One distinguishes between lossless and lossy compression methods. In the first case a compressed/decompressed radiograph differs in no detail from the original radiograph whereas the second method introduces a loss of image quality and/or information. Lossless image compression is limited by a maximum compression factor of roughly 2.5. In lossy image compression the compression factor is unlimited but one can observe a degradation in image quality dependent on the compression factor. This might result in a wrong diagnosis.

In order to profit from lossy image compression without introducing smearing or blurring in radiographs resulting in a wrong diagnosis one has to establish quantitative image quality measures. These measures should objectively keep track of image degradation during lossy image data reduction. They should help the user estimating the highest compression factor for which a safe and error-free diagnosis is still possible. An optimization between tolerable image quality losses and a sufficiently high compression factor can be achieved.

The present work introduces a method for calculating image quality parameters in a specialized field of medical imaging: coronary arteriography. In order to avoid calculating global image quality measures (like the mean squared error MSE) three different algorithms are used to subdivide an image into its diagnostically relevant parts. These are vessel regions, their boundaries and edge brim points. Thereafter image quality parameters are calculated in the diagnostically relevant image regions. The subdivision of the coronary arteriographs and the following calculation of image quality parameters allows to study the effects of lossy image compression in the diagnostically image regions separately. The parameters are dependent on the compression factor and consider image noise.

With quantitative and reproducible image quality measures one is able to calculate image quality degradations in arbitrary coronary arteriographs. Cumbersome re-investigations on image quality losses after the application of a new (i.e. another) lossy compression algorithm can be avoided.

The compression algorithm used is based on Daubechies-4 Scaling- and Wavelet-functions. It was chosen since it introduces small objective image degradations although the compression factor can be chosen quite high. Diagnostically relevant image regions are preserved during lossy compression. This can be proven by the image quality parameters. The effects of lossy image compression on diagnostically relevant image regions in coronary arteriography are shown in three examples. As a conclusion the benefits and limitations of the introduced method are presented.

Keywords: *coronary arteriography, lossy image compression, image quality measures*

Inhalt

Einleitung	1
1. Bilddatenkompression in der derzeitigen klinischen Praxis	3
Verlustlose Datenkompression	4
Arithmetische Kodierung	5
JPEG	5
2. Bilddatenkompression mittels Skalierungs- und Waveletfunktionen	11
Integrale Wavelet Transformation und Analyse im Orts- und Frequenzraum	11
Konstruktion der Wavelets	17
Konstruktion der Skalierungsfunktion für Daubechies-Wavelets	19
Graphen der Daubechies-Skalierungsfunktion und der zugehörigen Wavelet-Funktion	19
Bilddatenkompression mit Hilfe von Wavelet-Funktionen	20
Wavelet-Darstellung	23
3. Orthogonale Polynome in zwei kontinuierlichen Veränderlichen	31
Konstruktion der Rekursionsformel für orthogonale Polynome in x	32
Konstruktion der Rekursionsformel für orthogonale Polynome in y	33
Rekursionsformeln für orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen	35
Theorie	36
Algorithmus	37
Alternativen	39
4. Erkennung der Kantenregionen	41
Berechnung des Verlaufs definierter Kanten	44
5. Bewertung von Bildqualitätsverlusten anhand quantitativer Bildqualitätsparameter	57
5.1 Überprüfung der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen an einem Röntgenphantom	60
5.2 Überprüfung der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen an einem kontrastreichen Koronarangiogramm	78
5.3 Limitierungen der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen gezeigt an einem kontrastarmen Koronarangiogramm	86
6. Zusammenfassung	95
Kritik	96
Ausblick	97
Anhang A	98
Anhang B	105
Literatur	107
Danksagung	109
Erklärung	110

Einleitung

Die Digitalisierung von Röntgenfilmen bietet zwei Vorteile. Zum einen können digitale Bilder praktisch unbegrenzt lange archiviert werden, zum anderen können digitale Bilddaten über Netzwerke übertragen werden. Die Zugriffszeiten auf die gespeicherten Daten gehen zurück. Neuere bildgebende Geräte zur Aufnahme von Röntgenbildern sind bereits in der Lage, digitale Bilddaten zu erzeugen. Eine im Vergleich hierzu aufwendige Digitalisierung entfällt damit immer häufiger. Je nach Untersuchung und Aufnahmeart fallen in der medizinischen Diagnostik unterschiedlich starke Datenmengen an. Um Speicherplatz auf Archivierungsmedien zu sparen und Übertragungszeiten gering zu halten, müssen Bilddaten komprimiert werden. Das Werkzeug hierzu sind Algorithmen zur Bilddatenkompression, kurz Kompressionsalgorithmen. Es gibt eine Reihe von Kompressionsalgorithmen zur Reduktion von Bilddaten. Man unterscheidet zwei Gruppen:

- verlustlose (reversible) Verfahren,
- verlustbehaftete (irreversible) Verfahren.

Bei den reversiblen Kompressionsalgorithmen ist das komprimierte/dekomprimierte Bild eine originalgetreue Reproduktion des Originals. Der maximal erreichbare Kompressionsfaktor ist beschränkt. Bei den verlustbehafteten Kompressionsalgorithmen erkaufte man einen im Vergleich zu den reversiblen Algorithmen höheren Kompressionsfaktor durch einen Bildqualitäts- und/oder Informationsverlust. Das komprimierte/dekomprimierte Bild stimmt „ungefähr“ mit der Vorlage überein. Darüber hinaus hängt derjenige Kompressionsfaktor, der eine fehlerfreie Befundung des Koronarangiogrammes gerade noch ermöglicht, von dem verwendeten verlustbehafteten Kompressionsverfahren ab. Bei verlustbehafteten Kompressionsalgorithmen werden detaillierte Bildstrukturen mit wachsendem Kompressionsfaktor ausgewaschen oder verschmiert. Einige Verfahren erzeugen mit wachsendem Kompressionsfaktor charakteristische Kompressionsartefakte.

Die Verluste an Bildqualität und/oder Information müssen erfaßt und beurteilt werden. Dies geschieht durch Berechnung von Bildqualitätsparametern. Die Bildqualitätsparameter ermöglichen eine reproduzierbare und objektive Methode zur Bestimmung von Bildqualitätsverlusten in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor. Die Untersuchungen beziehen sich auf den medizinischen Bereich der Koronarangiografie (Herzkatheteruntersuchung), siehe Anhang B. Hier besteht heute ein erhöhter Bedarf an Bilddatenreduktion, da einerseits die für die Archivierung und Kommunikation anfallenden Datenmengen besonders groß sind, und andererseits ein hoher Anspruch an den Informationsgehalt der Bilder besteht. Da nicht nur in der Koronarangiografie immer mehr digitale Bilddaten anfallen, und immer mehr Mediziner von den Vorteilen der digitalen Archivierung und Kommunikation profitieren möchten, wird der Wunsch nach einer optimierten Bilddatenkompression größer. Optimierung bedeutet in diesem Fall, daß die Menge der zur Darstellung der Bilder nötigen Daten minimiert wird, ohne den Informationsgehalt für den Mediziner zur sicheren Diagnose zu beschränken.

Ziel der Arbeit ist es, den Verlust an Bildqualität und/oder Information mit Hilfe der Qualitätsparameter zu berechnen. Dies geschieht in den in der Kardiologie wichtigen, d.h. für die Diagnose relevanten Bildregionen. Hierbei handelt es sich um die kontrastmittelgefüllten Gefäße und deren Kanten. Es werden adaptive Verfahren entwickelt, welche die Gefäße und deren Ränder erkennen. Dies ist gleichbedeutend mit der Erzeugung binärer Masken, welche die Koronarangiogramme in die für die Diagnose relevanten und irrelevanten Regionen zerlegen. Die quantitative Bewertung von Bildqualitätsverlusten findet nur in den durch die binären Masken gefilterten Bildbereichen statt. Die Bildqualitätsparameter werden so abgestimmt, daß sie das in den Koronarangiogrammen intrinsische Rauschen berücksichtigen.

Das in dieser Arbeit untersuchte Kompressionsverfahren der ersten Generation verspricht einen im Vergleich zu etablierten, d.h. standardisierten Verfahren hohen Kompressionsfaktor bei gleichem

Bildqualitäts- und/oder Informationsverlust. Die Güte dieses Kompressionsverfahrens ergibt sich aus dem geringeren Bildqualitätsverlust bei gleichem Kompressionsfaktor. Kompressionsartefakte treten nicht auf. Eine zu starke Kompression führt jedoch auch hier zu einem nicht mehr akzeptierbaren Verschlechterung der Bildqualität und gefährdet die fehlerfreie Diagnose.

Es ist nicht das Ziel der Arbeit, bestehende Kompressionsverfahren gegeneinander abzugrenzen und das „beste“ Verfahren zur Bilddatenkompression in der Koronarangiografie zu bestimmen. Die Entwicklung eines neuen Kompressionsverfahrens wird nicht angestrebt.

Die in der Arbeit vorgestellten Verfahren zeigen Möglichkeiten, wie man im Fall der Koronarangiografie den Bildqualitätsverlust in den für die Diagnose relevanten Bildregionen berechnen kann. Der Nutzer soll ein Werkzeug erhalten, mit dessen Hilfe er verschiedenartige irreversible Kompressionsalgorithmen im Hinblick auf den resultierenden Bildqualitätsverlust quantitativ beurteilen kann. Auf diese Weise ist eine Optimierung des untersuchten Kompressionsalgorithmus möglich. Der Bildqualitätsverlust wird in den für die Diagnose relevanten Bereichen (meßbar) gering gehalten. In den diagnostisch irrelevanten Bereichen kann stärker komprimiert werden, ohne die fehlerfreie Diagnose in Frage zu stellen. Die Vorgabe einer hohen Bilddatenkompression wird bei gleichzeitiger Wahrung des Informationsgehaltes erreicht.

In Abschnitt 1 wird die Ist-Situation digitaler Bilddatenkommunikation und -archivierung in der derzeitigen klinischen Praxis (hier: Koronarangiografie) vorgestellt. Darüber hinaus wird eine Einführung in die digitale Bilddatenkompression gegeben. Abschnitt 2 behandelt die mathematischen Grundlagen des in der Arbeit untersuchten Verfahrens zur verlustbehafteten Bilddatenkompression. In den Abschnitten 3 und 4 werden Algorithmen vorgestellt, welche die diagnostisch wichtigen Bildregionen in einem Koronarangiogramm erkennen. Abschnitt 5 liefert eine Methode, den Bildqualitätsverlust in den diagnostisch wichtigen Bildregionen quantitativ zu bewerten. Die Methode wird anhand drei verschiedener Röntgenaufnahmen diskutiert. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Abschnitt 6 gegeben.

1. Bilddatenkompression in der derzeitigen klinischen Praxis

PACS steht für picture archiving and communication system. Die Hauptziele eines PACS sind die Optimierung

- der Patientenversorgung,
- des Arbeitsablaufs in der radiologischen Abteilung,
- der Bildverteilung im Krankenhaus,
- der Bildversorgung für Forschung und Lehre,
- der Bildarchivierung.

Beim konventionellen Arbeiten mit Filmen führen die nicht immer zeitgerechte Bereitstellung eines bestimmten Filmes sowie der Verlust von Filmen dazu, daß die radiologische Untersuchung, deren Befundung und der Therapieeinsatz, d.h. die Patientenversorgung, zeitlich verzögert werden. PACS soll helfen, solche Bildverluste und Doppeluntersuchungen zu vermeiden, Suchzeiten zu minimieren, und unmittelbar nach der radiologischen Befundung die Bilder (evtl. mit dem zugehörigen Befund) dem anfordernden Arzt zu übermitteln.

Durch schnelle Bildkommunikation zum Arbeitsplatz des Radiologen kann die Qualität einer soeben entstandenen Bildserie sofort beurteilt, und anhand der unmittelbar nach jeder Untersuchung zur Verfügung stehenden Bilder kann entschieden werden, ob die Untersuchungsfolge fortgesetzt oder modifiziert werden soll. Der direkte Zugriff vom diagnostischen Befundarbeitsplatz aus auf gespeicherte frühere Bilder verkürzt die Befundungszeit. Der Arbeitsablauf wird dadurch beschleunigt und die Belastung des einzelnen Patienten durch die Untersuchung verringert.

Der Forschung und Lehre werden durch computergestützten Zugriff auf Bilder und Befunde neue Möglichkeiten für die Vorbereitung und Durchführung von Konferenzen und Lehrveranstaltungen eröffnet. Beim Zugriff auf digital gespeicherte Bilder und Befunde werden Kollisionen mit Anforderungen zur Patientenversorgung vermieden.

Die digitale Bildarchivierung ermöglicht den Zugriff auf archivierte Bilder mit kurzen Suchzeiten. Heutige Archivmedien (optische Platten, optische Bänder) genügen der Forderung, daß diese über die Archivierungszeit (30 Jahre) ohne zwischenzeitliche Regenerierung stabil sein müssen. Die oft formulierte Forderung, daß die Archivmedien trotz fortschreitender Technologieentwicklung über die gesamte Archivierungszeit mit vernünftigem Aufwand lesbar sein müssen, ist zu relativieren, da die Zugriffshäufigkeit auf archivierte Daten nach etwa zwei Jahren drastisch abnimmt und nach fünf Jahren weit unter einem Prozent liegt. Der Zugriff auf veraltete Daten kann gegebenenfalls über einen Umsetzer erfolgen, ohne daß der damit verbundene Zeitverlust den Arbeitsablauf in der Radiologie stören würde.

Die bilderzeugenden Systeme geben die generierten Bilder als digitale Information an ein Bildkommunikationsnetz ab. Die Bilder werden in einem Bildspeicher- und -archivierungssystem gesammelt. Von einer Vielzahl von Arbeits- und Betrachtungsplätzen werden zu unterschiedlichen Zeiten von unterschiedlichen Orten gespeicherte Bilder angefordert und zur Befundung, zur Konsultation oder zur Forschung und Lehre auf Monitoren dargestellt. Dabei können sie untereinander und mit früheren Aufnahmen verglichen und nachbearbeitet werden. PACS ermöglicht es, den anfordernden Ärzten fertige Bilder über das digitale Kommunikationsnetz zuzusenden und diese auf den jeweiligen Betrachtungsplätzen darzustellen.

In einem PACS müssen Bilddaten und Befunde erfaßt, kommuniziert und gespeichert werden. Die Abschätzung des mittleren Datenvolumens der für einen Patienten angefertigten radiologischen Bilder ist mit einer größeren Schwankungsbreite behaftet. Man denke dabei an digitale Aufnahmen aus der Nuklearmedizin, welche im Mittel ein Datenvolumen von 8kB je Bild aufweisen. Bei der digitalen

Subtraktionsangiografie fallen hingegen 2MB pro Bild an. Noch kritischer wird es, wenn kardiologische Untersuchungen einbezogen werden.

Die Koronarangiografie stellt eine Herausforderung an die digitalen Kommunikationsnetze und Archivmedien dar, da besonders große Datenmengen pro Patient und Untersuchung anfallen. Die nachstehende Tabelle gibt eine Gegenüberstellung zwischen der herkömmlichen Archivierung durch einen 35mm-Kinofilm und der digitalen Archivierungsmethode.

	herkömmliches Verfahren	Digital
räumliche Auflösung	4 Linienpaare/mm	1024×1024 Pixel
Datenkapazität pro Bild		1 MB
Datenrate		30 MB/s
Datenkap. pro Patient und Unters.	ein Film	2.400 MB
Medium	35-mm Kinofilm	vier CD-R

An dieser Stelle bleibt offen, ob die Aufzeichnung, Archivierung und Kommunikation digitaler Bilddaten gegenüber dem herkömmlichen Filmsystem überhaupt Vorteile bringt. Ein spürbarer Nutzen der digitalen Koronarangiografie tritt erst dann ein, wenn die Datenmengen, welche zur Darstellung der digitalen Koronarangiogramme nötig sind, reduziert werden. Ein Hilfsmittel zur Reduzierung des Speicherbedarfs auf einem digitalen Speichermedium und/oder der Kommunikationszeiten bietet die Bilddatenkompression. Man unterscheidet zwei verschiedene Gruppen zur Kompression von digitalen Bilddaten:

- verlustlose Kompressionsverfahren
- verlustbehaftete Kompressionsverfahren

Im ersten Fall stimmt das verlustlos komprimierte/dekomprimierte Bild zu 100% mit der Vorlage überein. Bei verlustbehafteter Bilddatenkompression muß ein Betrachter Einbußen in der Bildqualität nach der Dekompression hinnehmen. Diese Einbußen sind abhängig vom gewählten Kompressionsverfahren und vom Kompressionsfaktor. Im folgenden soll ein Überblick über verlustlose und verlustbehaftete Kompressionsverfahren gegeben werden. Die Diskussion ist auf diejenigen Verfahren beschränkt, welche zur Zeit in der Koronarangiografie diskutiert werden.

Verlustlose Datenkompression

Ein verlustlos arbeitender Kompressionsalgorithmus konvertiert eine Kette von Zeichen (Buchstaben oder Zahlen) reversibel in eine im Mittel kürzere Kette von Zeichen. Die Formulierung „im Mittel“ ist in diesem Zusammenhang kritisch. Es gibt keinen Algorithmus, der alle Zeichenketten verkürzt. Es gibt nicht ausreichend viele kurze Ketten, welche den längeren Ketten in einem Verhältnis von eins zu eins zugeordnet werden können. Eine Kompression ist nur dann möglich, wenn einige Zeichen der Eingangskette häufiger vorkommen als andere. Diese können mit weniger Zeichen in der Ausgangskette kodiert werden, was im Mittel einer Reduzierung der Datenmenge entspricht.

Die verschiedenen Kompressionsverfahren basieren auf unterschiedlichen Methoden zur Bestimmung der Häufigkeitsverteilung einzelner Zeichen in einer Kette. Zum einen gibt es Kodierungen variabler Länge mit fester Eingabe. Hier wird die Eingabe in Einheiten fester Länge zerlegt, wohingegen das Ergebnis auf der Ausgangsseite eine variable Länge haben kann. Das Einfachste dieser Verfahren heißt Huffman-Kodierung. Ein weiteres Verfahren ist die Arithmetische-Kodierung.

Zum anderen gibt es Kompressionsverfahren, deren Methode darin liegt, die Zeichenkette auf der Eingangsseite in Einheiten variabler Länge zu zerlegen und auf der Ausgangsseite Zeichenketten fester Länge zu produzieren. Ein häufig benutztes Verfahren ist die Ziv-Lempel-Kodierung [23].

Der Gedanke hinter den erstgenannten Kompressionsverfahren liegt darin, kürzere Bitketten für häufiger vorkommende Symbole zu benutzen. Durch die Einführung der Entropie einer Kette von Zeichen erhält man Aussagen über die Leistungsfähigkeit der Kompressionsalgorithmen. Man nimmt an, daß die Zeichenkette auf der Eingangsseite aus N_Z Zeichen besteht, welche mit der relativen Häufigkeit p_i , $i = 1, 2, \dots, N_Z$ auftreten. Gemäß dem Shannon-Theorem [19] ist es möglich, einer beliebigen Kette von statistisch unabhängigen Zeichen im Mittel mindestens

$$H = - \sum_{i=1}^{N_Z} p_i \log_2 p_i \quad (1)$$

Bits zuzuordnen. H bezeichnet die Entropie der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung. Gemäß dem Theorem gibt es Kodierungsverfahren, welche dieser Grenze beliebig nahe kommen. H definiert die Obergrenze des Kompressionsfaktors, bis zu dem eine verlustlose Bilddatenkompression möglich ist. Treten die Zeichen der Eingangskette alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auf ($p_i = 1 / N_Z$), hat man $H = \log_2 N_Z$. Hier findet keine Kompression statt. Jede andere Wahrscheinlichkeits-dichteverteilung der p_i erzeugt eine kleinere Entropie und erlaubt so eine Kompression der Eingangskette. Die Entropie H wird dann erreicht, wenn das Zeichen i mit einem Code der Länge $L_i = -\log_2 p_i$ kodiert wird. Das Problem hierbei ist, daß $-\log_2 p_i$ in der Regel nicht ganzzahlig ist. Die Huffman-Kodierung umgeht dieses Problem, indem alle relativen Häufigkeiten als ganzzahlige Potenzen von $1/2$ dargestellt werden. Werden alle p_i auf diese Weise dargestellt, erreicht die Huffman-Kodierung die Grenze H . Der Algorithmus welcher dem von Huffman vorgeschlagenen Verfahren zugrundeliegt ist in [21], [22] dargestellt.

Arithmetische Kodierung

Ein idealer Kodierungsalgorithmus benutzt $L_i = -\log_2 p_i$ Bits zur Kodierung eines Zeichens. Im Huffman-Algorithmus werden die L_i durch ganzzahlige Werte genähert und ein Code der entsprechenden Länge erzeugt. Die arithmetische Kodierung weist den Zeichen einer Quelle eine Kette von Bits zu, welche eine reellwertige Länge hat. Eine Nachricht beliebiger Länge wird als reelle Zahl im Intervall $0 \leq R < 1$ dargestellt. Je länger die Nachricht ist, desto genauer muß R angegeben werden. Ein Verfahren zur arithmetischen Kodierung ist in [22] gegeben.

Sowohl die Kodierung nach Huffman als auch die arithmetische Kodierung gehören zu den verlustlos arbeitenden Kodierungsalgorithmen. Es ist nicht möglich, eine Kette von Zeichen mit weniger als H Bits zu kodieren. Hier liegt die Grenze der verlustlos arbeitenden Kodierungsalgorithmen. Als Faustregel gilt, daß man ein digitales Bild bis zu einem Kompressionsfaktor von 2,5 verlustlos komprimieren kann. Will man einen höheren Kompressionsfaktor erreichen, muß man auf die verlustbehaftete Datenkompression zurückgreifen. In der Kardiologie werden zur Zeit zwei Verfahren zur verlustbehafteten Bilddatenreduktion diskutiert.

JPEG

Bei JPEG (Joint Photographic Experts Group) handelt es sich um ein standardisiertes Kompressionsverfahren [30], [12]. Soft- und Hardwareimplementationen sind im Handel erhältlich. Das Verfahren basiert auf einer Rasterung eines Bildes in 8×8 Pixel große Teilbilder, sogenannte Blöcke. Die Grauwerte innerhalb eines Blockes werden mit Hilfe der diskreten Kosinustransformation (DCT) gemäß

$$S(v, u) = \frac{C(v)}{2} \frac{C(u)}{2} \sum_{y=0}^7 \sum_{x=0}^7 s(y, x) \cos[(2x+1)u\pi/16] \cos[(2y+1)v\pi/16],$$

$$C(u) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } u = 0 \\ 1 & \text{für } u > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$C(v) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } v = 0 \\ 1 & \text{für } v > 0 \end{cases}$$

transformiert. Hierbei ist $s(y, x)$ der Grauwert innerhalb eines Blockes an der Pixelkoordinate (y, x) . $S(v, u)$ wird als zweidimensionaler DCT-Koeffizient bezeichnet. Der Koeffizient $S(0,0)$ hat den Namen Gleichanteil (DC-Wert), da er den mittleren Grauwert innerhalb eines Blockes repräsentiert. Die übrigen DCT-Koeffizienten heißen AC-Werte. Die Transformation der Grauwerte innerhalb eines Blockes kann als Entwicklung nach orthogonalen Basisfunktionen aufgefaßt werden. Die Basisfunktionen sind durch

$$\cos[(2x+1)u\pi/16] \cos[(2y+1)v\pi/16] \quad (3)$$

gegeben. Es gibt innerhalb eines Blockes gleich viele Grauwerte $s(y, x)$ und Entwicklungskoeffizienten $S(v, u)$. Die Rücktransformation der Entwicklungskoeffizienten $S(v, u)$ zu den Grauwerten $s(y, x)$ ist definiert durch

$$s(y, x) = \sum_{v=0}^7 \frac{C(v)}{2} \sum_{u=0}^7 \frac{C(u)}{2} S(v, u) \cos[(2x+1)u\pi/16] \cos[(2y+1)v\pi/16], \quad (4)$$

mit den Koeffizienten $C(v)$ und $C(u)$ aus (2). Durch die diskrete Kosinustransformation allein wird keine Bilddatenkompression erreicht. Um mit Hilfe der DCT Bilddaten komprimieren zu können, macht man sich zu Nutze, daß die Basisfunktionen (3) im Ortsraum zweidimensionale Funktionen verschiedener räumlicher Frequenzen darstellen. Jede der Funktionen wird vom menschlichen Auge unterschiedlich stark wahrgenommen. Die unterschiedliche Sichtbarkeit wird durch eine Quantisierungstabelle widergespiegelt. Die Tabelle enthält 8×8 Zahlenwerte. Jeder dieser Zahlenwerte repräsentiert denjenigen Schwellwert, ab dem die zugehörige Funktion vom menschlichen Auge wahrgenommen wird. Die Zahlenwerte der Tabelle wurden empirisch durch Mittelung subjektiver Betrachtereindrücke gewonnen. Durch Vergleich der Entwicklungskoeffizienten mit den betreffenden Schwellwerten der Quantisierungstabelle kann man erkennen, auf welche Entwicklungskoeffizienten bei der Datenkompression Wert gelegt werden muß. Liegt der Betrag des Entwicklungskoeffizienten oberhalb des zugehörigen Schwellwertes, handelt es sich um eine für das menschliche Auge wahrnehmbare Funktion. Liegt der Betrag des Entwicklungskoeffizienten unterhalb des betreffenden Schwellwertes, kann bei der Rekonstruktion der Grauwerte aus den Koeffizienten auf die zugeordnete Funktion verzichtet werden. In der Praxis entscheidet man anhand des Quotienten aus Entwicklungskoeffizient $S(v, u)$ und Schwellwert $t(v, u)$, ob eine Funktion zur Rekonstruktion der Grauwerte wichtig ist:

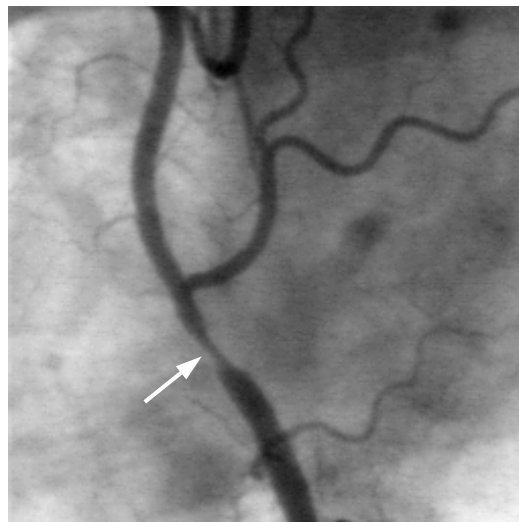
$$q(v, u) = \frac{S(v, u)}{t(v, u)}, \quad v = 0, 1, \dots, 7; \quad u = 0, 1, \dots, 7. \quad (5)$$

Ist $q(v, u) > 1$, spielt die Funktion (3) bei der Rekonstruktion der Grauwerte eine Rolle. Gilt jedoch $q(v, u) \leq 1$, kann (3) bei der Rekonstruktion vernachlässigt werden und $q(v, u)$ wird auf 0 gesetzt. Auf diese Weise erhält man eine Kompression der Daten. Eine weitere Datenkompression wird durch Rundung von $q(v, u)$ auf ganzzahlige Werte erreicht. Der Kompressionsfaktor bei JPEG ist eine

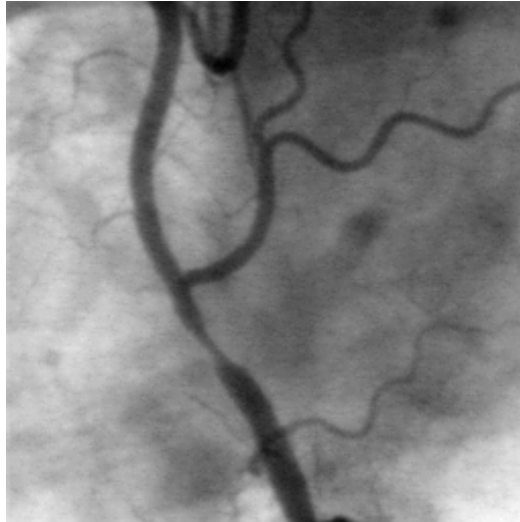
resultierende Größe und kann vom Nutzer nur indirekt gesteuert werden. Eine höhere Datenkompression wird erreicht, indem man die Schwellwerte aus der Quantisierungstabelle $t(v,u)$ mit einem Faktor $k \in \mathbb{R}$ multipliziert. Hierbei muß $k > 1$ gelten. Der Faktor k wird als Qualitätsfaktor bezeichnet. Man hat anstelle von (5) die allgemeinere Form

$$q(v,u) = \frac{S(v,u)}{k \cdot t(v,u)}, \quad v = 0,1,\dots,7; \quad u = 0,1,\dots,7, \quad k \in \mathbb{R}^{>1}. \quad (6)$$

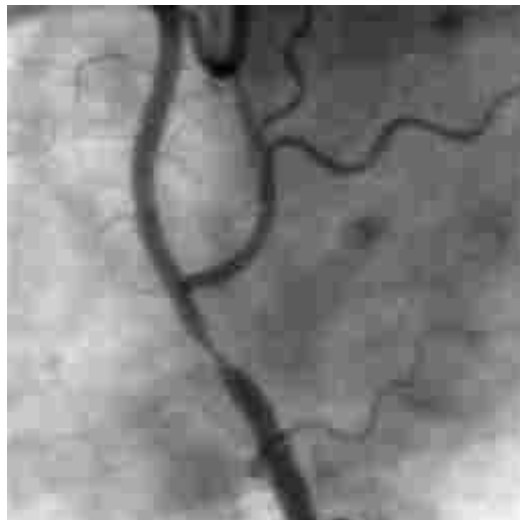
Je größer k gewählt wird, desto stärker werden die Daten zur Darstellung des Bildes reduziert. In der Regel werden die Beträge der Entwicklungskoeffizienten für wachsende Werte von v und u immer kleiner. Die Bilddatenkompression setzt zuerst diese Werte für $q(v,u)$ zu Null. Hierdurch wird auf eine detaillierte Wiedergabe der Grauwerte innerhalb des 8×8 Pixel großen Blockes verzichtet. Solange der Qualitätsfaktor k nicht zu hoch gewählt wird, fällt die ungenaue Rekonstruktion der Grauwerte innerhalb des Blockes nicht auf. Man kann davon ausgehen, daß bei einer zu hohen Wahl von k nur noch sehr wenige Funktionen zur Rekonstruktion der Grauwerte beitragen. Die verlustbehaftete Bilddatenkompression wird in dem vorliegenden Fall durch einen Tiefpaßfilter erzeugt. Die Breite des Filters wird vom Qualitätsfaktor beeinflusst. Je größer der Qualitätsfaktor ist, desto schmaler wird der Filter im Frequenzraum. Dies resultiert in einer immer stärker werdenden Mittelung der Grauwerte innerhalb eines Blocks bei der Umkehrung der DCT oder Dekompression. Da alle Blöcke unabhängig voneinander behandelt werden, erscheinen bei zu hohen Qualitätsfaktoren charakteristische Blockartefakte. Die Effekte sind im folgenden dargestellt:



Figur 1. Koronarangiogramm (Originalaufnahme mit 256 Graustufen). Das Bild hat die Abmessungen 256×256 Pixel. Eine Stenose befindet sich im markierten Bereich. Es handelt sich um eine Aufnahme aus einem Herzkatheterlabor. Nach der Aufnahme ist der Kardiologe sofort in der Lage, mit einem Ballonkatheter die Gefäßverengung (mittelfristig) zu weiten. Der Röntgenfilm, dem diese Aufnahme entstammt, wird archiviert und steht für Folgeuntersuchungen und/oder Lehrzwecke zur Verfügung.



Figur 2. Mit Hilfe des JPEG-Kompressionsstandards komprimiertes Bild. Der Kompressionsfaktor ist sechs. Es sind kaum Unterschiede zwischen dem Originalbild und dem komprimierten Bild zu erkennen.



Figur 3. Darstellung des um einen Faktor 12 mit JPEG komprimierten Originalbildes. Die sogenannten Blockartefakte sind deutlich zu erkennen. Diese Artefakte lassen die Gefäßkanten ausgezackt erscheinen. Insbesondere bei kleineren Gefäßen ist der Gefäßverlauf nur noch schwer zu erkennen. Das Auftreten von Blockartefakten wird durch den Bildqualitätsparameter NNND (normalized nearest neighbour difference) [29] quantitativ charakterisiert. Infolge der verlustbehafteten Bilddatenkompression werden die Grauwerte an den Rändern im Mittel ungenauer als in der Mitte des untersuchten Blockes reproduziert. Die Grauwertänderungen an den Rändern eines Blockes werden ins Verhältnis zur Grauwertänderung in der Mitte des Blockes gesetzt. Eine Mittelung über alle im Bild vorhandenen Blöcke gleicht Schwankungen des blockbezogenen NNND aus.

Neben dem standardisierten JPEG-Kompressionsverfahren gibt es eine Reihe von anderen Algorithmen zur verlustbehafteten Reduktion von Bilddaten. In letzter Zeit wird die Bilddatenkompression mit Hilfe von Wavelets stärker diskutiert. Das untersuchte

Kompressionsverfahren verspricht einen im Vergleich zu JPEG hohen Kompressionsfaktor bei gleichem Bildqualitäts- und/oder Informationsverlust. Blockartefakte treten nicht auf.

Ein höherer Kompressionsfaktor unterliegt nur insoweit Einschränkungen, als das er durch einen Verlust an Bildqualität „erkauft“ wird. Dieser Verlust wird aber erst bei höheren Kompressionsfaktoren, wie am Beispiel des JPEG-komprimierten Koronarangiogrammes gezeigt, empfunden. Der Verlust an Bildqualität spielt eine wichtige Rolle bei der Diagnosefindung des Kardiologen. Aufgrund zu hoher Bilddatenkompression sind sowohl falsche als auch falsch positive Befunde möglich. Eine falsche Diagnose wird dann getroffen, wenn eine Erkrankung zwar vorliegt, diese aber vom Mediziner nicht erkannt wird. Falsche Diagnosen sind im Interesse des Patienten selbstverständlich zu vermeiden. Falsch positive Diagnosen werden durch Kompressionsartefakte verursacht. Eine tatsächliche Erkrankung liegt aber nicht vor. Falsch positive Diagnosen lassen Behandlungen angezeigt sein, die den Patienten unnötig belasten und gefährden. Eine verlustbehaftete Bilddatenkompression darf nur soweit gehen, daß sowohl falsche als auch falsch positive Diagnosen mit Sicherheit ausgeschlossen werden können.

In dieser Arbeit werden zunächst Methoden gesucht, mit deren Hilfe man diejenigen Stellen in Koronarangiogrammen markiert, in denen Bildqualitätsverluste für die Diagnose bedeutsam sind. Diese Stellen sind

- die kontrastmittelgefüllten Gefäße selbst,
- die Kantenregionen der Gefäße,
- die Stellen der stärksten Grauwertänderungen innerhalb der Kantenregionen.

Hier führen fehlerhaft wiedergegebene Grauwerte zu einer Beeinträchtigung der Diagnosefindung des Kardiologen. Im Anschluß werden quantitative Qualitätsparameter zur reproduzierbaren Bestimmung des Bildqualitätsverlustes nach verlustbehafteter Bilddatenkompression eingeführt. Durch die Berechnung der Qualitätsparameter an den zuvor markierten Stellen erhält man Aufschlüsse über den Grad der Bildqualitätsverluste. Dies wird an drei Beispielen (Röntgenphantom; kontrastreiches invasives Koronarangiogramm; kontrastarmes nichtinvasives Koronarangiogramm) demonstriert und diskutiert. Das dabei verwendete Kompressionsverfahren basiert auf der Transformation der Grauwerte mit Hilfe von Daubechies-Skalierungs- und Wavelet-Funktionen und wird im folgenden Abschnitt erläutert.

2. Bilddatenkompression mittels Skalierungs- und Waveletfunktionen

In der klinischen Diagnose kommt es auf die exakte Auswertung von Bildern an. Für die Koronarangiografie bedeutet dies, daß trotz verlustbehafteter Bilddatenkompression ein fehlerfreier Befund jederzeit möglich sein muß. Dabei sind in den Koronarangiogrammen stets solche Bildregionen von Interesse, in den plötzliche Grauwertänderungen auftreten. Unabhängig von der Art des Bildes gilt es, diese Stellen im Bild aufzuspüren. Diese (wenigen) Stellen enthalten die für die Befundung relevante Bildinformation. Es sind Kompressionsverfahren zu entwickeln, welche den Ort der Grauwertänderung genau bestimmen und die Grauwerte an diesen Orten auch bei höheren Kompressionsfaktoren genau wiedergeben. Diese Verfahren sollen nur wenige arithmetische Rechenoperationen benötigen.

Prinzipiell lassen sich die Grauwerte eines Bildes mit Hilfe der diskreten zweidimensionalen Fouriertransformation aus dem Ortsraum in den Frequenzraum transformieren. Man hat

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} z(x, y) \exp(-2\pi i(ux/M + vy/N)) \quad (7)$$

und die Rücktransformation

$$z(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(2\pi i(ux/M + vy/N)). \quad (8)$$

Hierbei sind M und N die Abmessungen des Bildes in Pixeln. Der ungefähre Verlauf der Grauwerte läßt sich bereits durch den vorzeitigen Abbruch der Doppelsumme (8) darstellen. Die restlichen Summanden in (8) können als Detailinformation oder höherfrequentes Rauschen betrachtet werden. Der Betrag von $F(u, v)$ wird mit wachsendem x und y immer kleiner. Hier liegt der Ansatzpunkt für eine Bilddatenkompression. Benutzt man nur die ersten Koeffizienten in der Fouriertransformation, erhält man schon eine gute Näherung des Originalbildes. Plötzliche Grauwertschwankungen lassen sich jedoch nur unzureichend mit Hilfe der zweidimensionalen diskreten Fouriertransformation beschreiben. Die Ursache liegt in der Darstellung der Grauwerte durch die räumlich nicht lokalen Funktionen

$$\exp(\mp 2\pi i(ux/M + vy/N)). \quad (9)$$

Eine exakte räumliche Rekonstruktion der Grauwerte ist nur mit den höherfrequenten Anteilen in (8) möglich. Für die Diagnose ist aber gerade die präzise Wiedergabe der Grauwerte wichtig. Die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation basiert auf einer globalen Zerlegung des Signals. Zur präzisen räumlichen Wiedergabe benötigt man aber die lokale Darstellung der Grauwerte.

Wavelet-Funktionen oder „Wavelets“ sind sowohl im Orts- als auch im Frequenzraum lokale Funktionen. Mit Hilfe dieser Eigenschaft ist man in der Lage, räumlich begrenzte Eigenschaften eines Koronarangiogrammes zu analysieren.

Integrale Wavelet-Transformation und Analyse im Orts- und Frequenzraum

Wie wird eine beliebige Funktion aus $L^2(R)$ nach Wavelet-Funktionen entwickelt, wenn diese lokalisiert sind, d.h. schnell gegen Null konvergieren? Die Idee besteht in einer Verschiebung einer Wavelet-Funktion Ψ entlang der reellen Achse gemäß

$$\Psi(x - k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Neben der Translation sucht man nach Wavelets mit unterschiedlichen Frequenzen. Betrachtet wird die Zuordnung der Wavelet-Funktionen Ψ zu Frequenzbändern oder Oktaven. Für die Frequenzpartitionierung wählt man ganzzahlige Potenzen von 2, d. h.

$$\Psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Das bedeutet, daß $\Psi(2^j x - k)$ aus einer einzigen Wavelet-Funktion $\Psi(x)$ durch binäre Dilation (Dilation durch 2^j) und eine dyadische Translation $k/2^j$ erzeugt wird. Von Interesse sind solche Wavelet-Funktionen Ψ , mit deren Hilfe durch binäre Dilation und dyadische Translation beliebige Funktionen aus $L^2(\mathbb{R})$ dargestellt werden können. Mit Hilfe von Ψ kann man eine Orthogonalbasis generieren. Dabei ist das Skalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (12)$$

definiert. Die Norm ist

$$\|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad (13)$$

mit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Für beliebige $j, k \in \mathbb{Z}$ hat man mit Hilfe der Substitution $y = 2^j x - k$

$$\|f(2^j x - k)\|_2 = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(2^j x - k) \overline{f(2^j x - k)} dx \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{f(y)} dy \right\}^{1/2} = 2^{-j/2} \|f\|_2. \quad (14)$$

Sind alle Funktionen $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ normiert, so sind auch alle Funktionen $\Psi_{j,k}$ normiert, welche durch

$$\Psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

definiert sind. Das bedeutet

$$\|\Psi_{j,k}\|_2 = \|\Psi\|_2 = 1. \quad (16)$$

Definition: Eine Funktion $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt orthonormales Wavelet, wenn die Funktionen

$$\Psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ bilden. Es gilt

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m}, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

In diesem Fall kann eine beliebige Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ durch

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x) \quad (19)$$

dargestellt werden. Die Konvergenz der Reihe (19) ist durch

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k} \Psi_{j,k} \right\|_2 = 0 \quad (20)$$

sichergestellt. Die Reihenentwicklung (19) heißt Wavelet-Reihe. Die Entwicklungskoeffizienten werden mit Hilfe von

$$c_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \quad (21)$$

bestimmt. Die einfache Darstellung der Entwicklungskoeffizienten in (21) ist nur aufgrund der Orthonormalität der Wavelet-Funktionen möglich. Im allgemeinen sind Wavelets nicht orthonormal. Orthonormale Wavelets können mit Hilfe eines speziellen Verfahrens konstruiert werden.

Die Entwicklungskoeffizienten $c_{j,k}$ können auch mit Hilfe der integralen Wavelet-Transformation berechnet werden. Diese ist durch

$$(W_\Psi f)(b, a) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\Psi_{b;a}(x)} dx \quad (22)$$

mit

$$f \in L^2(R), \quad \Psi_{b;a}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (23)$$

definiert. In diesem Fall hat man

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle f, \Psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{2^{j/2} \Psi(2^j x - k)} dx \\ &= (2^{-j})^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\Psi\left(\frac{x - 2^{-j} k}{2^{-j}}\right)} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Der Vergleich mit (23) bringt

$$c_{j,k} = (W_\Psi f)(b, a), \quad b = 2^{-j} k, \quad a = 2^{-j}. \quad (25)$$

Der j,k -te Wavelet-Koeffizient von f wird durch die integrale Wavelet-Transformation von f an der Position $b = k / 2^j$ mit der Dilation $a = 2^{-j}$ bestimmt. Das orthonormale Wavelet generiert sowohl die Reihenentwicklung (19) als auch die integrale Wavelet-Transformation.

Die Fouriertransformation einer Funktion $f \in L^2(R)$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (26)$$

Um (26) an einer einzigen Stelle ω auswerten zu können, muß das Signal unendlich weit in x -Richtung verfolgt werden können. Benötigt werden jedoch die Ortsintervalle, welche die frequenzabhängigen Informationen in einem beliebigen Frequenzband liefern. Für hohe Frequenzen ω

ist das betrachtete Ortsintervall kurz und umgekehrt. Ein variables Fenster im Orts- bzw. Frequenzraum wird mit Hilfe der integralen Wavelet-Transformation erzeugt. Das Fenster wird schmal, wenn die Frequenz im Zentrum des Fensters hoch ist. Es wird breiter, wenn die Frequenz im Zentrum des Fensters niedrig ist. Sowohl Ψ als auch dessen Fouriertransformierte müssen rasch gegen Null konvergieren, um als sogenannte Fensterfunktionen benutzt werden zu können. Das Zentrum und die Breite einer Fensterfunktion w sind durch die folgende Definition gegeben:

Definition: Eine Funktion $w \in L^2(R)$ heißt Fensterfunktion, wenn auch das Produkt xw aus $L^2(R)$ ist. Das Zentrum t^* und der Radius Δ_w der Fensterfunktion sind definiert durch

$$t^* := \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |w(x)|^2 dx \quad (27)$$

und

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |w(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (28)$$

Die Breite der Fensterfunktion w ist durch $2\Delta_w$ gegeben.

Man nimmt an, daß sowohl Ψ als auch dessen Fouriertransformierte $\hat{\Psi}$ Fensterfunktionen sind. Die Zentren und Radien seien mit

$$t^*, \omega^*, \Delta_\Psi, \Delta_{\hat{\Psi}}$$

bezeichnet. Wählt man jedoch $\Psi_{b;a}$ anstelle von Ψ als Fensterfunktion, ergeben sich mit Hilfe der integralen Wavelet-Transformation

$$(W_\Psi f)(b, a) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi_{b;a}(t)} dt \quad (29)$$

ein neues Zentrum und ein neuer Radius des Fensters im Ortsraum. Für das Zentrum hat man

$$t_{\Psi_{b;a}}^* = \frac{1}{\|\Psi_{b;a}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\Psi_{b;a}(t)|^2 dt = \frac{1}{|a| \|\Psi_{b;a}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt. \quad (30)$$

Mit der Substitution $y = (t - b)/a$ erhält man

$$t_{\Psi_{b;a}}^* = \frac{1}{\|\Psi_{b;a}\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (ay + b) |\Psi(y)|^2 dy. \quad (31)$$

Aufgrund von

$$\|\Psi_{b;a}\|_2 = \|\Psi\|_2 \quad (32)$$

(siehe Gleichung (16)) wird (31) zu

$$\begin{aligned} t_{\Psi_{b;a}}^* &= a \frac{1}{\|\Psi\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} y |\Psi(y)|^2 dy + b \frac{1}{\|\Psi\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(y)|^2 dy \\ &= at^* + b. \end{aligned} \quad (33)$$

Der neue Radius ist gegeben durch

$$\Delta_{\Psi_{b;a}} = \frac{1}{\|\Psi_{b;a}\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_{\Psi_{b;a}}^*)^2 |\Psi_{b;a}|^2 dt \right\}^{1/2} = \frac{1}{\|\Psi_{b;a}\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_{\Psi_{b;a}}^*)^2 \frac{1}{|a|} \left| \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (34)$$

Durch die Substitution $y = (t - b)/a$ und mit $t_{\Psi_{b;a}}^* = at^* + b$ erhält man

$$\Delta_{\Psi_{b;a}} = a \frac{1}{\|\Psi\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (y - t^*)^2 |\Psi(y)|^2 dy \right\}^{1/2} = a \Delta_{\Psi}. \quad (35)$$

Das analoge Signal f wird durch die integrale Wavelet-Transformation auf dem geschlossenen Ortsintervall

$$\left[b + at^* - a\Delta_{\Psi}, b + at^* + a\Delta_{\Psi} \right]$$

gefenstert. Das Zentrum und die Breite des Fensters sind gegeben durch $b + at^*$ und $2a\Delta_{\Psi}$. Man spricht deshalb von einer Lokalisation im Ortsraum.

Für die Fouriertransformierte von $\Psi_{b;a}$ hat man

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\Psi}_{b;a}(\omega) = \frac{|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (36)$$

Auch hier substituiert man wie in (34) und erhält

$$\frac{1}{2\pi} \hat{\Psi}_{b;a}(\omega) = \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} e^{-i\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ia\omega y} \Psi(y) dy = \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} e^{-i\omega b} \hat{\Psi}(a\omega). \quad (37)$$

Im folgenden sollen das Zentrum und der Radius des Frequenzfensters von $\hat{\Psi}_{b;a}$ bestimmt werden. Das Zentrum und der Radius von $\hat{\Psi}_{b;a}$ werden, wie oben angedeutet, mit ω^* und $\Delta_{\hat{\Psi}}$ bezeichnet. Durch die Definition von

$$\eta(\omega) := \hat{\Psi}(\omega + \omega^*) \quad (38)$$

wird $\hat{\Psi}$ um ω^* Einheiten nach links verschoben. Das Zentrum von $\eta(\omega)$ liegt bei $\omega = 0$. Mit

$$(W_{\Psi} f)(b, a) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi_{b;a}(t)} dt = \langle f, \Psi_{b;a} \rangle \quad (39)$$

und der Parseval-Identität

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (40)$$

erhält man

$$\langle f, \Psi_{b;a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\Psi}_{b;a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Psi}_{b;a}(\omega)} d\omega. \quad (41)$$

Einsetzen von (37) in (41) bringt

$$\langle f, \Psi_{b;a} \rangle = \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\hat{\Psi}(a\omega)} d\omega. \quad (42)$$

Mit Hilfe von (38) wird daraus

$$\begin{aligned} \langle f, \Psi_{b;a} \rangle &= \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\eta(a\omega - \omega^*)} d\omega \\ &= \frac{a|a|^{-1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega. \end{aligned} \quad (43)$$

Hier kann man das Zentrum von $\hat{\Psi}(a\omega) = \eta(a(\omega - \omega^*/a))$ an der Stelle $\tilde{\omega}^* = \omega^*/a$ ablesen. Der Radius von $\hat{\Psi}(a\omega)$ sei $\tilde{\Delta}_{\hat{\Psi}}$. Man hat

$$\tilde{\Delta}_{\hat{\Psi}} = \frac{1}{\|\hat{\Psi}(a\omega)\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \tilde{\omega}^*)^2 |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}. \quad (44)$$

Substitution von $\omega' = a\omega$ und Einsetzen von

$$\|\hat{\Psi}(a\omega)\|_2^2 = a^{-1} \|\hat{\Psi}\|_2^2 \quad (45)$$

führt auf

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\hat{\Psi}} &= \frac{\sqrt{a}}{\|\hat{\Psi}\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'}{a} - \frac{\omega^*}{a}\right)^2 |\hat{\Psi}(\omega')|^2 \frac{1}{a} d\omega' \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{\|\Psi\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega' - \omega^*)^2 |\Psi(\omega')|^2 d\omega' \right\}^{1/2} = \frac{1}{a} \Delta_{\Psi}. \end{aligned} \quad (46)$$

Die Fensterfunktion $\hat{\Psi}(a\omega)$ hat das Zentrum an der Stelle $\tilde{\omega}^* = \omega^*/a$ und eine Breite von $2\Delta_{\hat{\Psi}}/a$. Mit Ausnahme eines Faktors $a|a|^{-1/2}/(2\pi)$ und einer Phase $e^{i\omega b}$ kann die integrale Wavelet-Transformation

$$(W_\Psi f)(b, a) = \langle f, \Psi_{b;a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\Psi}_{b;a} \rangle \quad (47)$$

Aufschlüsse über lokale Informationen von f in dem Frequenzfenster

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a} \right]$$

liefern. Man spricht hierbei von Frequenzlokalisation. Das Fenster im Orts- bzw. Frequenzraum ist durch

$$\left[b + at^* - a\Delta_\Psi, b + at^* + a\Delta_\Psi \right] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_{\hat{\Psi}}}{a} \right] \quad (48)$$

gegeben und ermöglicht eine Analyse im Orts- und Frequenzraum mit Hilfe der integralen Wavelet-Transformation bezogen auf die Wavelet-Funktion Ψ . Im Fall von ausschließlich positiven Frequenzen, sollte die Wavelet-Funktion Ψ so gewählt werden, daß das Zentrum ω^* von $\hat{\Psi}$ eine positive Zahl ist. Dies wird erreicht, indem man den Skalierungsparameter a positiv wählt. Das Verhältnis des Zentrums des Frequenzbandes zu seiner Breite ist bestimmt durch

$$\frac{\omega^*/a}{2\Delta_{\hat{\Psi}}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta_{\hat{\Psi}}}. \quad (49)$$

Dieses Verhältnis hängt nicht von a ab und ist unabhängig vom Ort des Zentrums. Das Frequenzfenster (48) wird schmal bei einer hohen Frequenz ω^*/a des Zentrums und wird breiter, wenn ω^*/a kleiner wird. Die Fläche des Fensters, welche durch $4\Delta_\Psi\Delta_{\hat{\Psi}}$ gegeben ist, bleibt konstant. Die integrale Wavelet-Transformation liefert Informationen über die Lokalisation (in Bezug auf $b + at^*$), die „Rate“ (in Bezug auf a) und den Betrag (gegeben durch $(W_\Psi f)(b, a)$) der Änderung von f . Diese Informationen sind für die Bilddatenkompression wichtig, da die Werte von $(W_\Psi f)(b, a)$ unterhalb einer wählbaren Schwelle zu Null gesetzt werden können.

In der digitalen Bilddatenkompression werden nur diskretisierte Bilder untersucht. Für die Berechnung von $(W_\Psi f)(b, a)$ wählt man deshalb $b = k/2^j$ und $a = 1/2^j$ mit $j, k \in \mathbb{Z}$. In diesem Fall hat man

$$(W_\Psi f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ 2^{j/2} \Psi(2^j x - k) \right\} dx = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle \quad (50)$$

mit

$$\Psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (51)$$

wie in (15). Die gemachten Aussagen sind für Wavelet-Funktionen im allgemeinen gültig.

Konstruktion der Wavelets

Die Konstruktion der Wavelets erfolgt mit Hilfe der Dilationsgleichung

$$\Phi(x) = \sum_k c_k \Phi(2x - k). \quad (52)$$

Man sucht nach Lösungen von (52), welche durch

$$\int \Phi(x) dx = 1 \quad (53)$$

normiert sind. Die Normierungsbedingung führt auf

$$\int \Phi(x) dx = \sum_k c_k \int \Phi(2x - k) dx. \quad (54)$$

Durch Substitution von $y = 2x - k$ und Einsetzen von (53) erhält man

$$\sum_k c_k = 2. \quad (55)$$

Die Fouriertransformierte von Φ ist gegeben durch

$$\hat{\Phi}(\omega) = \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \Phi(2x - k) e^{-i\omega x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int \Phi(2x - k) e^{-i\omega x} dx. \quad (56)$$

Durch Substitution von $y = 2x - k$ erhält man nach Umformungen

$$\hat{\Phi}(\omega) = P(z) \hat{\Phi}(\omega/2), \quad (57)$$

mit

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad z = e^{-i\omega/2}. \quad (58)$$

Durch die Definition von

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k := \left(\frac{1+z}{2} \right)^N S(z) \quad (59)$$

wird die Bestimmung der Koeffizienten c_k auf die Bestimmung von $S(z)$ verschoben. N ist eine positive ganze Zahl. Im Hinblick auf die Konstruktion von orthonormalen Wavelets genügt es, orthonormale Skalierungsfunktionen zu bestimmen, aus denen die Wavelet-Funktionen durch die Definition

$$\Psi(x) := \sum_k (-1)^k c_{1-k} \Phi(2x - k) \quad (60)$$

abgeleitet werden. Man kann zeigen [3], daß mit Hilfe von (59) und

$$|S(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N+j-1}{j} \left(\sin \frac{\omega}{2} \right)^{2j} \quad (61)$$

orthonormale Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger erzeugt werden. Die letzte Beziehung stellt sicher, daß auch Translationen der Skalierungsfunktion orthonormal sind, d.h. es gilt

$$\langle \Phi(\cdot - j), \Phi(\cdot - k) \rangle = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

Das Lemma von Riesz [3] gewährleistet, daß eine Lösung der Gleichung (61) immer existiert.

Konstruktion der Skalierungsfunktion für Daubechies-Wavelets

Wählt man $N=2$, erhält man mit den Angaben aus [3] eine Gleichung für $S(z)$:

$$S(z) = -\frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-1)z - (\sqrt{3}+1) \}. \quad (63)$$

Daraus erhält man für $P(z)$

$$P(z) = \left(\frac{1+z}{2} \right)^N S(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{3+\sqrt{3}}{4}z + \frac{3-\sqrt{3}}{4}z^2 + \frac{1-\sqrt{3}}{4}z^3 \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad (64)$$

Ein Koeffizientenvergleich bringt sofort

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4}, \quad c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4}, \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}. \quad (65)$$

Die Skalierungsfunktion mit den Koeffizienten c_0, c_1, c_2, c_3 heißt Daubechies-Skalierungsfunktion $\Phi_3^D(x)$. Aus $P(1)=1$ folgt (55). Wegen $P(-1)=0$ erhält man

$$\sum_k c_{2k} = \sum_k c_{2k+1} = 1. \quad (66)$$

Die Daubechies-Skalierungsfunktion hat den kompakten Träger $[0;3]$, d.h. es gilt $\Phi(x)=0$ für $x \notin [0;3]$. Ferner gilt $\Phi(0)=\Phi(3)=0$.

Graphen der Daubechies-Skalierungsfunktion und der zugehörigen Wavelet-Funktion

Es gibt keine Funktionsvorschrift, welche die Abhängigkeit der Skalierungsfunktion oder der daraus abgeleiteten Wavelet-Funktion von einer Variablen definiert. Eine häufig benutzte Methode zur grafischen Darstellung der Skalierungsfunktion und der Wavelet-Funktion besteht in der rekursiven Berechnung der Funktionswerte gemäß

$$\Phi(x) = \sum_k c_k \Phi(2x - k). \quad (67)$$

Ist die Skalierungsfunktion bekannt, kann die zugehörige Wavelet-Funktion durch

$$\Psi(x) := \sum_k (-1)^k c_{1-k} \Phi(2x - k) \quad (68)$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Koeffizienten aus (65) und der Bedingungen $\Phi(x) = 0$ für $x \notin [0;3]$, sowie $\Phi(0) = \Phi(3) = 0$ erhält man für die Funktionswerte der Daubechies-Skalierungsfunktion an den Stellen $x = 1$ und $x = 2$:

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= c_0 \Phi(2) + c_1 \Phi(1) + c_2 \underbrace{\Phi(0)}_{=0} + c_3 \underbrace{\Phi(-1)}_{=0}, \\ \Phi(2) &= c_0 \underbrace{\Phi(4)}_{=0} + c_1 \underbrace{\Phi(3)}_{=0} + c_2 \Phi(2) + c_3 \Phi(1). \end{aligned} \quad (69)$$

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \Phi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \Phi(2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{\Phi} = L \vec{\Phi}. \quad (70)$$

Die Eigenwerte der Matrix L sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1/2$. Der Eigenvektor von L zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist ein reellwertiges Vielfaches des Vektors

$$\vec{\Phi}_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} \Phi(1) \\ \Phi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}) \\ \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Die Normierung dieses Eigenvektors bringt

$$\vec{\Phi}_{\lambda=1}^{norm} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Die Komponenten von $\vec{\Phi}_{\lambda=1}^{norm}$ bestimmen die Funktionswerte des Graphen von $\Phi_3^D(x)$ an den Stellen $x=1$ und $x=2$. Diese Werte bilden den Rekursionsanfang von (67). Der zweite Eigenwert $\lambda_2 = 1/2$ bedeutet, daß die Rekursion (67) differenziert werden kann:

$$\Phi'(x) = \sum_k c_k 2 \Phi'(2x - k). \quad (73)$$

Die letzte Gleichung führt auf die Werte $\Phi'(1)$ und $\Phi'(2)$. Die Daubechies-Skalierungsfunktion ist links- jedoch nicht rechts-differenzierbar [4].

Mit Hilfe der Funktionswerte von $\Phi_3^D(x)$ an $x=1$ und $x=2$ und der Rekursion (67) können neue Funktionswerte an den Stellen $x=0,5$, $x=1,5$ und $x=2,5$ berechnet werden. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis ausreichend viele Datenpunkte zur Darstellung der Daubechies-Skalierungsfunktion vorhanden sind. Die Graphen der Funktionen $\Phi_3^D(x)$ und $\Psi_3^D(x)$ sind weiter unten dargestellt.

Bilddatenkompression mit Hilfe von Wavelet-Funktionen

Die vorangegangenen Diskussionen beziehen sich auf die Entwicklung einer beliebigen Funktion f in eine Wavelet-Reihe. Für diskrete Funktionen wählt man $b = k/2^J$ und $a = 1/2^J$. Es wurde nur der eindimensionale Fall untersucht. Für die Kompression von zweidimensionalen Bilddaten kann auf den

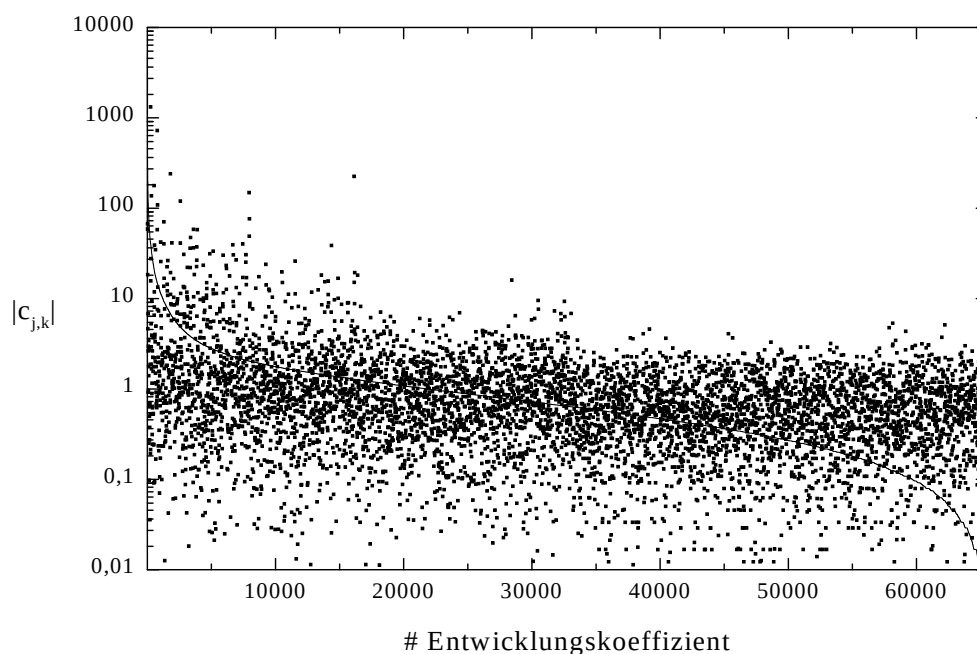
eindimensionalen Fall zurückgegriffen werden. Bei der Transformation der Grauwerte in die Entwicklungskoeffizienten der Wavelet-Reihe wird in zwei Schritten verfahren.

- 1) Die Grauwerte des Bildes werden durch die zeilenweise (spaltenweise) Ausführung des im folgenden Abschnitt beschriebenen Pyramiden-Algorithmus zu Entwicklungskoeffizienten transformiert. Die Zahl der Grauwerte in einer Bildzeile ist identisch mit der Zahl der Entwicklungskoeffizienten.
- 2) Der Pyramiden-Algorithmus wird erneut spaltenweise (zeilenweise) auf die unter 1) berechneten Entwicklungskoeffizienten angewandt.

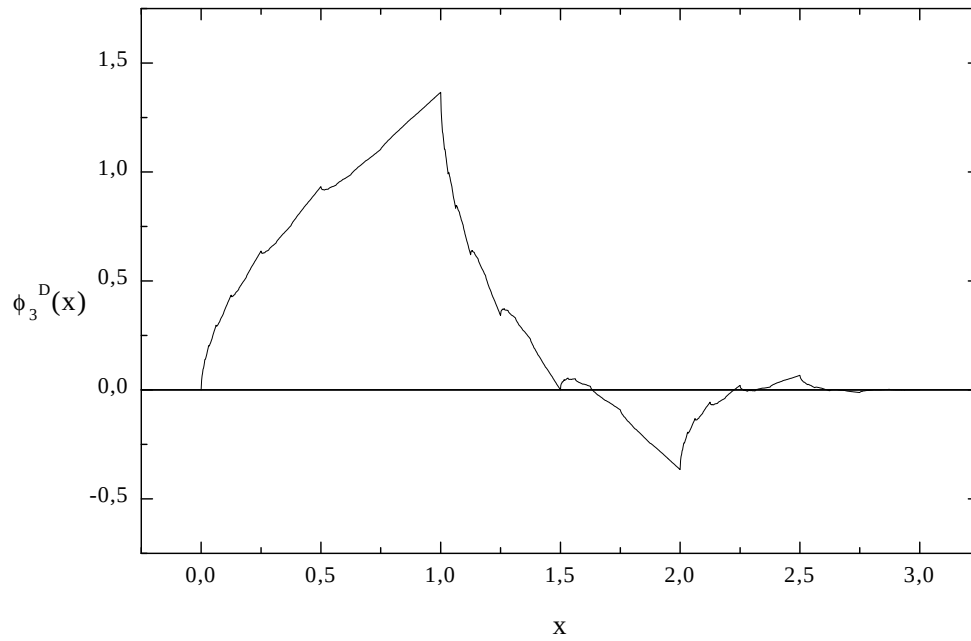
Nach Durchführung der Schritte 1) und 2) hat man lediglich die Grauwerte des Bildes durch ebenso viele Entwicklungskoeffizienten ersetzt. Häufig wird das so entstandene Anordnung von Koeffizienten zeilenweise oder spaltenweise in einen Vektor eingelesen, dessen Dimension der Anzahl der Koeffizienten entspricht. Bei der verlustbehafteten Bilddatenkompression werden nur diejenigen Vektorkomponenten gespeichert und/oder übertragen, deren Beträge oberhalb eines Schwellwertes liegen. Dies ist die einfachste Methode, Bilddaten verlustbehaftet zu komprimieren. Diejenigen Komponenten, deren Betrag kleiner als der Schwellwert ist, werden zu Null gesetzt. Hier liegt der Grund für eine verlustbehaftete Bilddatenkompression. Eine exakte Rekonstruktion des Originalbildes ist dann nicht mehr möglich. Der Schwellwert τ ist eine Funktion der Kompressionsfaktors. Man hat

$$\tau = \frac{|c_{j,k}^{\max}|}{K}$$

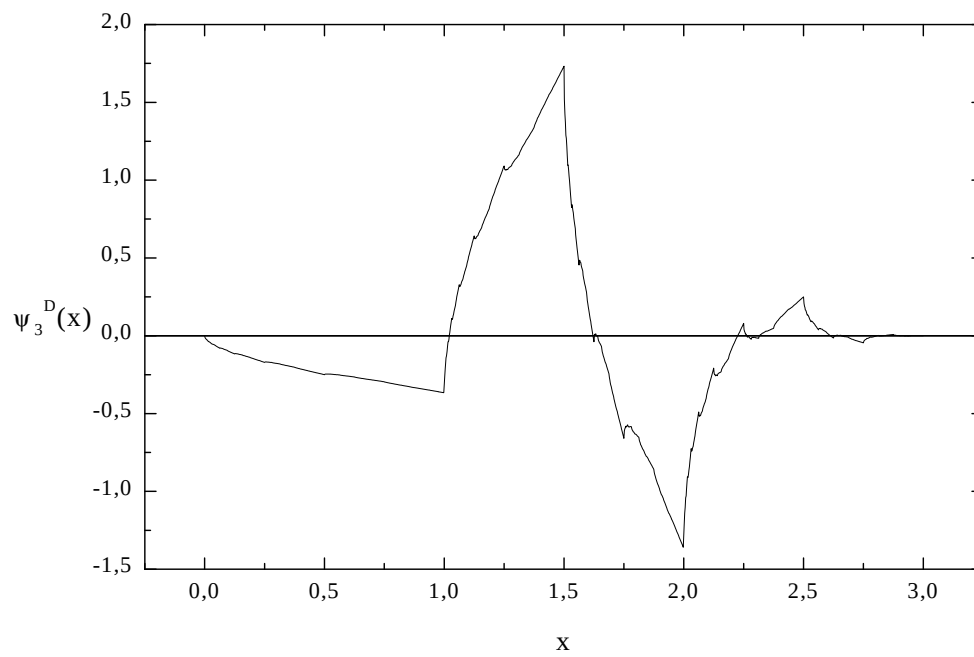
Hierbei ist $|c_{j,k}^{\max}|$ der betragsmäßig größte Entwicklungskoeffizient und K der Kompressionsfaktor. Neben den Beträgen der nicht verschwindenden Vektorkomponenten müssen noch deren Vorzeichen und Position innerhalb des Vektors gespeichert und/oder übertragen werden. Ein Beispiel für die Anordnung der Entwicklungskoeffizienten innerhalb des Vektors ist in Figur 4 gegeben.



Figur 4. Darstellung von $|c_{j,k}|$ (siehe Text). Die durchgezogene Kurve stellt $|c_{j,k}|$ nach Sortierung in absteigender Reihenfolge dar. Die Grauwerte entstammen Figur 1.



Figur 5. Grafische Darstellung der Daubechies-Skalierungsfunktion $\Phi_3^D(x)$ auf dem geschlossenen Intervall $[0;3]$.



Figur 6. Grafische Darstellung der aus der Daubechies-Skalierungsfunktion $\Phi_3^D(x)$ abgeleiteten Wavelet-Funktion $\Psi_3^D(x)$.

Wavelet-Darstellung

Im folgenden wird ein Operator untersucht, welcher ein Signal mit einer gegebenen Auflösung approximiert. Die Auflösung wird mit 2^j bezeichnet. Die im Bild enthaltene Information wird sukzessive aus Detailinformationen zusammengesetzt, welche einer Auflösung 2^j zugeordnet sind. Die Detailinformation ist die Differenz zwischen zwei Approximationen mit den Auflösungen 2^{j+1} und 2^j . Die Detailinformation ist identisch mit dem Informationsverlust, welcher durch den Übergang von der Approximation mit der Auflösung 2^{j+1} zur Approximation mit der niedrigeren Auflösung 2^j entsteht. Der Informationsverlust zwischen zwei Approximationen mit den Auflösungen 2^{j+1} und 2^j kann mit Hilfe der orthonormalen Wavelet-Funktionen

$$\Psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \Psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (74)$$

bestimmt werden. Die Strukturen, aus denen ein Bild aufgebaut ist, können den verschiedenen Auflösungen zugeordnet werden. Große Strukturen werden einer niedrigen Auflösung zugeordnet, detaillierte Strukturen werden durch eine hohe Auflösung charakterisiert.

Sei A_{2^j} ein Operator, welcher ein Signal $f(x)$ mit einer Auflösung 2^j approximiert. Das Signal sei quadratintegrierbar: $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Der Operator A_{2^j} besitze die folgenden Eigenschaften:

- 1) A_{2^j} ist ein linearer Operator. Wird die Funktion $f(x)$ durch $A_{2^j} f(x)$ approximiert, führt eine Anwendung von A_{2^j} auf $A_{2^j} f(x)$ erneut auf das Ergebnis $A_{2^j} f(x)$. Die Verkettung zweier aufeinanderfolgender Anwendungen von A_{2^j} bringt $A_{2^j} \circ A_{2^j} = A_{2^j}$. A_{2^j} ermöglicht die Projektion auf einen Vektorraum $V_{2^j} \subset L^2(\mathbb{R})$. V_{2^j} ist die Menge aller Approximationen von $f(x)$ mit der Auflösung 2^j .
- 2) Unter allen Approximationen von $f(x)$ mit der Auflösung 2^j ist $A_{2^j} f(x)$ die genaueste, d.h.

$$\forall g(x) \in V_{2^j}, \quad \|g(x) - f(x)\| \geq \|A_{2^j} f(x) - f(x)\|. \quad (75)$$

A_{2^j} ist eine orthogonale Projektion auf den Vektorraum V_{2^j} .

- 3) Die Approximation eines Signals mit der Auflösung 2^{j+1} enthält alle nötigen Informationen zur Berechnung des Signals mit der Auflösung 2^j . Man kann schreiben

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_{2^j} \subset V_{2^{j+1}}. \quad (76)$$

- 4) Durch Skalierung einer Funktion mit dem Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Auflösungen erhält man

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_{2^j} \Leftrightarrow f(2x) \in V_{2^{j+1}}. \quad (77)$$

- 5) Die Approximation $A_{2^j} f(x)$ eines Signals $f(x)$ erfolgt an 2^j Stützstellen pro Einheitsintervall. Wird $f(x)$ durch 2^{-j} Einheiten verschoben, wird $A_{2^j} f(x)$ um denselben Betrag verschoben.
- 6) Bei der Berechnung der Approximation des Signals $f(x)$ mit der Auflösung 2^j geht Information über $f(x)$ verloren. Geht die Auflösung gegen Unendlich, konvergiert die Approximation gegen das ursprüngliche Signal. Geht die Auflösung gegen Null, enthält das Signal immer weniger Informationen und konvergiert gegen Null. Das approximierte Signal mit der Auflösung 2^j entspricht einer orthogonalen Projektion auf den Vektorraum V_{2^j} . Man hat

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_{2^j} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_{2^j} \quad (78)$$

und

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} V_{2^j} = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_{2^j} = \emptyset. \quad (79)$$

Der Vektorraum V_{2^j} besitzt eine Orthonormalbasis. Die orthonormalen Basisfunktionen sind die Skalierungsfunktionen

$$2^{-j/2} \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (80)$$

mit

$$\Phi_{2^j}(x) = 2^j \Phi(2^j x). \quad (81)$$

Ein Beweis wird in Referenz [1] gegeben. Eine Orthonormalbasis von V_{2^j} wird durch Dilation der Funktion $\Phi(x)$ mit einem Koeffizienten 2^j und Translation auf einem Intervall mit einem Stützstellenabstand 2^{-j} konstruiert.

Die orthogonale Projektion auf V_{2^j} mit der Auflösung 2^j wird durch Entwicklung von $f(x)$ nach den orthonormalen Basisfunktionen von V_{2^j} erreicht:

$$A_{2^j} f(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(u), \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n). \quad (82)$$

$A_{2^j} f(x)$ ist durch die Koeffizienten

$$A_{2^j}^d f = \langle f(u), \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle \quad (83)$$

charakterisiert; die Basisfunktionen von V_{2^j} stehen fest. Die Faltung zweier Funktionen ist gegeben durch

$$f * g(x) = (f(u) * g(u))(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{g(x-u)} du = \langle f(u), g(x-u) \rangle. \quad (84)$$

Mit Hilfe von (84) wird (83) zu ($\Phi(x)$ reell)

$$A_{2^j}^d f = \langle f(u), \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) du = (f(u) * \Phi_{2^j}(-u))(2^{-j}n). \quad (85)$$

Die Anzahl der Stützstellen (Abtastpunkte) im Einheitsintervall beträgt 2^j . Während der Approximation gehen die Details von $f(x)$, welche zwischen den Abtastpunkten der Auflösung 2^j liegen, verloren. Durch die Berechnung des Faltungsproduktes (85) wird eine Tiefpaßfilterung des Signals $f(x)$ in der Auflösung 2^j erreicht. Die Funktion $\Phi(x)$ ist ein Tiefpaßfilter. Die Funktionen $2^{-j/2} \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$, $n \in \mathbb{Z}$ repräsentieren eine spezielle Klasse von Tiefpaßfiltern, da sie orthonormal sind.

Ein Detektor mißt ein kontinuierliches Signal an nur endlich vielen Stützstellen. Das gemessene diskrete Signal wird der Auflösung $A_1 f(x)$ zugeordnet. Mit Hilfe von $A_1 f(x)$ können alle weiteren Approximationen $A_{2^j} f(x)$ mit $j < 0$ berechnet werden.

Sei V_{2^j} , $j \in \mathbb{Z}$ der zur Auflösung 2^j gehörende Vektorraum. $\Phi(x)$ sei die entsprechende Skalierungsfunktion. Die Funktionen $2^{-(j+1)/2} \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}n)$, $n \in \mathbb{Z}$ bilden eine Orthonormalbasis von $V_{2^{j+1}}$. Für beliebige $n \in \mathbb{Z}$ ist $\Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ eine orthogonale Basisfunktion des Vektorraums V_{2^j} . Wegen $V_{2^j} \subset V_{2^{j+1}}$ kann $\Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ nach den orthonormalen Basisfunktionen $2^{-(j+1)/2} \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}n)$ aus $V_{2^{j+1}}$ entwickelt werden:

$$\Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) = 2^{-(j+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}k), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}k). \quad (86)$$

Das Skalarprodukt in (86) wird mit Hilfe der Substitution

$$\frac{1}{2^{j+1}}v = u - 2^{-j}n \quad (87)$$

umgeformt. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{j+1}} \langle \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}k), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle &= \frac{1}{2^{j+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}k) \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) du \\ &= \frac{1}{(2^{j+1})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{2^j}\left(\frac{v}{2^{j+1}}\right) \Phi_{2^{j+1}}\left(\frac{v}{2^{j+1}} - 2^{-(j+1)}(k - 2n)\right) dv \end{aligned} \quad (88)$$

Die Anwendung von $\Phi_{2^j}(x) = 2^j \Phi(2^j x)$ (siehe (84)) in (88) führt auf das Ergebnis

$$\frac{1}{2^{j+1}} \langle \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}k), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{2^{-1}}(u) \Phi(u - (k - 2n)) du = \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle \quad (89)$$

Einsetzen in (86) bringt

$$\Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}k). \quad (90)$$

Durch Berechnung des Skalarproduktes beider Seiten von (90) mit $f(u)$ erhält man

$$\langle f(u), \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle \langle f(u), \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}k) \rangle. \quad (91)$$

Sei H ein diskreter Filter mit der Impulsantwort

$$h(n) = \langle \Phi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - n) \rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (92)$$

Sei $\tilde{H}$ der gespiegelte Filter mit der Impulsantwort $\tilde{h}(n) = h(-n)$. Durch Einsetzen von (92) in (91) erhält man

$$\left\langle f(u), \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(2n - k) \left\langle f(u), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \right\rangle \quad (93)$$

Mit Hilfe der Gleichung (83) für $A_{2^j}^d$ erhält man hieraus

$$A_{2^j}^d = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{h}(2n - k) A_{2^{j+1}}^d. \quad (94)$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß $A_{2^j}^d$ aus einer Faltung von $A_{2^{j+1}}^d$ mit $\tilde{H}$ gewonnen wird. Alle diskreten Approximationen $A_{2^j}^d$ werden durch sukzessive Faltung aus $A_1^d f$ mit $j < 0$ berechnet. Diese wiederholte Faltung heißt Pyramiden-Transformation (engl. pyramid transform).

Bei der Approximation eines Signals mit der Auflösung 2^j geht gegenüber der Approximation desselben Signals mit der Auflösung 2^{j+1} Detailinformation verloren. Im folgenden wird erläutert, wie man den Informationsverlust zwischen zwei aufeinanderfolgenden Approximationen mit Hilfe einer Orthonormalbasis von Wavelet-Funktionen berechnen kann. Der Informationsverlust wird als Detailsignal mit der Auflösung 2^j bezeichnet. Die Approximationen mit den Auflösungen 2^j und 2^{j+1} entsprechen orthogonalen Projektionen auf die Vektorräume V_{2^j} und $V_{2^{j+1}}$. Das Detailsignal mit der Auflösung 2^j ist gegeben durch die orthogonale Projektion des Ursprungssignals auf das orthogonale Komplement von V_{2^j} in $V_{2^{j+1}}$. Das orthogonale Komplement werde mit O_{2^j} bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} O_{2^j} &\perp V_{2^j}, \\ O_{2^j} \oplus V_{2^j} &= V_{2^{j+1}}. \end{aligned}$$

Um die orthogonale Projektion von $f(x)$ auf O_{2^j} berechnen zu können, benötigt man eine Orthonormalbasis von O_{2^j} . Man kann zeigen [1] daß eine Orthonormalbasis von O_{2^j} durch die Wavelet-Funktionen[†]

$$2^{-j/2} \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n), \quad n, j \in \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Sei $P_{O_{2^j}}$ die orthogonale Projektion auf den Vektorraum O_{2^j} . Man kann $P_{O_{2^j}} f(x)$ entwickeln:

$$P_{O_{2^j}} f(x) = 2^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \right\rangle \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n). \quad (95)$$

$P_{O_{2^j}} f(x)$ enthält das Detailsignal von $f(x)$ mit der Auflösung 2^j . Das innere Produkt

$$D_{2^j} f = \left\langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \right\rangle \quad (96)$$

charakterisiert das Detailsignal. $D_{2^j} f$ wird als diskretes Detailsignal mit der Auflösung 2^j bezeichnet. Es enthält den Informationsverlust zwischen $A_{2^{j+1}}^d$ und $A_{2^j}^d$. Analog zu Gleichung (85)

[†] Diese Darstellung einer orthonormalen Wavelet-Funktion steht nicht im Widerspruch zur Formel $\Psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k)$ aus Gleichung (15). Mit Hilfe von $\Psi_{2^j}(x) = 2^j \Psi(2^j x)$ berechnet man: $2^{-j/2} \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}k) = 2^{+j/2} \Psi(2^j(x - 2^{-j}k)) = 2^{j/2} \Psi(2^j x - k) = \Psi_{j,k}(x)$.

kann man zeigen, daß die inneren Produkte in (96) einer Faltung von $f(x)$ mit $\Psi_{2^j}(-x)$ ausgewertet an der Stelle $2^{-j}n$ entsprechen:

$$D_{2^j} f = \langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = (f(u) * \Psi_{2^j}(-u))(2^{-j}n). \quad (97)$$

Mit Hilfe der orthonormalen Funktionen $2^{-j/2} \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ wird das Detailsignal zwischen den Auflösungen 2^{j+1} und 2^j berechnet. Darüber hinaus sind die Vektorräume V_{2^j} und O_{2^j} orthogonal. Die Wavelet-Funktionen $\Psi(x)$ können daher als Bandpaßfilter betrachtet werden. Das ursprüngliche diskrete Signal $A_1^d f$ mit der Auflösung 1 wird durch die Menge

$$\{(A_{2^{-j}}^d f, D_{2^j} f)\}, \quad -J \leq j \leq -1 \quad (98)$$

für beliebiges $J > 0$ repräsentiert. Man bezeichnet die Darstellung (98) als orthogonale Wavelet-Repräsentation. Diese Darstellungsform wird als Zerlegung des ursprünglichen Signals mit Hilfe der orthonormalen Wavelet-Funktionen in getrennte Frequenzbänder aufgefaßt.

Für beliebiges $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \in O_{2^j} \subset V_{2^{j+1}}. \quad (99)$$

Aufgrund von (99) kann $\Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n)$ mit Hilfe der Orthonormalbasis von $V_{2^{j+1}}$ entwickelt werden:

$$\Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n) = 2^{-(j+1)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}k). \quad (100)$$

Die Substitution (87) führt auf

$$2^{-(j+1)} \langle \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle = \langle \Psi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle. \quad (101)$$

Einsetzen von (101) in (100) und Berechnung des Skalarproduktes von $f(x)$ mit beiden Seiten von (100) bringt

$$\langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \Psi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - (k - 2n)) \rangle \langle f(u), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle. \quad (102)$$

Sei G ein diskreter Filter mit der Impulsantwort

$$g(n) = \langle \Psi_{2^{-1}}(u), \Phi(u - n) \rangle \quad (103)$$

und $\tilde{G}$ der gespiegelte Filter mit der Impulsantwort $\tilde{g}(n) = g(-n)$. Mit Hilfe des Filters $\tilde{G}$ wird (101) zu

$$\langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(2n - k) \langle f(u), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \rangle. \quad (104)$$

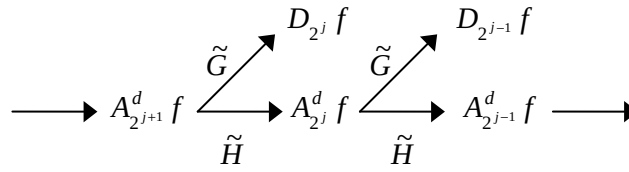
Die Ausnutzung von

$$D_{2^j} f = \left\langle f(u), \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \right\rangle \text{ und } A_{2^j}^d f = \left\langle f(u), \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}n) \right\rangle \quad (105)$$

liefert

$$D_{2^j} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(2n-k) A_{2^{j+1}}^d f. \quad (106)$$

Das Detailsignal $D_{2^j} f$ erhält man durch Faltung von $A_{2^{j+1}}^d f$ mit dem diskreten Filter $\tilde{G}$. Die orthogonale Wavelet-Repräsentation eines diskreten Signals $A_1^d f$ erfolgt durch sukzessive Zerlegung von $A_{2^{j+1}}^d f$ in $A_{2^j}^d f$ und $D_{2^j} f$. Hierbei gilt $-J \leq j \leq 1$. Siehe Figur 7.



Figur 7. Zerlegung des Signals $A_{2^j}^d f$.

Der Zusammenhang zwischen der Impulsantwort des Filters G und der Impulsantwort des Filters H ist gegeben durch [1]:

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1-n) \quad (107)$$

G ist ein Hochpaßfilter. Die Filter G und H werden in der englischsprachigen Literatur als quadrature mirror filter (QMF) bezeichnet.

Besteht das ursprüngliche Signal aus N Datenpunkten, so haben die diskreten Signale $D_{2^j} f$ und $A_{2^j}^d f$ je $2^j N$ Datenpunkte. Dabei gilt $J \leq j \leq -1$. Gibt es einen signifikanten Unterschied zwischen den Signalen $A_{2^{j+1}}^d f$ und $A_{2^j}^d f$, hat das Detailsignal $D_{2^j} f$ eine große Amplitude.

Mit Hilfe der Pyramiden-Transformation ist die Rekonstruktion des ursprünglichen Signals möglich. Da O_{2^j} das orthogonale Komplement von V_{2^j} in $V_{2^{j+1}}$ bildet ($O_{2^j} \oplus V_{2^j} = V_{2^{j+1}}$), ist die Menge

$$\left\{ 2^{-j/2} \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}n), 2^{-j/2} \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}n) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (108)$$

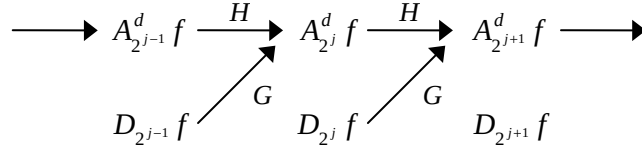
eine Orthonormalbasis von $V_{2^{j+1}}$. Für beliebiges $n > 0$ kann die Funktion $\Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}n)$ in dieser Basis entwickelt werden. Man hat

$$\begin{aligned} \Phi_{2^{j+1}}(x - 2^{-(j+1)}n) &= 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \Phi_{2^j}(u - 2^{-j}k), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \right\rangle \Phi_{2^j}(x - 2^{-j}k) \\ &\quad + 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\langle \Psi_{2^j}(u - 2^{-j}k), \Phi_{2^{j+1}}(u - 2^{-(j+1)}k) \right\rangle \Psi_{2^j}(x - 2^{-j}k). \end{aligned} \quad (109)$$

Die Berechnung des Skalarproduktes beider Seiten von (109) mit $f(x)$ führt unter Ausnutzung der Beziehungen für $A_{2^j}^d f$ (83) und $D_{2^j} f$ (96) auf

$$A_{2^{j+1}}^d f = 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-2k) A_{2^j}^d f + 2^{-j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-2k) D_{2^j} f . \quad (110)$$

Das Signal mit der Auflösung 2^{j+1} kann aus den Signalen $A_{2^j}^d f$ und $D_{2^j} f$ mit der Auflösung 2^j durch Faltung mit den Filtern H und G gewonnen werden. Figur 8 verdeutlicht dies.



Figur 8. Rekonstruktion des Signals $A_{2^j}^d f$.

Eine ausführliche Darstellung der numerisch stabilen Durchführung der orthogonalen Wavelet-Repräsentation durch Orthogonalmatrizen inklusive des notwendigen Quellcodes ist in [22] gegeben. Weitere Details liefert der Artikel von Strang [2].

3. Orthogonale Polynome in zwei kontinuierlichen Veränderlichen

Das Herzmuskelgewebe bildet den Untergrund, auf den die kontrastmittelgefüllten Gefäße als diagnostisch relevante Regionen aufgesetzt sind. Im Untergrund verändern sich die Grauwerte von Pixel zu Pixel nur langsam. In den Gefäßregionen verändern sich die Grauwerte von Pixel zu Pixel dagegen sehr rasch.

Eine Linearkombination von orthogonalen Polynomen in zwei diskreten Veränderlichen wird an die Grauwerte $z_{x,y}$ im Bild angepaßt. Dabei werden die Gewichte iterativ so verändert, daß nur noch die zum Untergrund gehörenden Pixel in die Anpassung eingehen.

Mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens ist es möglich, eine Menge von Funktionen $\varphi_0(x,y), \varphi_1(x,y), \dots, \varphi_n(x,y)$ bezüglich eines Skalarproduktes zu orthogonalisieren. Voraussetzung hierbei ist, daß die Funktionen $\varphi_i(x,y)$ paarweise linear unabhängig und quadratintegrierbar über einem Gebiet G sind. Man findet auf diese Weise eine Menge von orthogonalen Funktionen $\Phi_0(x,y), \Phi_1(x,y), \dots, \Phi_n(x,y)$, wobei $\Phi_i(x,y)$ als Linearkombination der $\varphi_0(x,y), \varphi_1(x,y), \dots, \varphi_i(x,y)$ darstellbar ist. Ist im Besonderen G endlich und $\rho(x,y)$ eine nichtnegative Funktion mit

$$\iint_G \rho(x,y) dx dy > 0, \quad (111)$$

dann führt die Anwendung des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens auf die linear unabhängigen Funktionen

$$\rho^{1/2}, \rho^{1/2}x, \rho^{1/2}y, \rho^{1/2}x^2, \rho^{1/2}xy, \rho^{1/2}y^2, \dots$$

auf Polynome $p_{n,k}(x,y), n=0,1,\dots; k=0,1,\dots,n$. Der erste Index von $p_{n,k}(x,y)$ bezeichnet den Grad des Polynoms insgesamt. Der zweite Index von $p_{n,k}(x,y)$ bezeichnet den Grad des Polynoms bezüglich der Variablen y . Die Polynome $p_{n,k}(x,y)$ erfüllen die Bedingung

$$\iint_G \rho(x,y) p_{n,k}(x,y) p_{m,l}(x,y) dx dy = c_{n,k,m,l} \delta_{n,m} \delta_{k,l}, \quad (112)$$

dabei ist $\delta_{i,j}$ das Kroneckersymbol und $c_{n,k,l,m}$ eine von $\rho(x,y)$ abhängige Normierungskonstante. Die letzte Gleichung repräsentiert das Skalarprodukt der Polynome $p_{n,k}(x,y)$ und stellt gleichzeitig die Orthogonalitätsbedingung der $p_{n,k}(x,y)$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\rho(x,y)$ dar. Die Polynome $p_{n,k}(x,y)$ sind sowohl orthogonal zu jedem Polynom mit einem Grad kleiner als n als auch orthogonal bezüglich des zweiten Index k . Eine Entwicklung der Polynome $p_{n,k}(x,y)$ nach den Monomen $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ ist durch

$$p_{n,k}(x,y) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \gamma_{m,l} x^{m-l} y^l + \sum_{l=0}^k \gamma_{n,l} x^{n-l} y^l. \quad (113)$$

gegeben. Neben dem Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren gibt es die Möglichkeit, orthogonale Polynome mit Hilfe zweier Rekursionsformeln zu konstruieren. Als Grundlage hierfür dienen die Orthogonalitätsrelation (112) und die Entwicklung von $p_{n,k}(x,y)$ nach den Monomen (113).

Konstruktion der Rekursionsformel für orthogonale Polynome in x

Für gegebenes n und k ist das Produkt $x p_{n,k}(x, y)$ ein Polynom vom Grad $n+1$ und vom Grad k in y . Da die Polynome $p_{i,j}(x, y)$ eine Basis des Vektorraums der Polynome in den Variablen x und y bezüglich des Skalarproduktes (112) darstellen, läßt sich $x p_{n,k}(x, y)$ als Linearkombination der Basispolynome schreiben:

$$x p_{n,k}(x, y) = \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{l=0}^m a_{m,l} p_{m,l}(x, y). \quad (114)$$

Durch Multiplikation beider Seiten von (114) mit $\rho(x, y) p_{m,l}(x, y)$ und Integration über G erhält man unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation (112) die Entwicklungskoeffizienten $a_{m,l}$:

$$A_{m,l,m,l} a_{m,l} = \iint_G \rho(x, y) [x p_{n,k}(x, y)] p_{m,l}(x, y) dx dy = \iint_G \rho(x, y) p_{n,k}(x, y) [x p_{m,l}(x, y)] dx dy \quad (115)$$

mit

$$A_{m,l,m,l} = \iint_G \rho(x, y) p_{m,l}^2(x, y) dx dy \quad (116)$$

Die Koeffizienten $a_{m,l}$ hängen sowohl von m und l als auch von n und k ab, auf eine ausführlichere Indizierung kann jedoch verzichtet werden. Das Polynom $x p_{m,l}(x, y)$ ist vom Grad $m+1$ und vom Grad l in y . Da $p_{n,k}(x, y)$ orthogonal zu jedem Polynom vom Grad kleiner als n ist, verschwindet $a_{m,l}$ für $m < n-1$. Die vorletzte Gleichung vereinfacht sich damit zu

$$x p_{n,k}(x, y) = \sum_{l=0}^{n-1} a_{n-1,l} p_{n-1,l}(x, y) + \sum_{l=0}^n a_{n,l} p_{n,l}(x, y) + \sum_{l=0}^{n+1} a_{n+1,l} p_{n+1,l}(x, y). \quad (117)$$

Dieses Ergebnis kann insoweit nur als vorläufig bezeichnet werden, da auf der rechten Seite von (117) k nicht auftaucht. $x p_{n,k}(x, y)$ ist jedoch ein Polynom vom Grad $n+1$ und höchstens vom Grad k in y , wie die Entwicklung nach Monomen zeigt:

$$x p_{n,k}(x, y) = x \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \gamma_{m,l} x^{m-l} y^l + \sum_{l=0}^k \gamma_{n,l} x^{n-l} y^l \right\} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \gamma_{m,l} x^{m+1-l} y^l + \sum_{l=0}^k \gamma_{n,l} x^{n+1-l} y^l. \quad (118)$$

In der Entwicklung von $x p_{n,k}(x, y)$ nach orthogonalen Polynomen in (117) müssen die Koeffizienten $a_{n+1,l}$ für $l \geq k+1$ verschwinden, da in der letzten Summe auf der rechten Seite von (118) $n-k$ Polynome vom Grad $n+1$ und mindestens vom Grad $k+1$ in y erscheinen. Gleichung (117) kann zu

$$x p_{n,k}(x, y) = \sum_{l=0}^{n-1} a_{n-1,l} p_{n-1,l}(x, y) + \sum_{l=0}^n a_{n,l} p_{n,l}(x, y) + \sum_{l=0}^k a_{n+1,l} p_{n+1,l}(x, y) \quad (119)$$

vereinfacht werden. Nach (115) lassen sich die Koeffizienten $a_{n-1,l}$ berechnen. Es ist

$$A_{n-1,l,n-1,l} a_{n-1,l} = \iint_G \rho(x, y) [x p_{n,k}(x, y)] p_{n-1,l}(x, y) dx dy = \iint_G \rho(x, y) p_{n,k}(x, y) [x p_{n-1,l}(x, y)] dx dy \quad (120)$$

mit

$$A_{n-1,l,n-1,l} = \iint_G \rho(x,y) p_{n-1,l}^2(x,y) dx dy . \quad (121)$$

Analog zu (119) hat man für $x p_{n-1,l}(x,y)$:

$$x p_{n-1,l}(x,y) = \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{n-2,j} p_{n-2,j}(x,y) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-1,j} p_{n-1,j}(x,y) + \sum_{j=0}^l \alpha_{n,j} p_{n,j}(x,y) . \quad (122)$$

Durch Einsetzen in (120) erhält man mit der Orthogonalitätsrelation (112) nach Umformungen

$$A_{n-1,l,n-1,l} a_{n-1,l} = A_{n-1,l,n-1,l} \sum_{j=0}^l \alpha_{n,j} \iint_G \rho(x,y) p_{n,k}(x,y) p_{n,j}(x,y) dx dy . \quad (123)$$

Hier verschwindet $a_{n-1,l}$ unter der Bedingung $l < k$. Insgesamt vereinfacht sich die Entwicklung von $x p_{n,k}(x,y)$ nach orthogonalen Polynomen zu

$$x p_{n,k}(x,y) = \sum_{l=k}^{n-1} a_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) + \sum_{l=0}^n a_{n,l} p_{n,l}(x,y) + \sum_{l=0}^k a_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y) . \quad (124)$$

Die letzte Gleichung ermöglicht es, rekursiv orthogonale Polynome höheren Grades in x zu berechnen. Dies geschieht durch Auflösen nach $a_{n+1,k} p_{n+1,k}(x,y)$. Man erhält:

$$a_{n+1,k} p_{n+1,k}(x,y) = x p_{n,k}(x,y) - \sum_{l=k}^{n-1} a_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) - \sum_{l=0}^n a_{n,l} p_{n,l}(x,y) - \sum_{l=0}^{k-1} a_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y) \quad (125)$$

Man beachte, daß die Zahl der Summanden in der Rekursionsformel für $n \rightarrow \infty$ beliebig groß werden kann. Dies steht im Kontrast zum eindimensionalen Fall, in dem die Rekursionsformel unabhängig vom Grad des Polynoms nur drei Terme besitzt.

Konstruktion der Rekursionsformel für orthogonale Polynome in y

Die rekursive Konstruktion orthogonaler Polynome in y verläuft analog zum oben beschriebenen Fall. Das Polynom $y p_{n,k}(x,y)$ ist vom Grad $n+1$ und vom Grad $k+1$ in y . Die Entwicklung von $y p_{n,k}(x,y)$ nach orthogonalen Polynomen lautet

$$y p_{n,k}(x,y) = \sum_{m=0}^{n+1} \sum_{l=0}^m b_{m,l} p_{m,l}(x,y) , \quad (126)$$

wobei $b_{m,l}$ durch

$$B_{m,l,m,l} b_{m,l} = \iint_G \rho(x,y) [y p_{n,k}(x,y)] p_{m,l}(x,y) dx dy = \iint_G \rho(x,y) p_{n,k}(x,y) [y p_{m,l}(x,y)] dx dy \quad (127)$$

mit

$$B_{m,l,m,l} = \iint_G \rho(x,y) p_{m,l}^2(x,y) dx dy \quad (128)$$

gegeben sind. Das Polynom $yp_{m,l}(x,y)$ ist vom Grad $m+1$ und vom Grad $l+1$ in y . Da $p_{n,k}(x,y)$ orthogonal zu jedem Polynom mit einem Grad kleiner als n ist, verschwinden die Koeffizienten $b_{m,l}$ in der Entwicklung von $yp_{n,k}(x,y)$ für $m < n-1$. Damit vereinfacht sich (127) zunächst zu

$$yp_{n,k}(x,y) = \sum_{l=0}^{n-1} b_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) + \sum_{l=0}^n b_{n,l} p_{n,l}(x,y) + \sum_{l=0}^{n+1} b_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y). \quad (129)$$

Die Konstruktion der vereinfachten Rekursionsformeln für $xp_{n,k}(x,y)$ und $yp_{n,k}(x,y)$ führt zu ähnlichen Ergebnissen für $xp_{n,k}(x,y)$ (Gleichung (117)) und $yp_{n,k}(x,y)$. (Gleichung (129)). Betrachtet man jedoch die Entwicklung von $yp_{n,k}(x,y)$ nach Monomen, dann erhält man

$$yp_{n,k}(x,y) = y \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \gamma_{m,l} x^{m-l} y^l + \sum_{l=0}^k \gamma_{n,l} x^{n-l} y^l \right\} = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{l=0}^m \gamma_{m,l} x^{m-l} y^{l+1} + \sum_{l=0}^k \gamma_{n,l} x^{n-l} y^{l+1}. \quad (130)$$

Polynome höheren Grades als $k+1$ in y können wegen (130) in der Entwicklung nach orthogonalen Polynomen nicht vorkommen. Es gilt $b_{n+1,l} = 0$ für $l \geq k+2$. Die Entwicklung bricht früher ab, und man hat

$$yp_{n,k}(x,y) = \sum_{l=0}^{n-1} b_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) + \sum_{l=0}^n b_{n,l} p_{n,l}(x,y) + \sum_{l=0}^{k+1} b_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y) \quad (140)$$

Eine Berechnung der $b_{n-1,l}$ in (140) führt auf

$$B_{n-1,l,n-1,l} b_{n-1,l} = \iint_R \rho(x,y) [yp_{n,k}(x,y)] p_{n-1,l}(x,y) dx dy = \iint_R \rho(x,y) p_{n,k}(x,y) [yp_{n-1,l}(x,y)] dx dy \quad (141)$$

mit

$$B_{n-1,l,n-1,l} = \iint_R \rho(x,y) p_{n-1,l}^2(x,y) dx dy. \quad (142)$$

Analog zu (140) hat man für $yp_{n-1,l}(x,y)$:

$$yp_{n-1,l}(x,y) = \sum_{j=0}^{n-2} \beta_{n-2,j} p_{n-2,j}(x,y) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{n-1,j} p_{n-1,j}(x,y) + \sum_{j=0}^{l+1} \beta_{n,j} p_{n,j}(x,y). \quad (143)$$

Durch Einsetzen in (141) erhält man

$$B_{n-1,l,n-1,l} b_{n-1,l} = B_{n-1,l,n-1,l} \sum_{j=0}^{l+1} \beta_{n,j} \iint_R \rho(x,y) p_{n,k}(x,y) p_{n,j}(x,y) dx dy. \quad (144)$$

Unter der Bedingung $l < k-1$ verschwinden die Koeffizienten $b_{n-1,l}$, und die Rekursionsformel lautet

$$yp_{n,k}(x,y) = \sum_{l=k-1}^{n-1} b_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) + \sum_{l=0}^n b_{n,l} p_{n,l}(x,y) + \sum_{l=0}^{k+1} b_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y). \quad (145)$$

Das nächsthöhere Polynom bestimmt man durch Auflösen von (145) nach $b_{n+1,k+1} p_{n+1,k+1}(x,y)$. Man erhält

$$b_{n+1,k+1} p_{n+1,k+1}(x,y) = yp_{n,k}(x,y) - \sum_{l=k-1}^{n-1} b_{n-1,l} p_{n-1,l}(x,y) - \sum_{l=0}^n b_{n,l} p_{n,l}(x,y) - \sum_{l=0}^k b_{n+1,l} p_{n+1,l}(x,y). \quad (146)$$

Auch hier wird die Zahl der Summanden in der Rekursionsformel für $n \rightarrow \infty$ beliebig groß. Als Rekursionsverankerung für die Rekursionsformeln in den Variablen x und y definiert man

$$\begin{aligned} p_{-1,-1}(x,y) &= p_{-1,0}(x,y) = p_{0,-1}(x,y) = 0, \\ p_{0,0}(x,y) &= 1, \text{ sowie } p_{n,-1}(x,y) = 0 \text{ für } n \geq 1. \end{aligned} \quad (147)$$

Rekursionsformeln für orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen

Die Ergebnisse für die Rekursionsformeln in zwei kontinuierlichen Veränderlichen lassen sich auf diskrete Variablen x und y übertragen. Man muß dabei jedoch beachten, daß die Gewichtsfunktion $\rho(x,y)$ nicht länger kontinuierlich ist. Die Grauwerte eines digitalen Bildes sind nur an diskreten und äquidistanten Punkten (x,y) definiert. Es interessieren daher nur die Werte von $\rho(x,y)$ an den Pixelkoordinaten (x,y) . In Gleichung (148) dient der zweidimensionale Delta-Kamm zur Diskretisierung der Funktion $\rho(x,y)$ an den diskreten Koordinaten (x,y) . Man hat

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} w(x,y) \delta(x-i) \delta(y-j). \quad (148)$$

Durch Einsetzen in die Orthogonalitätsbeziehung (112) für zwei kontinuierliche Variable erhält man die Orthogonalitätsrelation für die diskreten Veränderlichen:

$$\sum_{i=1}^{i_{\max}} \sum_{j=1}^{j_{\max}} w(i,j) p_{n,k}(i,j) p_{m,l}(i,j) = \tilde{c}_{n,k,m,l} \delta_{n,m} \delta_{k,l}. \quad (149)$$

Da die Bezeichnung der Variablen keine Rolle spielt, geht man zu den bisher benutzten Variablen über, nämlich $i \rightarrow x$, $j \rightarrow y$, sowie $i_{\max} \rightarrow x_{\max}$ und $j_{\max} \rightarrow y_{\max}$. Da die Variablen i und j diskret sind, sind auch die Veränderlichen x und y für die weiteren Betrachtungen diskret. Der Übergang zu den diskreten Variablen x und y verändert die Rekursionsformeln (125) und (146) nicht. Lediglich die Grundlage zur Berechnung der Koeffizienten in den Rekursionsformeln wird modifiziert. Für die Rekursionsformel in x hat man

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \frac{1}{A_{\alpha}} \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x,y) \cdot x \cdot p_{n,k}(x,y) p_{i,j}(x,y), \\ A_{\alpha} &= \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x,y) p_{i,j}^2(x,y). \end{aligned} \quad (150)$$

Die Koeffizienten in der Rekursionsformel in y werden durch

$$b_{i,j} = \frac{1}{B_\beta} \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x,y) \cdot y \cdot p_{n,k}(x,y) p_{i,j}(x,y),$$

$$B_\beta = \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x,y) p_{i,j}^2(x,y).$$
(151)

berechnet. Das nachstehende Schema verdeutlicht, wie ausgehend von der Rekursionsverankerung sukzessiv orthogonale Polynome höheren Grades berechnet werden können.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & p_{0,0} \\
 & & & & & \downarrow \\
 & & & & & p_{1,0} \quad p_{1,1} \\
 & & & & & \downarrow \\
 n & & & & & p_{2,0} \quad p_{2,1} \quad p_{2,2} \\
 & & & & & \downarrow \\
 & & & & & p_{3,0} \quad p_{3,1} \quad p_{3,2} \quad p_{3,3} \\
 & & & & & \downarrow \\
 & & & & & p_{4,0} \quad p_{4,1} \quad p_{4,2} \quad p_{4,3} \quad p_{4,4} \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & \longrightarrow \\
 & & & & & k
 \end{array}$$

Prinzipiell ist es möglich, von jedem Polynom in diesem Schema aus höhergradige Polynome sowohl in x als auch in y zu berechnen. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, bei der Berechnung der orthogonalen Polynome folgendermaßen vorzugehen:

$$p_{0,0} \xrightarrow{(125)} p_{1,0} \xrightarrow{(146)} p_{1,1} \xrightarrow{(125)} p_{2,0} \xrightarrow{(146)} p_{2,1} \xrightarrow{(146)} p_{2,2} \xrightarrow{(125)} p_{3,0} \dots$$

Die über den Pfeilen stehenden Ziffern repräsentieren die zur Berechnung höhergradiger Polynome verwendeten Rekursionsformeln.

Theorie

Sei $\{z_{x,y} | x = 1, 2, \dots, x_{\max}, y = 1, 2, \dots, y_{\max}\}$ eine Menge von Punkten über der x - y -Ebene, welche durch eine Linearkombination von orthogonalen Polynomen in zwei diskreten Veränderlichen approximiert werden soll. Hierzu verwendet man die Methode der kleinsten Quadrate. Man setzt

$$z_{x,y} \approx z(x,y) = \sum_{n=0}^{n_{\deg}} \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_{n,k}(x,y),$$
(152)

wobei $p_{n,k}(x,y)$ ein Polynom vom Grad n und vom Grad k in y ist. Der maximale Grad des Polynoms ist $n_{\deg}$. Die Koeffizienten $c_{n,k}$ werden so bestimmt, daß

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x,y) (z_{x,y} - z(x,y))^2$$
(153)

minimiert wird. Die Wahl der Art der Polynome $p_{n,k}(x,y)$ unterliegt keinerlei Einschränkungen. Die Minimierung von χ^2 führt auf $(n+1)(n+2)/2$ Normalgleichungen für die $(n+1)(n+2)/2$ Unbekannten $c_{n,k}$. Für die Praxis erweisen sich orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen für die Berechnung der $c_{n,k}$ als hilfreich. Man hat

$$\chi^2 = \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) \left(z_{x,y} - \sum_{n=0}^{n_{\deg}} \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_{n,k}(x, y) \right)^2 \quad (154)$$

Partielle Differentiation von χ^2 nach $c_{n,k}$ bringt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial c_{n,k}} &= 2 \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) \left(z_{x,y} - \sum_{n=0}^{n_{\deg}} \sum_{k=0}^n c_{n,k} p_{n,k}(x, y) \right) \cdot (-1) \cdot p_{n,k}(x, y) \\ &= (-2) \cdot \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) z_{x,y} p_{n,k}(x, y) + 2 \cdot \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) c_{n,k} p_{n,k}^2(x, y) \end{aligned} \quad (155)$$

Durch Nullsetzen von (155) erhält man nach Umformungen

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= \frac{1}{n_{\gamma}} \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) z_{x,y} p_{n,k}(x, y), \\ n_{\gamma} &= \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} w(x, y) p_{n,k}^2(x, y). \end{aligned} \quad (156)$$

Die Varianz der $c_{n,k}$ ist gegeben durch [18]

$$\frac{1}{\sigma_{c_{n,k}}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_{n,k}^2} \right). \quad (157)$$

Eine erneute partielle Ableitung von (155) nach $c_{n,k}$ liefert

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial c_{n,k}^2} = 2n_{\gamma}. \quad (158)$$

Schließlich erhält man die Standardabweichung der Koeffizienten $c_{n,k}$

$$\sigma_{c_{n,k}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\gamma}}}. \quad (159)$$

Die Verwendung orthogonaler Polynome bietet folgende Vorteile:

- Nimmt man an, daß die $z_{x,y}$ unabhängig voneinander sind, werden die Matrizen zur Bestimmung der Normalengleichungen diagonal.
- Durch Hinzufügen eines weiteren Polynoms $c_{n,k} p_{n,k}(x, y)$ werden die aus der χ^2 -Minimierung gewonnenen Koeffizienten aufgrund der Orthogonalitätsrelation nicht verändert. Unter der Verwendung nicht-orthogonaler Polynome müssen alle Koeffizienten neu berechnet werden.

Algorithmus

Wie in der Einleitung dieses Abschnitts angedeutet, läßt sich ein Koronarangiogramm in diagnostisch relevante und unrelevante Strukturen teilen. Man nimmt an, daß jeder gemessene Grauwert als Summe zweier Terme dargestellt werden kann: $z_{x,y} = v_{x,y} + b_{x,y}$. Hierbei liefert $v_{x,y}$ den Beitrag der

kontrastmittelgefüllten Gefäße und $b_{x,y}$ den Beitrag des Herzmuskelgewebes an der Pixelkoordinate (x,y) . Bezeichnet man mit Ω_b die Punktmenge der gemessenen Grauwerte, die zum Herzmuskelgewebe gehören, hat man $v_{x,y} \ll b_{x,y}$ für $(x,y) \in \Omega_b$. Strenggenommen gilt hier sogar $v_{x,y} = 0$, da in dem die Gefäße umgebenden Gewebe kein Kontrastmittel vorhanden ist. Es gibt jedoch auch in den Bildbereichen in denen kein Kontrastmittel vorhanden ist Grauwertschwankungen. Diese sind jedoch klein im Vergleich zu den Grauwertschwankungen in den Gefäßregionen. Wenn die Punkte aus Ω_b von vornherein bekannt sind, ist eine Anpassung an alle gemessenen Punkte $z_{x,y}$ mit $(x,y) \in \Omega_b$ sofort durchführbar. Dies geschieht, indem die Gewichte all derjenigen Punkte, welche nicht zu Ω_b gehören, zu Null gesetzt werden: $w(x,y) = 0$ für $(x,y) \notin \Omega_b$. Im allgemeinen ist die Punktmenge Ω_b von vornherein nicht bekannt. Die Punkte, die zu Ω_b gehören, können in einem iterativen Verfahren ermittelt werden. Sei $z(x,y)$ eine Approximation einer Linearkombination von orthogonalen Polynomen an die gemessenen Grauwerte $z_{x,y}$. Der Grad der Linearkombination von orthogonalen Polynomen sei n_{deg} . Für die Punkte $(x,y) \in \Omega_b$ gilt $z_{x,y} \approx z(x,y)$. Für die Punkte $(x,y) \notin \Omega_b$ hat man dagegen $z_{x,y} \gg z(x,y)$. Eine bessere Annäherung an die Punkte $(x,y) \in \Omega_b$ erhält man mit einer erneuten Approximation. Hierbei wählt man jedoch $w(x,y) = 0$ für diejenigen Punkte, für die $z_{x,y} > z(x,y)$ gilt. Das Gewichtsschema lautet:

$$w(x,y) = \frac{1}{(s(x,y))^2} \quad \text{für } z_{x,y} < z(x,y) + r \cdot s(x,y), \quad (160)$$

$$w(x,y) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Hierbei bezeichnet $s(x,y)$ die Standardabweichung des berechneten Grauwertes $z(x,y)$. r ist eine Konstante. Üblicherweise wählt man $r = 2$ oder $r = 3$; Folgt $s(x,y)$ einer Normalverteilung, dann tritt $|z_{x,y} - z(x,y)| < 3s(x,y)$ in 97,7% der Fälle ein. χ^2 läßt sich mit der Einführung von Ω_b als Menge aller Punkte, die zum Herzmuskelgewebe gehören und dem Gewichtsschema schreiben als

$$\chi^2 = \sum_{(x,y) \in \Omega_b} w(x,y)(z_{x,y} - z(x,y))^2 + \sum_{(x,y) \notin \Omega_b} w(x,y)(z_{x,y} - z(x,y))^2. \quad (161)$$

Unter der Wahl von $w(x,y) = 0$ für $(x,y) \notin \Omega_b$ verschwindet die letzte Summe auf der rechten Seite von (161). Mit der neuen Funktion $w(x,y)$ kann die Approximation wiederholt werden. Das Verfahren konvergiert, wenn sich der Wert für χ^2 zwischen zwei aufeinanderfolgenden Iterationen nicht oder nur unwesentlich ändert. Das Konvergenzverhalten der Approximation wird im folgenden durch einen reduzierten χ^2 -Wert beschrieben. Man hat

$$\chi_{\text{red}}^2 = \frac{1}{F} \chi^2. \quad (162)$$

F ist die Zahl der Freiheitsgrade. Es gilt

$$F = n_{\Omega_b} - \frac{(n_{\text{deg}} + 1)(n_{\text{deg}} + 2)}{2}, \quad (163)$$

wobei n_{Ω_b} die Zahl der Datenpunkte in Ω_b ist. Der Grad des Polynoms n_{deg} kann a priori nicht bestimmt werden. Hierfür hat sich das folgende Schema als brauchbar erwiesen: Trägt man die Größe

$$E = \sum_{(x,y) \notin \Omega_b} (z_{x,y} - z(x,y))^2 \quad (164)$$

als Funktion von n_{deg} auf, so kann man für zwei aufeinanderfolgende Werte von n_{deg} nur eine geringe Änderung von E feststellen. Man wählt den größeren der beiden Werte für n_{deg} als „besten“ Grad des Polynoms. Die Routinen zur Bestimmung des diagnostisch unbedeutenden Untergrundes sind in Anhang A gegeben.

Alternativen

Das im vorangegangenen Abschnitt dargestellte Verfahren ist sehr rechenaufwendig und belegt viel Hauptspeicher eines Rechners. Diese Kriterien lassen das Verfahren für den Anwender nicht attraktiv erscheinen. Ein schnelleres Verfahren besteht in der wiederholten Anwendung des moving-average-Filters: die Grauwerte eines Bildes werden durch Verschiebung des Filters geglättet. Die Vorschrift zur Glättung lautet:

$$\tilde{z}_{x,y} = \frac{1}{4}(z_{x-w,y} + z_{x,y-w} + z_{x+w,y} + z_{x,y+w}), \quad w = 1, 2, \dots \quad (165)$$

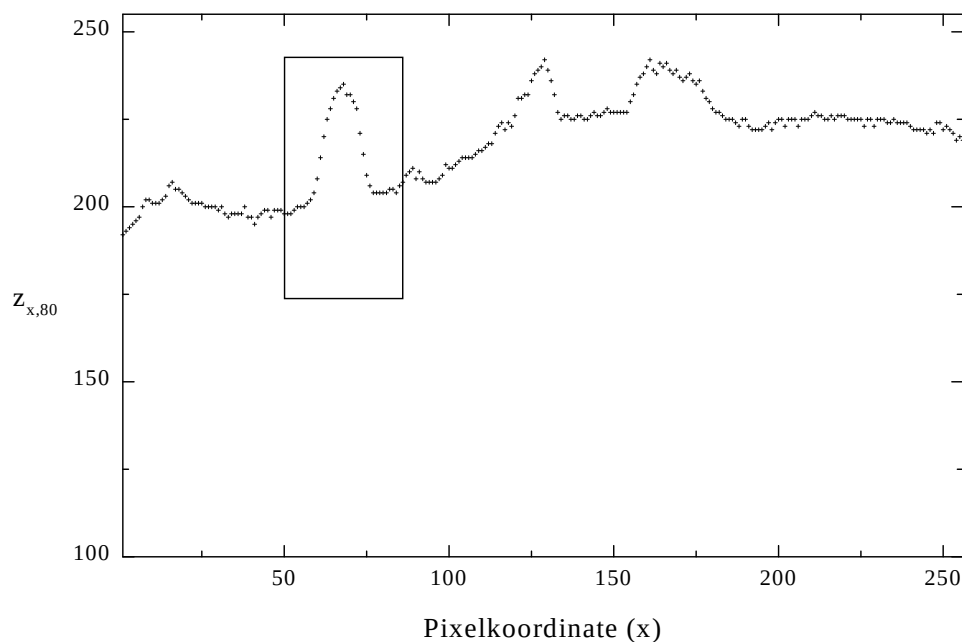
Wählt man den Parameter w hoch (z.B. $w = 4$), werden die Grauwerte stark gemittelt. Bilddetails werden dadurch verschmiert. Dies ist ein erwünschter Effekt. Durch den Übergang $\tilde{z}_{x,y} \rightarrow z_{x,y}$ kann der Filter auf die bereits geglätteten Grauwerte angewandt werden. Dies resultiert in einer weiteren Verschmierung usw. Durch n -malige Anwendung des Filters werden Strukturen ausgewaschen, die sich im Original durch abrupte Grauwertänderungen auszeichnen. Das resultierende Bild besteht nur noch aus langsam veränderlichen Strukturen. Diese entsprechen dem Herzmuskelgewebe. Durch Subtraktion dieser Strukturen vom Original erhält man diejenigen Regionen des Bildes, welche die starken Grauwertänderungen enthalten. Dies sind die Gefäße.

Bei der Anwendung des Verfahrens muß man beachten, daß breite Strukturen nur sehr langsam und unvollständig von dem Glättungsfilter geglättet werden. Es ist fraglich, ob eine vollständige Glättung dieser Strukturen überhaupt erreicht werden kann. Darüber hinaus verbindet der Algorithmus lokale Minima der Grauwerte. Eine binäre Maske, die bei der Anpassung an diagnostisch unbedeutende Strukturen mit orthogonalen Polynomen automatisch anfällt, wird hier nicht berechnet. Diese ist interaktiv mit Hilfe von Schwellwerten zu erzeugen. Ein Unterprogramm zur sukzessiven Glättung mit dem moving-average-Filter ist in Anhang A gegeben.

4. Erkennung der Kantenregionen

Ein wichtiger Punkt in der digitalen Bildverarbeitung ist die Erkennung von Kanten. Objekte oder Bildregionen können anhand ihrer Umrisse identifiziert werden, da das menschliche Auge besonders empfindlich auf abrupte Grauwertänderungen reagiert.

Eine Kante ist eine Grenze zwischen zwei Regionen mit bestimmten Grauwerteigenschaften. Dabei geht man davon aus, daß diese Regionen weitgehend homogen sind, so daß der Übergang zwischen diesen beiden Regionen allein auf der Basis der Grauwertschwankungen berechnet werden kann. Die meisten Methoden zur Kantenerkennung basieren auf einer Berechnung des Gradienten zwischen benachbarten Grauwerten eines Bildes. Je größer der Betrag des Gradienten ist, desto auffälliger ist die Kante.



Figur 9. Profilschnitt durch das Koronarangiogramm von Seite 7. Das Bild hat 256×256 Pixel. Dargestellt ist Bildzeile 80. Das kontrastmittelgefüllte Gefäß ist durch einen Rahmen markiert.

Es gibt eine Reihe von Methoden zur Kantenerkennung, welche auf der rechnerischen Verknüpfung sogenannter Masken mit den Grauwerten des Originalbildes beruhen. Eine Maske ist ein zweidimensionales (z.B. 3×3) Feld, dessen Feldinhalte für das Verfahren der Kantenerkennung charakteristisch sind. Um ein kantenbetontes Bild zu berechnen wird die Maske über das Originalbild gelegt. Dabei wird die Maske so positioniert, daß ihr Zentrum und eine beliebige Pixelkoordinate $(x, y) = (x_0, y_0)$ des Originalbildes zusammenfallen. Anschließend werden die Grauwerte des Originalbildes, welche von der Maske überdeckt werden, mit den Einträgen der Maske gewichtet und addiert. Das Ergebnis bezeichnet den Grauwert des kantenbetonten Bildes an der Pixelkoordinate (x_0, y_0) . Durch Verschieben der Maske um jeweils ein Pixel und Wiederholung der Prozedur berechnet man das kantenbetonte Bild. Das Verfahren zur Erkennung der Kantenregionen ist beendet, wenn alle Pixel des Originalbildes vom Zentrum der verschiebbaren Maske erfaßt wurden.

Der Gradient eines Bildes an einer Pixelkoordinate (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_{x,y}}{\partial x} \\ \frac{\partial z_{x,y}}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix}. \quad (166)$$

Dieser Vektor zeigt in Richtung des stärksten Anstieges von $z_{x,y}$ an der Stelle (x_0, y_0) . Der Betrag dieses Vektors ist

$$\sqrt{(G_x^2 + G_y^2)}.$$

Es gibt digitale Masken, welche näherungsweise den Gradienten des Bildes für zwei zueinander orthogonale Bildrichtungen berechnen. Der Vorteil solcher Masken liegt auch darin, daß sie das im Bild vorhandene Rauschen teilweise glätten. Sobel [14], [15] schlug die nachstehenden Masken zur Berechnung des Gradienten in x - und y -Richtung vor:

$$S_x = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (167)$$

Innerhalb der Maske werden die Grauwerte des Originalbildes gemäß dem Schema

$$\begin{bmatrix} z_{-1,1} & z_{0,1} & z_{1,1} \\ z_{-1,0} & z_{0,0} & z_{1,0} \\ z_{-1,-1} & z_{0,-1} & z_{1,-1} \end{bmatrix}$$

neu indiziert. Die Gradienten des Bildes in x - und y -Richtung werden mit Hilfe der Einträge in S_x und S_y berechnet. Man hat

$$\begin{aligned} G_x &= (S_{x;-1,-1}z_{-1,-1} + S_{x;0,-1}z_{0,-1} + S_{x;1,-1}z_{1,-1}) + (S_{x;-1,1}z_{-1,1} + S_{x;0,1}z_{0,1} + S_{x;1,1}z_{1,1}) \\ &= (z_{-1,-1} + 2z_{0,-1} + z_{1,-1}) - (z_{-1,1} + 2z_{0,1} + z_{1,1}) \end{aligned} \quad (168)$$

und

$$\begin{aligned} G_y &= (S_{y;1,1}z_{1,1} + S_{y;1,0}z_{1,0} + S_{y;1,-1}z_{1,-1}) + (S_{y;-1,1}z_{-1,1} + S_{y;-1,0}z_{-1,0} + S_{y;-1,-1}z_{-1,-1}) \\ &= (z_{1,1} + 2z_{1,0} + z_{1,-1}) - (z_{-1,1} + 2z_{-1,0} + z_{-1,-1}). \end{aligned} \quad (169)$$

S_x eignet sich zum Auffinden von horizontal verlaufenden Kanten. S_y hebt vertikal verlaufende Kanten hervor. Die Berechnung von

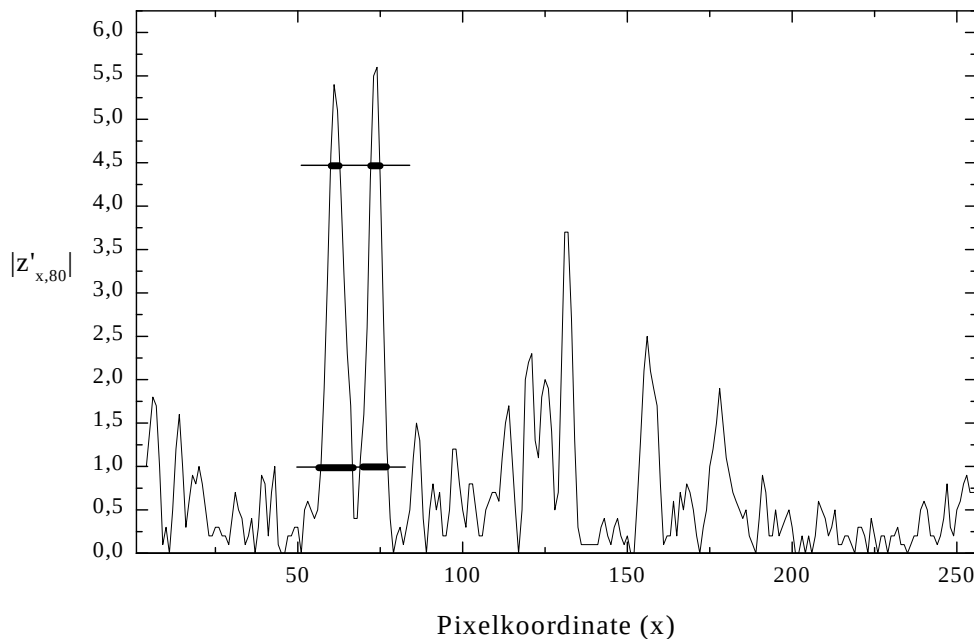
$$G_{x,y} = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} \quad (170)$$

liefert einen Grauwert, der den Betrag des Gradienten im Zentrum der Maske repräsentiert. Dieser Grauwert verkörpert ebenfalls den Grauwert im kantenbetonten Bild an der Stelle (x_0, y_0) . Um den nächsten Grauwert im kantenbetonten Bild zu erhalten, wird, wie bereits angedeutet, die Maske um ein Pixel verschoben und die Prozedur wiederholt.

Das kantenbetonte Bild an sich liefert jedoch noch keine Information darüber, ob eine Kante für den Betrachter und/oder die Diagnose relevant ist oder nicht. Erst mit Hilfe eines subjektiv gewählten Schwellwertes t ist der Betrachter in der Lage, zu entscheiden, an welcher Stelle der Grauwert im kantenbetonten Bild groß genug ist, um zu einer diagnostisch bedeutenden Kantenregion zu gehören. Mit Hilfe der nachstehenden Entscheidungsregel erhält man ein binäres Bild:

$$b_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } G_{x,y} \geq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (171)$$

Oberhalb der Schwelle t gehören alle Punkte des kantenbetonten Bildes $G_{x,y}$ zu den eigentlichen Kantenregionen, unterhalb der Schwelle liegen keine für die Diagnose relevanten Kanten vor. An dieser Stelle wird deutlich, daß mit Hilfe der vom Betrachter subjektiv zu wählenden Schwelle Kantenregionen aus dem Original gefiltert werden. Die Kantenregionen haben eine vom Schwellwert abhängige Breite. Je höher der Schwellwert angesetzt wird, um so schmäler werden die Kantenregionen, da immer weniger Grauwerte des kantenbetonten Bildes die Bedingung $G_{x,y} \geq t$ erfüllen.



Figur 10. Darstellung des Betrages der ersten Ableitung der Grauwerte aus Zeile 80 (eindimensional) aus Figur 9. Durch die Wahl des Schwellwertes wird die Breite der Kantenregionen breiter oder schmäler. Dies ist durch die fetten horizontalen Linien für die Schwellwerte 1,0 und 4,5 angedeutet. Der Verlauf einer scharfen Kante innerhalb der Kantenregionen kann mit diesem Verfahren nicht bestimmt werden

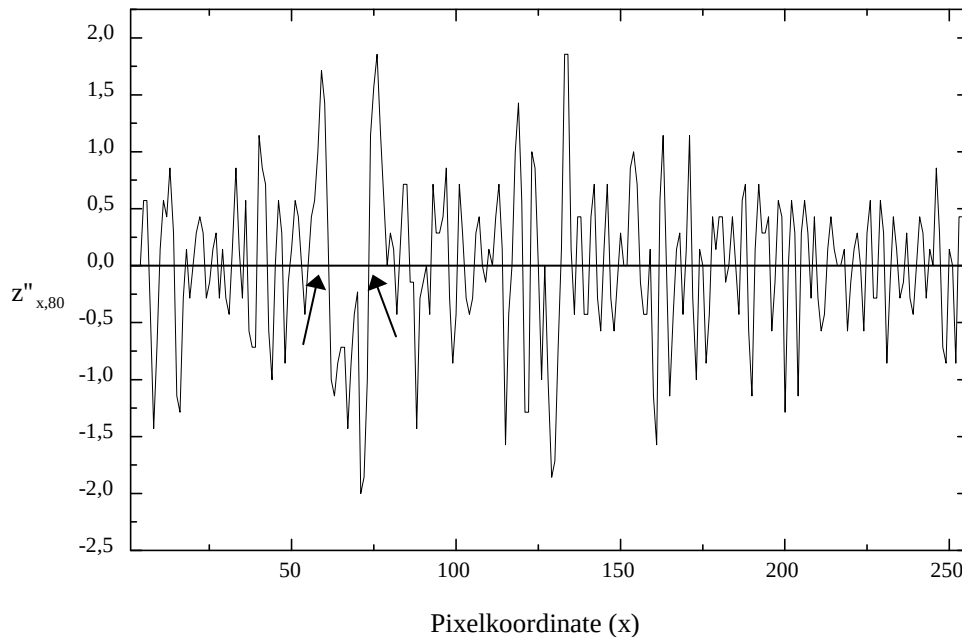
Setzt man den Schwellwert niedriger, werden aus dem Originalbild breitere Kantenregionen gefiltert, da viele Pixel im kantenbetonten Bild die Bedingung $G_{x,y} \geq t$ erfüllen. Hier sind nur unklare Aussagen darüber möglich, wo innerhalb dieser breiten Region die eigentliche Kante verläuft. Dieses Manko wurde in [14] diskutiert. Die Suche nach Kantenregionen verläuft erfolgreich, wenn die im Bild vorhandenen Grauwertschwankungen groß sind. Die vorgestellte Methode ist (begrenzt) unempfindlich bezüglich des Bildrauschens und einfach im Programmieraufwand.

Es stellt sich die Frage nach der Lokalisation einer definierten Kante innerhalb der mehr oder weniger breiten Kantenregion. Diese Kante beschreibt den eigentlichen Rand der Region (hier: des Gefäßes).

Zur Lokalisation dieser Kanten wendet man in der digitalen Bildverarbeitung häufig den Laplaceoperator auf die Grauwerte $z(x,y)$ des Bildes an. Man hat an der Pixelkoordinate $(x,y) = (x_0,y_0)$

$$(\Delta z_{x,y})_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial^2 z_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_{x,y}}{\partial y^2} \right)_{(x_0,y_0)} . \quad (172)$$

Das eindimensionale Analogon ist in Figur 11 dargestellt



Figur 11. Darstellung der zweiten Ableitung der Grauwerte in Bildzeile 80 (eindimensional) aus Figur 9. Die Nullstellen bezeichnen die Lage der scharfen Kanten. Die Pfeile markieren die scharfen Kanten innerhalb einer Kantenregion.

Die Stärke dieser Methode liegt darin, daß die Nullstellen von (172) genau den Pixelkoordinaten der definierten Kanten entsprechen, welche innerhalb der zuvor berechneten Kantenregionen (hier: der Gefäßregionen) liegen. Definierte Kanten werden auch in stärker verrauschten Bildern sicher gefunden. Die Fähigkeit, definierte Kanten zu erkennen, ist unabhängig vom Betrag des Gradienten. Diese Eigenschaften werden von einem vergleichsweise hohen Programmieraufwand begleitet [15].

Berechnung des Verlaufs definierter Kanten

Aufgrund der statistischen Abweichungen der Grauwerte von ihren "wahren" Werten an den Pixelkoordinaten (x,y) können künstliche Maxima in den Kantenregionen auftauchen. Die Beseitigung oder Unterdrückung dieser Fluktuationen ist ein nützliches Hilfsmittel zur Glättung verrauschter Bilder und liefert die Grundlage zur Extraktion definierter Kanten. Durch eine Glättung wird die Bildqualität qualitativ verbessert, da das Bildrauschen gemildert wird. Eine bedenkenlose Glättung führt jedoch zur Verschmierung von Bildstrukturen, da die Grauwerte von Nachbarpixeln in die Berechnung des geglätteten Grauwertes an der Pixelkoordinate (x,y) eingehen. Besonders betroffen sind hiervon Kollaterale und Stents.

Eine Methode, statistische Fluktuationen zu unterdrücken, besteht darin, eine zweidimensionale Fläche an die Grauwerte des Originalbildes anzupassen. Man geht davon aus, daß die Grauwerte in einem

hinreichend kleinen Teilbereich des Originalbildes durch ein Polynom vom Grad N angenähert werden können. Das Polynom hat die Form

$$z(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n b_{Nnk} x^{n-k} y^k. \quad (173)$$

Man wählt eine Pixelkoordinate $(x, y) = (x_0, y_0)$ des Originalbildes als zentralen Punkt eines quadratischen Fensters der Kantenlänge $2m + 1$ mit $m \in N$. Die Grauwerte $z_{x,y}$ Originalbildes, die von dem Fenster umschlossen werden, werden gemäß

$$\begin{aligned} x &= -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m \\ y &= -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, m-1, m \end{aligned} \quad (174)$$

neu indiziert. Die Indizierung der Grauwerte innerhalb des Fensters ist fest. Der Grauwert $z_{-m,-m}$ repräsentiert die linke untere, der Grauwert $z_{m,m}$ die rechte obere Ecke des Fensters. Der Grauwert $z_{0,0}$ liegt im Zentrum des Fensters. Innerhalb dieses Fensters wird die Annäherung an die Grauwerte mit Hilfe der zweidimensionalen Funktion (173) durchgeführt. Für die Anpassungsprozedur spielen die Fehler der Grauwerte in dem Subbild keine Rolle. Jeder Grauwert wird mit demselben Faktor gewichtet. Aus der Bestimmung der Koeffizienten b_{Nnk} erhält man den geglätteten Wert an der Pixelkoordinate $(0,0)$ (im Zentrum des Fensters) durch

$$z(0,0) = b_{N00}. \quad (175)$$

Die zweite partielle Ableitung nach x an der Stelle $(0,0)$ ist gegeben durch

$$\left. \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} \right|_{(0,0)} = 2b_{N20}. \quad (176)$$

Analog dazu hat man die partielle Ableitung nach y an der Stelle $(0,0)$

$$\left. \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} \right|_{(0,0)} = 2b_{N22}. \quad (177)$$

In Bezug auf die Anwendung des Laplaceoperators auf die Grauwerte $z_{x,y}$ erhält man

$$\Delta z_{0,0} \approx \Delta z(0,0) = 2(b_{N20} + b_{N22}). \quad (178)$$

Die Koeffizienten b_{Nnk} werden durch eine Minimierung von

$$E^2 = \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m (z_{x,y} - z(x, y))^2 \quad (179)$$

berechnet. Eine partielle Differentiation von (179) nach den Koeffizienten b_{Nij} bringt

$$\frac{\partial E^2}{\partial b_{Nij}} = (-2) \cdot \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m \left(z_{x,y} - \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n b_{Nnk} x^{n-k} y^k \right) \cdot x^{i-j} y^j. \quad (180)$$

Nullsetzen von (180) führt nach Umformungen auf

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \left(b_{Nnk} \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m x^{n-k+i-j} y^{k+j} \right) = \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m z_{x,y} x^{i-j} y^j . \quad (181)$$

Der Term

$$\sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m x^{n-k+i-j} y^{k+j} \quad (182)$$

in (181) ist nur dann von Null verschieden, wenn $(n - k + i - j)$ und $(k + j)$ gerade sind. Anhand von Beispielen soll das beschriebene Verfahren erläutert werden.

Beispiel 1: Wählt man $N = 1$ (m beliebig), ist das Polynom, welches an die Grauwerte innerhalb des Fensters angepaßt wird, gegeben durch

$$z(x, y) = b_{100} + b_{110}x + b_{111}y . \quad (183)$$

Setzt man $i = j = 0$, erhält man mit Hilfe von (181) eine Gleichung zur Bestimmung von b_{100} :

$$b_{100} \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m 1 + b_{110} \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m x + b_{111} \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m y = \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m z_{x,y} \quad (184)$$

Aufgrund der Argumentation zu (182) hat man

$$\sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m x = \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m y = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} . \quad (185)$$

Ferner ist

$$\sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m 1 = (2m + 1)^2 , \quad (186)$$

also gerade die Zahl der Pixel innerhalb des Fensters. Die Lösung für b_{100} ist damit gegeben durch

$$b_{100} = \frac{1}{(2m + 1)^2} \sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m z_{x,y} . \quad (187)$$

Dieses Ergebnis ist hinsichtlich der Glättung identisch mit dem moving-average-Verfahren. Eine Bestimmung der zweiten Ableitung im Zentrum des Fensters ist nicht möglich, da $z(x, y)$ linear in x und y ist.

Beispiel 2: Wählt man $N = 2$ und $m = 2$, führt die Ausnutzung von (181) und die Argumentation zu (182) auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
25b_{200} + 50b_{220} + 50b_{222} &= \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} \\
50b_{200} + 170b_{220} + 100b_{222} &= \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} x^2 \\
50b_{200} + 100b_{220} + 170b_{222} &= \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} y^2.
\end{aligned} \tag{188}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
b_{200} &= \frac{1}{25} \left(\sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} - 50(b_{220} + b_{222}) \right) \\
b_{220} &= \frac{1}{70} \left(-2 \cdot \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} + \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} x^2 \right) \\
b_{222} &= \frac{1}{70} \left(-2 \cdot \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} + \sum_{x=-2}^2 \sum_{y=-2}^2 z_{x,y} y^2 \right)
\end{aligned} \tag{189}$$

Hier reduziert sich aufgrund des Verschwindens von

$$\sum_{x=-m}^m \sum_{y=-m}^m x^{n-k+i-j} y^{k+j}$$

in (188) für ungerades $(n - k + i - j)$ oder $(k + j)$ die Zahl der Gleichungen zur Bestimmung von b_{200} , b_{220} und b_{222} .

Beispiel 3: Wähle $N = 3$ und $m = 3$. Durch Ausnutzung von (181) und der Argumentation zu (182) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
49b_{300} + 196b_{320} + 196b_{322} &= \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} \\
196b_{300} + 1372b_{320} + 784b_{322} &= \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} x^2 \\
196b_{300} + 784b_{320} + 1372b_{322} &= \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} y^2
\end{aligned} \tag{190}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}
b_{300} &= \frac{1}{49} \left(\sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} - 196(b_{320} + b_{322}) \right), \\
b_{320} &= \frac{1}{588} \left(-4 \cdot \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} + \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} x^2 \right), \\
b_{320} &= \frac{1}{588} \left(-4 \cdot \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} + \sum_{x=-3}^3 \sum_{y=-3}^3 z_{x,y} y^2 \right).
\end{aligned} \tag{191}$$

Wie in Beispiel 2 reduziert sich hier die Zahl der Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten b_{300} , b_{320} und b_{322} . Bemerkenswert ist, daß sich die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten b_{200} , b_{220} und b_{222} sowie b_{300} , b_{320} und b_{322} nicht unterscheiden. Hier taucht lediglich die Fensterbreite m als Parameter auf.

Für Polynome mit Grad $N=4$ und $N=5$ erhöht sich die Zahl der Unbekannten mit den zugehörigen Gleichungen auf sechs. Für $N=6$ und $N=7$ hat man zehn Gleichungen mit zehn Unbekannten, usw. Man muß beachten, daß die Zahl der anzupassenden Parameter in (173) die Zahl der Datenpunkte oder Pixel innerhalb des Fensters nicht überschreitet. Es muß gelten:

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2} < (2m+1)^2. \quad (192)$$

Das beschriebene Verfahren ermöglicht es, für $N=2$ und $N=3$ auf einfache Weise simultan statistische Schwankungen der Grauwerte im Originalbild zu glätten und die partiellen zweiten Ableitungen an den Pixelkoordinaten (x,y) zu berechnen. Für höhergradige Polynome ist der rechnerische Aufwand größer.

Um die Lage der definierten Kanten innerhalb einer breiten Kantenregion zu bestimmen, reicht die Kenntnis der Funktionswerte der Größe

$$(\Delta z_{x,y}) = \left(\frac{\partial^2 z_{x,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_{x,y}}{\partial y^2} \right) \quad (193)$$

ausgewertet an den Pixelkoordinaten (x,y) des Originalbildes nicht aus. Von Bedeutung sind die Nullstellen von (193). Die Nullstellen von (193) liegen im Subpixelbereich, d.h. zwischen den Pixelkoordinaten. Mit Hilfe der Bilinearform

$$g(u,v) = a + bu + cv + duv \quad (194)$$

läßt sich eine Ebene über einem quadratischen Gebiet konstruieren, dessen Eckpunkte die Pixelkoordinaten sind, siehe Figur 12. Die Schnittpunkte der Ebene mit der xy -Ebene sind die Nullstellen von (194). Die Parameter a, b, c und d in (194) können mit Hilfe der Grauwerte an den vier Eckpunkten exakt bestimmt werden. Man hat

$$\begin{aligned} u=0, v=0 &\Rightarrow a = z(x_0, y_0) \\ u=1, v=0 &\Rightarrow b = z(x_0 + 1, y_0) - a \\ u=0, v=1 &\Rightarrow c = z(x_0, y_0 + 1) - a \\ u=1, v=1 &\Rightarrow d = z(x_0 + 1, y_0 + 1) - a - b - c \end{aligned} \quad (195)$$

Durch eine Rasterung des quadratischen Gebietes zwischen den Pixelkoordinaten kann man den Verlauf der Nullstellen näherungsweise bestimmen. Sei $u_i = i\varepsilon$, mit $i = 0, 1, \dots, k-1$ und $k = 1/\varepsilon$. ε ist die Kantenlänge der Quadrate im Subpixelbereich die man erhält, wenn man den quadratischen Zwischenraum zwischen den Pixelkoordinaten in $k \times k$ neue Quadrate unterteilt. Siehe Figur 12. Um die Rasterpunkte zu bestimmen, die dem Verlauf der kontinuierlichen Nullstellen am nächsten kommen, setzt man

$$g(i\varepsilon, y_i) = a + bi\varepsilon + cy_i + di\varepsilon y_i = 0. \quad (196)$$

Für y_i folgt hieraus

$$y_i = -\frac{(a + bi\varepsilon)}{c + di\varepsilon}, \quad (c + di\varepsilon) \neq 0. \quad (197)$$

y_i ist im allgemeinen eine reelle Zahl. Mit Hilfe von

$$v_i^{sub} = \lceil y_i / \varepsilon \rceil \varepsilon \quad (198)$$

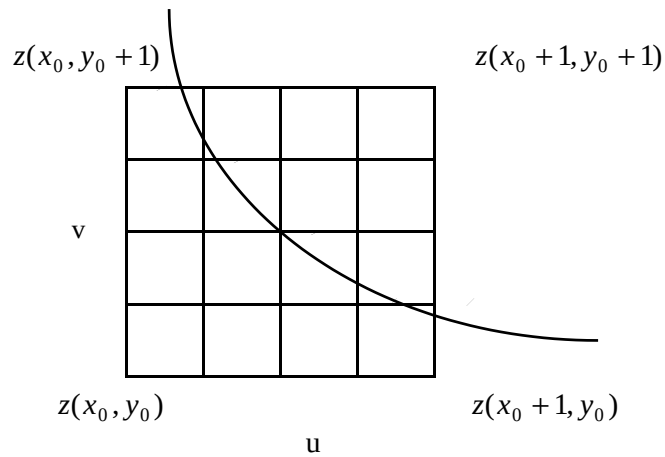
erhält man das Zahlenpaar $(i\varepsilon, v_i^{sub})$ innerhalb des konstruierten Rasters, welche dem realen Verlauf der Nullstellen am nächsten kommt. Auf redundante Weise verfährt man mit der Koordinate v . Man hat mit $v_i = i\varepsilon$ und $i = 0, 1, \dots, k-1$, $k = 1/\varepsilon$:

$$x_i = -\frac{(a + ci\varepsilon)}{b + di\varepsilon}, \quad (b + di\varepsilon) \neq 0. \quad (199)$$

Auch x_i ist im allgemeinen eine reelle Zahl. Mit

$$u_i^{sub} = \lceil x_i / \varepsilon \rceil \varepsilon \quad (200)$$

erhält man das Zahlenpaar $(u_i^{sub}, i\varepsilon)$ als Näherung an den Verlauf der Nullstellen. Je feiner das Raster wird, desto genauer kann der reale Verlauf der Nullstellen nachempfunden werden. Für die Anwendung reicht die Wahl von $k=2$ (d.h. $\varepsilon = 0,5$) aus. Ein Unterprogramm befindet sich in Anhang A.



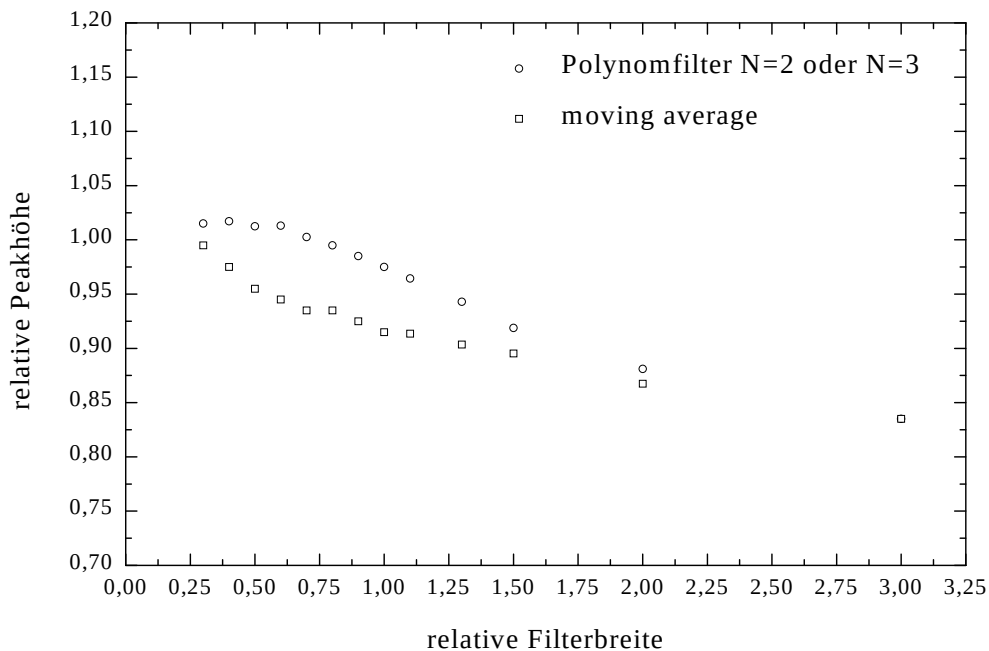
Figur 12. Bestimmung der Nullstellen im Subpixelbereich. Das Quadrat, dessen Eckpunkte durch Pixelkoordinaten gegeben sind, wird in $k \times k$ kleinere Quadrate aufgeteilt. Die Kantenlänge der kleinen Quadrate ist $\varepsilon = 1/k$, $k = 2, 3, \dots$. Im dargestellten Fall ist $k = 4$. Ferner ist $0 \leq u \leq 1$ und $0 \leq v \leq 1$. Der Bogen stellt den Verlauf der Nullstellen im kontinuierlichen Fall dar. Durch die Rasterung kann dieser Verlauf nur annähernd wiedergegeben werden. Dies wird durch die Punkte auf den Gitterkreuzen symbolisiert.

Der Einsatz des beschriebenen Algorithmus bietet zwei Vorteile

- statistische Fluktuationen der Grauwerte werden unterdrückt,
- definierte Kanten werden innerhalb der Kantenregionen festgelegt.

Jede Glättung birgt jedoch immer das Risiko der Bildverfälschung. Dies bedeutet, daß kleine, d.h. räumlich lokalisierte Strukturen in einem Koronarangiogramm durch die falsche Wahl der Fensterbreite und/oder des Polynomgrades in der Glättungsprozedur verloren gehen können. Dieses Risiko läßt das vorgestellte Verfahren fragwürdig erscheinen. Welchen Spielraum gibt es für die vom Nutzer wählbaren Parameter, ohne daß die durch die Glättung hervorgerufenen Verfälschungen das Verfahren unbrauchbar werden lassen?

Die Fähigkeit des Algorithmus, lediglich die statistischen Fluktuationen aus den Koronarangiogrammen zu entfernen, jedoch feine Strukturen zu erhalten oder deren wahres Aussehen wiederzugeben, hängt neben der Fensterbreite des Filters und dem Polynomgrad auch noch von der Amplitude des Rauschens ab. Eine hohe Rauschamplitude läßt feine Strukturen verschwinden. Ein Glättungsalgorithmus ist daher nicht in der Lage, stark verrauschte Bilder in der Art zu glätten, daß verborgene Strukturen nach der Filterung hervortreten und diese in Form und Verlauf wahrheitsgemäß wiedergegeben werden.



Figur 13. Darstellung der relativen Peakhöhe in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein unverraushtes Bild. Der moving-average-Filter glättet die Struktur stärker als der Polynomfilter mit einem Polynomgrad von 2 oder 3.

Die Beurteilung der Leistungsfähigkeit des vorgestellten Glättungsalgorithmus läßt sich mit Hilfe von berechenbaren Strukturen überprüfen. Diese Strukturen werden nach und nach von Rauschen mit wachsender Amplitude überlagert und anschließend geglättet. Die Leistungsfähigkeit ergibt sich aus der Genauigkeit, mit der die berechenbaren Strukturen trotz des Rauschens vom Glättungsalgorithmus wiedergegeben wurden. Als berechenbare Struktur wurde eine zweidimensionale Gaußverteilung gemäß

$$f(x, y, \mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} \quad (201)$$

gewählt. Über den Gitterpunkten (x, y) werden mit Hilfe von (201) die Grauwerte berechnet. Mit Hilfe der Parameter σ_x und σ_y kann die Breite der Struktur variiert werden. Ist (201)

rotationssymmetrisch zur z -Achse, gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Aufgrund der Normierung resultiert die Amplitude der Struktur. Das Ergebnis der Glättung lässt sich daran messen, in wie weit trotz überlagertem Rauschen sowohl die Amplitude als auch die Breite der unverrauschten Struktur reproduziert werden. In den Figuren sind die relative Peakhöhe und die relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite dargestellt. Diese sind gegeben durch

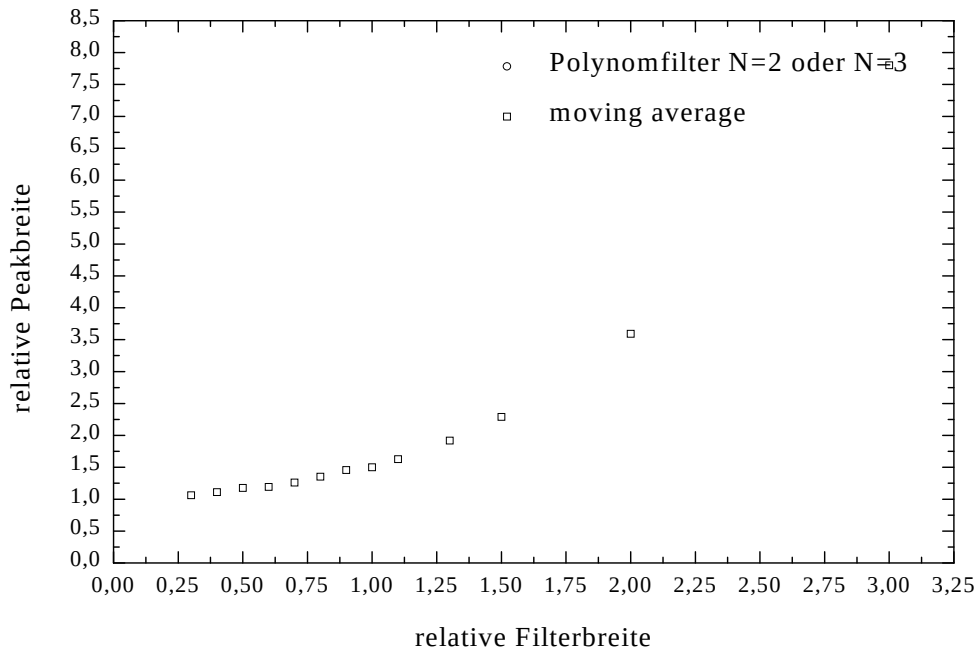
$$\text{relative Peakhöhe} = \frac{\text{reproduzierte Peakhöhe}}{\text{Peakhöhe des unverrauschten Peaks}}, \quad (202)$$

$$\text{relative Peakbreite} = \frac{\text{reproduzierte Peakbreite}}{\sigma}.$$

Die relative Filterbreite ist das Verhältnis der Fensterbreite m zum Parameter σ in (200):

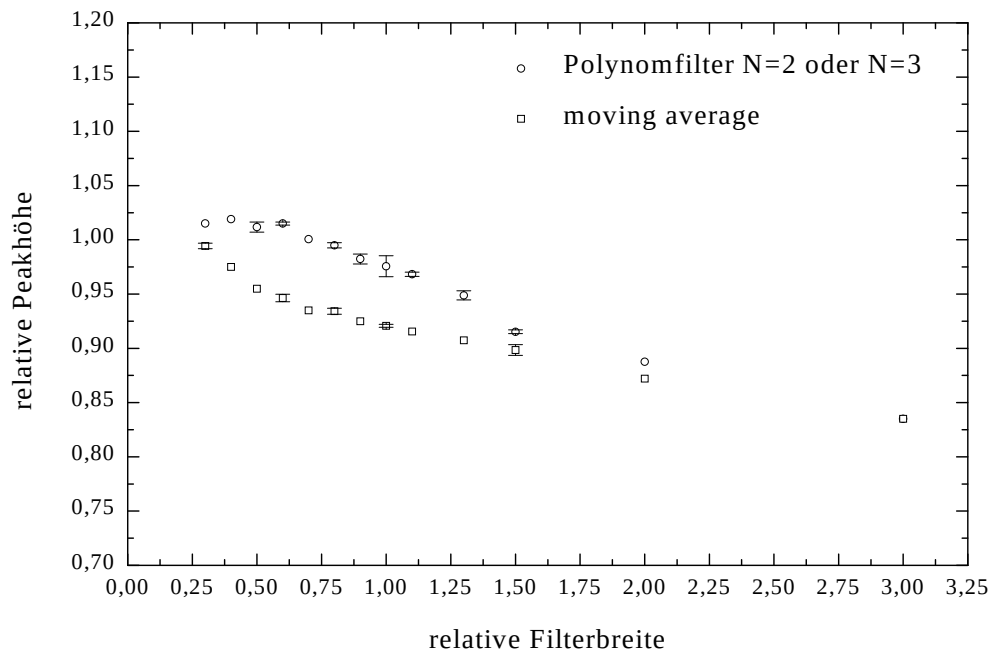
$$\text{relative Filterbreite} = \frac{m}{\sigma} \quad (203)$$

Die Leistungsfähigkeit des Glättungsalgorithmus ist in den Figuren 13 bis 22 wiedergegeben.

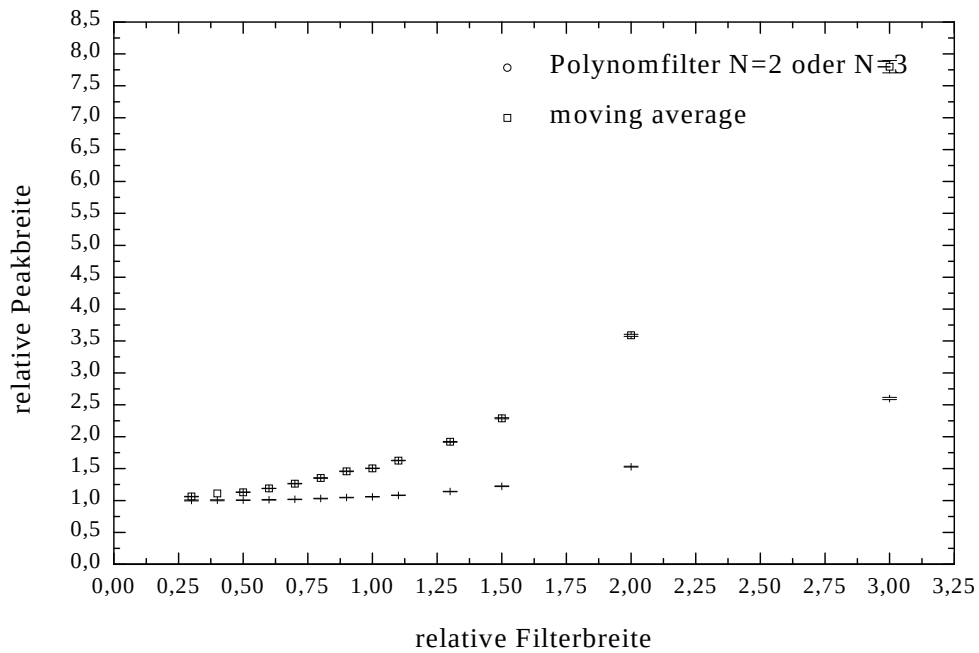


Figur 14. Relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein unverraushtes Bild. Der moving-average-Filter verbreitert schmale Strukturen sehr stark. Der Polynomfilter reproduziert die Struktur und gibt den Parameter σ richtig wieder, solange die Fensterbreite m des Filters den Wert für σ nicht überschreitet.

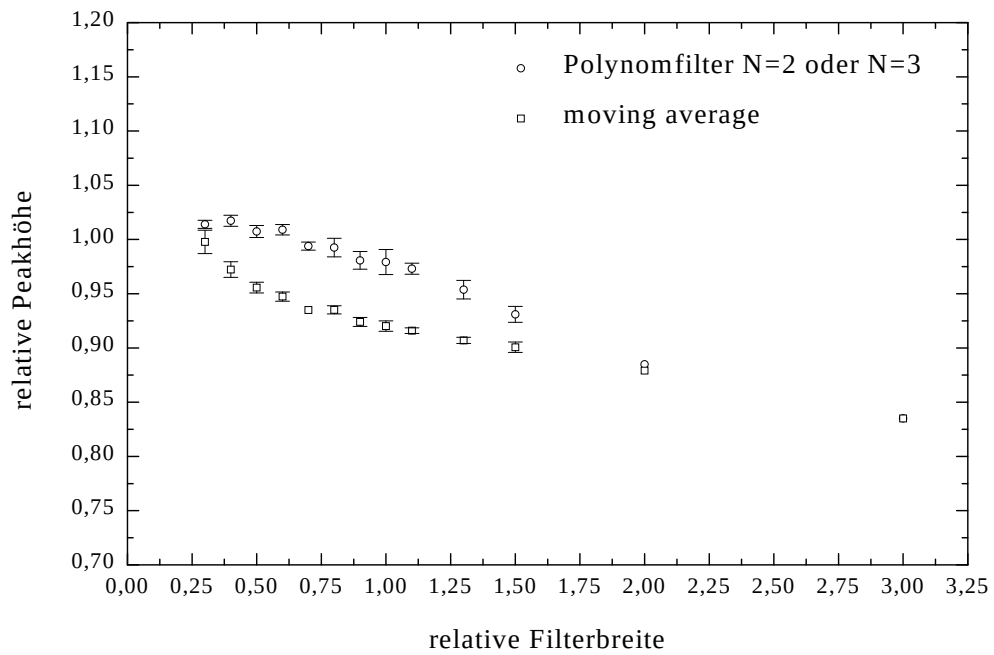
Um zu überprüfen, in wie weit der Glättungsalgorithmus in der Lage ist, die berechenbare Struktur in verrauschten Bildern wiederzugeben, wurde der Struktur gaußförmiges Rauschen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung s überlagert. Das Rauschen wird von einem Zufallszahlengenerator erzeugt. Der verrauschte Grauwert ergibt sich aus der Summe des mit (201) berechneten Grauwertes und der gaußförmig verteilten Zufallszahl. Um zufällige Ergebnisse in der Bestimmung der Amplitude und Breite der geglätteten Struktur zu vermeiden, wurden die Parameter je 100 mal bestimmt und der Mittelwert gebildet. Deren Standardabweichung resultiert aus den Einzelmessungen.



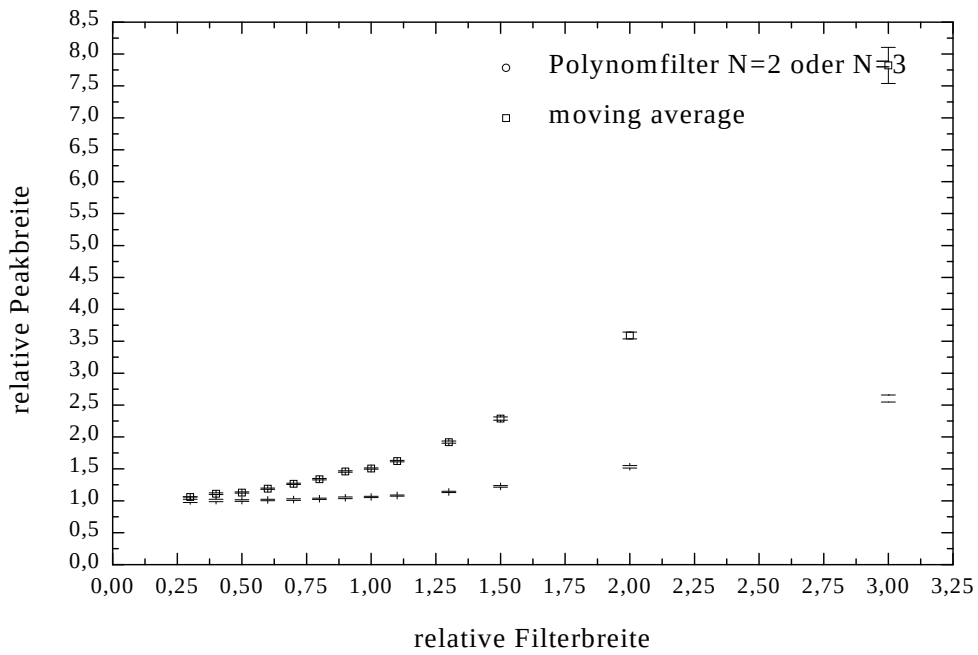
Figur 15. Darstellung der relativen Peakhöhe in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 1% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



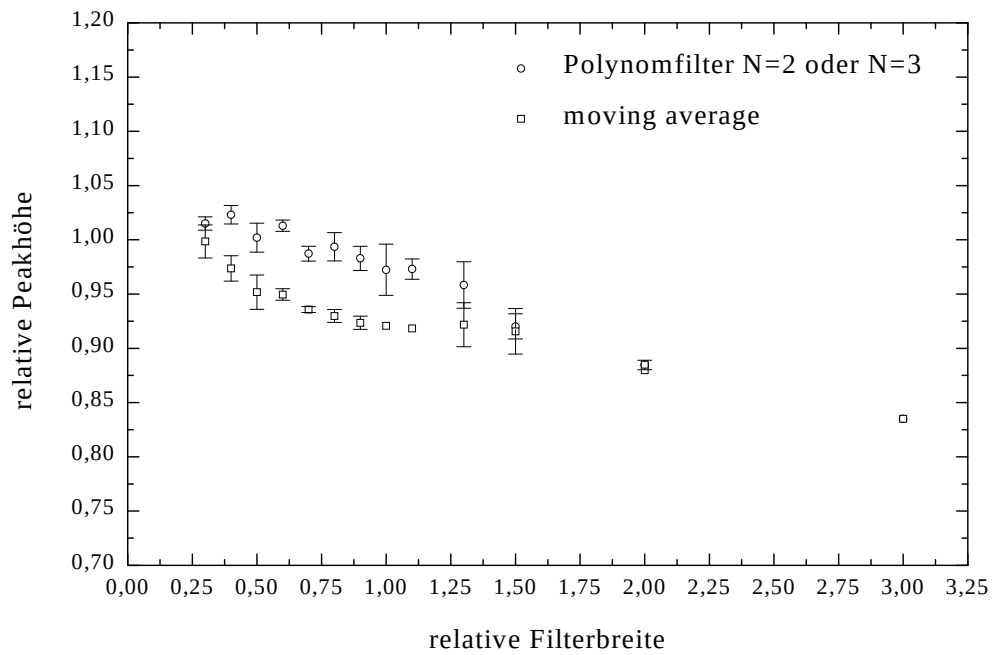
Figur 16. Relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 1% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



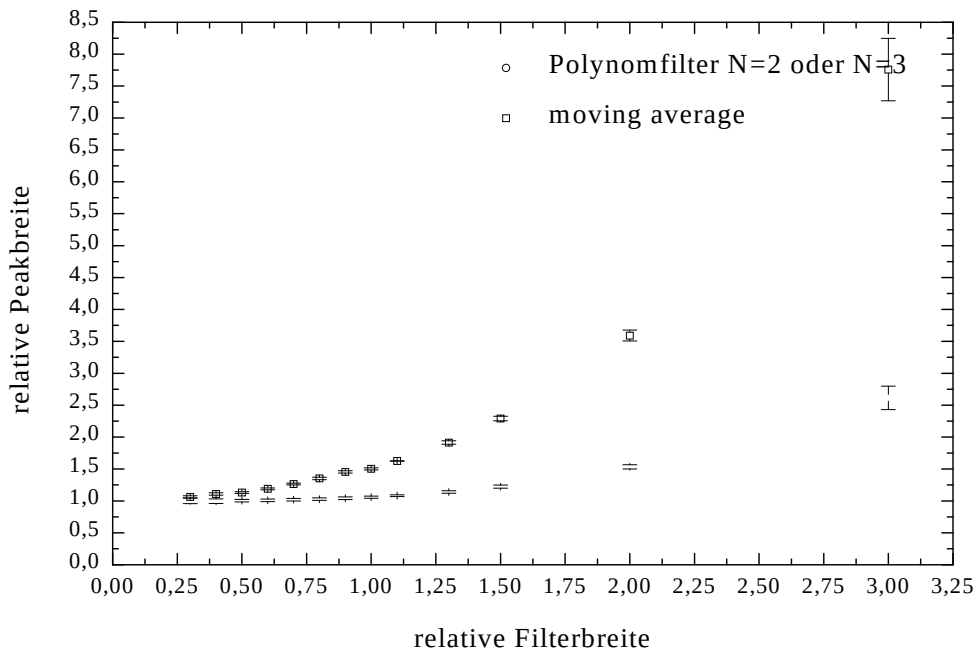
Figur 17. Darstellung der relativen Peakhöhe in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 3% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



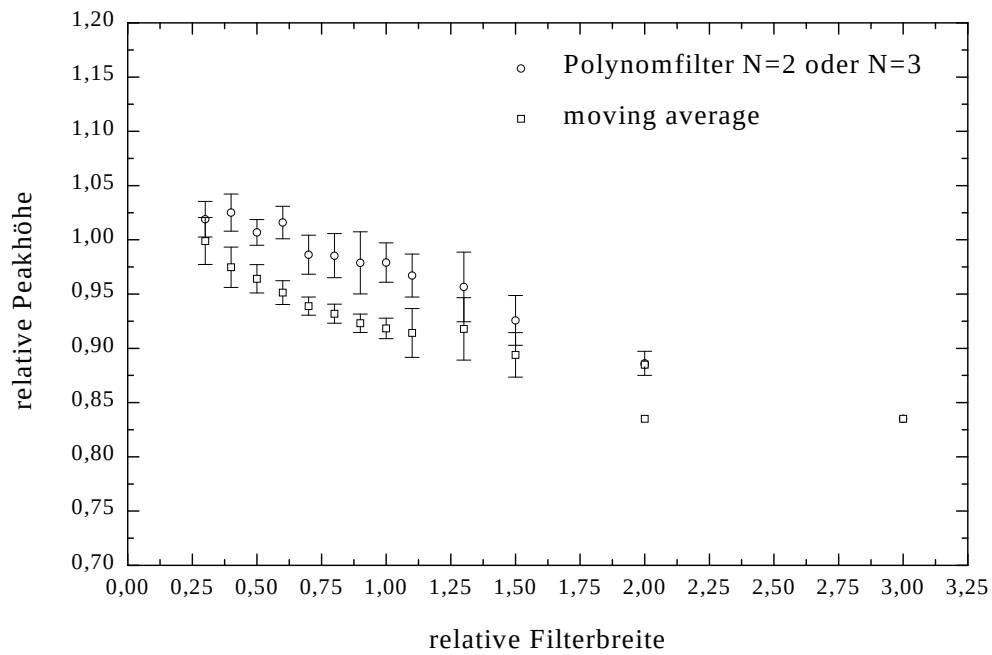
Figur 18. Relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 3% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



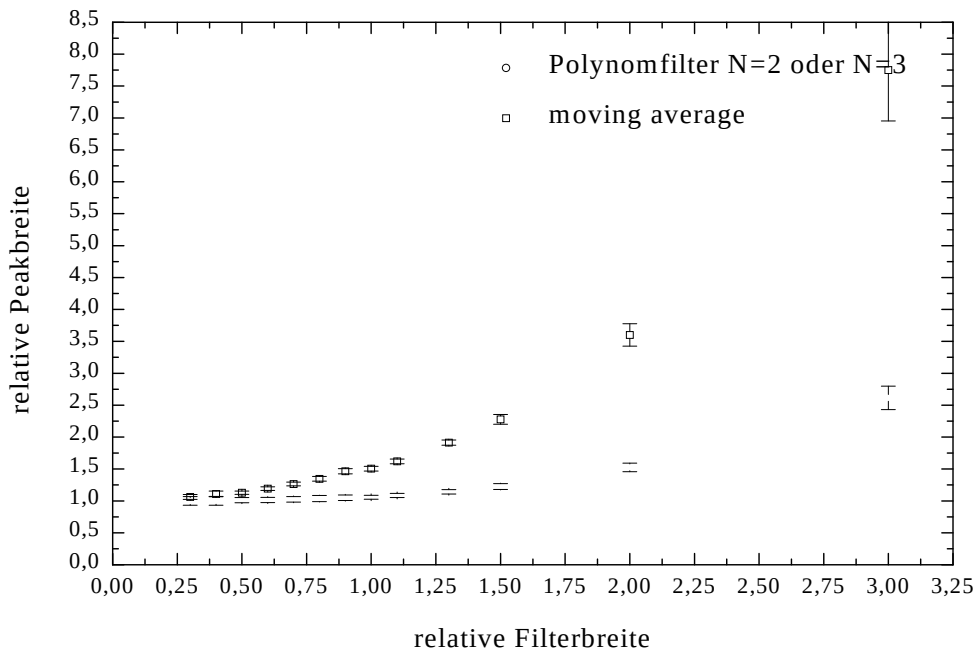
Figur 19. Darstellung der relativen Peakhöhe in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 5% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



Figur 20. Relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 5% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



Figur 21. Darstellung der relativen Peakhöhe in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 10% der Amplitude der peakförmigen Struktur.



Figur 22. Relative Peakbreite in Abhängigkeit von der relativen Filterbreite für ein verrauschtes Bild. Die Amplitude des Rauschens beträgt 10% der Amplitude der peakförmigen Struktur.

Eine Erhöhung der relativen Filterbreite bewirkt eine Verringerung der reproduzierten Peakhöhe und ein Ansteigen der reproduzierten Peakbreite. Bilddetails werden verwaschen. Verwaschungen werden nicht hervorgerufen, wenn die relative Filterbreite den Wert 1 nicht übersteigt. In diesem Fall werden sowohl die Peakhöhe als auch die Peakbreite hinreichend genau wiedergegeben.

Wird dem zweidimensionalen Peak zusätzlich Rauschen überlagert, wird die Reproduktion der Peakhöhe und der Peakbreite ungenauer. Die Ungenauigkeit hängt von der Amplitude des Rauschens ab. Die nachstehende Tabelle faßt die Ergebnisse der Glättungsprozedur für die relative Filterbreite 1 zusammen.

	Rauschen				
	0%	1%	3%	5%	10%
rep. Peakhöhe	0,975	0,975±0,010	0,979±0,012	0,972±0,023	0,979±0,030
rep. Peakbreite	1,059	1,058±0,007	1,06±0,010	1,059±0,019	1,058±0,031

Tabelle 1. Die Amplitude des Rauschens wird auf $n\%$ ($n=0,1,3,5,10$) der Amplitude des unverrauschten Peaks (Gleichung (201)) eingestellt. Die relative Filterbreite beträgt 1. Die reproduzierte Peakhöhe und Peakbreite sind als Vielfache der unverrauschten Peakhöhe und Peakbreite angegeben. Der Glättungsalgorithmus reduziert die Peakhöhe um höchstens 3%. Die reproduzierte Peakbreite vergrößert sich um höchstens 6%. Die reproduzierten Werte sind nahezu unabhängig von der Rauschamplitude. Die Unsicherheit der reproduzierten Werte steigt mit wachsender Rauschamplitude.

Die Berechnung von $z(0,0)=b_{N00}$ in (175) wird durch die Grauwerte aller benachbarten Pixel innerhalb des Fensters beeinflusst. Die Grauwerte werden während der Anpassungsprozedur (179) gleichstark gewichtet. Durch eine stärkere Gewichtung der Grauwerte im Zentrum des Fensters im Vergleich zu den Grauwerten an den Rändern des Fensters werden die peakförmigen Strukturen genauer reproduziert.

5. Bewertung von Bildqualitätsverlusten anhand quantitativer Bildqualitätsparameter

In den Abschnitten 3) und 4) wurden Verfahren zur Bestimmung binärer Masken eingeführt, welche die diagnostisch wichtigen Bildregionen festlegen. In diesem Abschnitt werden zunächst quantitative Bildqualitätsparameter vorgestellt, welche den Verlust an Bildqualität und/oder Information in den diagnostisch wichtigen Bildregionen dokumentieren. Im Anschluß daran werden in den Abschnitten 5.1, 5.2 und 5.3 die Verfahren zur Bestimmung der diagnostisch wichtigen Bildregionen an drei unterschiedlichen Bildern erprobt und die Effekte der verlustbehafteten Bilddatenkompression sowie deren Auswirkung auf die Bildqualitätsparameter untersucht. Die Auswahl der Bilder geschah wie folgt:

- Abschnitt 5.1: Röntgenphantome sind künstliche Aufnahmen, welche das räumliche Auflösungsvermögen einer Röntgen-Fernsehkette wiedergeben. Das Bleiraster des Phantoms erzeugt in ein Röntgenbild mit unterschiedlich starken Kontrasten. Röntgenphantome erlauben die Bestimmung einer Beziehung zwischen den Bildqualitätsparametern und den Bildqualitätsverlusten (Verwaschungen schwacher Kontraste). An dem untersuchten Röntgenphantom werden die Algorithmen zur Bestimmung der diagnostisch wichtigen Bildregionen erprobt. Insbesondere lassen sich Rückschlüsse auf die Leistungsfähigkeit der Algorithmen zur Erkennung der Kantenregionen und der scharfen Kanten ziehen.
Darüber hinaus werden mit dem Röntgenphantom die Effekte der verlustbehafteten Bilddatenkompression untersucht. Hier sollen deren Auswirkungen auf die Grauwert-Histogramme und Grauwertänderungen (Gradientenfelder) in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor untersucht werden. Ferner wird der Frage nachgegangen, in wie weit die im Phantombild vorhandenen unterschiedlichen Kontraste den Kompressionsfehler beeinflussen. Dies wird in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor anhand von Profilschnitten und deren Fourierspektren untersucht.
- Abschnitt 5.2: In einer Erweiterung zu Abschnitt 5.1 werden die Verfahren zur Bestimmung der diagnostisch bedeutenden Bildregionen an einem invasiven Koronarangiogramm untersucht. Im Gegensatz zum Röntgenphantom sind die Anforderungen an diese Verfahren in realen Koronarangiogrammen höher. Das Verfahren zur Anpassung einer Linearkombination orthogonaler Polynome in zwei diskreten Veränderlichen an die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen wird ausführlicher überprüft (Gleichung (164)). Die Anforderungen an die Verfahren zur Bestimmung der Kantenregionen und scharfen Kanten sind größer, da die Ränder der diagnostisch wichtigen Bildregionen nicht mehr parallel zu den Bildachsen verlaufen und die Kontraste, mit dem sich die wichtigen von den unwichtigen Bildregionen abheben, deutlich kleiner sind.
Ferner wird untersucht, inwieweit die Auswahl unterschiedlicher Bildregionen innerhalb des invasiven Koronarangiogramms abweichende Bildqualitätsparameter hervorrufen.
- Abschnitt 5.3: Als Fortführung der Betrachtungen in 5.1 und 5.2 wird ein nichtinvasives Koronarangiogramm zur Untersuchung der Verfahren zur Bestimmung diagnostisch bedeutender Bildregionen herangezogen. Im Gegensatz zum invasiven Koronarangiogramm sind die Kontraste, mit denen sich die Gefäße vom Herzmuskelgewebe abheben, kleiner. Dies ist auf die geringere Kontrastmittelkonzentration im Blut zurückzuführen. Das Pixelrauschen wird durch die Poisson-Statistik beeinflußt und ist deutlich größer als in der invasiven Koronarangiografie.
Es wird untersucht, inwieweit die Algorithmen zur Gefäßerkennung und zur Erkennung der Kantenregionen und scharfen Kanten trotz verminderten Kontrastes und erhöhtem Pixelrauschen brauchbare Ergebnisse liefern. Es ist zu vermuten, daß ein verminderter Kontrast und ein erhöhtes Pixelrauschen zu irreführenden und/oder nicht aussagekräftigen Schlußfolgerungen führen. Dies wird an zwei Profilschnitten demonstriert.

Die Erzeugung der binären Masken ist speziell auf die Koronarangiografie abgestimmt. Diese bezeichnen die für die Diagnose wichtigen Bildregionen. Im Gegensatz hierzu gibt es Verfahren, welche die Auswirkungen verlustbehafteter Bilddatenkompression auf die menschliche Wahrnehmung

bewerten. Hierzu zählen Hosaka-Plots [27] und PQS (picture quality scale) [28]. Diese Verfahren gehen nicht auf die Besonderheiten der Koronarangiografie ein und werden nicht weiter berücksichtigt.

Das am häufigsten benutzte quantitative Maß zur Beurteilung von verlustbehafteter Bilddatenkompression ist der mean squared error (MSE):

$$MSE = \frac{1}{N_{MSE}} \sum_{x=1}^{x_{\max}} \sum_{y=1}^{y_{\max}} (z_{x,y} - z_{x,y}^{comp})^2. \quad (204)$$

Hierbei sind $z_{x,y}$ und $z_{x,y}^{comp}$ die Grauwerte des Originalbildes und des komprimierten/dekomprimierten Bildes an der Pixelkoordinate (x,y) . N_{MSE} ist die Anzahl der Pixel im Bild. $x_{\max}$ und $y_{\max}$ bezeichnen die Abmessungen des Bildes in Pixeln. Jeder fehlerhaft wiedergegebene Grauwert fließt in die Berechnung des MSE ein. Dabei wird vernachlässigt, ob der falsch reproduzierte Grauwert an der Pixelkoordinate (x,y) in einer für die Diagnose relevanten Bildregion (Gefäß, Kantenregion, definierte Kante) liegt. Die bedeutenden Bildregionen machen in der Anwendung nur einen kleinen Teil des Koronarangiogrammes aus. Der MSE berücksichtigt auch die nicht relevanten Bildregionen, d.h. das die Gefäße umgebende Herzmuskelgewebe. Hier fallen falsch wiedergegebene Grauwerte jedoch nicht ins Gewicht.

Die binären Masken markieren die für die Diagnose relevanten Bildregionen. Prinzipiell ist eine Berechnung des MSE innerhalb der binären Masken möglich. Es ist jedoch fraglich, ob ein fehlerhaft wiedergegebener Grauwert aufgrund des intrinsischen Rauschens des Röntgenbildes als solcher eine Rolle spielt.

Man kann davon ausgehen, daß die Grauwerte des Koronarangiogrammes fehlerbehaftet sind. Eine Wiederholungsmessung eines Koronarangiogrammes unter sonst identischen Bedingungen führt zu abweichenden Grauwerten an den Pixelkoordinaten (x,y) in Bezug auf die vorangegangene Messung. Es stellt sich die Frage, ob ein aufgrund verlustbehafteter Datenkompression berechneter Grauwert nicht auch im Rahmen einer Wiederholungsmessung aufgetreten wäre. Ist dies der Fall, kann man nicht von einem Kompressionsfehler sprechen. Der MSE trägt dieser Tatsache nicht Rechnung und muß entsprechend modifiziert werden.

Hauptbestandteil des bei der Aufnahme verwendeten Bildverstärkerfernsehens ist der Röntgenbildverstärker. Der Röntgenbildverstärker ist eine Vakuumröhre, in der ein Röntgenbild in ein sichtbares Bild hoher Leuchtdichte umgewandelt wird. Die durch das Untersuchungsobjekt räumlich modulierte Röntgenstrahlung durchdringt das strahlendurchlässige Eingangsfenster der Röhre und fällt auf den Röntgenleuchtschirm. Dieser transformiert das Röntgenbild in ein optisches Bild. In optischem Kontakt mit dem Röntgenleuchtschirm befindet sich eine sehr dünne, lichtempfindliche Schicht, die Photokathode, welche die Helligkeitsverteilung des optischen Bildes auf dem Schirm in eine Elektronenflußdichteverteilung umwandelt. Die Photoelektronen werden isotrop in den Halbraum vor der Photokathode emittiert. Durch ein elektrisches Feld werden die emittierten Elektronen im Innern des Bildverstärkers so gelenkt, daß ihre Bahnen zusammen ein keulenförmiges Bündel bilden. Die größte Dicke wird nahe der Photokathode erreicht und verjüngt sich zur Anode hin. Auf dem Ausgangsleuchtschirm treffen die Elektronenbahnen in einem Punkt zusammen. Dieser Punkt wird als Bildpunkt bezeichnet. Während der Bewegung in dem elektrischen Feld nehmen die Elektronen Energie auf (25 bis 35 keV). Die Energie eines Elektrons genügt, um am Ausgangsleuchtschirm etwa 1000 Lichtquanten zu erzeugen. Die elektronenoptische Abbildung ist sehr lichtstark. Das kleine, helle Ausgangsbild ist für die Bildübertragung mit einer CCD-Kamera sehr gut geeignet.

Die Eigenschaften des Eingangsleuchtschirmes bestimmt maßgeblich die Bildübertragungsgüte des gesamten Röntgenbildverstärkers. Hier muß ein Kompromiß zwischen den sich widersprechenden Forderungen nach hoher Quantenabsorption (hohe Leuchtstoffbelegung) und nach hohem Auflösungsvermögen (geringe Leuchtstoffbelegung) gefunden werden. Da die Grenzauflösung zunächst mehr ins Auge springt als etwas mehr oder weniger Quantenrauschen, muß man bewußt der

Versuchung widerstehen, die Auflösung auf Kosten der Quantenabsorption zu bevorzugen. Die Optimierung der diagnostisch signifikanten Bildqualität muß angestrebt werden.

Die Intensität des räumlich modulierten Strahlungsfeldes ist ständig Fluktuationen unterworfen. Diese Fluktuationen werden als Quantenrauschen bezeichnet. Daneben tragen die Abbildungssysteme in der gesamten Röntgenfernsehkette selbst rauschartige Störungen bei. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sie verstärkende Elemente besitzen. Bei linearen ortsinvarianten Abbildungssystemen kann das Rauschübertragungsverhalten mit Hilfe des Wiener Spektrums beurteilt werden. Anders als im rauschfreien Fall muß die Quantennatur der Röntgenstrahlung berücksichtigt werden, was im vorliegenden Fall bei gegebenem Poisson-Rauschen durch den Erwartungswert der Anzahl absorbierter Quanten pro Flächeneinheit erfolgt. Die angegebene Beschreibung des Rauschens ist insofern unvollständig, als die inneren Rauschquellen des gesamten Systems nicht berücksichtigt wurden. Deren Rauschbeiträge sind zu bewerten und gewichtet zu addieren.

Im Fall der Röntgenabbildung stellt die experimentelle Bestimmung des Wiener-Spektrums ein erhebliches Problem dar. Bei inhomogenen Objekten überlagert sich das Rauschen in kaum trennbarer Weise den Objektstrukturen. Andererseits sind die Rauschkenngößen durch die Objektstrukturen moduliert. Lediglich bei homogenen Prüfkörpern läßt sich die Stärke des Rauschens (Standardabweichung) und/oder die Art der Körnigkeit (Korrelationen) beschreiben. In diesem Fall sind die Rauschkenngößen aus einem einzigen Bild bestimmbar [20]. Man hat

$$z_{x,y}^{mess} = z_{x,y}^{wahr} + \varepsilon \quad (205)$$

Hierbei sind $z_{x,y}^{mess}$ und $z_{x,y}^{wahr}$ der gemessene und der wahre Grauwert an der Pixelkoordinate (x, y) . ε ist eine gaußverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert 0 und Standardabweichung σ . $z_{x,y}^{wahr}$ ist unbekannt.

Mit Hilfe des in Abschnitt 4 vorgestellten Verfahrens läßt sich σ näherungsweise bestimmen. Unter der Voraussetzung, daß die im Bild enthaltenen Details nicht durch den Glättungsfilter verschmiert werden, berechnet man die Größe

$$z_{x,y}^{mess} - z_{x,y}^{smoo} . \quad (206)$$

Hierbei ist $z_{x,y}^{smoo}$ der mit Hilfe des Glättungsalgorithmus berechnete Grauwert. Man geht dabei davon aus, daß mit Hilfe des Glättungsalgorithmus im Bild vorhandene statistische Schwankungen teilweise ausgeglichen werden. Für die Pixelkoordinaten (x, y) gilt

$$\left| z_{x,y}^{wahr} - z_{x,y}^{smoo} \right| \leq \left| z_{x,y}^{wahr} - z_{x,y}^{mess} \right| . \quad (207)$$

Als Schätzwert für σ erhält man

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{(x_{\max} - 2m - 1)(y_{\max} - 2m - 1) - 1} \sum_{x=m+1}^{x_{\max}-m} \sum_{y=m+1}^{y_{\max}-m} (z_{x,y}^{mess} - z_{x,y}^{smoo})^2 \right\}^{1/2} . \quad (208)$$

$x_{\max}$ und $y_{\max}$ bezeichnen die Abmessungen des Bildes in Pixeln, m ist die Fensterbreite des Glättungsfilters. Der Wert für σ ist ein (zu kleiner) Schätzwert für die Standardabweichung des Pixelrauschens, Im allgemeinen gilt:

$$\left| z_{x,y}^{wahr} - z_{x,y}^{smoo} \right| \neq 0 . \quad (209)$$

Mit Hilfe von σ können die Kompressionsfehler relativiert werden. Ein Kompressionsfehler tritt dann auf, wenn die Bedingung

$$\left| z_{x,y}^{mess} - z_{x,y}^{comp} \right| > r\sigma \quad (210)$$

in den für die Diagnose relevanten Bildbereichen erfüllt wird. $z_{x,y}^{comp}$ ist der durch die verlustbehaftete Bilddatenkompression reproduzierte Grauwert, r ist ein vom Anwender wählbarer Parameter. Für $r=1$ und gaußförmiges Rauschen liegen bei Wiederholungsmessungen eines Koronarangiogrammes unter gleichen Bedingungen etwa 68,3% der gemessenen Grauwerte in dem Intervall $[z_{x,y}^{wahr} - \sigma, z_{x,y}^{wahr} + \sigma]$. Gesucht wird nach den Stellen (x,y) innerhalb der durch die binären Masken markierten Bildregionen, an denen (207) erfüllt wird. In diesem Fall hat man einen Beitrag zum Bildqualitätsparameter

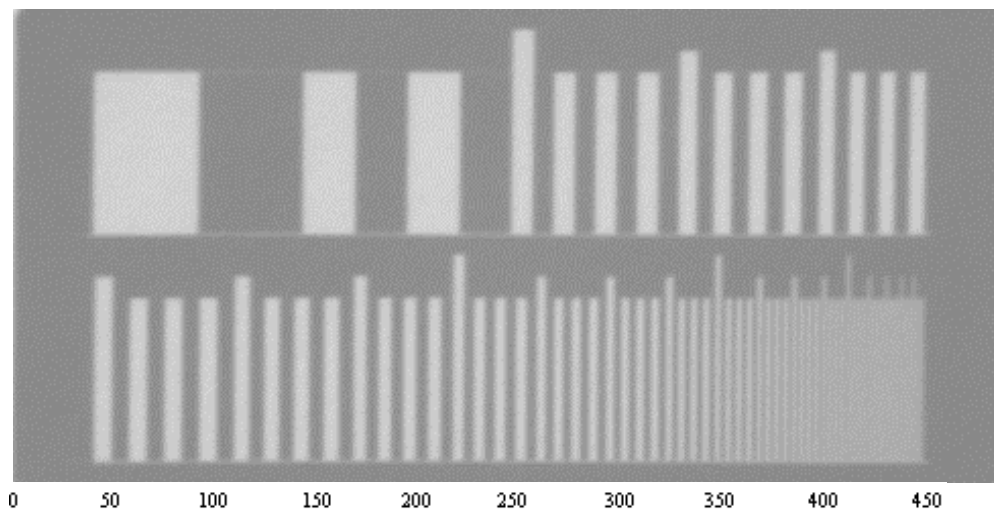
$$q_i = \frac{1}{N_{q_i}} \sum_{(210)} \frac{(z_{x,y}^{mess} - z_{x,y}^{comp})^2}{(r\sigma)^2}, \quad i = 1,2,3 \quad (211)$$

N_{q_i} bezeichnet die Anzahl der Pixel in den diagnostisch relevanten Bildregionen. Die Normierung gewährleistet, daß die Bildqualitätsparameter q_i in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor streng monoton steigen. Ferner erlaubt die Normierung die Berechnung eines mittleren Kompressionsfehlers pro Pixel in der betreffenden Bildregion. Die Numerierung der Bildregionen ist: 1 (Gefäßregionen), 2 (mit Hilfe der Sobel-Masken extrahierte Kantenregionen), 3 (definierte Kanten innerhalb der unter 2 aufgeführten Kantenregionen).

Anhand von drei Beispielen wird die Erzeugung der notwendigen binären Masken und die Berechnung von σ demonstriert.

5.1 Überprüfung der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen an einem Röntgenphantom

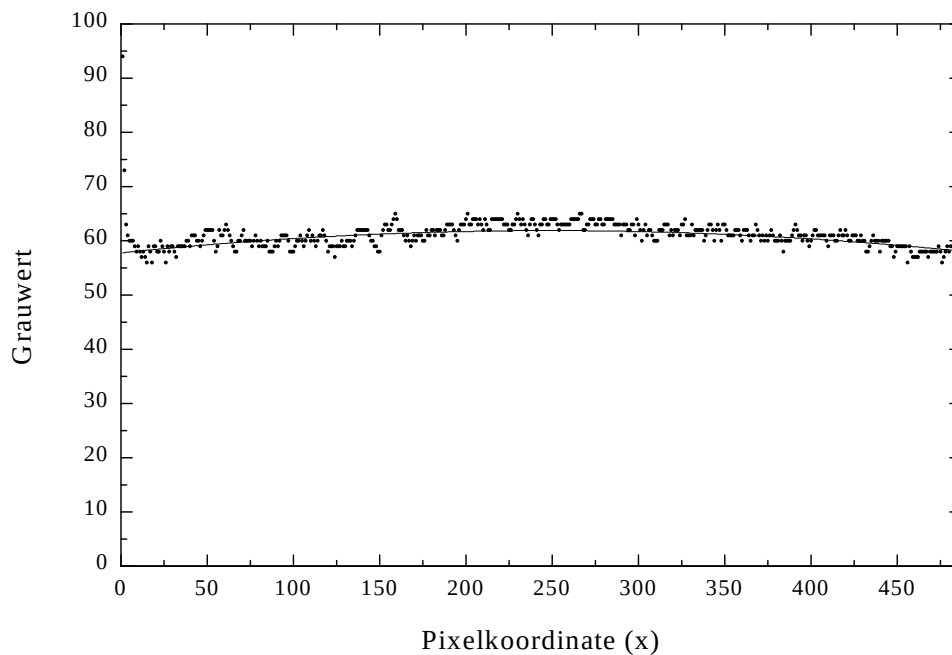
Mit Hilfe von Röntgenphantomen wird das Auflösungsvermögen von Röntgenbildverstärkern bestimmt. Mit dem Röntgenphantom wird die Leistungsfähigkeit der Algorithmen zur Erzeugung der binären Masken untersucht.



Figur 23. Typisches Röntgenphantom (487×233 Pixel). Grobe kontrastreiche Strukturen (obere Reihe) sind leicht zu erkennen. Ab 2 Linienpaaren/mm (rechts unten) sind die sehr dünnen Bleistreifen (Breite<0,5 mm) nicht mehr zu erkennen.

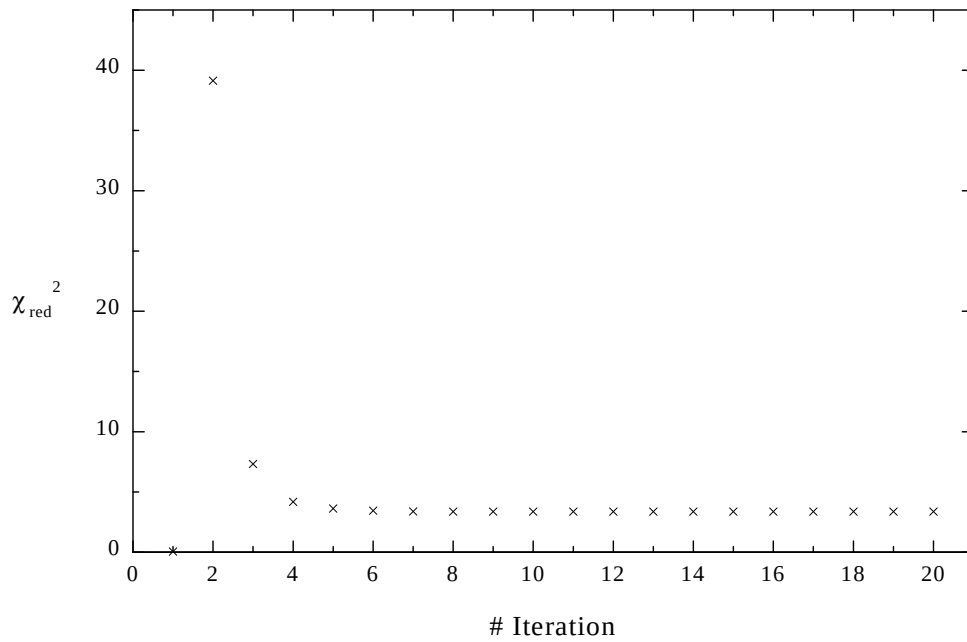
Bei dem Röntgenphantom entspricht die Breite eines quadratischen Pixels 0,20 mm. Die dunkelgraue Region verkörpert in einem realen Koronarangiogramm das die Gefäße umgebende

Herzmuskelgewebe. Die Aussparungen des Bleirasters (helle Streifen) repräsentieren die Gefäße. Mit Hilfe des in Abschnitt 3 beschriebenen Verfahrens werden die diagnostisch relevanten Regionen aus dem Originalbild gefiltert. In die hierfür notwendige Rechnung geht der Schätzwert σ für das Pixelrauschen ein. Der Glättungsalgorithmus liefert bei einer Fensterbreite von $m=1$ und dem Polynomgrad 2 einen Wert von $\sigma = 0,59$. Der Wert für r wurde auf 3 gesetzt. Dies gewährleistet, daß bei einer wiederholten Röntgenaufnahme des Bleirasters in 99,7% der Fälle die Grauwerte im Intervall $[z_{x,y}^{wahr} - 3\sigma, z_{x,y}^{wahr} + 3\sigma]$ liegen. Der Grad des Polynoms zur Erkennung der für die Diagnose nicht relevanten Bildregionen ist 2. Siehe Figur24.



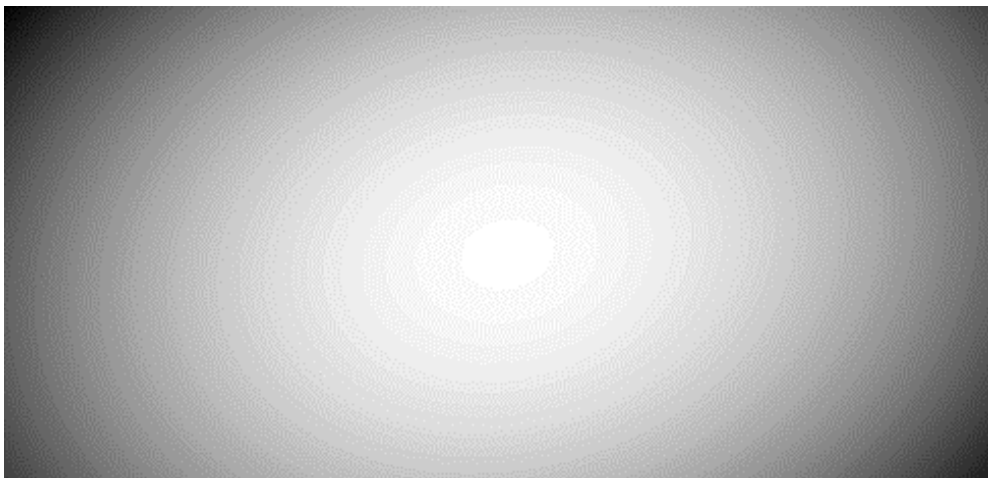
Figur 24. Profilschnitt durch das Röntgenphantom in Bildzeile 117 (Mitte des Bildes). Die Punkte stellen die Grauwerte in der betreffenden Bildzeile dar. Die durchgezogene Kurve repräsentiert das Ergebnis der Anpassungsprozedur. Aufgrund der Verzeichnung des Röntgenbildverstärkers erscheinen die Grauwerte in dieser Zeile gewölbt und nicht flach. Die Verzeichnung ist annähernd rotationssymmetrisch zur Mittelachse des Röntgenbildverstärkers. Aus diesem Grund wurde der Polynomgrad 2 bei der Anpassung an die diagnostisch unbedeutenden Strukturen gewählt.

Man muß beachten, daß der Grad des Polynoms zur Anpassung an den diagnostisch unbedeutenden Untergrund nur bedingt frei wählbar ist. Bei dem vorliegenden Phantom handelt es sich um Röntgenbild, welches vom Betrachter leicht in zwei Regionen geteilt werden kann. Die dunkelgraue Region verkörpert die für die Diagnose unbedeutende, die hellen Streifen die bedeutende Struktur. Aufgrund der sehr einfachen Beschaffenheit des Röntgenphantoms konvergiert das Anpassung an die Grauwerte in den unbedeutenden Strukturen für den Polynomgrad 2 sehr rasch. Dies ist in der folgenden Grafik dargestellt.



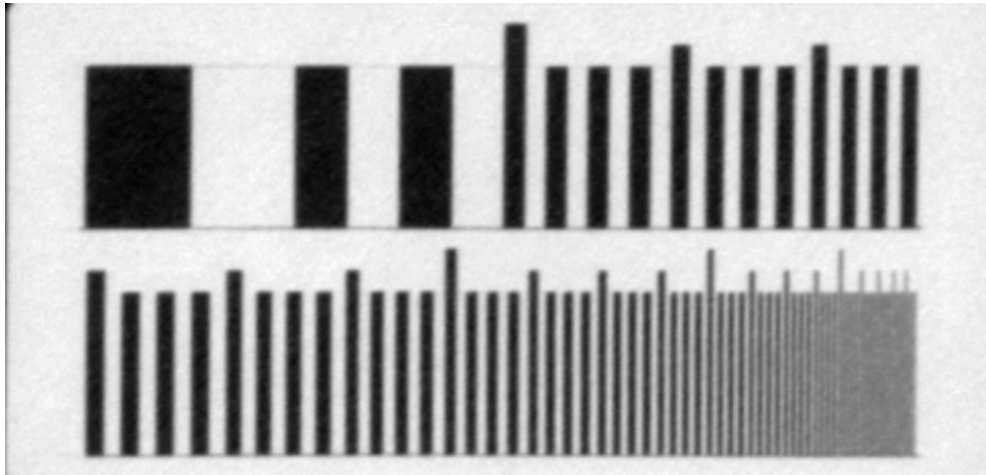
Figur 25. Konvergenz des adaptiven Verfahrens zur Anpassung eines Polynoms vom Grad 2 an den diagnostisch unbedeutenden Untergrund. Es wurden 20 Iterationen durchgeführt. Nach 14 Iterationen ändert sich der Wert für χ^2_{red} nicht mehr. Er beträgt $\chi^2_{red} = 3,3712$. Die Zahl der Datenpunkte welche in die Anpassungsprozedur eingehen beträgt ab der vierzehnten Iteration 41637. Bereits ab der siebenten Iteration hat man $\chi^2_{red} = 3,3797$ mit 41659 relevanten Datenpunkten. Das Verfahren hätte früher abgebrochen werden können. Der (zu große) Wert für χ^2_{red} impliziert, daß der Wert für die Standardabweichung des Rauschens zu klein ist.

Die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen sind in dem nachstehenden Bild dargestellt.



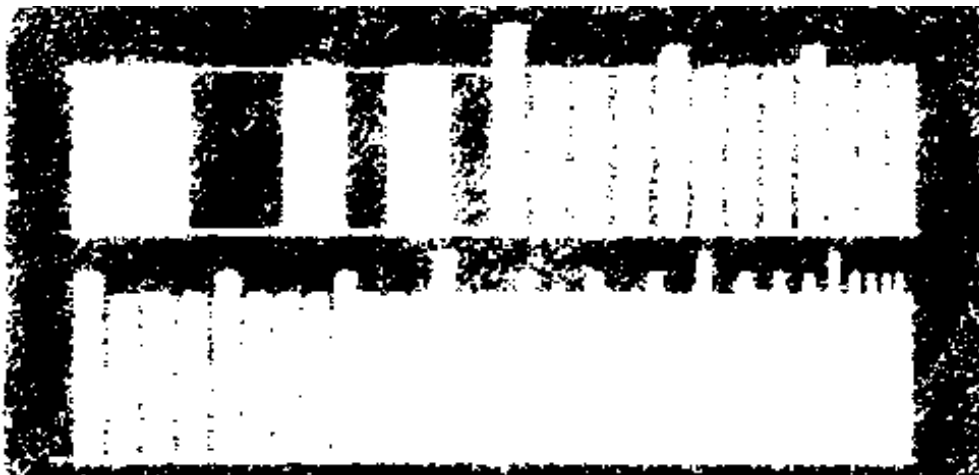
Figur 26. Darstellung der diagnostisch unbedeutenden Bildregionen. Die durch orthogonale Polynome angepaßten Grauwerte des Bildes wurden in dem Bereich [0;255] neu skaliert um den Kontrast zu maximieren. Auf diese Weise wird die Verzeichnung des Röntgenbildverstärkers besser sichtbar.

Die Differenz der Figuren 23 und 26 liefert ein kontrastverbessertes Bild. Die Bildschärfe wird nicht verändert.



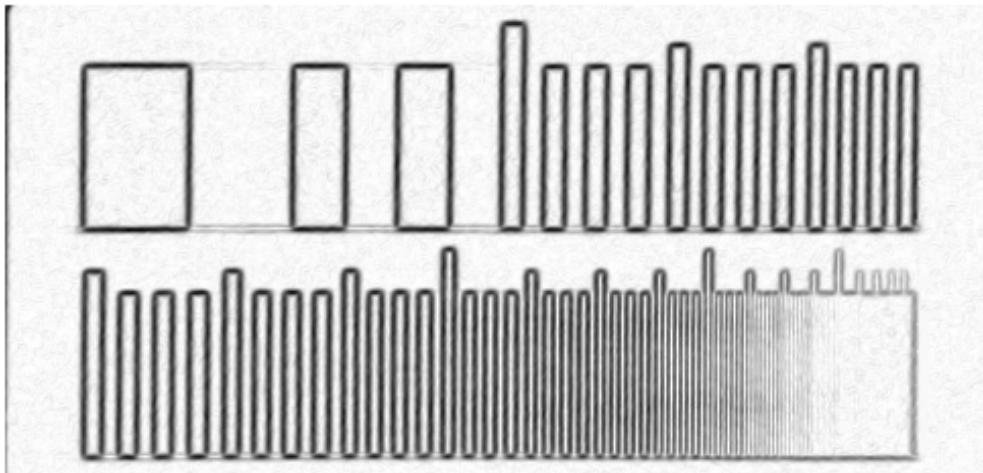
Figur 27. Negativ der Differenz der Figuren 23 und 26. Der Kontrast wurde stark verbessert, da die volle Skala der Grauwerte zur Darstellung des Bildes ausgenutzt werden kann.

Die binäre Maske, welche die für die Diagnose relevanten Bildregionen markiert, fällt während der Anpassungsprozedur automatisch an:



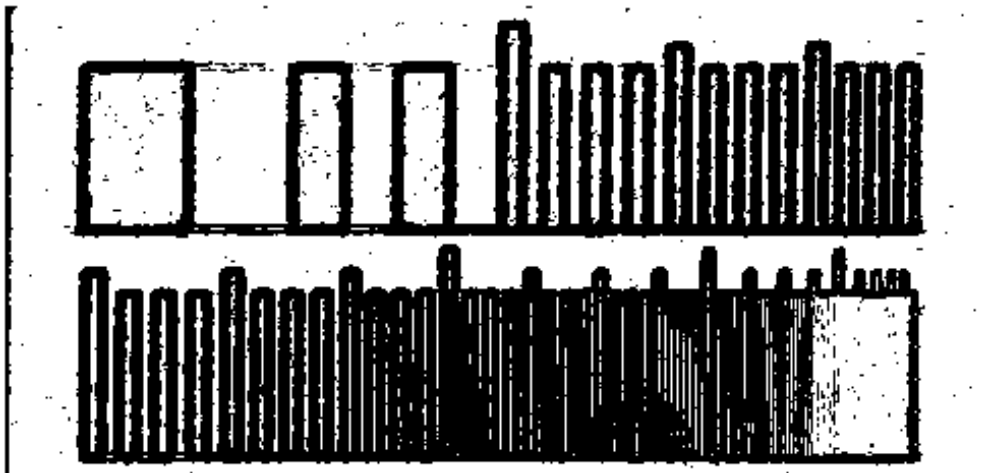
Figur 28. Binäre Maske zur Erkennung diagnostisch relevanter Strukturen. Die bedeutenden Bildpunkte sind weiß.

Die Erkennung der Kantenregionen erfolgt mit Hilfe der Sobel-Masken. Das resultierende Bild ist noch keine binäre Maske. Man hat



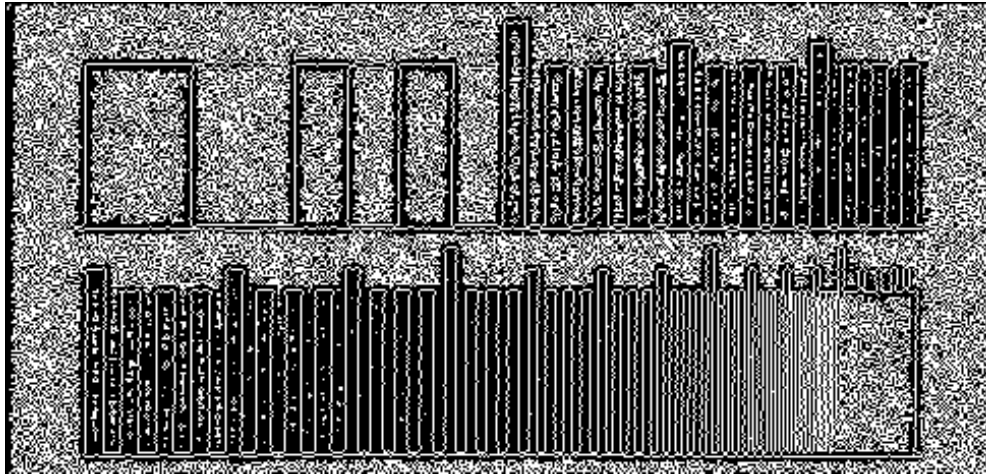
Figur 29. Darstellung des mit Hilfe der Sobel-Masken erzeugten kantenbetonten Bildes (Bildnegativ). Die dunklen Bildregionen bezeichnen die Orte großer Grauwertänderungen.

Erst durch die Wahl eines Schwellwertes wird aus dem kantenbetonten Bild eine binäre Maske. In diesem Fall wurde der Schwellwert subjektiv auf 15 gesetzt. Oberhalb des Schwellwertes werden die Bildpunkte des kantenbetonten Bildes schwarz eingefärbt. Grauwerte, die unterhalb des Schwellwertes liegen, werden weiß eingefärbt.



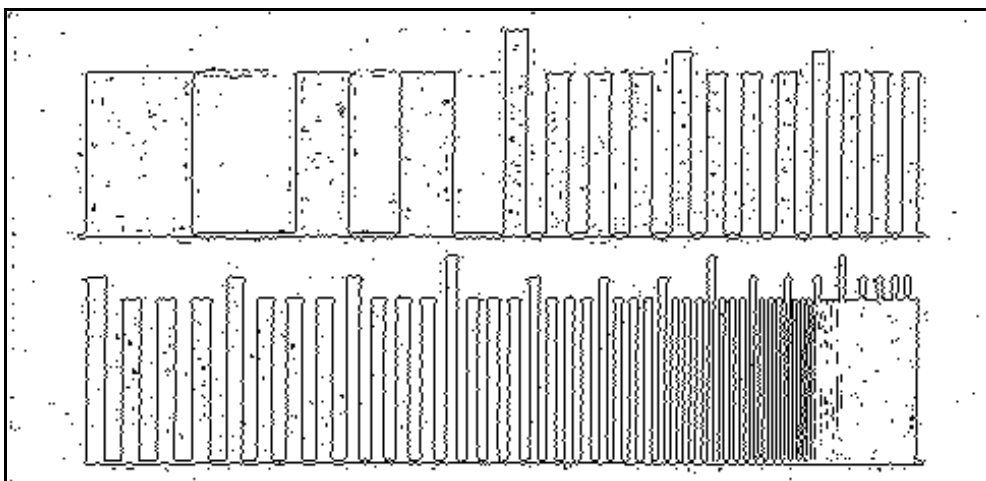
Figur 30. Aus dem kantenbetonten Bild erzeugte binäre Maske. Die Kantenregionen sind aufgrund der Wahl des Schwellwertes von 15 verhältnismäßig breit.

Innerhalb der Kantenregionen liegen die definierten Kanten. Der Glättungsalgorithmus ist in der Lage die Grauwerte desjenigen Bildes zu berechnen, welche aus der Anwendung des Laplaceoperators auf die Grauwerte des Originalbildes entstehen. Von Interesse ist hier der Verlauf der Höhenlinie bei $z(x,y)=0$ im verarbeiteten Bild. Diese Höhenlinien verlaufen strenggenommen zwischen den Pixelkoordinaten. Durch Rundung werden die Ergebnisse in das Pixelraster des Originals verschoben.



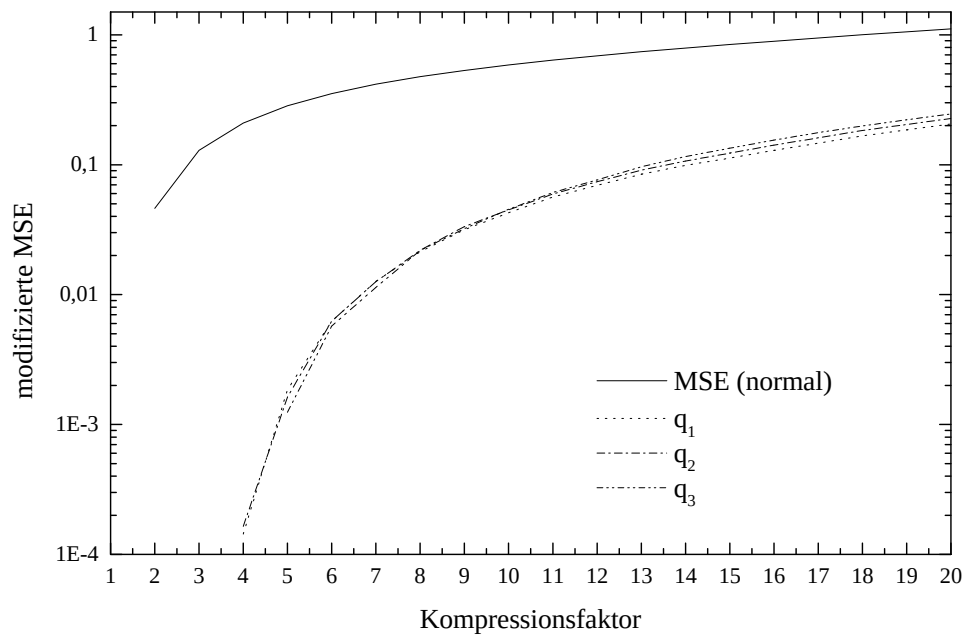
Figur 31. Binäre Maske zur Markierung der definierten Kanten (weiße Pixel). Aufgrund des Pixelrauschens werden neben den gesuchten Kanten auch Kanten innerhalb der diagnostisch irrelevanten Bildstrukturen sichtbar.

Aus der binären Maske des kantenbetonten Bildes (Figur 30) und der binären Maske aus Figur 31 erzeugt man ein Koinzidenzbild. Eine definierte Kante liegt nur dann vor, wenn die gefundenen Nullstellen innerhalb der Kantenregionen liegen. Man erhält das folgende Bild:



Figur 32. Aus den Figuren 30 und 31 gewonnenes Koinzidenzbild. Aufgrund des Pixelrauschens erscheinen die definierten Kanten an einigen Stellen ausgezackt.

Mit Hilfe der binären Masken in den Figuren 28, 30 und 32 erfolgt die Berechnung der Qualitätsparameter an den diagnostisch relevanten Stellen. Der flachere Verlauf der Kurven im Vergleich zum MSE in (204) ist auf die Division der Grauwertdifferenzen durch den als konstant angenommenen Fehler der Grauwerte zurückzuführen. Dieser ist im vorliegenden Fall gegeben durch $rs=1,77$ ($r=3$, $s=0,59$). Bis zu einem Kompressionsfaktor von acht wächst der Parameter q_1 am stärksten, der Parameter q_3 am schwächsten. Der Kompressionsalgorithmus erhält scharfe Kanten genauer im Vergleich zu den übrigen bedeutenden Bildregionen. Ab einem Kompressionsfaktor von elf kehrt sich der Trend um: q_3 wächst am stärksten, q_1 am schwächsten in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor. Dies ist auf die starken Grauwertänderungen (Gradienten) in den Kantenregionen des Röntgenphantom zurückzuführen. In einem realen Koronarangiogramm sind die Grauwertänderungen weit weniger stark.



Figur 33. Darstellung der Bildqualitätsparameter (modifizierte MSE) in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor. Aufgrund der Bedingung (211) sind die Bildqualitätsparameter in den interessierenden Bildregionen erst ab einem Kompressionsfaktor von vier von Null verschieden. Tabelle 2 enthält die dem Diagramm zugrundeliegenden Zahlenwerte.

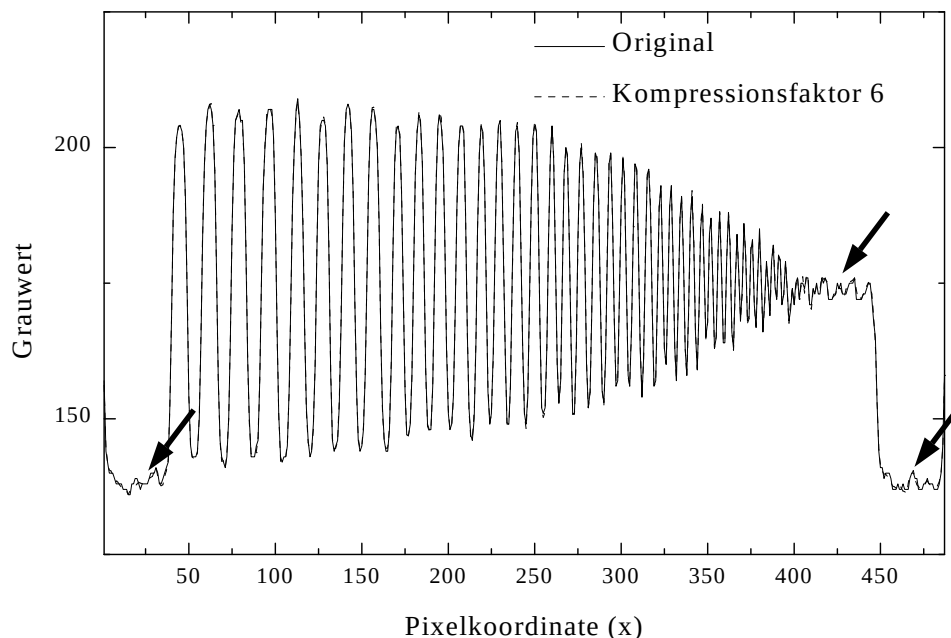
Kompres- sionsfaktor	MSE	q_1	q_2	q_3
1	0	0	0	0
2	0,04607	0	0	0
3	0,12905	0	0	0
4	0,20974	1,4351E-4	1,642E-4	0
5	0,28438	0,00185	0,00163	0,00124
6	0,35325	0,00623	0,00624	0,00572
7	0,41654	0,01264	0,01256	0,01136
8	0,47565	0,02134	0,0219	0,02184
9	0,53148	0,03165	0,03344	0,03217
10	0,58535	0,04268	0,04496	0,04535
11	0,63892	0,05649	0,05944	0,06111
12	0,68805	0,06947	0,0739	0,07646
13	0,74199	0,08446	0,09074	0,09646
14	0,79163	0,09894	0,10672	0,11574
15	0,84209	0,11246	0,12277	0,13399
16	0,89255	0,12918	0,14155	0,15468
17	0,94629	0,14634	0,1609	0,17654
18	1,00297	0,1666	0,18339	0,19877
19	1,05611	0,18535	0,2041	0,22161
20	1,11154	0,20562	0,22708	0,24595

Tabelle 2. Die Bildqualitätsparameter in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor geben den mittleren Kompressionsfehler pro Pixel in der betreffenden Bildregion wieder.

Mit Hilfe des Röntgenphantoms werden die Auswirkungen der verlustbehafteten Bilddatenkompression auf die Grauwerte und die Gradientenfelder untersucht. Mit wachsendem Kompressionsfaktor werden Grauwerte und abrupte Grauwertänderungen nicht mehr präzise wiedergegeben. Dies spiegelt sich auf zwei Arten wieder:

- 1) Das Histogramm der Grauwerte wird im Vergleich zum unkomprimierten Bild verzerrt.
- 2) Die Grauwertänderungen können ebenfalls in einem Histogramm dargestellt werden (Gradientenfeld). Hier führt ein wachsender Kompressionsfaktor zu einer Verzerrung des Gradientenfeldes.

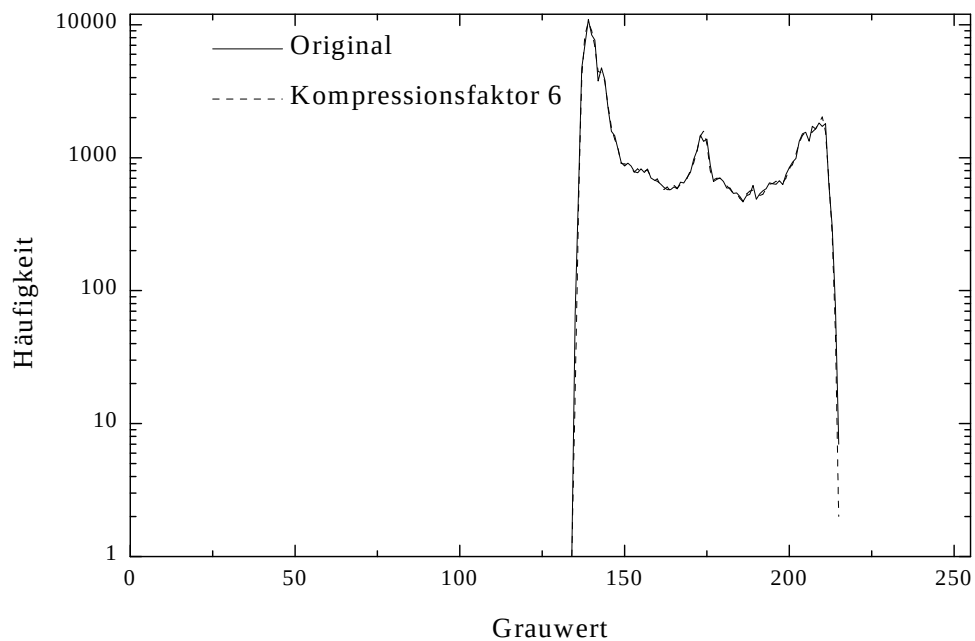
Man erwartet, daß die Verzerrungen von der Größe des Kompressionsfaktors abhängen. Anhand eines Profilschnittes durch das Röntgenphantom in Bildzeile 207 werden die Auswirkungen der verlustbehafteten Bilddatenkompression anhand von drei Beispielen verdeutlicht. Jedes Beispiel behandelt einen Kompressionsfaktor. Der Kompressionsfaktor wird so eingestellt, daß die Standardabweichung der Grauwertdifferenz zwischen Original und rekonstruiertem Bild in Bildzeile 207 ein ganzzahliges Vielfaches der Standardabweichung der Grauwerte des Originalbildes beträgt.



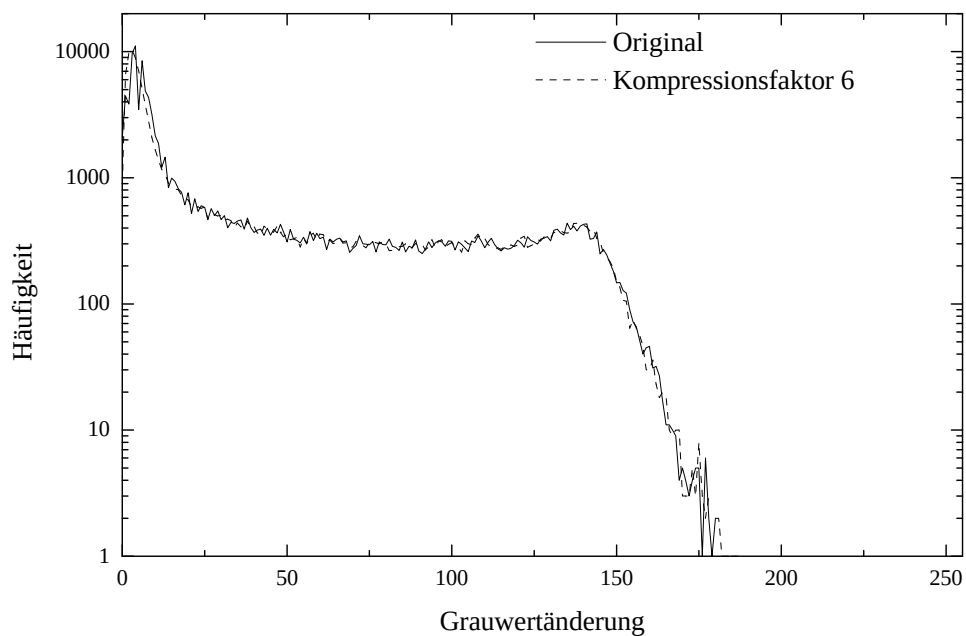
Figur 34. Grauwerte des Röntgenphantoms in Bildzeile 207. Die durchgezogene Linie stellt die Grauwerte im Originalbild dar. Die gestrichelte Linie verkörpert die durch das verlustbehaftete Kompressionsverfahren wiedergegebenen Grauwerte. Der Kompressionsfaktor ist 6. Man erkennt, daß bei diesem Kompressionsfaktor selbst feine Strukturen (siehe markierte Bereiche) genau wiedergegeben werden.

Aufgrund der Grauwertdynamik des Röntgenphantoms (Grauwerte zwischen 136 und 209) liefert ein direkter Vergleich der Grauwerte zwischen Original und verlustbehaftet rekonstruiertem Bild nur qualitative Aussagen über die Bildqualitätsverluste.

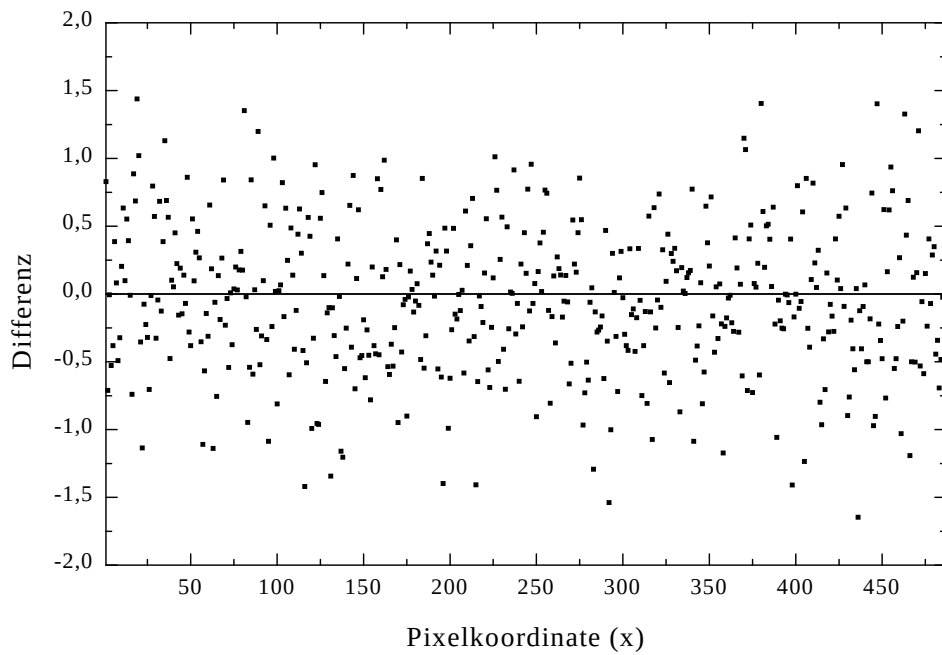
Durch die Darstellung der Differenz der Grauwerte zwischen dem Originalbild und dem verlustbehaftet komprimierten Bild erhält man Aufschlüsse darüber, in wie weit der Kompressionsalgorithmus Strukturen mit einer hohen Ortsfrequenz bei der Kompression/Dekompression unterdrückt. Dies kann im Frequenzraum mit Hilfe der Fouriertransformation untersucht werden. In beiden Fällen sind quantitative Aussagen über das Verhalten des Kompressionsalgorithmus als Tiefpaßfilter möglich.



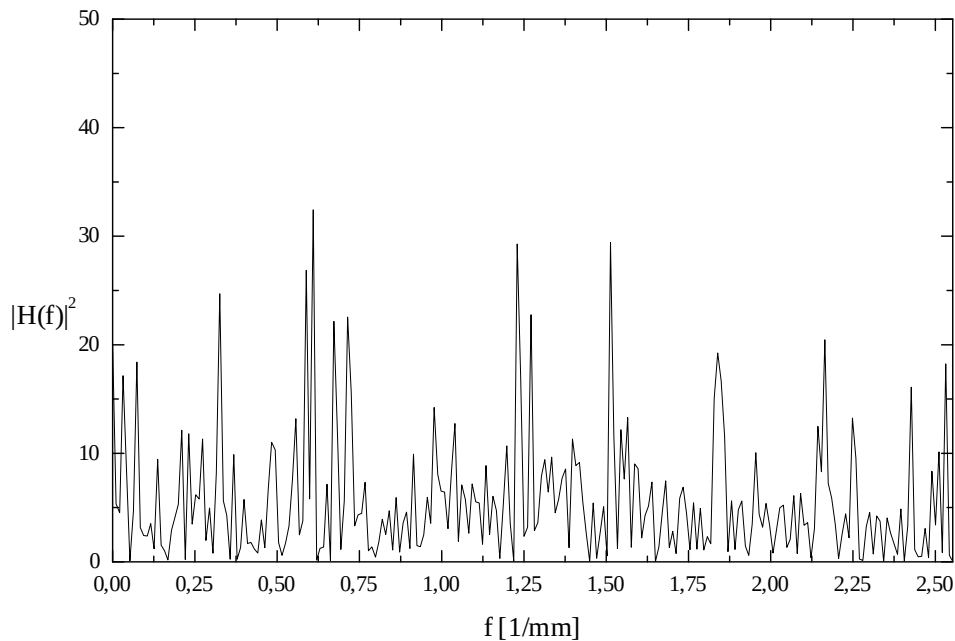
Figur 35. Histogramm der Grauwerte für das Originalbild und das komprimierte Bild. Der Kompressionsfaktor ist sechs. Hier erwartet man noch keine gravierenden Abweichungen der Grauwerte im verlustbehaftet rekonstruierten Bild. Die Histogramme sind nahezu identisch.



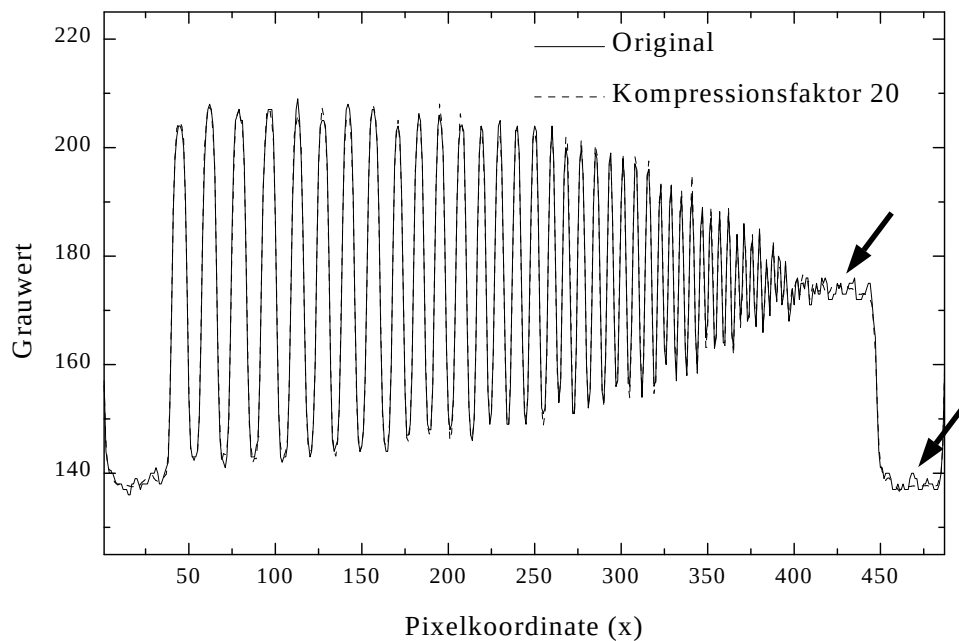
Figur 36. Histogramm der Grauwertänderungen für das Originalbild und das komprimierte Bild (Gradientenfelder). Der Kompressionsfaktor ist sechs. In der logarithmischen Darstellung sind bereits kleine Abweichungen zu erkennen. Diese sind auf die Funktion des Kompressionsalgorithmus als Tiefpaßfilter zurückzuführen. Sehr starke Grauwertänderungen werden nicht mehr originalgetreu wiedergegeben.



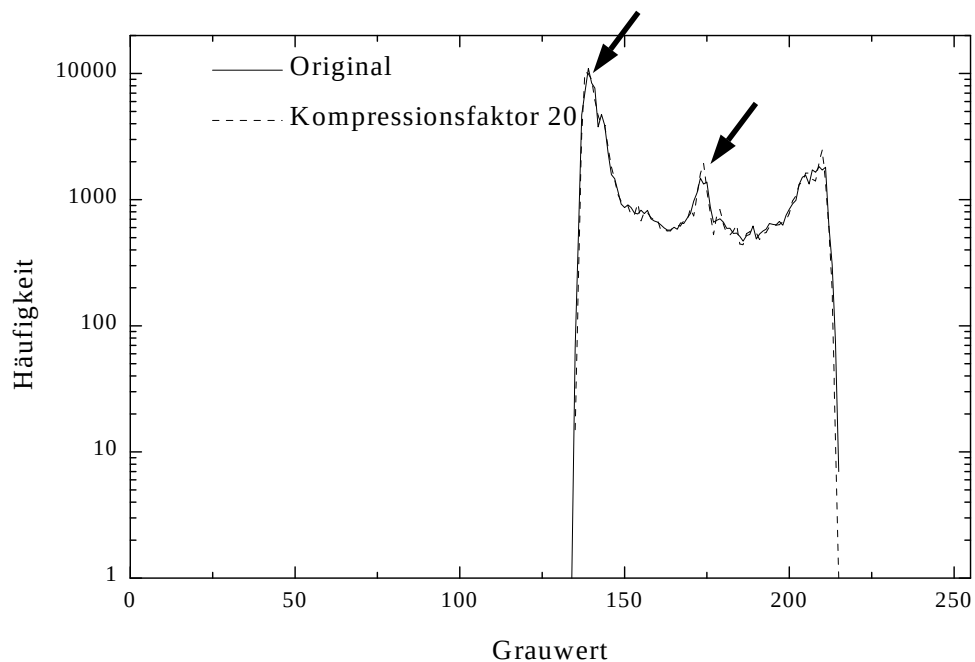
Figur 37. Darstellung der Differenz der Grauwerte zwischen Originalbild und verlustbehaftet komprimiertem Bild. Es handelt sich um den Profilschnitt der Bildzeile 207. Der Kompressionsfaktor ist 6. Der Mittelwert der Differenz ist 0,05, die Standardabweichung beträgt 0,55. Der Kompressionsfaktor wurde so gewählt, daß die Standardabweichung der Differenz näherungsweise der einfachen Standardabweichung der Grauwerte des Originalbildes entspricht. Diese beträgt 0,59 (s.o.).



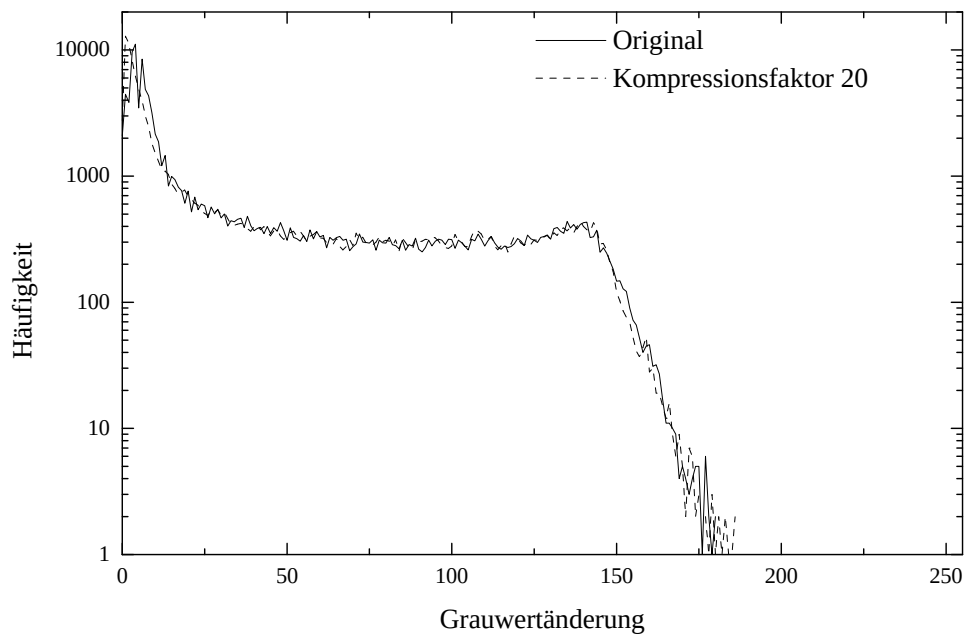
Figur 38. Darstellung der Fouriertransformation der Differenz der Grauwerte aus Figur 37. Aufgetragen ist das Betragsquadrat $|H(f)|^2$ der Amplitude $H(f)$ der Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von der Frequenz f . Die Gleichungen zur Berechnung der diskreten Fouriertransformation befinden sich in [22].



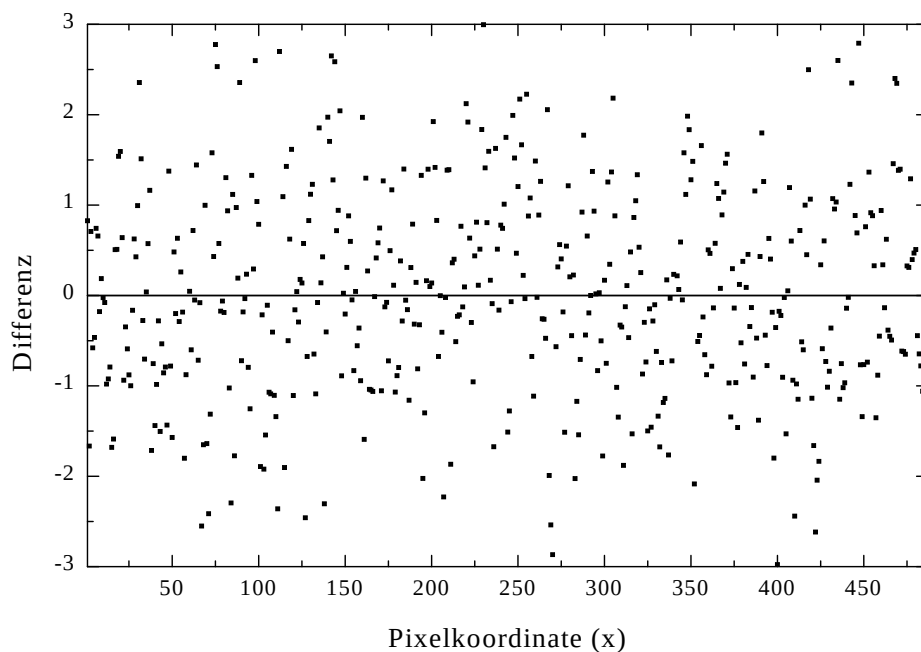
Figur 39. Darstellung der Grauwerte des Originalbildes und des verlustbehaftet komprimierten Bildes in Bildzeile 207. Der Kompressionsfaktor ist 20. Im Vergleich zu Figur 34 werden feine Strukturen nicht mehr so genau wiedergegeben (markierte Bereiche).



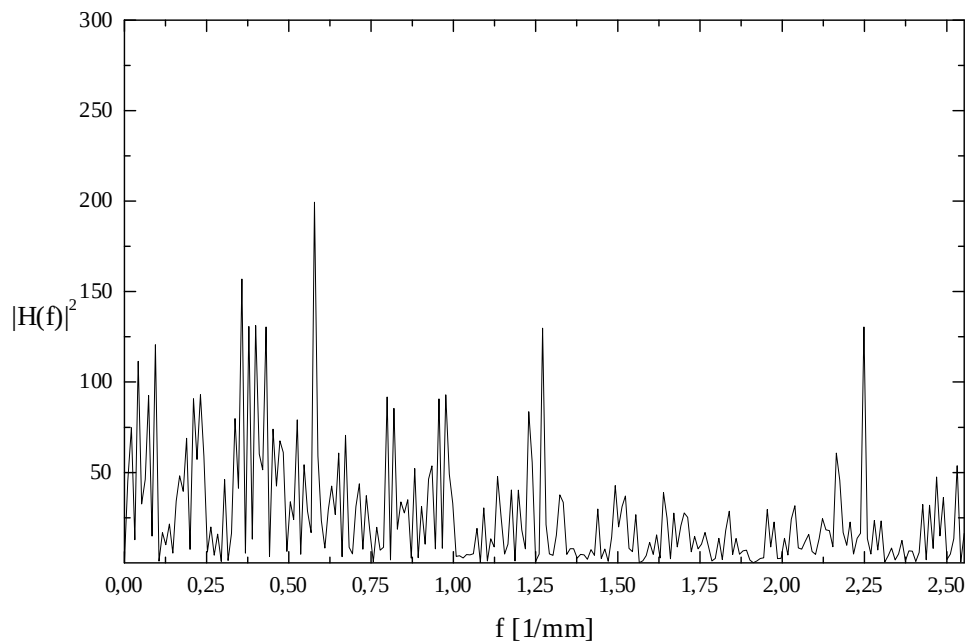
Figur 40. Histogramm der Grauwerte für das Originalbild und das komprimierte Bild. Der Kompressionsfaktor ist 20. Das im Bild vorhandene Pixelrauschen wird immer stärker geglättet. Dies trifft auf alle Bildregionen zu. In den Regionen mit vielen Linienpaaren (siehe Figur 23 rechts unten) liegen die Helligkeitsdifferenzen jedoch in der Größenordnung des Pixelrauschens. Hier werden Rauschen und Struktur geglättet. Daher sind Rekonstruktionsfehler hier häufiger als in anderen Bildbereichen. Dies führt zu einer stärkeren Umverteilung der Grauwerte (Grauwert $\approx$ 175) im Histogramm.



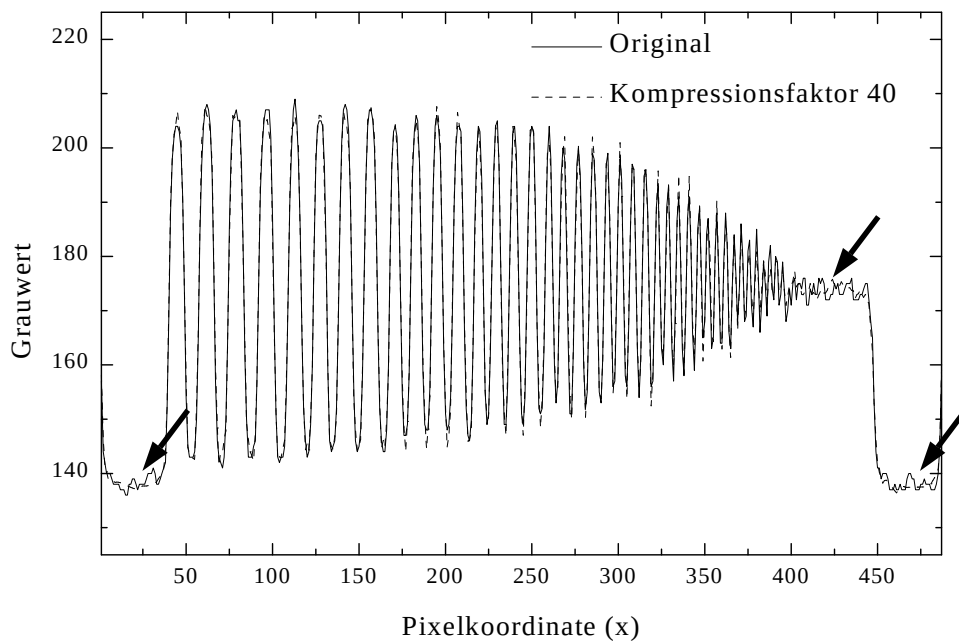
Figur 41. Grauwertänderungen für den Kompressionsfaktor 20. Starke Grauwertänderungen werden immer schlechter wiedergegeben. Dies fällt am rechten Rand des Histogramms auf. Aufgrund der Glättung des Pixelrauschens verschieben sich auch die schwachen Grauwertänderungen noch weiter nach links, wie man am äußersten linken Rand des Histogramms erkennt.



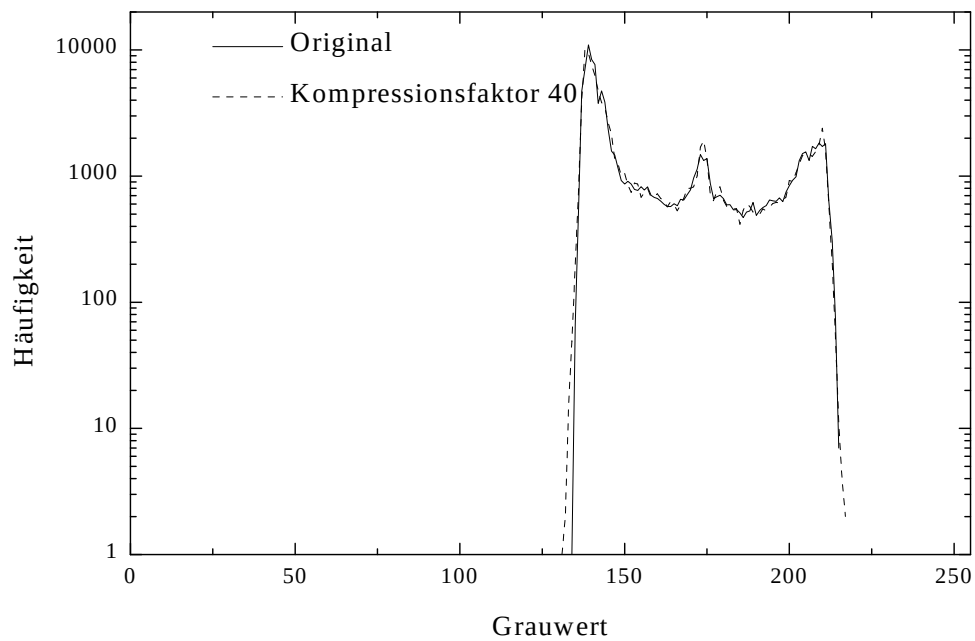
Figur 42. Darstellung der Differenz der Grauwerte zwischen Originalbild und verlustbehaftet komprimiertem Bild. Es handelt sich um den Profilschnitt der Bildzeile 207. Der Kompressionsfaktor ist 20. Der Mittelwert der Differenz ist 0,01, die Standardabweichung beträgt 1,18. Die Standardabweichung der Differenz näherungsweise der doppelten Standardabweichung der Grauwerte des Originalbildes (0,59) entspricht.



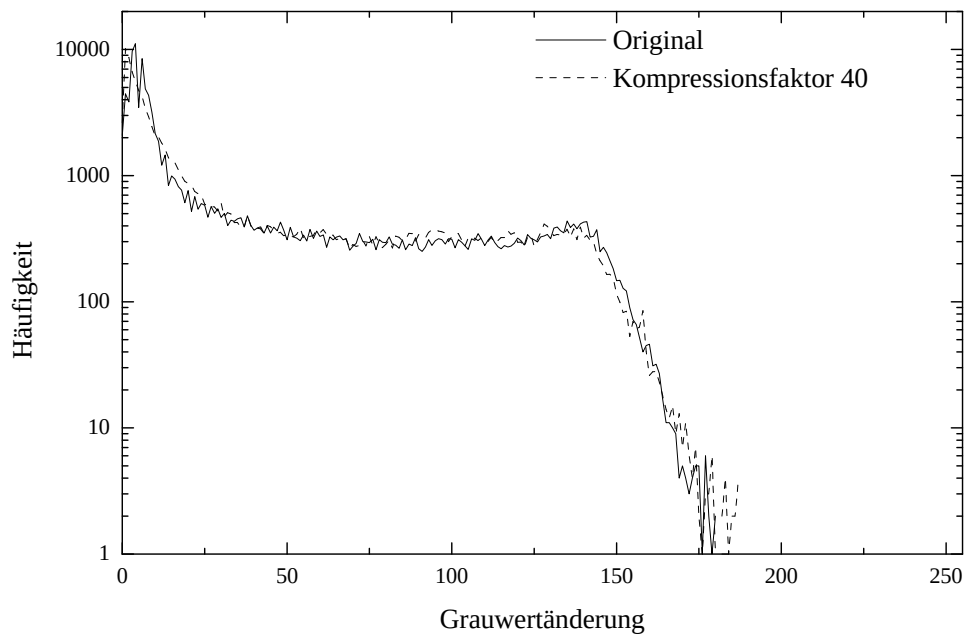
Figur 43. Darstellung der Fouriertransformation der Differenz der Grauwerte aus Figur 42. Aufgetragen ist das Betragsquadrat $|H(f)|^2$ der Amplitude $H(f)$ der Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von der Frequenz f . Der Kompressionsfaktor beträgt 20.



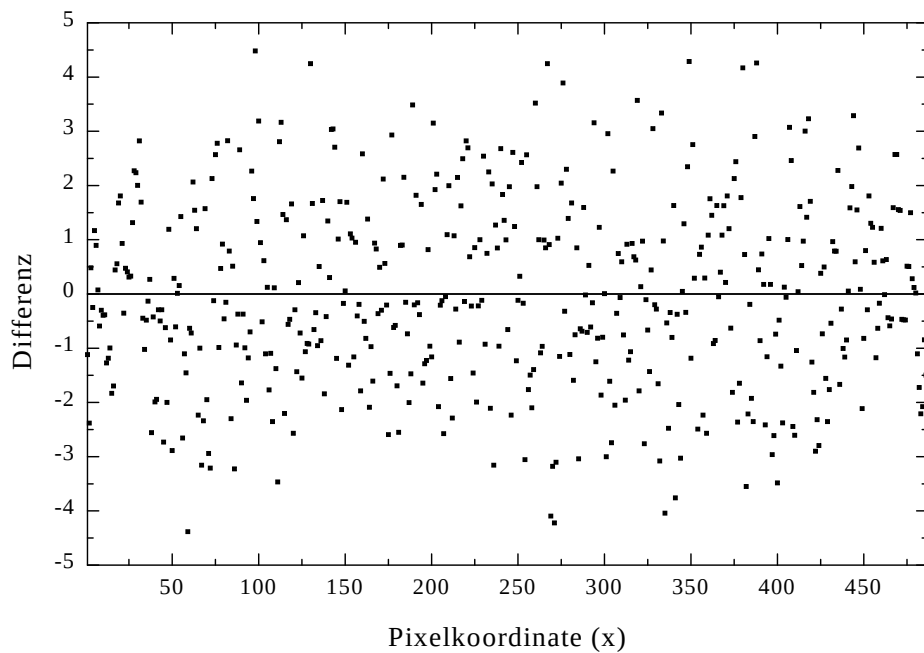
Figur 44. Darstellung der Grauwerte des Originalbildes und des verlustbehaftet komprimierten Bildes in Bildzeile 207. Der Kompressionsfaktor ist 40. Im Vergleich zu den Figuren 34 und 39 werden feine Strukturen immer stärker geglättet, siehe markierte Bereiche.



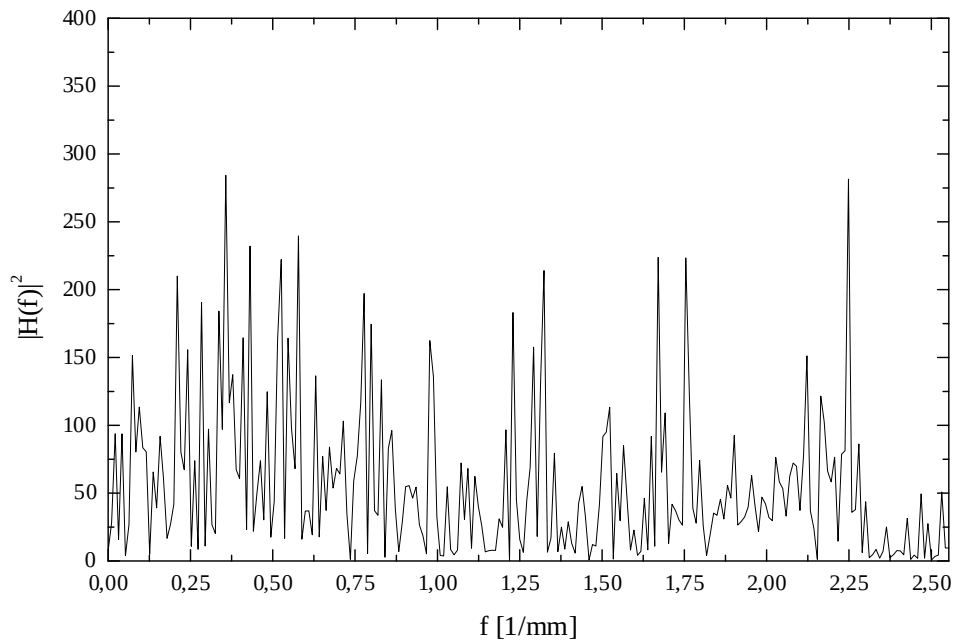
Figur 45. Histogramm der Grauwerte für das Originalbild und das komprimierte Bild. Der Kompressionsfaktor ist 40. Grauwerte werden immer stärker geglättet. Die Folge ist eine Umverteilung der Grauwertänderungen.



Figur 46. Darstellung der Grauwertänderungen (Gradientenfelder) für den Kompressionsfaktor 40. Das Histogramm verdeutlicht den Trend der immer ungenaueren Reproduktion starker Gradienten.

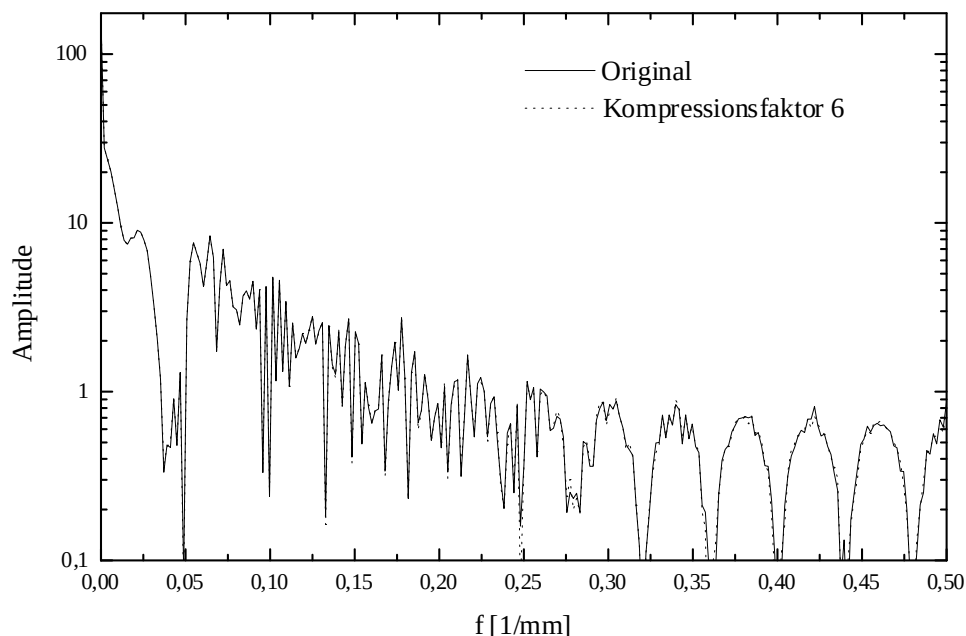


Figur 47. Darstellung der Differenz der Grauwerte zwischen Originalbild und verlustbehaftet komprimiertem Bild. Es handelt sich um den Profilschnitt der Bildzeile 207. Der Kompressionsfaktor ist 40. Der Mittelwert der Differenz ist 0,03, die Standardabweichung beträgt 1,75. Der Kompressionsfaktor wurde so gewählt, daß die Standardabweichung der Differenz näherungsweise der dreifachen Standardabweichung der Grauwerte des Originalbildes (0,59) entspricht.



Figur 48. Darstellung der Fouriertransformation der Differenz der Grauwerte aus Figur 47. Aufgetragen ist das Betragsquadrat $|H(f)|^2$ der Amplitude $H(f)$ der Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit von der Frequenz f . Der Kompressionsfaktor beträgt 40.

Die Bildqualitätsparameter für das Röntgenphantom sind als reine Zahlenwerte für den Betrachter ohne Bedeutung. Es gilt, einen Zusammenhang zwischen den Parametern einerseits und den tatsächlichen Bildqualitätsverlusten andererseits herzustellen. Bildqualitätsverluste sind im Fall des Phantombildes gleichbedeutend mit einem Verlust an Auflösung. Aufgrund der ungenügenden Reproduktion der Grauwerte infolge verlustbehafteter Bilddatenkompression verschlechtert sich die Auflösung, was einem Verlust von Details entspricht. Der Betrachter kann anhand des Profilschnittes beurteilen, welche Details noch sicher erkennbar sind*. Quantifizierbar wird dies mit Hilfe der Anzahl der Linienpaare pro mm welche trotz verlustbehafteter Bilddatenkompression ausreichend gut wiedergegebene werden. Für den Kompressionsfaktor sechs treten praktisch keine sichtbaren Bildqualitätsverluste auf. Dies führt zu den Bildqualitätsparameter $q_1 = 0,00623$, $q_2 = 0,00624$ und $q_3 = 0,00572$ (siehe Tabelle 1). Ab einem Kompressionsfaktor von 20 treten erste Bildqualitätsverluste auf. Es sind nur noch 1,4 oder weniger Linienpaare pro mm zu erkennen. Dies entspricht Strukturen mit einer Breite größer als 0,7 mm. Dieser Bildqualitätsverlust wird den Qualitätsparametern $q_1 = 0,20562$, $q_2 = 0,22708$ und $q_3 = 0,24595$ zugeordnet (siehe Tabelle 1). Ab einem Kompressionsfaktor von 40 ist nur noch 1 Linienpaar pro mm (oder weniger) einwandfrei zu erkennen (Bildetails mit einer Breite von mehr als 1mm). Dies entspricht den (nicht in Tabelle 1 aufgeführten) Qualitätsparametern $q_1 = 0,78942$, $q_2 = 0,89146$ und $q_3 = 0,99787$. Für das Röntgenphantom besteht ein Zusammenhang zwischen den berechneten Bildqualitätsparametern q_1 , q_2 und q_3 und der Anzahl der Linienpaare/mm welche noch korrekt wiedergegeben werden.

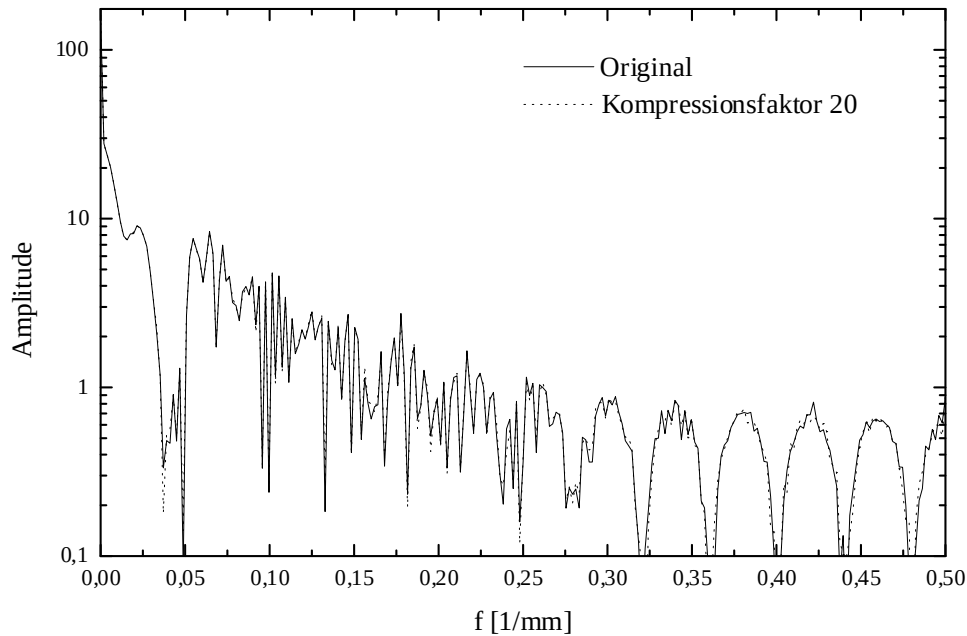


Figur 49. FFT der Bildzeile 207 des Röntgenphantoms. Die gepunktete Linie beschreibt die FFT derselben Bildzeile nach verlustbehafteter Bilddatenkompression. Es sind kaum Unterschiede zu erkennen.

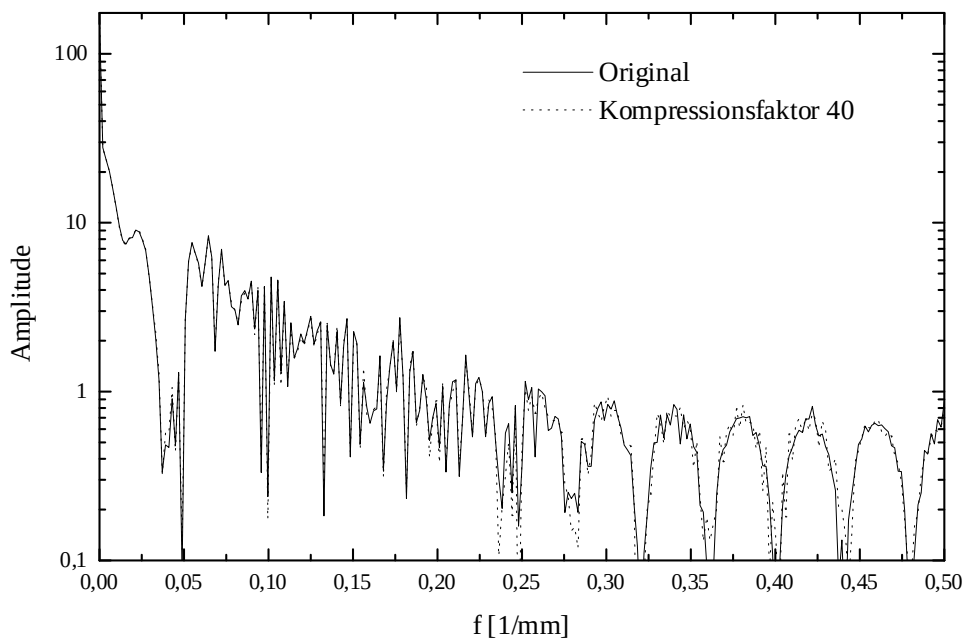
Die durch die verlustbehaftete Bilddatenkompression hervorgerufenen Fehler hängen nicht vom Kontrast innerhalb des Röntgenphantoms ab. Kontrastreiche und kontrastarme Bildregionen sind

* Die Profilschnitte des Röntgenphantoms erlauben eine objektivere Beurteilung des Bildqualitätsverlustes im Vergleich zur visuellen Beurteilung. Die visuelle Beurteilung erfordert die Festlegung von Betrachtungsbedingungen, wie dem Abstand Auge-Bildschirm und der Umgebungshelligkeit. Darüber hinaus muß festgelegt werden, ob die Beurteilung der Bildqualitätsverluste an Hochkontrast- oder Standardmonitoren stattfindet.

gleichermaßen von Bildqualitätsverlusten betroffen (siehe Figuren 37, 42 und 47). Die Fourierspektren [22] der Figuren 37, 42 und 47 spiegeln dies ebenfalls wieder. Das Leistungsvermögen des Kompressionsalgorithmus wird durch einen direkten Vergleich der Fourierspektren des Profilschnittes in Bildzeile 207 in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor wiedergegeben, siehe Figuren 49, 50 und 51.



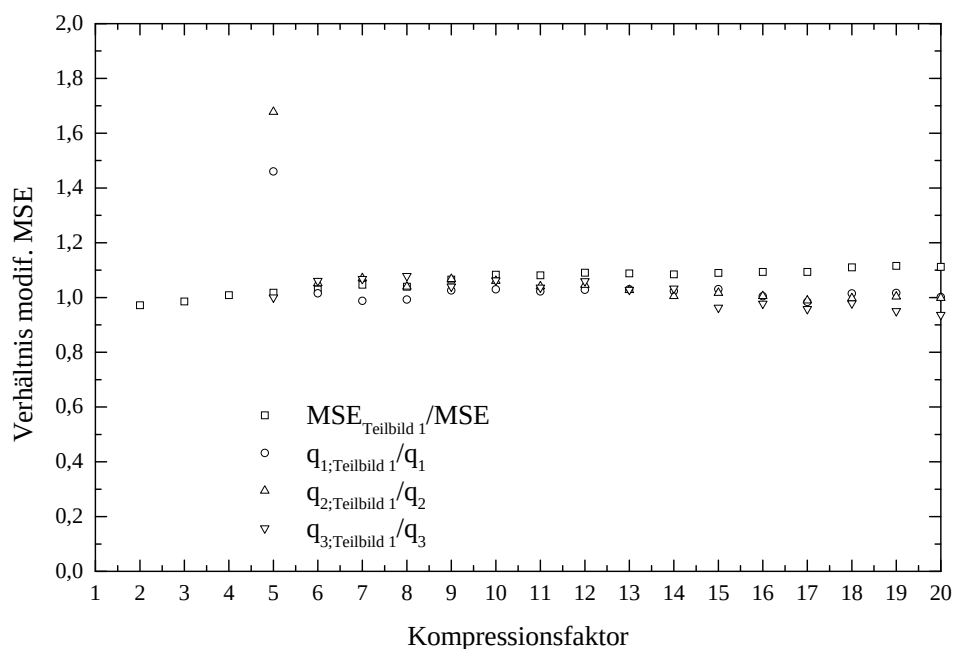
Figur 50. FFT der Bildzeile 207 (Original und nach verlustbehafteter Bilddatenkompression) des Röntgenphantoms. Die Unterschiede zwischen den Spektren sind nicht gravierend. Der Kompressionsalgorithmus gibt feine Strukturen genau wieder.



Figur 51. FFT der Bildzeile 207 (Original und nach verlustbehafteter Bilddatenkompression) des Röntgenphantoms. Obwohl 97,5% der für die Reproduktion notwendigen Entwicklungskoeffizienten verlorengehen, ist die Reproduktion ausreichend.

Aus den Figuren 37, 42 und 47 geht hervor, daß der Kompressionsfehler für die untersuchten Kompressionsfaktoren sechs, 20 und 40 nicht vom Bildrauschen zu unterscheiden ist. Die Differenz von Grauwerten im komprimierten Bild zum Originalbild entspricht der statistischen Fluktuation von Grauwerten in Bildern mit intrinsischem Rauschen. Der Größe des Kompressionsfehlers hängt nicht vom im Bild vorhandenen Kontrast ab.

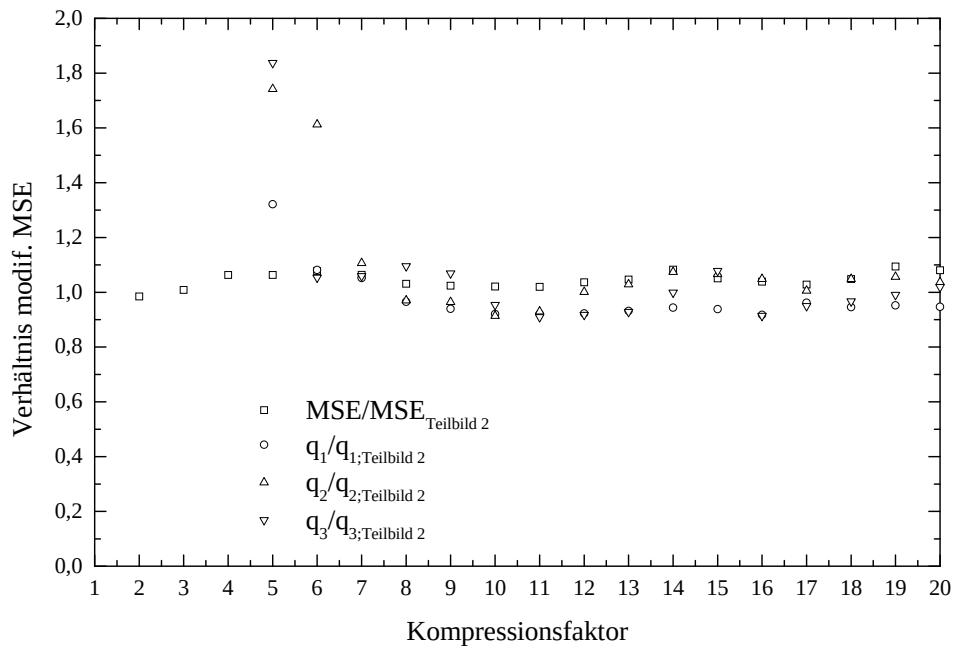
Anhand von zwei Teilbildern innerhalb des Röntgenphantoms wird untersucht, inwieweit sich die Auswahl einer bestimmten Bildregion auf die Bildqualitätsparameter auswirkt. Das erste Teilbild ist im Vergleich zum zweiten Teilbild kontrastreich. Die Bildqualitätsparameter in den Bildausschnitten werden berechnet und ins Verhältnis zu den Ergebnissen des Gesamtbildes gesetzt.



Figur 52. Verhältnisse der Qualitätsparameter ($MSE_{\text{Teilbild 1}}$, $q_{i;\text{Teilbild 1}}$, $i = 1, 2, 3$) in Teilbild 1 zu den Qualitätsparametern (MSE , q_i , $i = 1, 2, 3$) aus Tabelle 2. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor dargestellt. Teilbild 1 entstammt dem Röntgenphantom. Der Bildausschnitt reicht von Pixelkoordinate (46,178) bis Pixelkoordinate (174,278). Dies entspricht der ersten Liniengruppe (bestehend aus vier Linienpaaren) in der unteren Reihe (Figur 23).

Aus den Figuren 52 und 53 geht hervor, daß die berechneten Bildqualitätsparameter für höhere Kompressionsfaktoren (Kompressionsfaktor sechs in Figur 52, Kompressionsfaktor sieben in Figur 53) in den Teilbildern nicht wesentlich von den berechneten Bildqualitätsparametern im Gesamtbild abweichen. Für Kompressionsfaktoren kleiner als sechs oder sieben ergeben sich größere Abweichungen. Hier ist die Zahl der Pixelkoordinaten zur Erfüllung von Bedingung (210) zu gering, um einen Trend festzulegen.

Für die quantitative Beurteilung der Bildqualitätsverluste kommt es nicht auf die Auswahl von Teilbildern an. Aufgrund der Normierung in Gleichung (211) werden für Kompressionsfaktoren ab sechs oder sieben vergleichbare Ergebnisse erzielt.



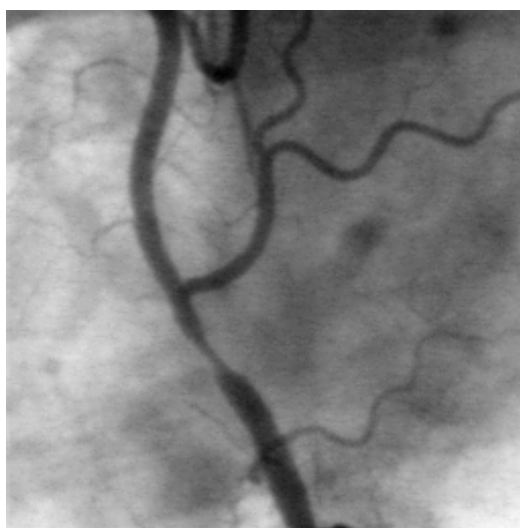
Figur 53. Verhältnisse der Qualitätsparameter ($MSE_{\text{Teilbild 2}}$, $q_{i;\text{Teilbild 2}}$, $i=1,2,3$) in Teilbild 2 zu den Qualitätsparametern (MSE , q_i , $i=1,2,3$) aus Tabelle 2. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit vom Komppressionsfaktor dargestellt. Teilbild 2 entstammt dem Röntgenphantom. Der Bildausschnitt reicht von Pixelkoordinate (352,178) bis Pixelkoordinate (462,278). Dies entspricht den letzten vier Liniengruppen (bestehend aus je vier Linienpaaren) in der unteren Reihe (Figur 23).

Anhand des Röntgenphantoms können qualitative Aussagen über die Leistungsfähigkeit der Algorithmen zur Bestimmung der binären Masken getroffen werden.

- Im Röntgenphantom konnten die Grauwerte der diagnostisch unwichtigen Bildregionen durch ein Polynom vom Grad zwei angenähert werden. Der Polynomgrad wurde aufgrund der Betrachtung von Profilschnitten bestimmt. Gleichung (164) wurde nicht benutzt. Wenn es eine begründete Vermutung über den Grad des Polynoms zur Anpassung an die Grauwerte der diagnostisch unbedeutenden Bildregionen gibt, sollte diese angewandt werden.
- Die Sobel-Masken eignen sich zur Bestimmung von Kantenregionen. Ihre Wirkungsweise ist nicht auf eine bestimmte Art von Bildern beschränkt. Lediglich der Schwellwert zur Erzeugung der zugehörigen binären Maske muß vom Anwender vorgegeben werden. Die Wahl des Schwellwertes ist subjektiv. Der Anwender entscheidet anhand der Auswahl verschiedener Schwellwerte, ob die resultierende binäre Maske seinen Anforderungen genügt.
- Das Verfahren zur Bestimmung scharfer Kanten liefert in kontrastreichen Bildregionen richtige Ergebnisse. Man erkennt, daß das Verfahren ab einer Auflösung von zwei Linienpaaren/mm scharfe Kanten bruchstückhaft wiedergibt (Figur 32, rechts unten). Die Röntgenfernsehkette erlaubt bei feineren Auflösungen als zwei Linienpaaren/mm keine Unterscheidung der Rasterstreifen mehr.

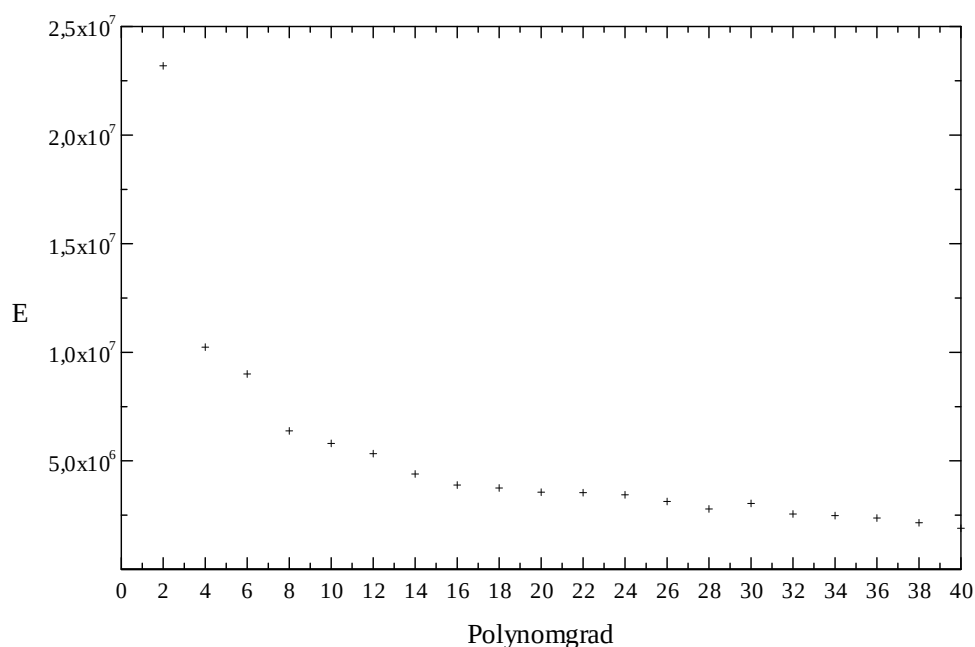
5.2 Überprüfung der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen an einem kontrastreichen Koronarangiogramm

Die Wirkungsweise der Algorithmen zur Bestimmung binärer Masken wird an einem Koronarangiogramm untersucht. Im Gegensatz zu Abschnitt 5.1 hat man unterschiedlich stark ausgeprägte Kontraste. Starke und schwache Kontraste können in unmittelbarer Nachbarschaft liegen.



Figur 54. Koronarangiogramm mit den Abmessungen 256×256 Pixel. Lediglich die dunkelgrauen Gefäße sind diagnostisch bedeutsam.

Das Verfahren zur Filterung der diagnostisch relevanten Bildstrukturen ist in Abschnitt 3 beschrieben. Man kann davon ausgehen, daß den Grauwerte des Bildes ein gaußförmiges Rauschen überlagert ist. Der Mittelwert des Rauschens ist 0. Dessen Standardabweichung wird mit dem in Abschnitt 4 vorgestellten Glättungsalgorithmus bestimmt.

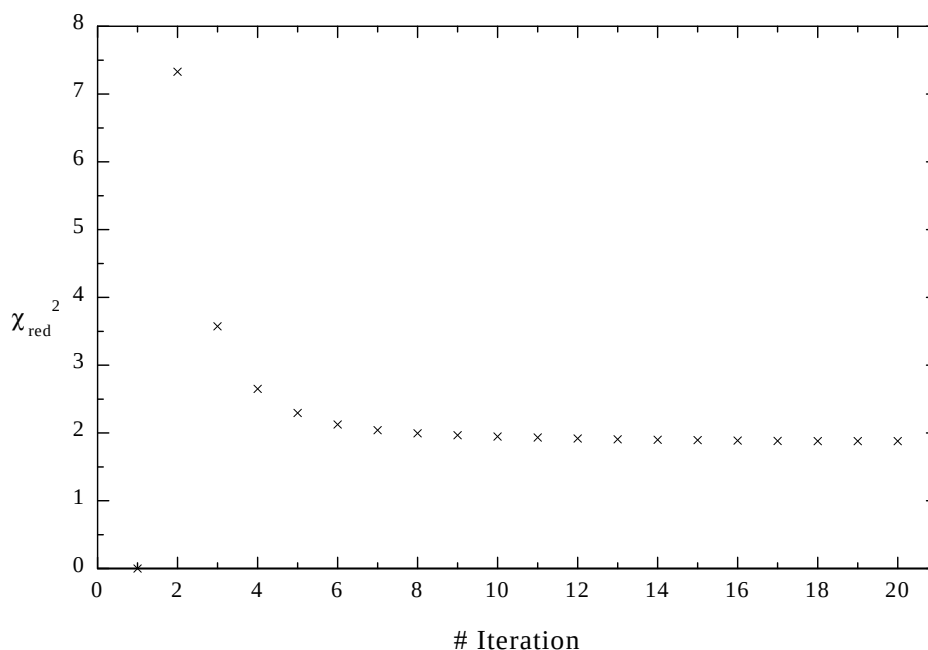


Figur 55. Bestimmung des Polynomgrades zur Anpassung an die diagnostisch unbedeutenden Strukturen. Zur Bestimmung von E siehe Gleichung (162).

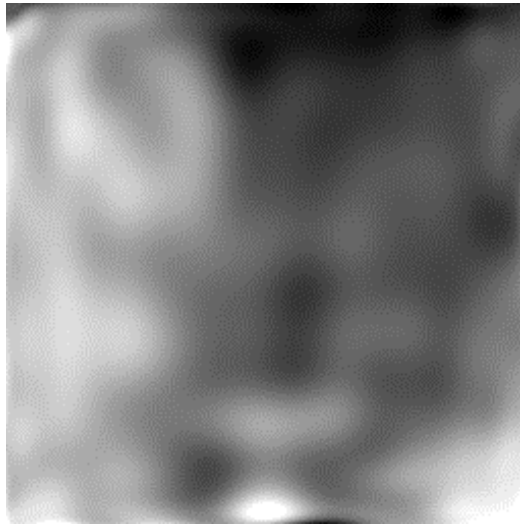
Wählt man für die Glättung die Fensterbreite $m=1$ und einen Polynomgrad von 2, erhält man für die Standardabweichung des Rauschens den Wert $\sigma=0,43$. Der Wert für r wurde auf 3 gesetzt. Dies

gewährleistet, daß bei einer wiederholten Messung des Koronarangiogramms in 99,7% der Fälle die Grauwerte im Intervall $[z_{x,y}^{wahr} - 3\sigma, z_{x,y}^{wahr} + 3\sigma]$ liegen. Lediglich der Grad des zweidimensionalen Polynoms zur Filterung der kontrastmittelgefüllten Gefäße ist unklar. Mit der in Abschnitt 3 (siehe Gleichung (162)) beschriebenen Methode kann man den Grad des zur Anpassung an die diagnostisch unbedeutenden Regionen vorgesehenen Polynoms ermitteln, siehe Figur 55. Im vorliegenden Fall bestimmt man den optimalen Grad des Polynoms zu 22. Hier ändert sich der Wert für E im Vergleich zum vorangegangenen Wert (Polynomgrad 20) um weniger als 1%. Je höher der Grad des Polynoms gewählt wird, desto genauer wird die Anpassung an die für die Befundung unbedeutenden Strukturen. Eine zu hohe Wahl des Polynomgrades ermöglicht es dem Algorithmus, eine Anpassung auch in den diagnostisch relevanten Regionen durchzuführen. Dies ist nicht erwünscht. In Figur 55 erkennt man dies daran, daß der Wert für E mit wachsendem Polynomgrad sinkt.

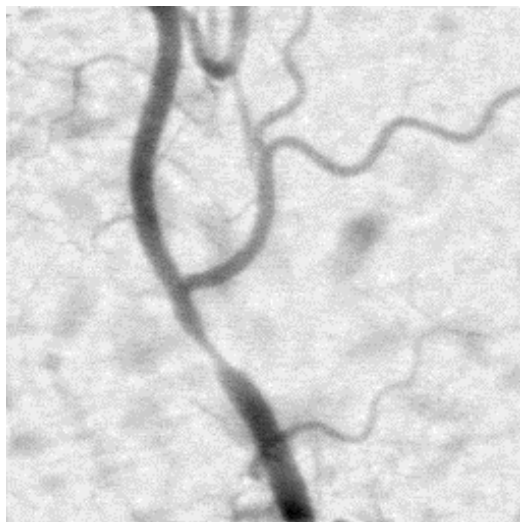
Es interessiert auch, ob das Verfahren für den Polynomgrad 22 sicher gegen die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen konvergiert. Figur 56 verdeutlicht den Verlauf der Anpassung. Hier ist ersichtlich, daß der Wert für χ_{red}^2 nicht wie erwartet gegen 1 sondern gegen 1,88 konvergiert. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Wert für σ , der in die Anpassung eingeht, zu klein bestimmt wurde. Dies ist in Einklang mit der Argumentation in Abschnitt 4. Die Anpassungsprozedur führt auf ein Bild, in dem nur das Herzmuskelgewebe zu erkennen ist. In den diagnostisch relevanten Gefäßregionen fand keine Anpassung an die Grauwerte statt. Der Algorithmus interpoliert aufgrund des adaptiven Gewichtungsschemas in diesen Bereichen.



Figur 56. Verlauf der Anpassung an die für die Diagnose nicht bedeutenden Strukturen. Der Polynomgrad ist 22. Das Verfahren konvergiert sicher. Dargestellt sind 20 Iterationen. In der ersten Iteration gehen alle 256×256 Pixel in die Anpassung ein. Ab der neunten Iteration ändert sich der Wert für χ_{red}^2 in zwei aufeinanderfolgenden Iterationen um weniger als 1%. In der neunten Iteration beträgt die Zahl der in die Anpassung eingehenden Punkte 29111 in der zwanzigsten dagegen 29018. Der Algorithmus hätte früher abgebrochen werden können.

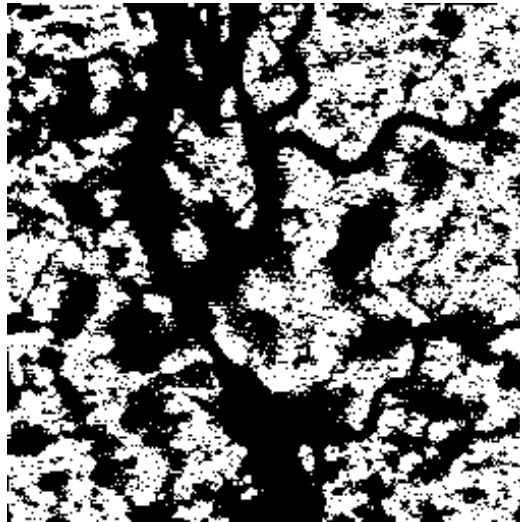


Figur 57. Darstellung des Herzmuskelgewebes, in das die Gefäße eingebettet sind. Die Anpassungsprozedur konnte erfolgreich zwischen den diagnostisch unbedeutenden und bedeutenden Bildregionen unterscheiden.

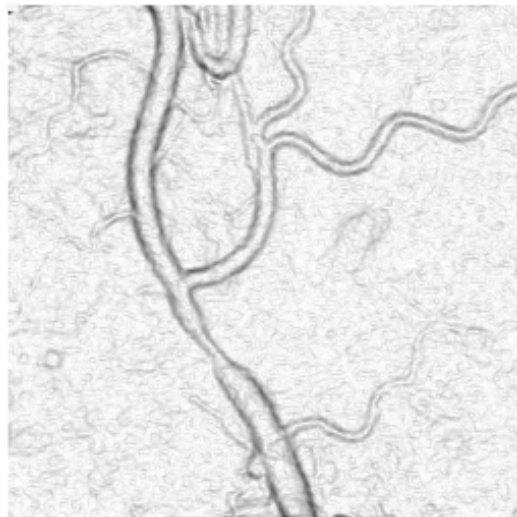


Figur 58. Darstellung des Differenzbildes aus den Figuren 54 und 57. Die kontrastmittelgefüllten Gefäße sind besser zu erkennen. Offensichtlich eignet sich das Verfahren zur Anpassung an die für die Diagnose unbedeutenden Strukturen hier zur Kontrastverbesserung.

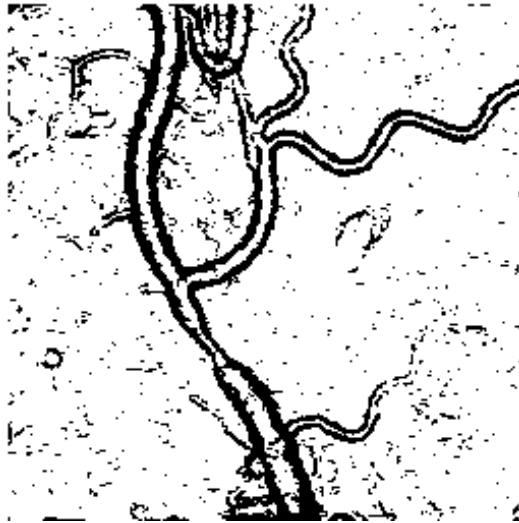
Figur 58 selbst stellt jedoch noch keine binäre Maske dar, welche die diagnostisch bedeutsamen Bereiche vom Herzmuskelgewebe trennt. Diese Maske fällt bei der Anpassungsprozedur automatisch an, siehe Figur 59.



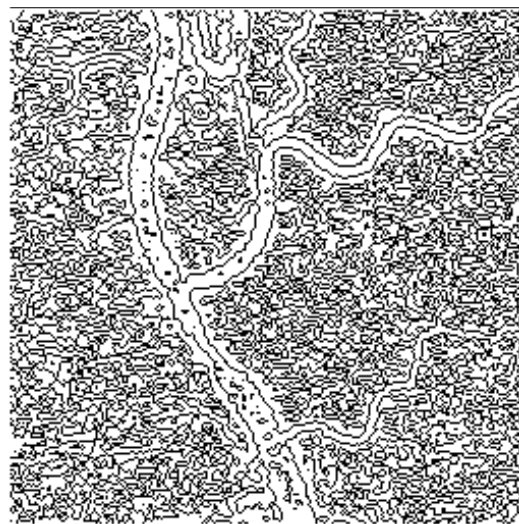
Figur 59. Binäre Maske, welche die diagnostisch bedeutenden Bildbereiche markiert. Die wichtigen Regionen sind schwarz. Bildpunkte, die zum Herzmuskelgewebe gehören sind weiß.



Figur 60. Mit Hilfe der Sobel-Masken erzeugtes kantenbetontes Bild (Bildnegativ). Bereits hier erkennt man, daß die Kantenregionen eine bestimmte Breite haben.



Figur 61. Darstellung der binären Maske für die Kantenregionen. Zur Erzeugung der binären Maske wurde der Schwellwert in Figur 60 subjektiv auf 15 Grauwerte gesetzt.

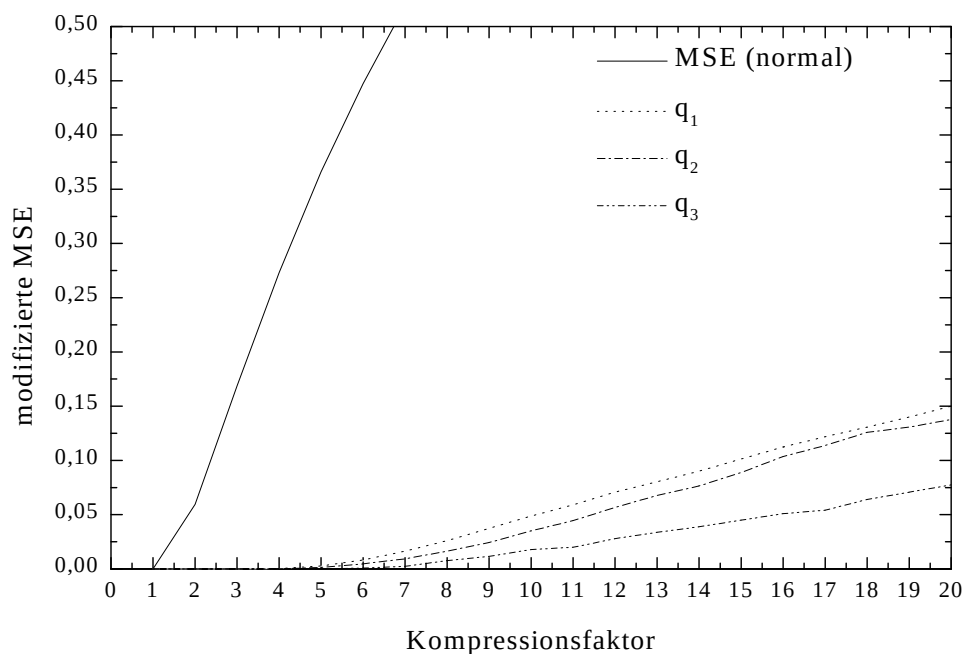


Figur 62. Erkennung der scharfen Kanten. Zur Berechnung wurde die Fensterbreite $m=1$ gewählt. Der Polynomgrad ist 2. Aufgrund des Bildrauschens findet der Glättungsalgorithmus sehr viele scharfe Kanten.



Figur 63. Darstellung der scharfen Kanten innerhalb der Kantenregionen (Bildnegativ).

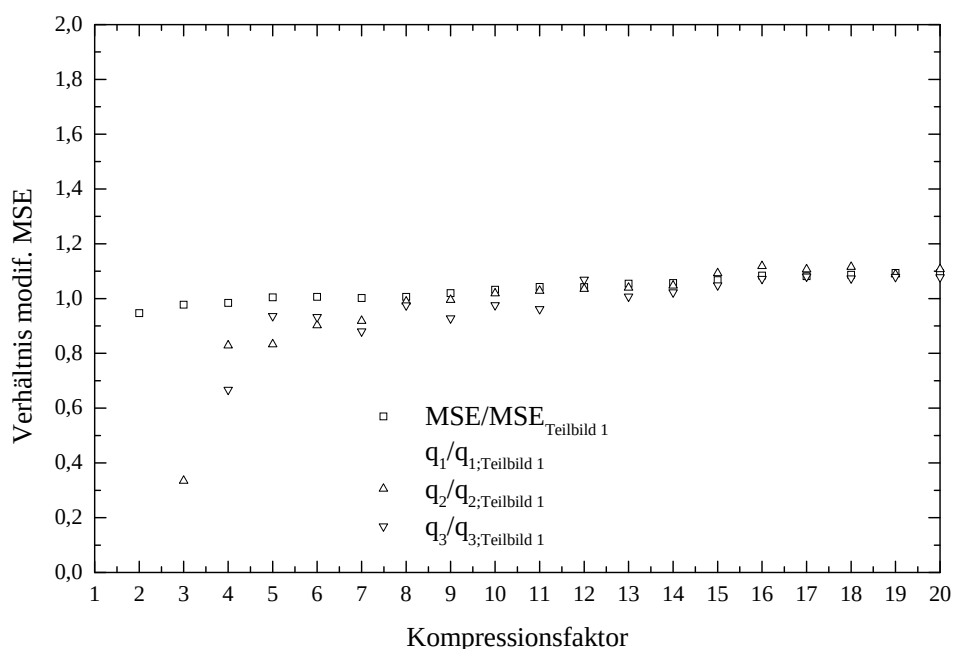
Anhand der binären Masken aus den Figuren 59, 61 und 63 werden die Qualitätsparameter an den diagnostisch relevanten Stellen berechnet. In Figur 64 ist die Abhängigkeit der Qualitätsparameter vom Kompressionsfaktor wiedergegeben. Der flachere Verlauf der Kurven im Vergleich zum MSE (204) ist auf die Division des Kompressionsfehlers ($z_{x,y}^{comp} - z_{x,y}$) durch den als konstant angenommenen Fehler der Grauwerte im Originalbild zurückzuführen. Dieser ist im vorliegenden Fall gegeben durch $rs=1,29$ ($r=3$, $s=0,43$). Der Kompressionsalgorithmus reproduziert durchgängig die Grauwerte in den scharfen Kanten am genauesten. Die Grauwerte in den Kantenregionen werden etwas ungenauer, die Grauwerte in den Gefäßregionen im Vergleich hierzu am ungenauesten wiedergegeben. Für die Wahrnehmung ist die genaue Reproduktion der Grauwerte in den scharfen Kanten maßgeblich.



Figur 64. Qualitätsparameter des Koronarangiogramms in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor. Aufgrund von (211) hat man erst bei einem Kompressionsfaktor von vier nichtverschwindende Bildqualitätsparameter. Siehe auch Tabelle 3.

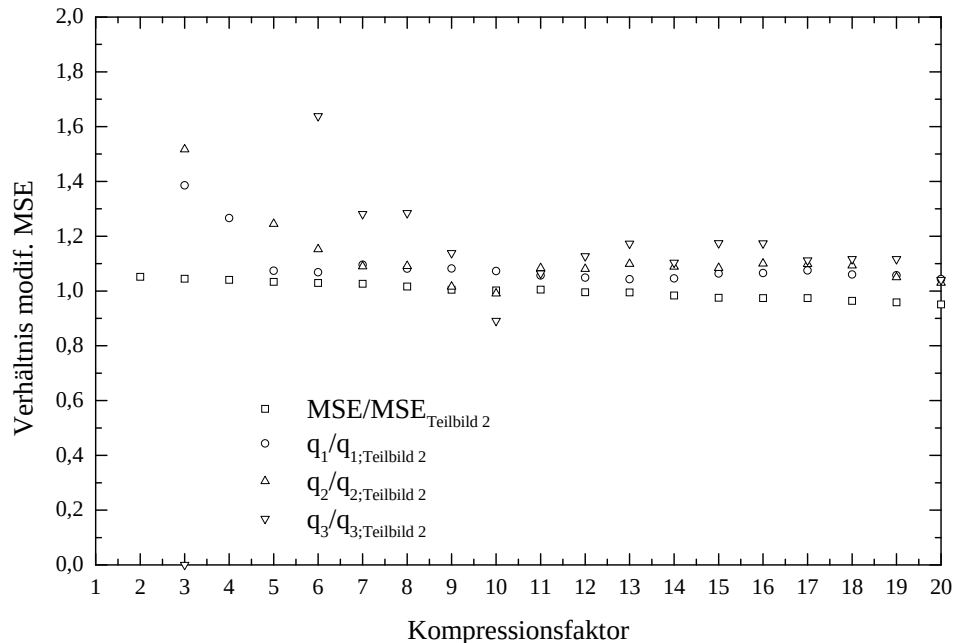
Kompres- sionsfaktor	MSE	q_1	q_2	q_3
1	0	0	0	0
2	0,05946	0	0	0
3	0,16867	0	0	0
4	0,2731	3,41749E-4	0	0
5	0,36595	0,0027	0,0014	0
6	0,44736	0,0082	0,00465	8,1171E-4
7	0,51933	0,01633	0,00936	0,00234
8	0,58412	0,02608	0,01637	0,00759
9	0,64267	0,03732	0,02433	0,01152
10	0,69657	0,04872	0,03512	0,01785
11	0,74768	0,05912	0,04455	0,01996
12	0,79586	0,07072	0,05665	0,02788
13	0,84132	0,08032	0,06775	0,03379
14	0,88496	0,09015	0,07651	0,03882
15	0,9265	0,10128	0,08894	0,04491
16	0,96685	0,11239	0,10355	0,051
17	1,00605	0,12184	0,11375	0,05411
18	1,04399	0,13068	0,12587	0,06396
19	1,08174	0,14005	0,1307	0,07073
20	1,11829	0,15006	0,13774	0,07752

Tabelle 3. Die Bildqualitätsparameter in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor geben den mittleren Kompressionsfehler pro Pixel in der betreffenden Bildregion wieder.



Figur 65. Verhältnisse der Qualitätsparameter ($MSE_{\text{Teilbild 1}}$, $q_{i;\text{Teilbild 1}}$, $i = 1, 2, 3$) in Teilbild 1 zu den Qualitätsparametern (MSE , q_i , $i = 1, 2, 3$) aus Tabelle 3. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor dargestellt. Teilbild 1 entstammt dem (invasiven) Koronarangiogramm. Der Bildausschnitt reicht von Pixelkoordinate (46,168) bis Pixelkoordinate (164,253).

Wie in Abschnitt 5.1 wird untersucht, inwieweit die Bildqualitätsparameter aus Teilbildern von denen des Gesamtbildes abweichen. Das erste Teilbild enthält im Vergleich zum zweiten Teilbild mehr Gefäß- und Kantenregionen sowie scharfe Kanten. Die Bildqualitätsparameter in den Bildausschnitten werden berechnet und ins Verhältnis zu den Ergebnissen des Gesamtbildes gesetzt.



Figur 66. Verhältnisse der Qualitätsparameter ($MSE_{\text{Teilbild 2}}$, $q_{i;\text{Teilbild 2}}$, $i=1,2,3$) in Teilbild 2 zu den Qualitätsparametern (MSE , q_i , $i=1,2,3$) aus Tabelle 3. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor dargestellt. Teilbild 2 entstammt dem (invasiven) Koronarangiogramm. Der Bildausschnitt reicht von Pixelkoordinate (148,81) bis Pixelkoordinate (248,181).

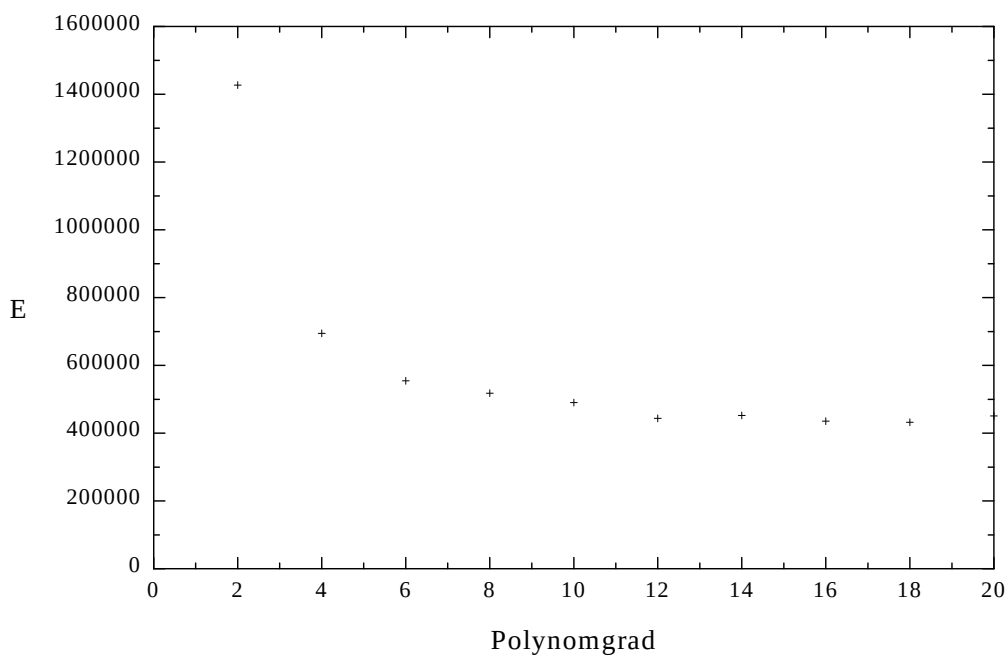
Auch hier geht hervor (Figuren 65 und 66), daß die berechneten Bildqualitätsparameter für höhere Kompressionsfaktoren (Kompressionsfaktor acht in Figur 65, Kompressionsfaktor elf in Figur 66) in den Teilbildern nicht wesentlich von den berechneten Bildqualitätsparametern im Gesamtbild abweichen. Für Kompressionsfaktoren kleiner als acht oder elf ergeben sich größere Abweichungen. Hier ist die Zahl der Pixelkoordinaten zur Erfüllung von Bedingung (210) zu gering, um einen Trend festzulegen. Dies trifft insbesondere für den Quotienten $q_3/q_{3;\text{Teilbild 2}}$ zu. Die Zahl der Pixelkoordinaten innerhalb der scharfen Kanten beträgt 297, wohingegen die Zahl der Pixelkoordinaten innerhalb der scharfen Kanten des Gesamtbildes 4802 beträgt.

Für die quantitative Beurteilung der Bildqualitätsverluste kommt es nicht auf die Auswahl von Teilbildern an. Aufgrund der Normierung in Gleichung (211) werden für Kompressionsfaktoren ab acht oder elf vergleichbare Ergebnisse erzielt.

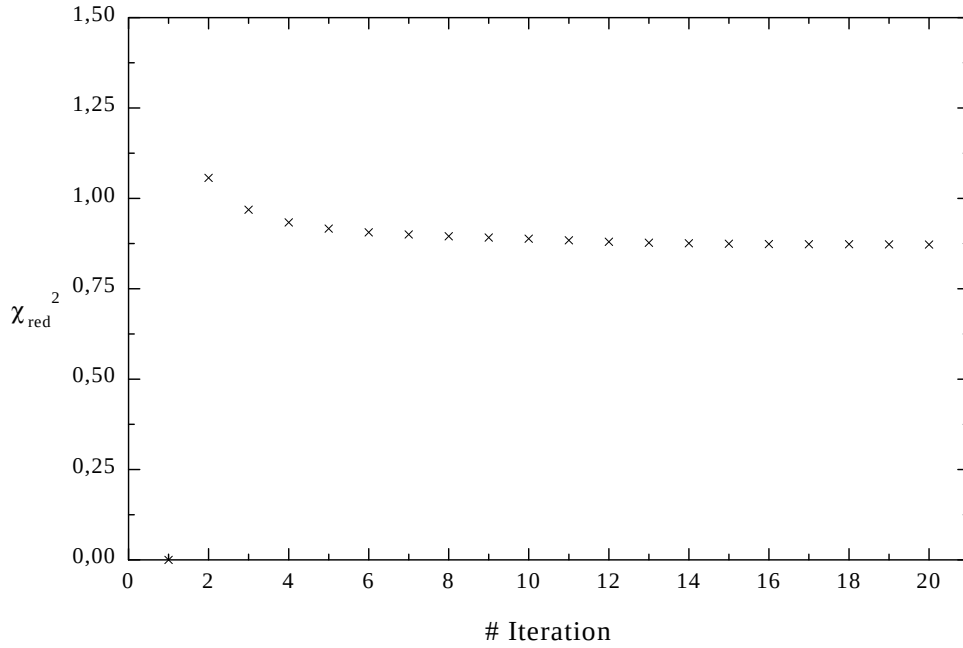
5.3 Limitierungen der Algorithmen zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen gezeigt an einem kontrastarmen Koronarangiogramm

Neben der intravenösen Koronarangiografie gibt es ein Verfahren zur nichtinvasiven Untersuchung der koronaren Herzkrankheit. Im Gegensatz zur Untersuchung im Herzkatheterlabor eines Krankenhauses wird dem Patienten das Kontrastmittel (Jod) über eine Vene injiziert. Das Kontrastmittel wird mit dem Blutstrom zum Herzen geschwemmt. Mit Hilfe einer Röntgenquelle und einem Röntgendetektor werden die Herzkranzgefäße sichtbar dargestellt. Ist die Röntgenquelle monoenergetisch, kann das

Absorptionsverhalten des Kontrastmittels ausgenutzt werden, um trotz der Verdünnung im Blutstrom aussagekräftige Bilder zu erhalten. Durch die Gleichzeitige Aufnahme zweier Röntgenbilder mit zwei unterschiedlichen Energien E_1 und E_2 kann man ein Subtraktionsbild erzeugen. Die Energie E_1 liegt knapp unterhalb der K-Kante von Jod, die Energie E_2 knapp oberhalb der K-Kante. Der Absorptionkoeffizient von Jod ändert sich in dem Energiebereich zwischen E_1 und E_2 um einen Faktor 6 [24], während die Absorptionkoeffizienten des übrigen Gewebes (Knochen, Muskel, Fett) näherungsweise konstant sind. Nach der Subtraktion sind im Idealfall nur noch die kontrastmittelgefüllten Gefäße sichtbar. Die erforderliche Röntgenstrahlung wird mit Hilfe eines Synchrotrons erzeugt. Die Strahlung liegt als Fächerstrahlung vor, was den Einsatz von Zeilendetektoren nahelegt. Um ein zweidimensionales Bild zu erhalten, wird der Patient in einer ausreichend kurzen Zeit (256ms) mit Hilfe eines Hubmechanismus vertikal durch den Strahl gefahren. Der verwendete Zeilendetektor registriert Photonen-Zählraten, welche mit Hilfe von Korrekturen in die Graustufen eines digitalen Bildes umgerechnet werden. Im allgemeinen kann man davon ausgehen, daß der Fehler der Grauwerte aufgrund der Statistik des Absorptionsprozesses (Poisson) nicht konstant ist. Der Fehler der Grauwerte ist berechenbar, wenn man die verwendeten Korrekturen zur Konversion der Zählraten in Grauwerte berücksichtigt. Diese Fehler gehen in die Berechnung der diagnostisch unbedeutenden Bildregionen ein [25].



Figur 67. Bestimmung des optimalen Grades des Polynoms zur Anpassung an die diagnostisch unbedeutenden Strukturen. Der Parameter r ist 1. Man erwartet bei Wiederholungsmessungen, daß 68,3% der Grauwerte im Intervall $[z_{x,y}^{wahr} - \sigma, z_{x,y}^{wahr} + \sigma]$ liegen. Der Grad des Polynoms wurde mit Hilfe von (162) zu 14 bestimmt.



Figur 68. Konvergenz des Verfahrens für den Polynomgrad 14. Nach der zwanzigsten Iteration gehen 5890 der insgesamt 8192 Pixel in die Anpassung ein. Man hätte bereits nach der achten Iteration abbrechen können, da sich der Wert für χ_{red}^2 um weniger als 1% ändert. Der Erwartungswert für χ_{red}^2 ist 1. Tatsächlich wird für den Polynomgrad 14 nach 20 Iterationen der Wert 0,873 erreicht. Dies ist ein Indiz dafür, daß der Fehler der Grauwerte etwas zu groß ist.

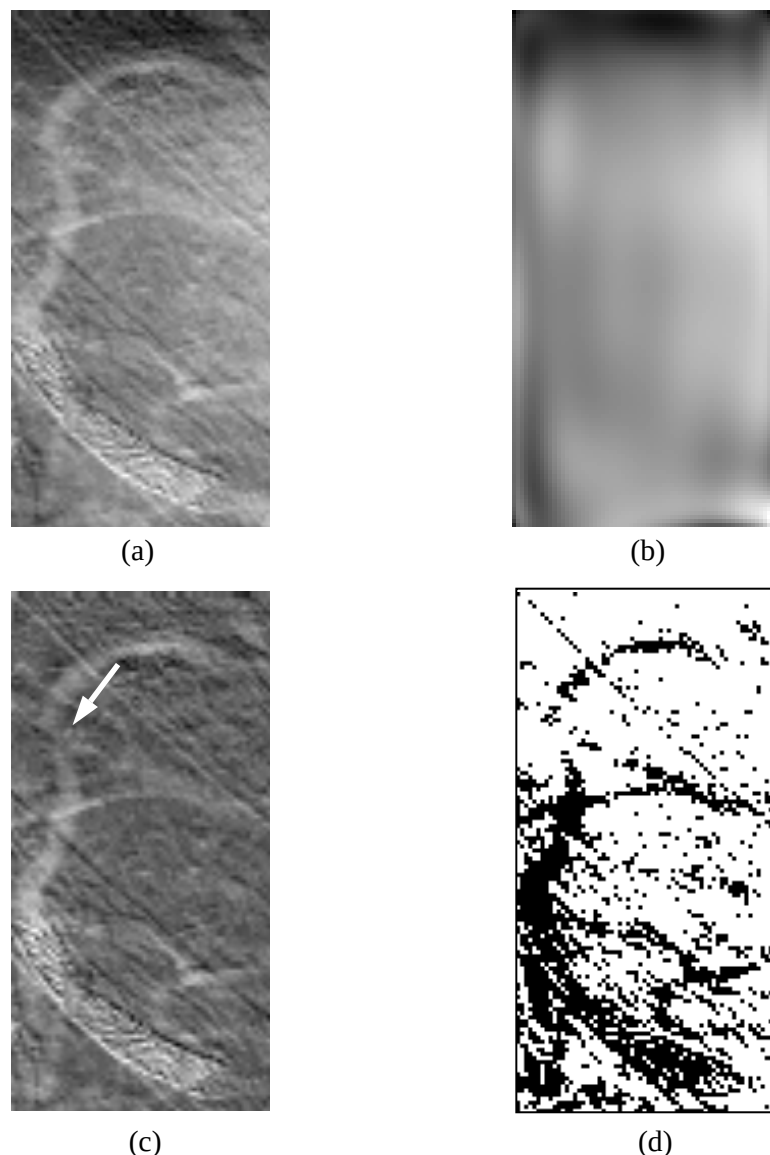
Bei dem verwendeten Detektortyp handelt es sich um eine Ionisationskammer für schnelle Abbildungen [24]. Die Anforderungen an den Detektor sind eine hohe Absorptionswahrscheinlichkeit für Röntgenstrahlung, eine gute Ortsauflösung und eine präzise Intensitätsmessung bei kleinen Rauschbeiträgen. Die DQE (engl. detective quantum efficiency) eines solchen Systems liegt idealerweise nahe bei eins. Eine wesentliche Anforderung an das Aufnahmesystem ist die schnelle Signalverarbeitung. In dieser Applikation ist die Elektronenkomponente des erzeugten Ladungssignals der Signalträger. Dies wird durch den Einsatz eines Frisch-Gitters erreicht, welches zwischen der Ausleselektrode und der Driftkathode plaziert wird. Die Ortsauflösung wird im wesentlichen durch die im Detektor ablaufenden Wechselwirkungsprozesse beeinflusst. Hierzu zählen die räumliche Ausdehnung der Ionisation und die Verbreiterung der Ladungsverteilung infolge Diffusion. Um eine kontrastmittelgefüllte Arterie darstellen zu können ist eine Mindestphotonenrate notwendig. Für eine $\Delta x = 1\text{mm}$ starke Arterie beträgt die Mindestrate

$$N_{Poisson}^{\min} = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\Delta \mu \rho_{Jod} \Delta x} \right)^2.$$

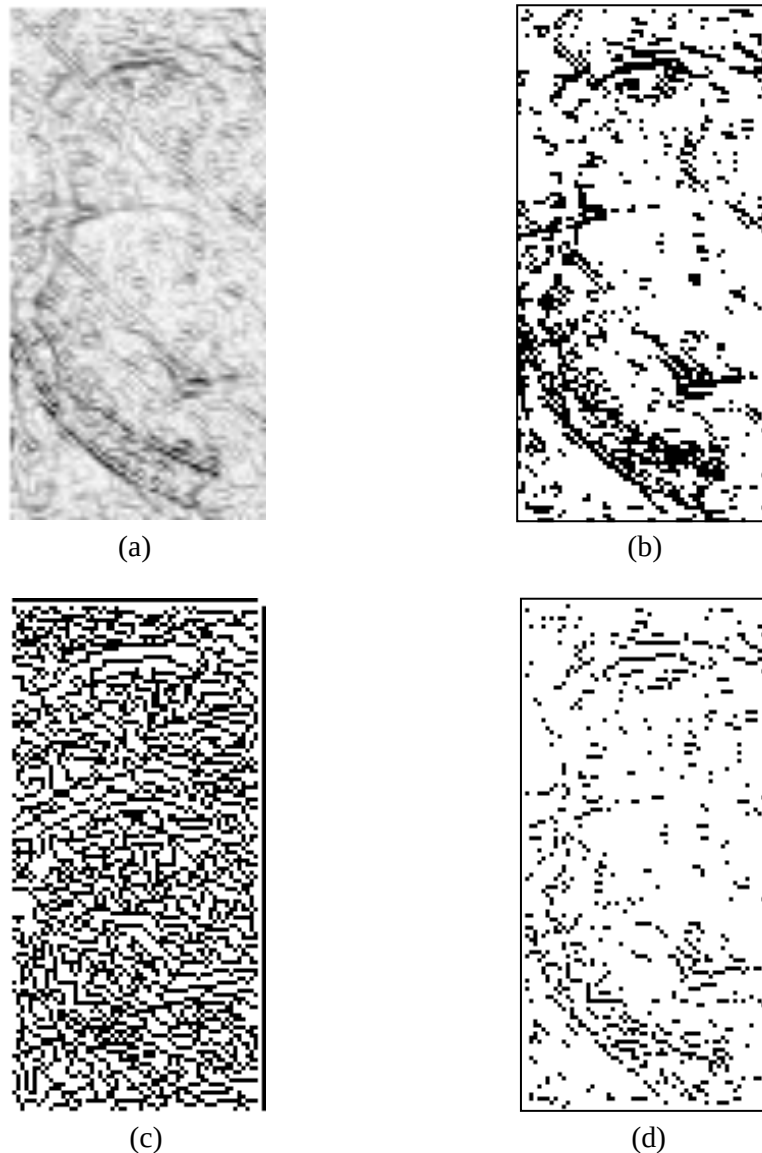
Hierbei sind $\Delta \mu = 29,8\text{cm}^2 / \text{g}$ die Differenz der Massenabsorptionskoeffizienten für Jod an der K-Kante und $\rho_{Jod} = 10\text{mg} / \text{ml}$ die Kontrastmittelkonzentration im Blut. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Detektion des Jodsignals nur möglich ist, wenn das Signal dreimal größer ist als das relative Quantenrauschen des Detektors. Der Wert für $N_{Poisson}^{\min}$ liegt ungefähr bei 20000 Photonen. $N_{Poisson}^{\min}$ ist eine untere Abschätzung für die Zahl der Photonen, die pro Pixel und Integrationszeit benötigt werden. Das Koronarangiogramm stellt im Gegensatz zu Abschnitt 5.2 hohe Anforderungen an die

Algorithmen zur Erzeugung der binären Masken, da das Bild wesentlich kontrastärmer ist. Dies ist auf die schwache Konzentration des Kontrastmittels im Blutstrom und das im Vergleich zu 5.2 stärkere Pixelrauschen (Poisson-Statistik) zurückzuführen.

Mit Hilfe der binären Masken in den Figuren 69d, 70b und 70d erfolgt die Berechnung der Qualitätsparameter an den diagnostisch relevanten Stellen. Der flachere Verlauf der Kurven im Vergleich zum MSE (Gleichung (204)) ist auf die Division des Kompressionsfehlers ($z_{x,y}^{comp} - z_{x,y}$) durch den Fehler der Grauwerte im Originalbild zurückzuführen. Wie in 5.2 werden auch hier die Grauwerte in den scharfen Kanten am genauesten reproduziert. Die Grauwerte in den Kantenregionen werden weniger genau, die Grauwerte in den Gefäßregionen am ungenauesten wiedergegeben. Das Wahrnehmungsvermögen wird aufgrund der genauen Wiedergabe der Grauwerte an den scharfen Kanten unterstützt.

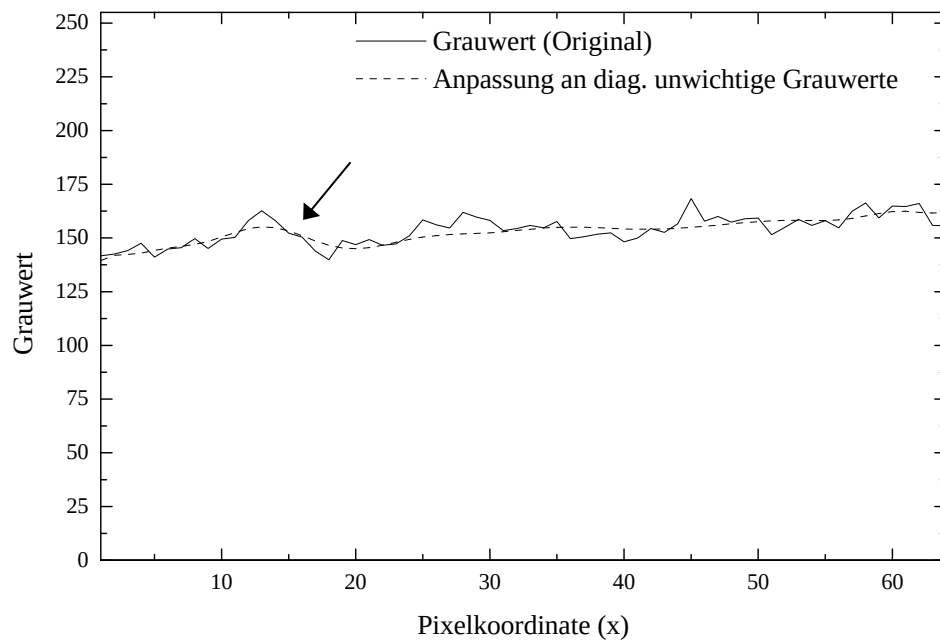


Figur 69. (a) Ausschnitt aus einem Koronarangiogramm des HASYLAB mit einem Stent im linken unteren Bildbereich. (b) Abbildung der diagnostisch nicht relevanten Bildbereiche. Hier wurden im Gegensatz zu 5.1 und 5.2 variable Fehler der Grauwerte verwendet. (c) Differenzbild aus den Bildern (a) und (b). Der Kontrast wurde nur unwesentlich verbessert [26]. Der Gefäßverlauf ist im markierten Bereich nicht mehr zu erkennen. Der Stent tritt deutlicher hervor. (d) Binäre Maske, welche durch die Anpassung einer Fläche an die diagnostisch unbedeutenden Strukturen (weiß) entsteht.

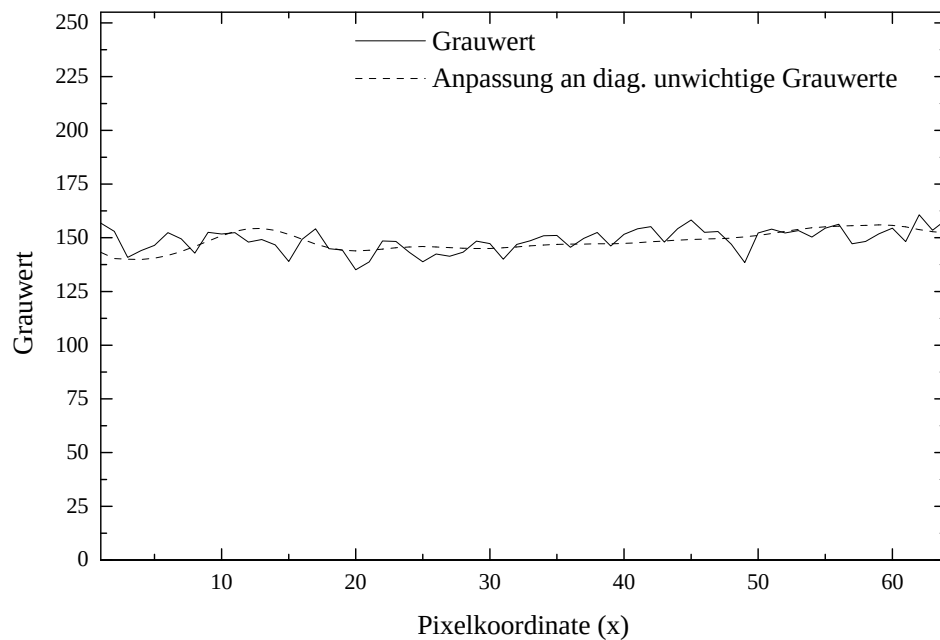


Figur 70. (a) Mit Hilfe der Sobel-Masken kantenbetontes Bild. Die Begrenzungen des Stent sind am deutlichsten zu erkennen. Die Gefäßränder treten im Vergleich zur Sichtbarkeit des Stent zurück. (b) Aus dem kantenbetonten Bild erzeugte binäre Maske. Um die binäre Maske zu erhalten, wurde in dem kantenbetonten Bild der Schwellwert auf 40 gesetzt. Oberhalb der Schwelle wurden alle Pixel schwarz eingefärbt. Der Gefäßverlauf ist jetzt besser zu verfolgen. (c) Durch die Berechnung der Nullstellen von (193) berechnetes Bild. Die Fensterbreite beträgt 2. Der Grad des Polynoms, welches an die Grauwerte innerhalb der Fensters angepaßt wurde, ist 2. Offensichtlich versagt das Verfahren bei zu großem Bildrauschen. (d) Koinzidenzbild aus (b) und (c). Es werden nur diejenigen Pixel dargestellt, welche sowohl in (b) als auch in (c) schwarz markiert sind. Der Gefäßverlauf ist zwar zu erahnen, ist jedoch schlechter zu erkennen als in (b). Alle Bilder wurden um einen Faktor zwei vergrößert. Die Originalabmessungen betragen 64×128 Pixel.

Wie in der Bildunterschrift von Figur 69 angedeutet, ist das Verfahren zur Gefäßerkennung aufgrund des geringen Kontrastes (infolge verdünnten Kontrastmittels) und vergleichsweise hoher Rauschamplitude (bedingt durch das Poisson-Rauschen) nicht in der Lage, Gefäße durchgehend als solche zu erkennen. Die nachstehenden Profilschnitte belegen dies.



Figur 71. Profilschnitt des Koronarangiogramms (nichtinvasiv) in Bildzeile 87. Bildzeile 87 liegt auf Höhe des markierten Bereiches von Figur 69c. Der Pfeil markiert die Lage des Gefäßes.

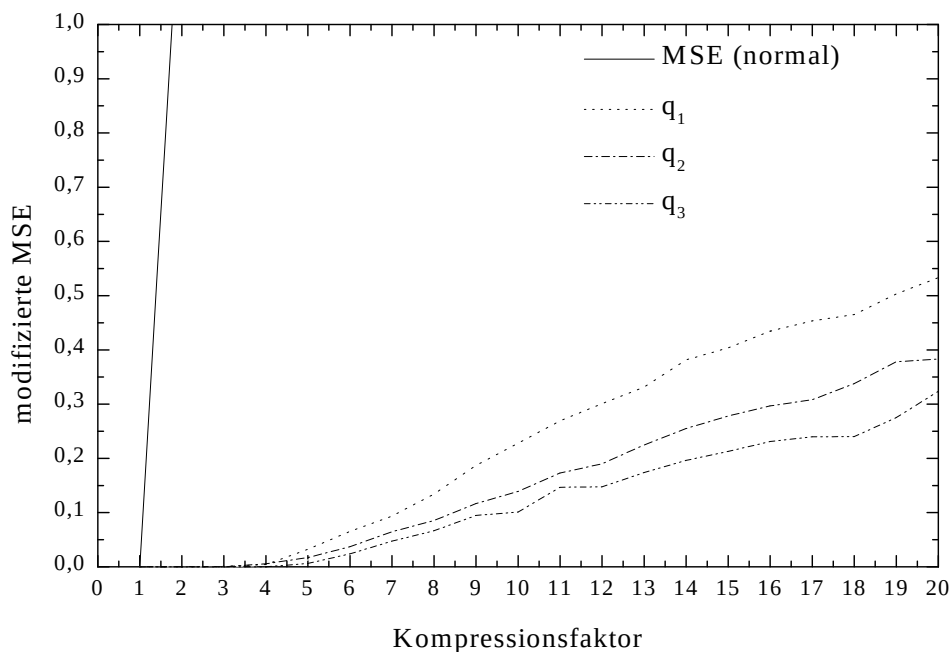


Figur 72. Profilschnitt des Koronarangiogramms (nichtinvasiv) in Bildzeile 101. Bildzeile 101 liegt oberhalb des markierten Bereiches von Figur 69c. Die Lage des Gefäßes innerhalb des Profilschnittes ist aufgrund des nicht vorhandenen Kontrastes nicht auszumachen.

Die Wirkungsweise des Algorithmus zur Erkennung der Gefäßregionen ist durch das Zusammenspiel eines schwachen Kontrastes und/oder hoher Rauschamplitude beschränkt. Im gedachten Gefäßverlauf werden nur Punkte gefunden, welche zum diagnostisch unwichtigen Gewebe gehören. In Figur 72 ist der Bildkontrast so schwach, daß auch hier keine Bildpunkte gefunden werden, welche zu den diagnostisch relevanten Bildregionen gehören. Man hat folgende Ergebnisse:

- Die Gefäßregionen müssen sich in ihren Grauwerten deutlich von dem sie umgebenden Gewebe abheben, um als solche erkannt zu werden.
- Die Ausläufer der Gefäße werden infolge einer zu großen Rauschamplitude in die Anpassung mit einbezogen, siehe Figur 71[†].

Die Kontrastarmut des Bildes und das im Vergleich zu Abschnitt 5.2 erhöhte Pixelrauschen haben weiterhin zur Folge, daß auch die Kantenregionen und die eingebetteten scharfen Kanten nur unvollständig erkannt werden.



Figur 73. Qualitätsparameter des nichtinvasiven Koronarangiogramms (HASYLAB) in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor. Die Grafik suggeriert, daß alle Qualitätsparameter ab einem Kompressionsfaktor von vier von Null verschieden sind. Tabelle 4 gibt die Zahlenwerte der Qualitätsparameter wieder.

[†] Dieser Effekt kann auch künstlich durch zu hohe Wahl des Parameters r (Gleichung (160)) herbeigeführt werden. Dies hat eine Verschmälerung der Gefäßregionen zur Folge. Es wird empfohlen, den Parameter r nicht größer als 3 zu wählen.

Kompres- sionsfaktor	MSE	q_1	q_2	q_3
1	0	0	0	0
2	1,30291	0	0	0
3	3,54781	0,00101	0	0
4	5,5773	0,00421	0,00569	0
5	7,35623	0,03228	0,01712	0,00644
6	8,81947	0,06536	0,03708	0,024
7	10,09288	0,09342	0,06483	0,04736
8	11,23381	0,13441	0,08556	0,06656
9	12,2584	0,18696	0,11646	0,09468
10	13,25467	0,22807	0,13918	0,1009
11	14,12583	0,26917	0,1731	0,14694
12	14,931	0,30081	0,18991	0,14753
13	15,67433	0,33166	0,22493	0,17377
14	16,27292	0,38153	0,25517	0,19643
15	16,87343	0,4039	0,27814	0,21291
16	17,40699	0,43474	0,29683	0,23107
17	17,92099	0,45366	0,3083	0,23966
18	18,44268	0,46533	0,33771	0,23999
19	18,91129	0,50327	0,37842	0,27511
20	19,39251	0,53313	0,38323	0,32378

Tabelle 4. Die Bildqualitätsparameter in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor geben den mittleren Kompressionsfehler pro Pixel in der betreffenden Bildregion wieder.

Die Algorithmen zur Bestimmung der Gefäß- und Kantenregionen sowie der scharfen Kanten erkennen die diagnostisch wichtigen Bildregionen um so besser, je stärker der Bildkontrast und je kleiner das Pixelrauschen sind. Ist der Bildkontrast zu schwach und das Pixelrauschen zu groß, werden Bildpunkte als diagnostisch relevant erkannt, obwohl diese nicht zu den diagnostisch bedeutenden Bildregionen gehören (Figuren 69d, 70b und 70d). Die Aussagekraft der Bildqualitätsparameter hängt von der Erkennung der diagnostisch wichtigen Bildregionen und damit vom Bildkontrast und Pixelrauschen ab:

- In den Abschnitten 5.1 und 5.2 wurde gezeigt, daß die Algorithmen zur Erkennung der Gefäß- und Kantenregionen sowie der scharfen Kanten in deutlicher Mehrzahl diagnostisch wichtige Bildpunkte als solche erkennen. Die Zahl der Bildpunkte, welche irrtümlich als diagnostisch relevant eingestuft werden ist vernachlässigbar. In diesem Fall messen die Bildqualitätsparameter die mittlere gewichteten Grauwertdifferenz in den diagnostisch wichtigen Bildregionen.
- In Abschnitt 5.3 werden aufgrund des niedrigen Kontrastes und erhöhtem Pixelrauschen Pixel als diagnostisch wichtig gekennzeichnet, obwohl diese offensichtlich nicht zu den für die Diagnose bedeutenden Bildbereichen gehören. Die Zahl der irrtümlich als diagnostisch bedeutsam eingestuften Bildpunkten ist nicht vernachlässigbar. Die mittlere gewichtete Grauwertdifferenz wird sowohl in den diagnostisch wichtigen als auch in den diagnostisch unbedeutenden Bildregionen gemessen. Die Qualitätsparameter geben hier die mittlere gewichtete Grauwertdifferenz in den für die Wahrnehmung wichtigen Bildbereichen an. Die diagnostisch wichtigen Bildregionen bilden eine Teilmenge der für die Wahrnehmung bedeutenden Bildregionen.

Die Algorithmen zur Erkennung diagnostisch wichtiger Bildregionen sind auf alle Arten von Koronarangiogrammen anwendbar. In Koronarangiogrammen mit niedrigem Kontrast und hohem

Pixelrauschen werden neben den Gefäßen und deren Rändern auch Artefakte als diagnostisch wichtig erkannt. Die Artefakte weisen in Bezug auf Kontrast und Pixelrauschen die gleichen Eigenschaften auf wie die Gefäße und deren Ränder. Diagnostisch wichtige Bildbereiche und Artefakte mit ähnlichen Eigenschaften können von den Algorithmen, welche zur Bestimmung diagnostisch wichtiger Bildregionen entworfen wurden, nicht unterschieden werden. Artefakte sind in dieser Klasse von Bildern den diagnostisch wichtigen Bildbereichen gleichgestellt. Artefakte zählen aufgrund der Ähnlichkeit mit den Gefäßen zu den für die Wahrnehmung wichtigen Bildregionen. Man hat es mit einer Mischung von diagnostisch wichtigen Bildregionen und für die Wahrnehmung wichtigen Bildregionen zu tun. Die berechneten Bildqualitätsparameter ändern sich nicht. Die Bildqualitätsparameter berechnen nicht ausschließlich den Bildqualitätsverlust in den für die Diagnose wichtigen Bildregionen sondern auch in den für die Wahrnehmung bedeutenden Bildregionen. Je mehr Artefakte irrtümlich als diagnostisch bedeutsam erkannt werden, desto stärker beschreiben die Bildqualitätsparameter die mittlere gewichtete Grauwertdifferenz in den für die Wahrnehmung wichtigen Bildregionen.

6. Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war die quantitative Bewertung von Bildqualitätsverlusten nach verlustbehafteter Bilddatenkompression. Die Bildqualitätsverluste lassen sich durch Bildqualitätsparameter erfassen, und werden in Bezug auf das im Röntgenbild vorhandene Rauschen relativiert. Dies wurde an einem Röntgenphantom und zwei Beispielen aus der Koronarangiografie untersucht.

Zur Untersuchung der Zielsetzung wurde ein Pyramiden-Algorithmus benutzt, welcher die Grauwerte des Originalbildes mit Hilfe von Daubechies-4-Skalierungs- und Wavelet-Funktionen in eine Wavelet-Repräsentation transformiert. Die Bilddatenkompression erfolgt an Detailsignalen in der Wavelet-Repräsentation und wirkt als Tiefpaßfilter. Bei der Rücktransformation führt der Verlust an Detailsignalen zu einer ungenauen Reproduktion des Originalbildes. Das untersuchte verlustbehaftete Kompressionsverfahren ermöglicht einen im Vergleich zu etablierten Verfahren hohen Kompressionsfaktor bei gleichem Bildqualitäts- und/oder Informationsverlust. Aufgrund der Translations- und Skalierungseigenschaften der Daubechies-4-Skalierungs und Wavelet-Funktionen sowie deren räumlicher Lokalisation ist eine vergleichsweise genaue Reproduktion der Grauwerte gegeben.

In der Koronarangiografie können Bildqualitätsverluste zu fehlerhaften Diagnosen führen, wenn diese an den kontrastmittelgefüllten Gefäßen und/oder deren Kanten auftreten. Dies sind die diagnostisch relevanten Bildregionen. Die Bildqualitätsparameter, welche die Bildqualitätsverluste quantitativ beschreiben, werden nur in den diagnostisch relevanten Bildregionen berechnet. Sie bewerten die mittlere Grauwertdifferenz zwischen Reproduktion und Originalbild in Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor.

- In einem adaptiven Verfahren wird eine Linearkombination orthogonaler Polynome in zwei diskreten Veränderlichen an die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen angepaßt. Während der Anpassungsprozedur wird eine binäre Maske erzeugt, welche diagnostisch bedeutende und unbedeutende Bildregionen voneinander trennt.
- Zur Erkennung von Kantenregionen werden Sobel-Masken verwendet. Mit Hilfe eines Schwellwertes läßt sich eine zweite binäre Maske erzeugen und die Breite der Kantenregionen regulieren. Diese binäre Maske repräsentiert die diagnostisch wichtigen Kantenregionen.
- Die Berechnung scharfer Kanten erfolgt durch die Anwendung des Laplace-Operators auf zweidimensionale Funktionen, welche innerhalb eines verschiebbaren Fensters an die Grauwerte des Originalbildes angepaßt werden. Durch eine zweidimensionale Nullstellensuche in dem Resultat erhält man die scharfen Kanten des Originalbildes. Ein Koinzidenzverfahren prüft, ob eine scharfe Kante innerhalb einer Kantenregion liegt, und so einen diagnostisch wichtigen Bildpunkt in einer dritten binären Maske verkörpert.

Ein Kompressionsfehler (ein Beitrag zu einem zugeordneten Qualitätsparameter) in den diagnostisch relevanten Bildregionen tritt dann auf, wenn der verlustbehaftet rekonstruierte Grauwert um mindestens k Standardabweichungen vom Originalwert abweicht. Die Bildqualitätsparameter bilden streng monoton steigende diskrete Funktionen und messen den Bildqualitätsverlust in den für die Diagnose wichtigen Bildbereichen. Die Reproduktionseigenschaften des Kompressionsalgorithmus werden durch die Teilung der diagnostisch bedeutenden Bildregionen getrennt untersucht. In Abhängigkeit vom Kompressionsfaktor wird wiedergegeben, wo Bildqualitätsverluste zuerst auftreten und wie stark diese sind. Dies ermöglicht die Beurteilung von Kompressionsalgorithmen hinsichtlich der Genauigkeit der reproduzierten Grauwerte in den diagnostisch wichtigen Bildregionen.

Es wurde gezeigt, daß der Kompressionsfehler für bestimmte Kompressionsfaktoren nicht vom Bildrauschen zu unterscheiden ist. Die Differenz von Grauwerten im komprimierten Bild zum Original

entspricht der statistischen Fluktuation von Grauwerten in Bildern mit intrinsischem Rauschen. Die Größe der Kompressionsfehler hängt nicht vom Kontrast innerhalb eines Bildes ab. Eine verlustbehaftete Bilddatenkompression führt erst dann zu einem Informationsverlust, wenn der Kompressionsfaktor eine Grenze überschreitet. Diese Grenze ist darüber hinaus von der betrachteten diagnostisch wichtigen Bildregion abhängig. Für das untersuchte Röntgenphantom wurde ermittelt, ab welchem Kompressionsfaktor Bilddetails verschwinden und damit Informationen verlorengehen. Bis zu einem Kompressionsfaktor von sechs ist der Kompressionsfehler von den statistischen Fluktuationen nicht zu unterscheiden. Ab einem Kompressionsfaktor von 20 sind Details mit einer Breite von weniger als 0,7 mm nicht mehr zu erkennen. Ab einem Kompressionsfaktor von 40 sind nur noch Details zu erkennen, welche breiter als 1 mm sind. Die Bildqualitätsverluste (hier: die Verluste des räumlichen Auflösungsvermögens) können den Bildqualitätsparameter zugeordnet werden. Auf diese Weise entsteht ein Zusammenhang zwischen Bildqualitätsverlusten und Bildqualitätsparametern.

In dem Röntgenphantom wurde anhand der Bildqualitätsparameter gezeigt, daß bis zu einem Kompressionsfaktor von acht die Grauwerte in den scharfen Kanten genauer wiedergegeben werden als in den anderen diagnostisch relevanten Bildregionen. Die mittlere Abweichung zwischen den rekonstruierten Grauwerten und den ursprünglichen Grauwerten ist gegenüber den anderen Bildregionen am kleinsten. Der Kompressionsalgorithmus erkennt adaptiv starke Grauwertschwankungen und erlaubt eine ausreichend genaue Wiedergabe derselben. Dies unterstützt die menschliche Wahrnehmung, da das Auge besonders empfindlich auf starke Grauwertänderungen reagiert.

Im invasiven Koronarangiogramm wurden die Grauwerte in den scharfen Kanten im Vergleich zu den Kanten- und Gefäßregionen stets am genauesten wiedergegeben. Die Grauwerte in den Gefäßregionen wurden am ungenauesten reproduziert. Die mittlere Abweichung zwischen den rekonstruierten Grauwerten und den ursprünglichen Grauwerten ist gegenüber den anderen Bildregionen am kleinsten. Der Kompressionsalgorithmus erkennt starke Grauwertänderungen und reproduziert diese genauer als in den übrigen Bildregionen. Die Fähigkeit, Objekte anhand ihrer Umrisse zu identifizieren, wird unterstützt. Die Bildqualitätsparameter messen die mittlere gewichtete Grauwertdifferenz in den diagnostisch wichtigen Bildregionen.

Im nichtinvasiven Koronarangiogramm erkennen die Algorithmen zur Bestimmung der diagnostisch wichtigen Bildregionen aufgrund des niedrigen Kontrastes und/oder des hohen Pixelrauschens die bedeutenden Bildregionen nur bruchstückhaft. Die Algorithmen stufen auch Bildpunkte als diagnostisch wichtig ein, obwohl diese nicht zu den betreffenden Bildregionen gehören. Die Zahl der irrtümlich als diagnostisch bedeutsam erachteten Bildpunkte ist im Gegensatz zum invasiven Koronarangiogramm nicht vernachlässigbar. Die Bildqualitätsparameter messen die mittlere gewichtete Grauwertdifferenz in den für die Wahrnehmung wichtigen Bildregionen.

Kritik

Abschließend seien noch einige kritische Anmerkungen zur Grenze der Leistungsfähigkeit und dem Einsatz der vorgestellten Verfahren gemacht. Der Algorithmus zur Approximation einer Linearkombination orthogonaler Polynome in zwei diskreten Veränderlichen an die diagnostisch unwichtigen Grauwerte des Originalbildes kann soweit automatisiert werden, daß es vom Anwender unbeaufsichtigt arbeitet. Er erfordert die Eingabe eines Parameters. Der optimale Grad des Polynoms und die Anzahl der zur Anpassung notwendigen Iterationen werden durch Abbruchbedingungen festgelegt. Das Verfahren konvergiert rasch und sicher.

Für die Anwendung des Algorithmus auf einem Rechner sind der große Speicherbedarf und die lange Rechenzeit von Nachteil. Diese hängen von den Abmessungen des untersuchten Bildes und der Anzahl der Parameter ab, welche in der Approximation bestimmt werden. Der Anwender kann den

Algorithmus beschleunigen, wenn er die Abmessungen des Bildes verkleinert und/oder den Grad des Polynoms für die Approximation unterhalb des empfohlenen Wertes wählt.

Das Programm ist nicht in der Lage, großflächige diagnostisch wichtige Bildregionen zu erkennen, wenn diese sich nur unwesentlich von den unbedeutenden Bildregionen abheben. Gefäßregionen werden sicher erkannt, wenn diese schmal sind und sich in ihren Grauwerten deutlich vom umgebenden Gewebe unterscheiden.

Der Einsatz des Algorithmus ist auf die Koronarangiografie beschränkt. Eine Alternative zum vorgestellten Algorithmus benötigt zwar weniger Speicher und Rechenzeit, liefert die benötigte binäre Maske jedoch nicht automatisch.

Es gibt kein quantitatives Verfahren, mit dem der Schwellwert für die Erzeugung binärer Masken aus den kantenbetonten Bildern (Sobel) berechnet werden kann.

Mit Hilfe des vorgestellten Glättungsfilters werden statistische Fluktuationen der Grauwerte ausgeglichen. Der Filter glättet ohne Bilddetails zu verschmieren, wenn die Filterbreite die Breite des Details nicht übersteigt. Der Grad des Polynoms ist dabei zwei oder drei. Simultan erfolgt mit demselben Verfahren die Berechnung scharfer Kanten.

Die Verfahren zur Erkennung von Kantenregionen (Sobel) und zur Bestimmung scharfer Kanten liefern gute Ergebnisse, wenn das Signal-Rausch-Verhältnis hinreichend groß ist. Je kleiner das Signal-Rausch-Verhältnis wird, desto weniger Kantenregionen und scharfe Kanten werden erkannt. In der Praxis ist dies kritisch, wenn es auf die Beurteilung von Kollateralen nach verlustbehafteter Bilddatenkompression ankommt. Unter Berücksichtigung der Einschränkungen können die Verfahren auch außerhalb der Koronarangiografie eingesetzt werden.

Um die Bildqualitätsparameter von invasiven Koronarangiogrammen der Verschlechterung der Bildqualität zuzuordnen, muß in regelmäßigen Abständen die Messung der Rauschamplitude in einem Phantombild durchgeführt werden.

Ausblick

Koronarangiogramme stellen eine spezielle Klasse von Bildern in der Radiologie dar. Jedoch ist eine quantitative Beurteilung von verlustbehafteter Bilddatenkompression an beliebigen Bildern in der Radiologie von Interesse. Inwieweit sich radiologische Aufnahmen in drei Bildregionen (langsam veränderliche Strukturen, Texturen und Kanten) teilen lassen, ist offen. Ist dies jedoch der Fall kann der Einfluß der einzelnen Bildregionen auf die Wahrnehmung untersucht werden. Bildqualitätsverluste in den Bildregionen müssen hinsichtlich der Wahrnehmung gewichtet und getrennt bewertet werden. Hier verschiebt sich die quantitative Beurteilung von Bildqualitätsverlusten in diagnostisch wichtigen Bildbereichen zur Klassifikation von Bildqualitätsverlusten in Bildregionen, welche die Wahrnehmung beeinflussen. Es wird empfohlen, Bildqualitätsverluste bezüglich des im Bild vorhandenen Rauschens zu relativieren.

Anhang A

Das Unterprogramm `smooth` glättet mit Hilfe des in Abschnitt 4 erläuterten Verfahrens die statistischen Fluktuationen der Grauwerte. Das Unterprogramm eignet sich nur zur Glättung der Grauwerte, wenn der Grad des Polynoms innerhalb des Fensters nicht größer als drei ist. Darüber hinaus wird simultan das Ergebnis der Anwendung des Laplaceoperators auf die Grauwerte berechnet.

Eingabe:	<code>znoisy</code>	verraushtes Bild
	<code>m</code>	Fensterbreite des Glättungsfilters
	<code>ndeg</code>	Grad des Polynoms, welches in dem Fenster an die Grauwerte angepaßt wird
Ausgabe:	<code>zs</code>	geglättetes Bild
	<code>deriv2nd</code>	Ergebnis der Anwendung des Laplaceoperators auf die Grauwerte

```
subroutine smooth (znoisy, m, ndeg, zs, deriv2nd)

parameter (ymax=512, xmax=512)
integer i, j, k, l, m, ndeg
real znoisy(1:ymax,1:xmax)
real znoisy(1:ymax,1:xmax), zs(1:ymax,1:xmax), deriv2nd(1:ymax,1:xmax)
real work1, work2, work3, r1, r2, r3, movaver

c --- calculate smoothed spectrum and store it into zs
do 60 i = m+1, ymax-m
  do 70 j = m+1, xmax-m
    r1 = 0.
    r2 = 0.
    r3 = 0.
    zs(i,j) = 0.
    deriv2nd(i,j) = 0.
c ... calculate r1, r2, r3
    do 80 k = -m, m
      do 90 l = -m, m
        r1 = r1 + znoisy(i+k,j+l)
        r2 = r2 + znoisy(i+k,j+l)*l*l
        r3 = r3 + znoisy(i+k,j+l)*k*k
90      continue
80      continue
    if (ndeg.eq.1) then
c ... Use zs(i,j) = movaver ONLY if the degree of the polynomial to be
c ... fitted is equal to 1. Note that there is no 2nd derivative in this case
      movaver = r1/((2.*m + 1)*(2.*m + 1))
      zs(i,j) = movaver
    endif
    if (ndeg.ne.1.and.m.eq.1) then
      work1 = 1./18.*(-6.*r1 + 9.*r3)
      work2 = 1./18.*(-6.*r1 + 9.*r2)
      work3 = 1./9.*(r1 - 6.*work2 - 6.*work1)
      zs(i,j) = work3
      deriv2nd(i,j) = 2.*(work1 + work2)
    endif
    if (ndeg.ne.1.and.m.eq.2) then
      work1 = 1./70.*(-2.*r1 + r3)
      work2 = 1./70.*(-2.*r1 + r2)
      work3 = 1./25.*(r1 - 50.*work2 - 50.*work1)
      zs(i,j) = work3
      deriv2nd(i,j) = 2.*(work1 + work2)
    endif
    if (ndeg.ne.1.and.m.eq.3) then
      work1 = 1./588.*(-4.*r1 + r3)
      work2 = 1./588.*(-4.*r1 + r2)
      work3 = 1./49.*(r1 - 196.*work2 - 196.*work1)
      zs(i,j) = work3
      deriv2nd(i,j) = 2.*(work1 + work2)
    endif
70    continue
60  continue
end
```

Die wichtigsten im Unterprogramm verwendeten Parameter und Variablen sind:

xmax, ymax	Abmessungen des Bildes in Pixeln
ndeg	N
r1	$\sum_x \sum_y z_{x,y}$
r2	$\sum_x \sum_y z_{x,y} x^2$
r3	$\sum_x \sum_y z_{x,y} y^2$
work1	b_{N22}
work2	b_{N20}
work3	b_{N00}

Das Unterprogramm `smooth` berechnet nicht die Nullstellen von $\Delta z_{x,y} \approx 2(b_{N20} + b_{N22})$ im Subpixelbereich. Das Unterprogramm `findzeroes` eignet sich hierfür.

Eingabe: `deriv2nd` Ergebnis der Anwendung des Laplace-Operators auf die Grauwerte
 `m` Fensterbreite des Glättungsfilters

Ausgabe: `zeroes` Nullstellen von `deriv2nd` im Subpixelbereich (binäres Bild)

```

subroutine findzeroes (deriv2nd, m, zeroes)

parameter (ymax=512, xmax=512, eps=0.5)
integer i, j, x, y,
integer zeroes(1:ymax,1:xmax)
real f1, f2, f3, a1, a2, a3, xin, yin
real deriv2nd(1:ymax,1:xmax)

c ... initialize
do 140 y = 1, ymax
  do 150 x = 1, xmax
    zeroes(y,x) = 0
150   continue
140  continue
c ... find zeroes concerning the Laplacian of the grey values
do 160 y = m+1, ymax-m
  do 170 x = m+1, xmax-m
    f1 = deriv2nd(y,x)
    f2 = deriv2nd(y,x + 1)
    f3 = deriv2nd(y + 1,x)
    a1 = f1
    a2 = f2 - f1
    a3 = f3 - f1
    if (a2.ne.0.) then
      xin = -a1/a2
      if (xin.ge.0..and.xin.le.1.) then
        xin = int(xin/eps)
        zeroes(y,x + xin) = 1
      endif
    endif
    if (a3.ne.0.) then
      yin = -a1/a3
      if (yin.ge.0..and.yin.le.1.) then
        yin = int(yin/eps)
        zeroes(y + yin,x) = 1
      endif
    endif
  170   continue
160  continue
end

```

Die wichtigsten im Unterprogramm verwendeten Parameter und Variablen sind:

xmax, ymax	Abmessungen des Bildes in Pixeln
eps	ε , speziell: $\varepsilon = 0,5$
f1	$z(x_0, y_0)$
f2	$z(x_0 + 1, y_0)$
f3	$z(x_0, y_0 + 1)$
a1	a
a2	b
a3	c
xin	$-a/b$ (vor der Trunkierung)
yin	$-a/c$ (vor der Trunkierung)

Um ein binäres Bild zu erzeugen, ist eine feinere Rasterung als $\varepsilon = 0,5$ nicht nötig ist. Das in Abschnitt 4 vorgestellte Verfahren vereinfacht sich entsprechend. Lediglich die Vereinfachung ist in dem Unterprogramm umgesetzt.

Das Unterprogramm `opolbac` bestimmt die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen in einem Koronarangiogramm. Hierzu werden orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen benutzt. Diejenigen Datenpunkte, welche zu den für die Diagnose nicht relevanten Bildregionen gehören werden mit Hilfe der Routine `adjweig` ermittelt. Darüber hinaus wird das Unterprogramm `ortpol` zur Berechnung der orthogonalen Polynome in zwei diskreten Veränderlichen benutzt. Die Parameter der χ^2 -Minimierung werden ebenfalls in `ortpol` bestimmt.

Eingabe: `r` Parameter zur Einstellung der Empfindlichkeit des Algorithmus. Typische Werte für `r` liegen zwischen 2 und 3. Siehe Gleichung (160).

Ausgabe: `rchisq` Wert für χ_{red}^2 . Siehe Gleichung (162).

Bemerkung: Aufgrund des hohen Speicherbedarfs ist es ratsam, die Variablen `z`, `bin` und `zback` in common-Blöcken zu speichern.

```

subroutine opolbac (r,rchisq)

  parameter (ymax=512, xmax=512, maxadj=20, ndegr=20)
  integer x, y, l, nbpts
  integer z(1:ymax,1:xmax)
  real sumsq, rchisq, r
  real zback(1:ymax,1:xmax)
  common / work1 / z
  common / work2 / zback

c ... initialize
  sumsq = 0.
  nbpts = 0.
  do 10 y = 1, ymax
    do 20 x = 1, xmax
      zback(y,x) = 0.
20    continue
10  continue
c --- main iteration loop
  do 30 l = 1, maxadj
    call adjweig (r,nbpts)
    call ortpol (sumsq)
    rchisq = sumsq/float((nbpts - (ndegr+1)*(ndegr+2)/2))
30  continue
end

```


Die wichtigsten im Unterprogramm verwendeten Parameter und Variablen sind:

xmax, ymax	Abmessungen des Bildes in Pixeln
maxadj	Anzahl der Iterationen zur Anpassung einer Fläche an die diagnostisch unbedeutenden Bildregionen
ndegr	Grad des Polynoms zur Anpassung
nbpnts	Zahl der Datenpunkte in den für die Diagnose unbedeutenden Bildregionen
z	Koronarangiogramm mit den Abmessungen xmax, ymax.
zback	Berechnete Werte der Fläche, welche durch Anpassung an die Grauwerte in den diagnostisch unbedeutenden Bildregionen entsteht.

Das Unterprogramm adjweig bestimmt in einem adaptiven Verfahren diejenigen Pixelkoordinaten, welche in dem Koronarangiogramm diagnostisch nicht relevant sind. Dieses Unterprogramm liefert gleichzeitig die entsprechende binäre Maske bin nach maxadj Iterationen. Die Eingabe- und Ausgabeparameter stammen aus der Routine opolbac.

```

subroutine adjweig (r,nbpnts)

parameter (ymax=512, xmax=512)
integer x, y, nbpnts
integer z(1:ymax,1:xmax), bin(1:ymax,1:xmax)
real r
real zfit(1:ymax,1:xmax), s(1:ymax,1:xmax), w(1:ymax,1:xmax)
common / work1 / z, bin
common / work2 / zfit
common / work3 / w
common / work4 / s

nbpnts = 0.
c +++ loop over all data points
do 40 y = 1, ymax
  do 50 x = 1, xmax
    if (zfit(y,x).gt.0.) then
      if (z(y,x).le.zfit(y,x) + r*s(y,x)) then
c ***
        point is considered as background
        w(y,x) = 1./(s(y,x)*s(y,x))
        nbpnts = nbpnts + 1.
        bin(y,x) = 1.
      else
c ***
        point is not considered as background
        w(y,x) = 0.
        bin(y,x) = 0.
      endif
    else
c ---
      background <= 0, weight based original data
c ---
      initial condition
      w(y,x) = 1./float(max(z(y,x),1)*max(z(y,x),1))
      nbpnts = nbpnts + 1.
    endif
  50 continue
  40 continue
end

```

Der Fehler $s(y, x)$ der Grauwerte ist im allgemeinen eine variable Größe. Diese Variable wird in einem common-Block aus dem Hauptprogramm an die Routine übergeben. $s(y, x)$ wird während des Programmablaufs nicht verändert. Die Variable w wird hingegen zwischen den Iterationen neu berechnet. Da w im Unterprogramm ortpol benötigt wird wurde auch w aufgrund seiner Größe in einem common-Block gespeichert.

Das Unterprogramm ortpol berechnet orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen bezüglich der Gewichtsfunktion $w(y, x)$ aus adjweig. Alle nötigen Variablen werden mit Hilfe von common-Blöcken übergeben. Die einzige Ausgabevariable ist sumsq.

```

subroutine ortpol (sumsq)

parameter (ymax=512, xmax=512, ndegr=20)
integer x, y, n, k, m, l, start
integer z(1:ymax,1:xmax)
real sumsq
real zfit(1:ymax,1:xmax), w(1:ymax,1:xmax)
double precision gam, gamamin, gama, gambmin, gamb, gambplus
double precision sum(1:ymax,1:xmax)
double precision a(-1:ndegr-1,-1:ndegr-1), b(-1:ndegr,-1:ndegr-1)
double precision c(0:ndegr,0:ndegr)
double precision pn(-1:ndegr,1:ymax,1:xmax)
double precision pnmin(-1:ndegr,1:ymax,1:xmax), pnplus(-1:ndegr,1:ymax,1:xmax)
common / work1 / z
common / work2 / zfit
common / work3 / w

c /// initialize
do 80 y = 1, ymax
  do 90 x = 1, xmax
    pnmin(-1,y,x) = 0.
    pnmin(0,y,x) = 0.
    pn(-1,y,x) = 0.
    pn(0,y,x) = 1.
    zfit(y,x) = 0.
90  continue
80  continue
c ::: loop over all polynomial terms
do 100 n = 0, ndegr
  do 110 k = 0, n
    c(n,k) = 0.
    gam = 0.
    do 120 y = 1, ymax
      do 130 x = 1, xmax
        c(n,k) = c(n,k) + w(y,x)*z(y,x)*pn(k,y,x)
        gam = gam + w(y,x)*pn(k,y,x)*pn(k,y,x)
130      continue
120    continue
    c(n,k) = c(n,k)/gam
c +++    contribution of this term to the fit
    do 140 y = 1, ymax
      do 150 x = 1, xmax
        zfit(y,x) = zfit(y,x) + c(n,k)*pn(k,y,x)
        sum(y,x) = 0.
150      continue
140    continue
c ~~~    calculate consecuting polynomials recursively
    if (n.lt.ndegr.and.k.eq.0) then
      do 170 l = 0, n
        a(n-1,l) = 0.
        gamamin = 0.
        a(n,l) = 0.
        gama = 0.
        do 180 y = 1, ymax
          do 190 x = 1, xmax
            if (l.le.(n-1)) then
              a(n-1,l) = a(n-1,l) + w(y,x)*x*pn(k,y,x)*pnmin(l,y,x)
              gamamin = gamamin + w(y,x)*pnmin(l,y,x)*pnmin(l,y,x)
            endif
            a(n,l) = a(n,l) + w(y,x)*x*pn(k,y,x)*pn(l,y,x)
            gama = gama + w(y,x)*pn(l,y,x)*pn(l,y,x)
190          continue
180        continue
        if (gamamin.ne.0.) a(n-1,l) = a(n-1,l)/gamamin
        a(n,l) = a(n,l)/gama
        do 200 y = 1, ymax
          do 210 x = 1, xmax
            sum(y,x) = sum(y,x) + a(n-1,l)*pnmin(l,y,x) + a(n,l)*pn(l,y,x)
210          continue
200        continue
170      continue
      do 220 y = 1, ymax
        do 230 x = 1, xmax
          pnplus(0,y,x) = x*pn(0,y,x) - sum(y,x)
          sum(y,x) = 0.
230        continue
220      continue
    endif

```

```

if (n.lt.ndegr.and.k.le.n) then
  start = k-1
  if (k.eq.0.) start = 0
  do 240 l = 0, n
    b(n-1,l) = 0.
    gambmin = 0.
    b(n,l) = 0.
    gamb = 0.
    b(n+1,l) = 0.
    gambplus = 0.
    do 250 y = 1, ymax
      do 260 x = 1, xmax
        if (l.ge.start.and.l.le.(n-1)) then
          b(n-1,l) = b(n-1,l) + w(y,x)*y*pn(k,y,x)*pnmin(l,y,x)
          gambmin = gambmin + w(y,x)*pnmin(l,y,x)*pnmin(l,y,x)
        endif
        b(n,l) = b(n,l) + w(y,x)*y*pn(k,y,x)*pn(l,y,x)
        gamb = gamb + w(y,x)*pn(l,y,x)*pn(l,y,x)
        if (l.le.k) then
          b(n+1,l) = b(n+1,l) + w(y,x)*y*pn(k,y,x)*pnplus(l,y,x)
          gambplus = gambplus + w(y,x)*pnplus(l,y,x)*pnplus(l,y,x)
        endif
      continue
    continue
    if (gambmin.ne.0.) b(n-1,l) = b(n-1,l)/gambmin
    b(n,l) = b(n,l)/gamb
    if (gambplus.ne.0.) b(n+1,l) = b(n+1,l)/gambplus
    do 270 y = 1, ymax
      do 280 x = 1, xmax
        sum(y,x) = sum(y,x) + b(n-1,l)*pnmin(l,y,x)
        *      + b(n,l)*pn(l,y,x) + b(n+1,l)*pnplus(l,y,x)
      continue
    continue
  continue
  do 290 y = 1, ymax
    do 300 x = 1, xmax
      pnplus(k+1,y,x) = y*pn(k,y,x) - sum(y,x)
    continue
  continue
endif
if (k.eq.n) then
  do 440 l = 0, n+1
    do 450 y = 1, ymax
      do 430 x = 1, xmax
        if (l.lt.(n+1)) pnmin(l,y,x) = pn(l,y,x)
        pn(l,y,x) = pnplus(l,y,x)
      continue
    continue
  continue
endif
110 continue
100 continue
c ~~~ weighted sum of squares value
sumsq = 0.
do 410 y = 1, ymax
  do 420 x = 1, xmax
    sumsq = sumsq + w(y,x)*(z(y,x)-zfit(y,x))*(z(y,x)-zfit(y,x))
  continue
420 continue
410 continue
end

```

Die wichtigsten im Unterprogramm verwendeten Parameter und Variablen sind:

xmax, ymax	Abmessungen des Bildes in Pixeln
sumsq	χ^2
ndegr	Grad des Polynoms zur Anpassung
gam	n_γ
gamamin	Normierungskonstante für $a_{n-1,l}$
gama	Normierungskonstante für $a_{n,l}$
gambmin	Normierungskonstante für $b_{n-1,l}$
gamb	Normierungskonstante für $b_{n,l}$
gambplus	Normierungskonstante für $b_{n+1,l}$

a, b, c	$a_{n,l}, b_{n,l}, c_{n,k}$
pn	$p_{n,k}(x, y)$
pnmin	$p_{n-1,l}(x, y)$
pnplus	$p_{n+1,l}(x, y)$

Das Unterprogramm snipbg entfernt schnell veränderliche Strukturen durch die wiederholte Anwendung des moving-average-Filters. Die Glättung verläuft in niter Schritten. Die Filterbreite wird in den letzten nreduc Iterationen um den Faktor $\sqrt{2}$ verringert.

Eingabe: z Koronarangiogramm mit den Abmessungen xmax, ymax.
 w Filterbreite des moving-average-Filters. Siehe Gleichung (165)

Ausgabe: zback geglättetes Koronarangiogramm mit den Abmessungen xmax, ymax.
 Siehe Gleichung (165)

```

subroutine snipbg (z, w, zback)

parameter (ymax=512, xmax=512, niter=48, nreduc=8, sqrt2=1.4142136)
integer x, y, w, n, iw, iwx1, iwx2, iwy1, iwy2
real redfac
real z(1:ymax,1:xmax), zback(1:ymax,1:xmax)

c ... structure stripping
redfac = 1.
do 20 n = 1, niter
c ...   set width, reduce width for last nreduc iterations
if (n.gt.niter-nreduc) redfac = redfac/sqrt2
iw = max(nint(redfac*w),1)
do 30 y = w+1, ymax-w
do 40 x = w+1, xmax-w
iwx1 = max(x-iw,w+1)
iwx2 = min(x+iw,int(xmax)-w)
iwy1 = max(y-iw,w+1)
iwy2 = min(y+iw,int(ymax)-w)
zback(y,x) = min(0.25*(z(y,iwx1) + z(y,iwx2) + z(iwy1,x) +
*              z(iwy2,x)),z(y,x))
40   continue
30   continue
20   continue
end

```

Anhang B

Jährlich erleiden in Deutschland 261000 Menschen einen Herzinfarkt. Der Herzinfarkt ist fast immer das Ergebnis von Veränderungen der Herzkranzgefäße: Er ist die Folge der koronaren Herzkrankheit. Jeder zweite Bundesbürger stirbt an einer Krankheit des Herz-Kreislaufsystems. Damit sind diese Erkrankungen die häufigste Todesursache.

Eine Voraussetzung für problemloses Funktionieren des Herzens ist die vollständige Durchgängigkeit der Herzkranzgefäße (Koronararterien). Ausgehend von der linken und rechten Koronararterie wird das gesamte Herz mit einem Netz immer feiner werdender Adern überzogen und mit Blut versorgt. Unter dem Einfluß von Risikofaktoren wie Zigarettenrauchen, Bluthochdruck, erhöhtem Cholesterinspiegel, Zuckerkrankheit und Übergewicht kommt es zu einer Schädigung der Gefäßinnenhaut (Intima) der Herzkranzgefäße. Diese Verletzung löst einen Reparaturvorgang aus, der die Innenhaut verdickt. Es entsteht ein cholesterinhaltiges Polster, das in die Gefäßinnenwand hineinragt und sie verengt. Je weiter der Krankheitsprozeß fortschreitet, umso größer werden die Plaques. Auf diese Weise bilden sich Engstellen (Stenosen), die den Blutfluß zunehmend behindern. Erst wenn die Verengung mehr als 70% des Gefäßes zugesetzt hat, reicht die Durchblutung nicht mehr. Das Herz reagiert mit Schmerzen und Atemnot. Der beklemmende Schmerz in der Brust wird Angina Pectoris genannt.

Zum Herzinfarkt kommt es, wenn ein Koronargefäß sich plötzlich vollständig verschließt. Dabei reißt die Deckplatte der Plaque ein, und der cholesterinhaltige Kern kommt mit dem Blutstrom in Berührung. Dadurch wird das Gerinnungssystem in der Art aktiviert, daß Blutplättchen das aufgerissene Fettpolster abzudichten versuchen. Das so entstehende Blutgerinnsel kann das eingengte Blutgefäß vollständig verschließen. Dadurch kommt die Blutzufuhr im hinter dem Verschuß liegenden Teil des Gefäßbaums zum Erliegen.

Tritt Angina Pectoris auf, sind eine Reihe von Untersuchungen notwendig. Hierzu gehören Belastungs-EKG, Ultraschall und Myokardszintigrafie. Ergeben sich aus den Untersuchungen Hinweise auf eine koronare Herzkrankheit, ist eine Herzkatheteruntersuchung angezeigt. In einem invasiven Eingriff im Herzkatheterlabor wird durch Punktion der Beinvene in der Leistengegend ein Katheter bis in die linke oder rechte Kranzarterie geschoben. Daraufhin wird durch den Katheter Röntgenkontrastmittel eingebracht. Während einer Röntgenaufnahme wird der Fluß des Kontrastmittels durch den betreffenden Teil des Gefäßbaumes auf einem 35 mm-Film ("Kinofilm") oder in einer zeitlichen Folge digitaler Bilder festgehalten. Verengungen zeigen sich durch umschriebene Aussparungen des Kontrastmittels. Auf diese Weise können Vorhandensein, Ausmaß und Lokalisation von Verengungen der Herzkranzgefäße nachgewiesen werden.

Eine Reihe von Medikamenten ist zur Behandlung der Angina Pectoris verfügbar. Hierzu zählen Nitrate, Betablocker, ACE-Hemmer, Lipidsenker und "Aspirin" (Acetylsalicylsäure). Führt eine medikamentöse Behandlung nicht zum Ziel, kann eine Aufdehnung der Herzkranzgefäße, die sogenannte PTCA (Dilatation mittels Ballonkatheter noch während der Untersuchung), unter Umständen mit einer Gefäßstütze (Stent) oder eine Bypassoperation notwendig werden.

Die Angina Pectoris ist ein Warnsignal für einen unmittelbar bevorstehenden Herzinfarkt. Die Koronarangiografie kann helfen einen drohenden Infarkt rechtzeitig zu erkennen und ihn so verhindern. Eine Koronarangiografie ist auch dann angezeigt, wenn folgende Indikationen vorliegen:

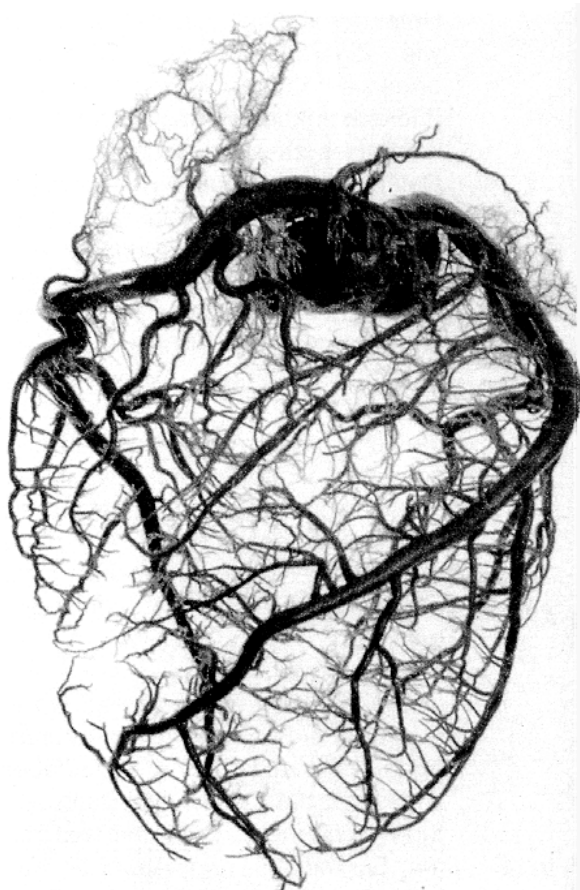
- Frischer Myokardinfarkt: Verläuft die medikamentöse Auflösung des Thrombus, welcher den Infarkt verursacht hat, erfolglos, kann eine sofortige PTCA (sofern möglich) große Teile des betroffenen Gefäßbaumes retten.
- Kontrollkoronarangiografie: Nach einer koronaren Intervention (PTCA, Stent, Rotablation) oder nach Bypassoperationen ist eine Kontrollkoronarangiografie dann üblich, wenn es sich bei den behandelten Defekten um wichtiges Gewebe und/oder um ein vorläufiges und unsicheres

Primärergebnis handelt. Bei erneut auftretender Angina Pectoris ist eine Kontrollkoronarangiografie ohnehin ratsam.

Eine Kontraindikation der Koronarangiografie liegt vor bei

- Patienten, bei denen die Erkrankung bereits bekannt ist und bei denen jede operative oder interventionelle Therapie unmöglich ist.
- Patienten, deren schlechter Allgemeinzustand eine Koronarangiografie nicht erlaubt, oder bei denen eine schwere Folgeerkrankung zu erwarten ist.
- Patienten, bei denen ein bleibendes Nierenversagen durch die Injektion des Kontrastmittels zu erwarten ist.
- Patienten mit allergischen Reaktionen auf das Kontrastmittel.
- Patienten mit nicht beherrschbaren Gerinnungsstörungen.

Die Koronarangiografie ist unerlässlich zur exakten Diagnosenstellung, zur Planung von Operation und interventionellen Verfahren sowie zur Abschätzung der Prognose. Eine Koronarangiografie wird nur dann durchgeführt, wenn sich mit Sicherheit therapeutische Konsequenzen aus der Untersuchung für den Patienten ergeben. Das Risiko der Untersuchung muß den therapeutischen und prognostischen Nutzen rechtfertigen.



Figur 74. Darstellung der Herzkranzarterien. Die Herzkranzarterien oder Koronararterien versorgen den Herzmuskel mit Sauerstoff und den erforderlichen Nährstoffen.

Literatur

- [1] Stephane G. Mallat, „A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: the Wavelet Representation“, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, pp 674-693, Juli 1989
- [2] Gilbert Strang, „Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction“, SIAM Review, Vol. 31, No. 4, pp 614-627, Dezember 1989
- [3] Charles K. Chui, „An Introduction to Wavelets“, Academic Press, Inc., pp 230-232, 1992
- [4] Charles K. Chui, „Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications“, Academic Press, Inc., 1992
- [5] Ingrid Daubechies, „Ten Lectures on Wavelets“ Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992
- [6] John J. Benedetto und Michael W. Frazier (Hrsg.), „Wavelets: Mathematics and Applications“, CRC Press, Inc., 1993
- [7] Gilbert G. Walter, „Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications“, CRC Press, Inc. Pp 28-48, 1994
- [8] Tom Koornwinder, „Two Variable Analogues of Classical Orthogonal Polynomials“ in Richard A Askey (Hrsg.), „Theory and Application of Special Functions“, Academic Press, 1975
- [9] Dunham Jackson, „Formal Properties of Orthogonal Polynomials in Two Variables“, Duke Mathematical Journal 2, pp 423-434, 1936
- [10] M. A. Kowalski, „The Recursion Formulas for Orthogonal Polynomials in n Variables“, SIAM Math. Anal., Vol 13, No. 2, pp 309-315, März 1982
- [11] M. A. Kowalski, „Orthogonality and Recursion Formulas for Polynomials in n Variables“, SIAM Math. Anal., Vol 13, No. 2, pp 316-323, März 1982
- [12] O. Kalthoff und M. Dietrich, „Bildatenkompression: Ein Überblick über die Möglichkeiten und Risiken der technischen Bilddatenreduktion in der Kardiologie“ in Johann Günther (Hrsg.), „Telemedizin-Eine Telematikanwendung“, Donau-Universität Krems, pp 61-68, März 1998
- [13] Frank Belz, „Approximation einer Fläche durch orthogonale Polynome zur Anwendung auf die Koronarangiografie“, Diplomarbeit des Fachbereichs Mathematik der Universität-GH Siegen, Oktober 1998
- [14] Anil K. Jain, „Fundamentals of Digital Image Processing“, Prentice Hall, Inc., pp 347-353, 1989
- [15] Rafael C. Gonzales und Richard E. Woods, „Digital Image Processing“, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., pp197-201, 1993
- [16] William B. Pennebaker und Joan L. Mitchell, „JPEG Still Image Data Compression Standard“, Van Nostrand Reinhold, 1993
- [17] S. Steenstrup, „A Simple Procedure of Fitting a Background to a Certain Class of Measured Spectra“, Journal of Applied Crystallography 14, pp 226-229, Dezember 1980
- [18] A. G. Frodesen, O. Skjeggstad und H. Tøfte, „Probability and Statistics in Particle Physics“, Universitetsforlaget, p 319, 1979
- [19] Claude E. Shannon, „A Mathematical Theory of Communications“, Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp 379-423 & pp 623-656, 1948
- [20] Heinz Morneburg (Hrsg.), „Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik“, Publicis MCD Verlag, 1995
- [21] D. A. Huffman, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, Vol 40, pp 1098-1101, 1952
- [22] William H. Press, „Numerical Recipes in FORTRAN 77 The Art of Scientific Computing“, Cambridge University Press, 1992, <http://www.nr.com>
- [23] J. Ziv und A. Lempel, IEEE Transactions on Information Theory, Vol IT 24, pp 530-536, 1978
- [24] Ralf-Hendrik Menk, „Eine Vielkanalionskammer für Röntgenaufnahmen“, Doktorarbeit, Universität-Gesamthochschule Siegen, pp 8-30, 1994
- [25] Meike Jung, private Mitteilung
- [26] Hans-Jürgen Besch, private Mitteilung

- [27] K. Hosaka, „A new picture quality evaluation method“, Proceedings International Picture Coding Symposium, Vol 86, pp 17-18, 1986
- [28] M. Toyoashi, M. Miyahara, Y. Horita, Picture Quality Scale of Moving Image Estimation of ITU Test Image“, Technical Report of IEICE, CAS95-121, DSP95-176, CS95-199, pp 7-12, 1996
- [29] Bruce K. Ho, V. Tseng, M. Marco, C. Doris, „A mathematical model to quantify JPEG block artifacts“, SPIE Image Capture, Formating and Display, Vol. 1897, pp 269-275
- [30] William B. Pennebaker und Joan L. Mitchell, „JPEG still image data compression standard“, Van Nostrand Reinhold, 1993

Danksagung

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Nikolaj Pavel, der diese Arbeit betreut hat. Prof. Dr. Pavel hat mit vielen Anregungen und Diskussionen zur Gestaltung der Arbeit beigetragen. Prof. Dr. Albert H. Walenta hat die Durchführung der Dissertation an der Universität-Gesamthochschule Siegen ermöglicht. Herr Dr. Martin Dietrich hat Hilfestellungen im Rahmen der Zusammenarbeit mit der Firma General Electric Medical Systems gegeben.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Volker Klotz und bei Herrn Priv. Doz. Dr. Uwe Schnell für ihre wertvollen Hinweise zum Abschnitt über orthogonale Polynome in zwei diskreten Veränderlichen. Herrn Dipl.-Math. Frank Belz danke ich für die Diskussionen im Rahmen seiner Diplomarbeit.

Über die Diskussionsbereitschaft der Mitglieder der Arbeitsgruppe habe ich mich sehr gefreut. An dieser Stelle sei besonders Herr Dr. Besch erwähnt.

Die Herren Koch und Pokorra haben den Betrieb der FORTRAN-Programme auf den Workstations des Hochschulrechenzentrums unbürokratisch und kompetent unterstützt.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und Ergebnisse anderer Autoren als solche kenntlich gemacht habe.

Lübeck, im Juni 1999

Oliver Kalthoff