Kazhdan–Lusztig–Basen, unzerlegbare Bimoduln und die Topologie der Fahnenmannigfaltigkeit einer Kac–Moody–Gruppe

Martin Härterich

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematischen Fakultät
der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau

Dekan:	Prof. Dr. L. Rüschendorf
Doktorvater und Referent:	Prof. Dr. W. Soergel
Referent:	Prof. Dr. M. Brion
Datum der Promotion:	5. Juli 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir betrachten Bimoduln über dem graduierten Ring $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$. Dabei soll $\mathfrak{h}$ die Cartansche Unteralgebra einer symmetrisierbaren Kac–Moody–Algebra $\mathfrak{g}$ sein, und die Graduierung so gewählt, daß $\mathfrak{h}^*$ die homogene Komponente vom Grad 2 in S ist. Auf S operiert die Weylgruppe W von $\mathfrak{g}$. Seien $\Sigma \subset W$ die einfachen Spiegelungen und $S^w \subset S$ die Invarianten unter $w \in W$.

Mit $S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S$ (bzw. $S\text{–}\mathsf{Mod}\text{–}S$) bezeichnen wir die Kategorie aller endlich erzeugten S–Bimoduln mit (bzw. ohne) Graduierung. Ist ein Objekt $M = \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Z}} M^\nu$ aus $S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S$ mitsamt seiner Zerlegung in homogene Komponenten gegeben, dann definieren wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ das verschobene Objekt $M[k]$ durch $(M[k])^\nu = M^{\nu+k}$.

Ziel der Arbeit ist die Konstruktion eines unzerlegbaren graduierten S–Bimoduls $\mathbb{B}_w$ für jedes $w \in W$, so daß folgendes gilt:

Satz. *Sei $s_1 s_2 \cdots s_l$ ein reduzierter Ausdruck für $w \in W$. Dann ist $\mathbb{B}_w$ eindeutig bestimmt als derjenige unzerlegbare direkte Summand in $S \otimes_{S^{s_1}} S \otimes_{S^{s_2}} \cdots \otimes_{S^{s_l}} S[l]$, der zu keinem $\mathbb{B}_y[k]$ mit $y < w$ und $k \in \mathbb{Z}$ isomorph ist.*

Das Coxetersystem (W, Σ) liefert eine Heckealgebra $\mathcal{H}$ mit der Kazhdan–Lusztig–Basis $\{\underline{H}_w \mid w \in W\}$ (siehe Abschnitt 1).

Außerdem haben wir die zerfällende Grothendieckgruppe $\left[S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S\right]_\oplus$ der abelschen Kategorie $S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S$. Das ist die von deren Objekten frei erzeugte Gruppe modulo den Relationen $M = M_1 + M_2$, falls $M \cong M_1 \oplus M_2$. Das Bild von M darin bezeichnen wir mit $[M]_\oplus$. Durch $[M]_\oplus \cdot [N]_\oplus = [M \otimes_S N]_\oplus$ wird $\left[S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S\right]_\oplus$ sogar zu einem Ring, dem zerfällenden Grothendieckring. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz. *Es gibt einen injektiven Ringhomomorphismus von $\mathcal{H}$ in $\left[S\text{–}\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}\text{–}S\right]_\oplus$, der definiert ist durch $v \mapsto \left[S[1]\right]_\oplus$ sowie $\underline{H}_s \mapsto \left[S \otimes_{S^s} S[1]\right]_\oplus$ für $s \in \Sigma$.*
Das Kazhdan–Lusztig–Basiselement $\underline{H}_w$ wird dabei abgebildet auf $[\mathbb{B}_w]_\oplus$ (mit $\mathbb{B}_w$ wie oben).

Beide Resultate finden sich in Abschnitt 7 und sind für den Spezialfall einer halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ bekannt aus [So3].

Im Gegensatz zur beinahe elementaren Formulierung dieser Sätze liegen die Methoden zu ihrem Beweis recht tief: Wir erhalten $\mathbb{B}_w$ als die T–äquivariante Schnittkohomologie $\mathbb{H}_T^\bullet\big(\mathcal{IC}_T(\overline{BwB/B})\big)$ einer Schubertvarietät $\overline{BwB/B}$ in der Fahnenmannigfaltigkeit G/B. Dabei ist G die Kac–Moody–Gruppe, die sich zu $\mathfrak{g}$ konstruieren läßt, und B bzw. T sind eine Borelsche und ein Torus in G.

Gliederung der Arbeit. Abschnitt 1 soll an die Definition der Heckealgebra $\mathcal{H}$ zu einem beliebigen Coxetersystem (W, Σ) und ihre Kazhdan-Lusztig-Basis $\{\underline{H}_w \mid w \in W\}$ erinnern sowie an das Verfahren aus [So4], mit dem man diese Basis rekursiv bestimmen kann.

In Abschnitt 2 sind Resultate über die Kac–Moody Gruppe G zusammengestellt. Damit werden, [Sl2] folgend, Fahnenmannigfaltigkeiten G/B und G/P_s konstruiert und untersucht.

(P_s ist die von B und einem $s \in \Sigma$ erzeugte „minimale" Parabolische.) Für den Rest dieser Übersicht soll P entweder B oder P_s bezeichnen. Wie im klassischen Fall hat G/P eine Bruhatzerlegung $\dot{\bigcup}_w BwP/P$ in (endlichdimensionale) affine Zellen, und der Abschluß einer solchen Bruhatzelle ist eine projektive algebraische Varietät, die Schubertvarietät $\overline{BwP/P}$.

Die Schubertvarietäten sind äquivariant–formale Räume wie in [GKM] definiert. Das bedeutet, daß sich ihr (äquivarianter) Kohomologiering alleine aus der Kenntnis der Fixpunkte und eindimensionaler Orbiten unter der Operation des Torus T bestimmen läßt. Wir sammeln diese Information in Abschnitt 2 und berechnen in Abschnitt 4 schließlich $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{BwP/P})$ und damit auch $\mathrm{H}_T^\bullet(G/P)$. Hier kommt auch S ins Spiel als der T-äquivariante Kohomologiering eines Punktes. Insbesondere erhalten wir

Satz. *$\mathrm{H}_T^\bullet(G/B)$ ist der Unterring von $\prod_{y \in W} S$, der aus den $(p_w)_{w \in W}$ mit beschränktem Grad besteht, die die Bedingungen $p_y \equiv p_{s_\alpha y} \pmod{\alpha}$ für alle $y \in W$ und alle reellen Wurzeln α erfüllen.*

Zuvor steht in Abschnitt 3 eine Einführung in die äquivariante derivierte Kategorie $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(G/B)$ von Garben nach Bernstein und Lunts, den natürlichen Lebensraum der T-äquivarianten Schnittkohomologiekomplexe. Außerdem finden sich in diesem Abschnitt noch verschiedene weitere technische Zutaten, mit denen in Abschnitt 5 die Schnittkohomologiekomplexe $\mathcal{IC}_T\overline{BwB/B}$ von Schubertvarietäten bestimmt werden.

Das Verfahren ist das geometrische Analogon zur Berechnung der Kazhdan-Lusztig-Basis von $\mathcal{H}$. Die $\mathcal{IC}_T\overline{BwB/B}$ ergeben sich rekursiv als eindeutig bestimmte direkte Summanden in Ausdrücken die sukzessiv durch Integration über die Fasern einer $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$–Faserung $\pi\colon G/B \to G/P_s$ entstehen.

Satz. *Sei $x \in W$, $s \in \Sigma$ mit $xs > x$ gegeben. Mit den durch $\underline{H}_x\underline{H}_s = \underline{H}_{xs} + \sum_{y<xs} \mu_y \underline{H}_y$ definierten ganzen Zahlen μ_y gilt dann in der Kategorie $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(G/B)$*

$$\pi^*\pi_*(\mathcal{IC}_T\overline{BxB/B})[1] = \mathcal{IC}_T\overline{BxsB/B} \oplus \bigoplus_{y<xs} \mu_y \mathcal{IC}_T\overline{ByB/B}\ .$$

In den Abschnitten 6 und 7 wird die Hyperkohomologie $\mathbb{B}_w = \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{BwB/B})$ dann als Modul über dem T-äquivarianten Kohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit bzw. als Bimodul über dem T-äquivarianten Kohomologiering eines Punktes alias dem Polynomring S interpretiert.

Satz. *Mit x, s wie oben und denselben Multiplizitäten μ_y gilt in S–$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$–$S$*

$$\mathbb{B}_x \otimes_{S^s} S[1] = \mathbb{B}_{xs} \oplus \bigoplus_{y<xs} \mu_y \mathbb{B}_y\ .$$

Zu guter Letzt beweisen wir eine Reihe von „Erweiterungssätzen", aus denen die Unzerlegbarkeit der Moduln $\mathbb{B}_w$ folgt. Genauer zeigen wir:

Satz. *$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(G/B)}(\mathcal{IC}_T\overline{BxB/B}, \mathcal{IC}_T\overline{ByB/B})$, $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(G/B)}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y)$ und $\mathrm{Hom}^\bullet_{S\otimes S}(\mathbb{B}_x, \mathbb{B}_y)$ sind als graduierte Vektorräume isomorph.*

Motivation für diese Untersuchungen ist der Wunsch, die Ergebnisse aus der Arbeit [So2] auf den Kac–Moody–Fall zu verallgemeinern. Dort werden für eine komplexe halbeinfache algebraische Gruppe die Zusammenhänge zwischen der Struktur der Kategorie $\mathcal{O}$ von Bernstein, Gelfand und Gelfand, der Schnittkohomologie von Schubertvarietäten und unzerlegbaren Moduln studiert. In diesem Sinne führt die Dissertation den topologischen Teil von [So2] fort.

Andererseits lassen sich die eingangs vorgestellten Ergebnisse auch für eine beliebige Coxetergruppe formulieren. Es wäre interessant zu wissen, ob sie in dieser Allgemeinheit auch noch gelten.

Danke! Ganz herzlich danken will ich Wolfgang Soergel, meinem Doktorvater, durch den ich einen großen Teil dessen gelernt habe, was in dieser Arbeit steckt. Ohne seine geduldigen und immer begeisterten Erklärungen wäre sicher viel Mathematik für mich im Nebel geblieben.

Daneben gilt mein Dank für Fragen, Antworten, Motivation, Ablenkung, Anregung aller Art und eine gute Arbeitsatmosphäre vor allem Steen Ryom-Hansen, Catharina Stroppel, Peter Fiebig, Karen Günzl, Claus Mokler, Albert Bullig, Gerald Höhn, Erik Backelin sowie Jens Jensen und natürlich Petra Häußermann.

Weiterhin danke ich Michel Brion, der als Referent meine Arbeit sehr aufmerksam gelesen und eine Reihe Verbesserungsvorschläge dazu gemacht hat.

Während eines Teils der Arbeit an dieser Dissertation erhielt ich ein Stipendium aus dem Landesgraduiertenförderungsprogramm. Dafür sei ebenfalls gedankt.

1 Heckealgebren und Kazhdan-Lusztig-Basen

In diesem Abschnitt wird die Heckealgebra zu einer Coxetergruppe mitsamt ihrer Kazhdan-Lusztig-Basis definiert und die Methode vorgestellt, mit der sich diese Basis rekursiv berechnen läßt. Sie ist das kombinatorische Vorbild für die geometrisch–topologischen Untersuchungen in den späteren Abschnitten. Das Material in diesem Abschnitt geht auf [KL] zurück und findet sich in der hier verwendeten Form in [So4].

Für jedes Coxetersystem (W, Σ) mit Längenfunktion ℓ und Bruhatordnung $\leq$ kann der freie Modul

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] H_w$$

folgendermaßen mit einer Multiplikation versehen werden:

$$\begin{aligned} H_x H_y &= H_{xy} \ , && \text{falls } \ell(x) + \ell(y) = \ell(xy) \\ (H_s + v)(H_s - v^{-1}) &= 0 && \text{für } s \in \Sigma \end{aligned}$$

(Mit v bzw. v^{-1} ist dabei vH_e bzw. $v^{-1}H_e$ gemeint, da ja aus der ersten Gleichung schon folgt, daß $H_e = 1_{\mathcal{H}}$.) Die so entstandene assoziative Algebra $\mathcal{H}$ über $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ heißt **Heckealgebra**.

Bemerkung. Etwas weiter verbreitet ist die Basis aus den $T_w = v^{-\ell(w)} H_w$ (siehe etwa [Bou, VI.2], wo T_w und v allerdings e_w und $q^{-\frac{1}{2}}$ heißen).

Obige Relationen implizieren, daß die H_w invertierbar sind und somit

$$d \colon H_w \mapsto \left(H_{w^{-1}}\right)^{-1}$$

für alle $w \in W$ wohldefiniert ist. Man rechnet nach, daß dadurch eine Fortsetzung des involutiven Ringautomorphismus d von $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, der v und v^{-1} vertauscht, auf ganz $\mathcal{H}$ gegeben ist. Elemente von $\mathcal{H}$, die invariant unter d sind, nennen wir **selbstdual**.

Neben der zur Definition benutzten Basis $(H_w)_{w \in W}$ von $\mathcal{H}$ spielt die **Kazhdan-Lusztig-Basis** $(\underline{H}_w)_{w \in W}$ eine entscheidende Rolle. Das Element $\underline{H}_w \in \mathcal{H}$ ist dabei eindeutig charakterisiert durch die beiden Eigenschaften (siehe [So4, Thm. 2.1])

(1.1) $\underline{H}_w$ ist selbstdual unter der Dualität d.

(1.2) $\underline{H}_w$ läßt sich in der Form $H_w + \sum_y h_{y,w} H_y$ mit $h_{y,w} \in v\mathbb{Z}[v]$ schreiben.

Explizit haben wir

$$\underline{H}_e = H_e$$

und

$$\underline{H}_s = H_s + v \quad \text{für } s \in \Sigma.$$

Bemerkung. (a) $h_{y,w} \neq 0$ gilt sogar nur für $y < w$. (Das ergibt sich aus der unten angegebenen Methode zur Berechnung der Kazhdan-Lusztig-Basis.)
(b) Der Zusammenhang zu den **Kazhdan-Lusztig-Polynomen** $P_{y,w}$ aus [KL] ist gegeben durch $h_{y,w}(v) = v^{\ell(w)-\ell(y)} P_{y,w}(v^{-2})$.

Wir beschreiben das Verfahren aus [So4], mit dem sich $\underline{H}_w$ für $w \neq e$ berechnen läßt, wenn die $\underline{H}_y$ mit $y < w$ bereits bekannt sind. Die Grundidee ist, zuerst ein selbstduales Element zu bilden, das das gesuchte $\underline{H}_w$ als Summand enthält und sonst nur noch bereits bekannte $\underline{H}_y$.

Dazu schreiben wir w in der Form $w = xs$ mit $x < w$ und $s \in \Sigma$ und betrachten $\underline{H}_x \underline{H}_s$. Das ist ein selbstdualer Ausdruck der Bauart

$$H_w + \sum_{y<w} \tilde{h}_y H_y \,,$$

wobei die $\tilde{h}_y$ Polynome aus $\mathbb{Z}[v]$ sind. Eine direkte Rechnung zeigt nämlich:

$$H_y \underline{H}_s = \begin{cases} H_{ys} + vH_y & \text{, falls } ys > y \\ H_{ys} + v^{-1}H_y & \text{, falls } ys < y \end{cases} \tag{1.3}$$

Subtrahieren wir von obigem Ausdruck für $\underline{H}_x \underline{H}_s$ die Summe aus den selbstdualen Elementen $\mu_y \underline{H}_y$ für $y < w$, wobei $\mu_y = \tilde{h}_y(0)$ der konstante Term von $\tilde{h}$ ist, so erhalten wir ein selbstduales Element aus $\mathcal{H}$, das die Bedingung (1.2) erfüllt, eben gerade das gesuchte $\underline{H}_w$. Es gilt also

$$\underline{H}_x \underline{H}_s = \underline{H}_w + \sum_{y<w} \mu_y \underline{H}_y \tag{1.4}$$

mit (durch w und x) eindeutig bestimmten ganzzahligen Koeffizienten μ_y.

Bemerkung. Die Tatsache, daß die μ_y nichtnegativ sind, folgt für eine Weylgruppe W aus der geometrischen Deutung dieser Koeffizienten (siehe Abschnitt 5). Für eine beliebige Coxetergruppe bleibt dies eine Vermutung.

2 Fahnenmannigfaltigkeiten und Schubertvarietäten

In diesem Abschnitt sollen Schubertvarietäten für Fahnenmannigfaltigkeiten zu Kac-Moody-Gruppen definiert werden. Im wesentlichen folgen wir dabei [Sl2]. Außerdem werden Fixpunkte und eindimensionale Orbiten der Operation eines maximalen Torus der Kac-Moody-Gruppe bestimmt, da diese später bei der Berechnung der äquivarianten Kohomologie eine Rolle spielen.

Wir starten mit einer Realisierung einer symmetrisierbaren verallgemeinerten Cartanmatrix und bilden dazu die Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}$ über $\mathbb{C}$ mit der Cartanschen Unteralgebra $\mathfrak{h}$. Weiter seien mit R, R_{re}, R^+_{re} und Δ die Menge aller, der reellen, der positiven reellen bzw. der einfachen Wurzeln bezeichnet.

Für eine beliebige Wurzel α mit Kowurzel $\alpha^\vee$ sei s_α die Spiegelung

$$\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \, .$$

Die Menge $\Sigma = \{s_\alpha \,|\, \alpha \in \Delta\}$ erzeugt dann die Weylgruppe W von $\mathfrak{g}$, und (W, Σ) ist ein Coxetersystem.

Zu diesen Daten definiert P. Slodowy in [Sl1, Kapitel 5] eine Kac-Moody-Gruppe G mitsamt den Untergruppen B, N, T und U. (Eigentlich werden diese Gruppen in der zitierten Arbeit genau in der umgekehrten Reihenfolge konstruiert, weil G dort synthetisch aus den Untergruppen aufgebaut wird.)

Im Falle einer endlichdimensionalen halbeinfachen Liealgebra $\mathfrak{g}$ entsteht bei der Konstruktion die zu $\mathfrak{g}$ gehörende einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe G, und B, U und T sind eine Borelsche, deren unipotentes Radikal bzw. ein maximaler Torus in G, schließlich ist N der Normalisator von T in G. Die folgenden Eigenschaften sind dann (z. B. aus [Bo3]) wohlbekannt. Daß sie auch für die Kac–Moody–Gruppe noch gelten, wird in [Sl1] bewiesen.

□ T ist ein komplexer Torus mit Liealgebra $\mathfrak{h}$.

Sei $H \subset \mathfrak{h}$ das duale Gewichtegitter wie bei Slodowy. Dann gilt $T \cong H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$. Die Wurzeln $R \subset \mathfrak{h}^*$ lassen sich somit wie gewohnt mit Charakteren von T identifizieren.

□ Für jede reelle Wurzel α existiert eine Einparameteruntergruppe U_α von G. Die zugehörigen Homomorphismen

$$u_\alpha \colon \mathbb{C} \to U_\alpha$$

lassen sich so normieren, daß für jedes $\alpha \in R^+_{\mathrm{re}}$ durch

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto u_\alpha(\xi) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \mapsto u_{-\alpha}(\xi)$$

ein injektiver Homomorphismus $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow G$ gegeben ist.

T operiert auf U_α durch Konjugation; es gilt

$$t\, u_\alpha(\xi)\, t^{-1} = u_\alpha(\alpha(t)\xi) \, . \tag{2.1}$$

- U enthält U_α für alle positiven reellen Wurzeln α. Die Operation von T auf den U_α läßt sich zu einer Operation auf ganz U fortsetzen. B ist damit das semidirekte Produkt $T \ltimes U$.
- N wird erzeugt von T zusammen mit den Elementen

$$n_\alpha(\xi) = u_\alpha(\xi) u_{-\alpha}(-\xi^{-1}) u_\alpha(\xi) \ ,$$

wobei α die einfachen Wurzeln durchläuft und $\xi \in \mathbb{C}^*$ ist.

(Man rechnet nach, daß $n_\alpha(\xi)$ das Bild von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \xi \\ -\xi^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ unter der gerade beschriebenen Injektion $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to G$ ist.)

- Das Paar (B,N) ist ein Titssystem in G, und es gilt $T = B \cap N$. In dieser Aussage enthalten ist, daß T von N normalisiert wird. Die Coxetergruppe N/T des Titssystems ist isomorph zur Weylgruppe W von $\mathfrak{g}$. Der Isomorphismus $W \to N/T$ ist gegeben durch

$$s_\alpha \mapsto n_\alpha(\xi) T/T \ .$$

(Die Nebenklasse $n_\alpha(\xi)T$ ist unabhängig von $\xi \in \mathbb{C}^*$.)

Notation. In Zukunft bezeichnen wir Elemente der Weylgruppe und ihre jeweiligen Repräsentanten in N mit demselben Buchstaben. Lediglich für Aussagen, die von der speziellen Wahl des Repräsentanten abhängen (oder zumindest nicht offensichtlich nicht davon abhängen), benutzen wir die Bezeichnung $\dot{w}$ für ein fest gewähltes Element von N mit $\dot{w}T/T = w$.

- W permutiert die Menge der Einparameteruntergruppen U_α; genauer gilt:

$$\dot{w} U_\alpha \dot{w}^{-1} = U_{w(\alpha)} \tag{2.2}$$

Sei nun $I \subset \Sigma$ eine Teilmenge der einfachen Spiegelungen und W_I deren Erzeugnis. Jede Nebenklasse von W_I in W besitzt ein kürzestes Element. Die Menge all dieser kürzesten Nebenklassenvertreter wird mit W^I bezeichnet. Das Urbild von I in N erzeugt zusammen mit B eine „parabolische" Untergruppe $P = P_I$. Speziell für $I = \{s\}$ ist $W^I = \{w \in W \mid w < ws\}$.

Im Weiteren spielen nur noch solche Teilmengen I eine Rolle, für die W_I endlich ist. In diesem Fall, heißen W_I bzw. P_I auch „von endlichem Typ". Wirklich benötigt werden in den späteren Abschnitten sogar nur die Fälle $I = \emptyset$ und $I = \{s\}$, wo P die „Borelsche" B bzw. eine „minimale Parabolische" P_s ist.

Der Quotient $Y = G/P$ wird als **Fahnenmannigfaltigkeit** bezeichnet. Die Multiplikation in G induziert eine (Links-)Operation von B auf G/P. Aus der Bruhatzerlegung

$$G = \bigcup_{w \in W} B\dot{w}B$$

von G in B-Doppelnebenklassen ergibt sich die Zerlegung

$$G/P = \bigcup_{w \in W^I} BwP/P$$

der Fahnenmannigfaltigkeit in Bahnen $Y_w = BwP/P$ bezüglich dieser B-Operation, die **Bruhatzellen**.

Für $w \in W$ sei $R_w = R^+ \cap wR^-$. Diese Menge läßt sich noch auf mehrere andere Weisen beschreiben (siehe [Bou, VI.1.6] oder [Hu1, 5.6, Ex. 2]):

Lemma 2.1. *(a) Sei $s_1 \cdots s_l$ ein reduzierter Ausdruck für w, und sei jeweils α_k die einfache Wurzel zur Spiegelung s_k. Dann sind die $\gamma_k = s_1 \cdots s_{k-1}(\alpha_k)$ für $1 \leq k \leq l$ allesamt verschieden und bilden gerade die Menge R_w. Insbesondere sieht man so, daß R_w nur reelle Wurzeln enthält und daß $|R_w| = \ell(w)$.*

(b) Für jedes $\gamma \in R_{\mathrm{re}}$ gilt entweder $s_\gamma w < w$ oder $s_\gamma w > w$, und R_w besteht genau aus den γ mit $s_\gamma w < w$.

Sei U_w das Erzeugnis der Gruppen U_γ mit $\gamma \in R_w$. Wie in der endlichdimensionalen Theorie (vgl. [Bo3, §14]) beweist man die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 2.2. *Für jede fest gewählte Anordnung der Wurzeln γ aus R_w liefert die Multiplikation einen T-äquivarianten Gruppenisomorphismus vom direkten Produkt der U_γ auf U_w. (T operiert dabei auf den einzelnen Komponenten U_γ und auf U_w durch Konjugation.)*
Die Struktur als algebraische Gruppe, die U_w so erhält, ist unabhängig von der Anordnung von R_w.

U_w ist daher als algebraische Varietät isomorph zum affinen Raum der Dimension $\ell(w)$.

Lemma 2.3. *Falls w in W^I liegt, ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} U_w \times P &\to B\dot{w}P \\ (u,p) &\mapsto u\dot{w}p \end{aligned} \tag{2.3}$$

eine Bijektion.

Ist $\mathfrak{g}$ endlichdimensional, so ist bekanntlich G/P eine projektive algebraische Varietät. Der Abschluß einer Bruhatzelle (gleichgültig, ob in der metrischen oder in der Zariskitopologie) heißt dann Schubertvarietät und ist die Vereinigung aller Bruhatzellen zu kleineren Weylgruppenelementen:

$$\overline{BwP/P} = \bigcup_{\substack{y \in W^I \\ y \leq w}} ByP/P$$

W^I hat in diesem Fall ein längstes Element w_0, und es gilt $\overline{Bw_0P/P} = G/P$.

Bemerkung. Im Kac–Moody–Fall fehlt solch ein längstes Element, aber zu endlich vielen Elementen aus der Weylgruppe gibt es stets eines, das größer als alle diese Elemente ist. Das bedeutet, endlich viele Schubertvarietäten besitzen immer eine gemeinsame „Oberschubertvarietät“

Für eine Kac–Moody–Gruppe, ist $Y = G/P$ nicht mehr endlichdimensional, aber wir werden sehen, daß zumindest noch die Abschlüsse der Bruhatzellen $Y_w = BwP/P$ projektive algebraische Varietäten sind. Bisher sind die Bruhatzellen jedoch lediglich als Mengen gegeben. Um sie mit einer algebraisch–geometrischen Struktur zu versehen, betrachten wir den Höchstgewichtsmodul $L(\lambda)$ der Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}$ zu einem dominanten Gewicht $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mitsamt seiner Gewichtsraumzerlegung

$$L(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} L(\lambda)_\mu \, .$$

Die zugehörige Darstellung ϱ_λ von $\mathfrak{g}$ läßt sich zu einer Darstellung von G integrieren (siehe [Sl1, 5.11]). T stabilisiert die Gewichtsraumzerlegung von $L(\lambda)$; auf $L(\lambda)_\mu$ operiert $t \in T$ durch $\mu(t)$. Dagegen operiert $u_\alpha(\xi)$ wie

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\xi \cdot \varrho_\lambda(e_\alpha))^i}{i!} \, ,$$

verschiebt also Gewichte nur nach oben. Daraus ergibt sich der erste Teil des nächsten Lemmas. Der zweite Teil findet sich in [Ka2, 3.8].

Lemma 2.4. *(a) Die Gruppe U_w stabilisiert alle (endlichdimensionalen!) Teilräume von $L(\lambda)$ der Art $\bigoplus_{\mu \geq \mu_0} L(\lambda)_\mu$ und operiert auf ihnen algebraisch.*
(b) Für beliebiges $w \in W$ gilt $\dot{w} L(\lambda)_\mu = L(\lambda)_{w(\mu)}$.

Die Operation von G auf $L(\lambda)$ induziert eine Operation auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(\lambda) = (L(\lambda) - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Dieser trägt eine Topologie als direkter Limes seiner endlichdimensionalen Teilräume, d. h. $A \subseteq \mathbb{P}(\lambda)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Schnitt von A mit allen endlichdimensionalen Unterräumen von $\mathbb{P}(\lambda)$ abgeschlossen in der metrischen Topologie ist. Hier hätten wir auch die Zariskitopologie nehmen können und würden die folgenden Resultate (bis auf Korollar 2.10) ebenso erhalten.

Das folgende Lemma gibt uns eine Einbettung der Fahnenmannigfaltigkeiten in $\mathbb{P}(\lambda)$. Wir bezeichnen mit F_e denjenigen Punkt von $\mathbb{P}(\lambda)$, der dem λ–Gewichtsraum in $L(\lambda)$ entspricht.

Lemma 2.5 ([Sl2, 2.1]). *Sei I die Menge aller einfachen Spiegelungen, die das dominante Gewicht λ fixieren. Dann induziert die Abbildung*

$$\begin{aligned} \epsilon\colon\ G &\to \mathbb{P}(\lambda) \\ g &\mapsto g \cdot F_e \end{aligned}$$

eine Bijektion von G/P_I auf den G-Orbit von F_e in $\mathbb{P}(\lambda)$.

Ab sofort identifizieren wir die Fahnenmannigfaltigkeit G/P_I mit ihrem Bild in $\mathbb{P}(\lambda)$. Dadurch erhält sie eine topologische Struktur und geeignete Teilmengen erhalten auch eine algebraisch geometrische Struktur.

Bemerkung. Diese Strukturen könnten a priori noch von der Wahl des dominanten Gewichtes λ abhängen. Das tun sie aber in Wahrheit nicht (siehe [Sl2, 2.5]). Für unsere Zwecke ist diese Frage aber nebensächlich, da wir λ (zu gegebenem I) ein für alle mal fixieren können.

Für $w \in W$ setzen wir

$$F_w = w \cdot F_e = wP/P \ .$$

Nach dem Lemma ist F_w wohldefiniert und hängt nur davon ab, in welcher W_I–Nebenklasse w liegt. Da F_e von T stabilisiert wird, gilt das auch für F_w. Der B–Orbit von F_w, nach Lemma 2.3 also bereits der U_w–Orbit von F_w, ist die Bruhatzelle Y_w.

Durch die Einbettung der Fahnenmannigfaltigkeit $Y = G/P$ in $\mathbb{P}(\lambda)$ sind wir nun in der Lage, vom Abschluß $\overline{Y_w}$ dieser Bruhatzelle $Y_w = BwP/P$ zu reden. Dieser Abschluß heißt wie im klassischen Fall **Schubertvarietät.**

Der endlichdimensionale und daher abgeschlossene Unterraum

$$\bigoplus_{\mu \geq w(\lambda)} L(\lambda)_\mu$$

von $\mathbb{P}(\lambda)$ umfaßt nach Lemma 2.4 schon ganz Y_w und folglich auch $\overline{Y_w}$. Daher gilt (mit [Hu2, 12.4]):

Lemma 2.6. *Y_w ist der Orbit von F_w bezüglich der Operation von U_w auf $\mathbb{P}(\lambda)$. Diese Operation ist auf einem endlichdimensionalen Teilraum von $\mathbb{P}(\lambda)$ algebraisch.*
Folglich ist Y_w eine zu U_w und so auch zum direkten Produkt der U_γ mit $\gamma \in R_w$ isomorphe algebraische Varietät.

Mit Hilfe einer Desingularisierung durch Bott–Samelson–Varitäten

$$P_{s_1} \times^B (P_{s_2} \times^B (\cdots \times^B (P_{s_l}/B)) \cdots) \to \overline{Y_{s_1 \cdots s_l}}$$

wird in [Sl2, 2.4] folgendes gezeigt:

Satz 2.7. *Sei $P = P_I$ eine parabolische Untergruppe von G von endlichem Typ. Dann sind die Schubertvarietäten $\overline{Y_w} \subseteq Y = G/P$ ($w \in W^I$) projektive algebraische Varietäten, auf denen der Torus T algebraisch operiert.*
$\overline{Y_w}$ ist die Vereinigung aller Bruhatzellen Y_x mit $x \in W^I$ und $x \leq w$. Diese sind zu $\mathbb{C}^{\ell(x)}$ isomorphe Untervarietäten von $\overline{Y_w}$, und die Inklusion $\overline{Y_x} \hookrightarrow \overline{Y_w}$ ist ebenfalls ein Morphismus von algebraischen Varietäten.

Lemma 2.8 ([Sl2, Lemma 2.5]). *Die Topologie von G/P stimmt mit der Topologie von $\varinjlim_{w \in W} \overline{Y_w}$ überein, d. h. $A \subseteq G/P$ ist abgeschlossen genau dann, wenn der Schnitt von A mit jeder Schubertvarietät abgeschlossen ist.*

Korollar 2.9. *Jede kompakte Teilmenge K von G/P liegt bereits in einer Schubertvarietät.*

Beweis. Wir bilden die Menge K_0, indem wir aus jeder Zelle Y_w, die K trifft, einen Punkt auswählen. Dann schneidet eine beliebige Teilmenge von K_0 jede Schubertvarietät in einer endlichen, also abgeschlossenen Menge. Mit dem Lemma folgt, daß jede Teilmenge von K_0 abgeschlossen ist, d. h. die Menge K_0 ist diskret und somit, da kompakt, auch endlich. □

Im wesentlichen aus (2.3) lassen sich Anklebeabbildungen für die Schubertzellen gewinnen (das ist in [Ka1, 2.6] explizit nachgerechnet). Daher gilt:

Korollar 2.10. *G/P ist ein T–äquivarianter CW–Komplex, d. h. ein CW–Komplex, dessen Unter–CW–Komplexe alle T–stabil sind. Alle auftretenden Zellen haben gerade Dimension.*

Wir werden später zur Berechnung der äquivarianten Kohomologieringe der Schubertvarietäten genauere Aussagen über die Fixpunkte und die eindimensionalen Orbiten der Operation von T auf G/P benötigen.

Satz 2.11. *Sei $w \in W^I$ und $\gamma \in R_w$. Dann ist das Bild von*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\to Y \\ \xi &\mapsto u_\gamma(\xi)F_w \end{aligned} \tag{2.4}$$

ein eindimensionaler T–Orbit $\mathcal{O}_{w,\gamma} \subseteq Y$, der F_w und $F_{s_\gamma w}$ miteinander verbindet. Der Stabilisator in T eines Punktes von $\mathcal{O}_{w,\gamma}$ ist $\operatorname{Kern}\gamma$.

Mit „$\mathcal{O}$ verbindet F_x und F_y" ist dabei gemeint, daß F_x und F_y die einzigen Punkte im Abschluß des Orbits sind, die nicht schon zu $\mathcal{O}$ gehören. Dieser Abschluß ist isomorph zu $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß $F_{s_\gamma w} \neq F_w$, weil nach dem Teil (b) von Lemma 2.1 $s_\gamma w < w$ gilt und w schon das kürzeste Element seiner W_I–Nebenklasse ist.

Es gilt $\gamma(T) = \mathbb{C}^*$. Mit Gleichung (2.1) erhalten wir so für jedes $\xi \in \mathbb{C}^*$

$$T\, u_\gamma(\xi)F_w = u_\gamma\big(\gamma(T)\xi\big)F_w = \mathcal{O}_{w,\gamma}\ .$$

Daher ist $\mathcal{O}_{w,\gamma}$ ein T–Orbit, und ein Punkt $u_\gamma(\xi)F_w$ darin wird genau von den $t \in \operatorname{Kern}\gamma$ fixiert.

Die Behauptung $\overline{\mathcal{O}_{w,\gamma}} = \mathcal{O}_{w,\gamma} \cup \{F_w, F_{s_\gamma w}\}$ folgt aus der Gleichung

$$u_\gamma(\xi)F_w = u_{-\gamma}(\xi^{-1})F_{s_\gamma w}\ , \tag{2.5}$$

denn nach Lemma 2.6 ist (2.4) ein Morphismus algebraischer Varietäten von $\mathbb{C}^*$ in die projektive Varietät $\overline{Y_w}$. Dieser läßt sich auf eindeutige Weise zu einem Morphismus von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ auf eine abgeschlossene Untervarietät von $\overline{Y_w}$ fortsetzen (siehe z. B. [Ke]), und die Gleichung (2.5) zeigt, daß die Bilder von 0 und ∞ bei dieser Fortsetzung gerade F_w und $F_{s_\gamma w}$ sind.

Bleibt daher noch der Beweis von (2.5): Da s_γ in N durch

$$n_{-\gamma}(-\xi^{-1}) = u_{-\gamma}(-\xi^{-1})u_\gamma(\xi)u_{-\gamma}(-\xi^{-1})$$

repräsentiert wird, haben wir

$$w^{-1}u_\gamma(-\xi)u_{-\gamma}(\xi^{-1})s_\gamma w = w^{-1}u_{-\gamma}(-\xi^{-1})w \ .$$

Die rechte Seite davon liegt (wegen (2.2)) in $U_{w^{-1}(-\gamma)}$. Weil $w^{-1}(-\gamma)$ nach Definition von R_w eine positive Wurzel ist, liegt $w^{-1}u_{-\gamma}(-\xi^{-1})w$ also auch in U und damit erst recht in P. Wie behauptet gilt damit

$$\big(u_\gamma(\xi)w\big)^{-1}\big(u_{-\gamma}(\xi^{-1})s_\gamma w\big) \in P \ .$$

□

Satz 2.12. *Die Operation von T auf G/P hat in jeder Bruhatzelle Y_w genau einen Fixpunkt, nämlich F_w. Jeder eindimensionale T–Orbit ist einer von den $\mathcal{O}_{w,\gamma}$ aus Satz 2.11. Die Fixpunkte F_x und F_y sind genau dann durch einen eindimensionalen T–Orbit $\mathcal{O}$ verbunden, wenn $xW_I = s_\gamma yW_I$ gilt, für eine Spiegelung s_γ mit $\gamma \in R_{\mathrm{re}}$.*

Beweis. Da jeder T-Orbit vollständig in einer Bruhatzelle liegt, ist lediglich die Operation von T auf den Y_w zu untersuchen. Dazu benutzen wir den T-äquivarianten Isomorphismus

$$\begin{aligned} U_w &\to Y_w \\ u &\mapsto uF_w \ . \end{aligned}$$

Zu bestimmen sind also die null- und eindimensionalen Orbiten in U_w oder — was nach Lemma 2.2 dasselbe ist — in $U_{\gamma_1} \times \cdots \times U_{\gamma_l}$.

Behauptung. $(e, e, \dots, e)$ ist der einzige Fixpunkt der T-Operation, und die eindimensionalen Orbiten sind alle von der Form $\{e\} \times \cdots \times \{e\} \times U_{\gamma_k} \times \{e\} \times \cdots \times \{e\}$.

Es genügt, dies im Fall $l = 2$ einzusehen; der allgemeine Fall ergibt sich daraus, indem wir alle Projektionen auf jeweils zwei Komponenten $U_{\gamma_j} \times U_{\gamma_k}$ betrachten.

$\operatorname{Kern}\gamma_1 \subseteq T$ operiert trivial auf U_{γ_1}, und γ_2 nimmt auf $\operatorname{Kern}\gamma_1$ alle Werte von $\mathbb{C}^*$ an. Der $(\operatorname{Kern}\gamma_1)$–Orbit von (x, y) in $U_{\gamma_1} \times U_{\gamma_2}$ ist für $y \neq e$ also genau $\{x\} \times (U_{\gamma_2} \smallsetminus \{e\})$. Daher ist der T–Orbit von (x, y) genau dann eindimensional, wenn genau eine der „Koordinaten" x und y gleich e ist, und nulldimensional nur für $(x, y) = (e, e)$. □

Lemma 2.13. *Zu jedem Punkt v einer Schubertvarietät $\overline{X_w}$ gibt es eine Zariski–offene Umgebung V und eine $\mathbb{C}^*$–Operation auf $\overline{X_w}$, die V auf v kontrahiert.*

Beweis. Da die Schubertzelle X_x, in der v liegt, homogen bezüglich der U_x–Operation ist, können wir annehmen, daß v der T–Fixpunkt F_x ist. Durch Linkstranslation mit x^{-1} wird F_x auf F_e abgebildet. Das Bild von $\overline{X_w}$ trifft dabei nur endlich viele Bruhatzellen, ist also schon ganz in einer größeren Schubertvarietät $\overline{X_{\widetilde{w}}}$ enthalten.

Wir beweisen das Lemma also im Fall $v = F_e$, und erhalten den allgemeinen Fall dann durch anschließende Linkstranslation mit x und Restriktion auf $\overline{X_w}$. Sei U^- das Erzeugnis der $U_{-\gamma}$ mit $\gamma \in R^+_{\mathrm{re}}$. Dann ist U^-B/B Zariski–offen in G/B (siehe [KP, Thm. 4]), und wir können $V = U^-X_e \cap \overline{X_{\widetilde{w}}}$ setzen. Eine $\mathbb{C}^*$–Operation auf $\overline{X_{\widetilde{w}}}$, die V auf F_e kontrahiert, läßt sich aus der T-Operation mittels einer Einbettung $\mathbb{C}^* \cong \{h\} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \hookrightarrow H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* = T$ erhalten: Dazu muß $h \in \mathfrak{h}$ so gewählt werden, daß alle negativen Wurzeln auf h positive Werte liefern und so alle $U_{-\gamma}$ durch die $\mathbb{C}^*$–Operation auf e kontrahiert werden. □

Wir schreiben ab jetzt $X = G/B$ für die „vollständige" Fahnenmannigfaltigkeit und X_w für deren Bruhatzellen. Ansonsten betrachten wir nur noch Fahnenmannigfaltigkeiten $Y = Y^s = G/P^s$ zu minimalen parabolischen Untergruppen $P = P_s$ (die von B und einer einzigen Spiegelung $s \in \Sigma$ erzeugt werden). Dann ist $W^I = W^s = \{w \in W \mid w < ws\}$.

Sei π_s die natürliche Projektion $X \twoheadrightarrow Y$. Wir notieren folgende unmittelbare Konsequenz von Satz 2.12:

Korollar 2.14. *Jeder eindimensionale T–Orbit in Y_s ist unter π_s das Bild eines eindimensionalen T–Orbits in X.*

In [Sl2, 2.5] wird gezeigt, daß die Einbettung von G/P_I in $\mathbb{P}(\lambda)$ für verschiedene λ zu isomorphen Schubertvarietäten führt, solange diese auf denselben Kowurzeln verschwinden.

Wenn wir X und Y^s auffassen als die G–Orbiten der jeweiligen Höchstgewichtsvektoren in $\mathbb{P}(\lambda)$ bzw. $\mathbb{P}(\mu)$ für Gewichte λ in der dominanten Weylkammer und μ auf ihrer s–Wand, und dabei $\lambda - \mu$ ebenfalls dominant ist, dann gibt Slodowys Konstruktion auch einen Morphismus $X \to Y^s$. Damit gilt:

Lemma 2.15. *Die Projektion π ist eine eigentliche algebraische Abbildung mit Fasern $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = P_s/B$.*

3 Äquivariante Garbenkohomologie

Zur Berechnung der äquivarianten Schnittkohomologie der Schubertvarietäten verwenden wir den Formalismus der „derivierten Kategorien äquivarianter Garben“ von Bernstein und Lunts aus [BL]. In diesem Abschnitt wird allerlei Maschinerie bereitgestellt, mit der in den folgenden Kapiteln gearbeitet werden soll.

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die verwendeten Begriffe und Sätze aus der gewöhnlichen Garbenkohomologie. (Das Material findet sich in [KS] oder [Bo2], teilweise auch in [Ha].) Danach folgt ein Abschnitt über (algebraische) Stratifizierungen und konstruktible Garben sowie Verdierdualität und schließlich über perverse Garben und Schnittkohomologie.

Anschließend wird die äquivariante derivierte Kategorie definiert, und die bisher gewonnenen Ergebnisse werden auf den äquivarianten Fall übertragen.

Komplexe von Garben, derivierte Kategorien und Hyperkohomologie

$\mathcal{Sh}(X)$ sei die Kategorie der Garben komplexer Vektorräume auf dem topologischen Raum X. Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, so bezeichnet f_* den Funktor $\mathcal{Sh}(X) \to \mathcal{Sh}(Y)$, der einer Garbe $\mathcal{F}$ auf X ihr direktes Bild $f_*\mathcal{F}$ auf Y zuordnet. Für lokalkompakte Räume X und Y ist außerdem $f_!\mathcal{F}$ definiert, das direkte Bild mit eigentlichem Träger von $\mathcal{F}$. Wir setzen ab sofort implizit voraus, daß die beteiligten Räume lokalkompakt sind, sobald Funktoren $f_!$ (bzw. später auch $f^!$) auftreten.

Lemma 3.1 ([CG, 8.3]). *Ist f eine eigentliche Abbildung (speziell die Inklusion einer abgeschlossenen Teilmenge), so gilt $f_! = f_*$.*

Zu f_* existiert ein linksadjungierter Funktor $f^*\colon \mathcal{Sh}(Y) \to \mathcal{Sh}(X)$, das „Zurückziehen von Garben“. Dagegen besitzt $f_!$ im allgemeinen keinen adjungierten Funktor.

Wir gehen nun von der abelschen Kategorie $\mathcal{Sh}(X)$ zu ihrer derivierten Kategorie $\mathcal{D}(X)$ über. In dieser liegt als volle Unterkategorie $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$, die derivierte Kategorie mit beschränkter Kohomologie. Objekte von $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ sind diejenigen Objekte von $\mathcal{D}(X)$, deren k-te Kohomologie für $|k| \gg 0$ verschwindet. Für einen einpunktigen Raum pt können wir $\mathcal{D}(pt)$ bzw. $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(pt)$ als die (beschränkte) derivierte Kategorie von $\mathbb{C}$-Mod auffassen.

Wie üblich wird $\mathcal{Sh}(X)$ als die Unterkategorie von $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ betrachtet, deren Objekte sich durch Komplexe realisieren lassen, die nur im Grad 0 leben. Insbesondere sei $\underline{X}$ die konstante Garbe auf X (mit Halm $\mathbb{C}$) im Grad 0.

Wird ein Objekt $\mathcal{F}$ von $\mathcal{D}(X)$ durch den Komplex $\cdots \to \mathcal{F}^k \to \mathcal{F}^{k+1} \to \cdots$ repräsentiert, so bezeichnen wir mit $\mathcal{F}[i]$ den um i „nach links“ verschobenen Komplex $(\mathcal{F}[i])^k = \mathcal{F}^{i+k}$ und mit $\mathcal{H}^k\mathcal{F} = \mathcal{H}^0\mathcal{F}[k]$ die k-te Kohomologiegarbe von $\mathcal{F}$.

Die Funktoren f_* und $f_!$ sind linksexakt, f^* ist sogar exakt. Also erhalten wir (rechts-)derivierte Funktoren

$$Rf_*, Rf_!\colon \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X) \to \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(Y)$$

bzw.

$$Rf^*\colon\ \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(Y) \to \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)\ .$$

Als Funktor zwischen den derivierten Kategorien hat $Rf_!$ einen rechtsadjungierten Funktor, der mit $f^!$ bezeichnet wird. Außerdem tritt im folgenden noch $R\mathcal{H}om$, der rechtsderivierte Funktor zu den inneren Homomorphismen in der Garbenkategorie, auf sowie $\otimes^L$, der linksderivierte zum Tensorprodukt von Garben.

Bemerkung. Wir halten uns an die übliche Konvention und vereinfachen die Notation gleich wieder, indem wir für Rf_*, $Rf_!$, Rf^*, $R\mathcal{H}om$ und $\otimes^L$ einfach f_*, $f_!$, f^*, $\mathcal{H}om$ bzw. $\otimes$ schreiben.

Lemma 3.2 (siehe [CG]). *Ist f eine flache Abbildung mit glatten Fasern der komplexen Dimension d, so gilt $f^![-d] = f^*[d]$. (Speziell für eine offene Einbettung gilt also $f^! = f^*$.)*

Lemma 3.3 („Basiswechsel“). *Ist*

$$\begin{tikzcd}
X \times^Y Z \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

ein kartesisches Diagramm, so gilt $g^* f_! = \tilde{f}_! \tilde{g}^*$.

Lemma 3.4 („Gysin–Sequenz“). *Ist $i\colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion einer offenen Teilmenge von X und $j\colon X \setminus U \hookrightarrow X$ die ihres abgeschlossenen Komplements, dann haben wir für jedes $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{D}(X)$ ausgezeichnete Dreiecke*

$$i_! i^! \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_* j^* \mathcal{F} \to^{[1]} \qquad \textit{und} \qquad j_! j^! \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F} \to^{[1]}\ .$$

Bezeichnen wir mit $p\colon X \twoheadrightarrow pt$ die Projektion auf einen Punkt, so ist $p^* \underline{pt} = \underline{X}$ die konstante Garbe und $p^! \underline{pt}$ die **dualisierende Garbe** auf X. Mit Hilfe der dualisierenden Garbe wird die **Verdierdualität** $\mathbb{D}$ auf $\mathcal{D}^b_T(X)$ definiert durch

$$\mathcal{F} \mapsto \mathbb{D}\,\mathcal{F} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, p^! \underline{pt})\ .$$

Der Funktor $\Gamma(X,\cdot)\colon\ \mathcal{S}h(X) \to \mathbb{C}\text{-}\mathsf{Mod}$ der globalen Schnitte ist linksexakt und induziert daher einen Funktor $\mathbb{H} = R\Gamma(X,\cdot)$ zwischen den entsprechenden derivierten Kategorien — den **Hyperkohomologiefunktor**. Für den Vektorraum $R^q\Gamma(X,\mathcal{F})$ schreiben wir auch $\mathbb{H}^q(\mathcal{F})$ und nennen ihn die q–**te Hyperkohomologie** von $\mathcal{F}$. Unter $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$ verstehen wir dann den graduierten Vektorraum $\oplus_q \mathbb{H}^q(\mathcal{F})$. Nehmen wir die übliche Identifikation von $\mathcal{D}(pt)$ mit der derivierten Kategorie komplexer Vektorräume vor, so ist $\mathbb{H}$ nichts anderes als p_*, wenn p wie oben die konstante Abbildung ist.

Lebt $\mathcal{F}$ nur im Grad 0, liegt also im Bild der Inklusion $\mathcal{S}h(X) \hookrightarrow \mathcal{D}(X)$, so ist die q–te Hyperkohomologie $\mathbb{H}^q(\mathcal{F})$ identisch mit $\mathrm{H}^q(X;\mathcal{F})$; insbesondere gilt $\mathbb{H}^\bullet(\underline{X}) = \mathrm{H}^\bullet(X)$. (Hier und im Folgenden sei $\mathrm{H}^\bullet(X)$ die Kohomologie mit komplexen Koeffizienten.)

Bemerkung. Die Hyperkohomologie $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$ läßt sich als Grenzwert einer Spektralsequenz berechnen (vgl. [Bo2, V.1.4]) mit $E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(X; \mathcal{H}^q\mathcal{F})$.

Analog zum obigen Vorgehen erhält man die **Hyperkohomologie mit kompaktem Träger** als derivierten Funktor zu den Schnitten mit kompaktem Träger $\Gamma_c(X, \cdot)$, und $\mathbb{H}_c^q \mathcal{F}$ ist dann gerade die q-te Kohomologie von $p_!\mathcal{F}$.

Bemerkung. $\mathbb{H}^\bullet$ und $\mathbb{H}_c^\bullet$ sind kohomologische Funktoren, d. h. sie liefern bei Anwendung auf ausgezeichnete Dreiecke lange exakte Sequenzen.

Da für Komplexe von Vektorräumen Kohomologie- mit Tensorproduktbildung vertauscht (Küneth–Formel!), liefert der Morphismus

$$p_*\mathcal{F} \otimes p_*\mathcal{G} \to p_*p^*(p_*\mathcal{F} \otimes p_*\mathcal{G}) \cong p_*(p^*p_*\mathcal{F} \otimes p^*p_*\mathcal{G}) \to p_*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \tag{3.1}$$

unter der Hyperkohomologie ein **cup-Produkt** (vgl. [KS, Ex.II.17])

$$\smile\colon\ \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}) \otimes \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{G}) \to \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})\ .$$

Sei nun speziell $\mathcal{G} = \underline{X}$. Dann erhalten wir einfach $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^\bullet(X) \to \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$. Daher trägt $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$ die zusätzliche Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über dem Kohomologiering $\mathrm{H}^\bullet(X) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{D}^\mathrm{b}(X)}(\underline{X}, \underline{X})$.

Unter Beachtung von $\mathbb{H}^k(\mathcal{F}) = \mathrm{H}^k(p_*\mathcal{F}) = \mathrm{H}^k(p_*\,\mathcal{H}om(\underline{X}, \mathcal{F})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\mathrm{b}(X)}(\underline{X}, \mathcal{F}[k])$ können wir dieses Produkt auffassen als die Komposition von Morphismen in der derivierten Kategorie (siehe auch [Iv, II.7]):

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\mathrm{b}(X)}(\underline{X}[j], \mathcal{F}[j+k]) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\mathrm{b}(X)}(\underline{X}, \underline{X}[j]) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\mathrm{b}(X)}(\underline{X}, \mathcal{F}[j+k])$$

Der Morphismus (3.1) faktorisiert (immer noch $\mathcal{G} = \underline{X}$ vorausgesetzt) über $p_*p^*p_*\mathcal{F}$. Dadurch wird ein Morphismus

$$p_*\mathcal{F} \otimes p_!\underline{X} \xrightarrow{\sim} p_!p^*p_*\mathcal{F} \to p_!\mathcal{F} \tag{3.2}$$

auf den Schnitten mit eigentlichem Träger induziert, und wir erhalten auch ein cup-Produkt

$$\smile\colon\ \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}_c^\bullet(X) \to \mathbb{H}_c^\bullet(\mathcal{F})\ .$$

Bemerkung 3.5. Der linke Pfeil in (3.2) ist immer ein Isomorphismus (siehe [KS, Lemma 2.6.6]). Wenn X zusammenziehbar ist und $\mathcal{F}$ konstante Kohomologiegarben hat, steht auch rechts ein Isomorphismus.

Notation. Da wir es im folgenden mehrfach mit graduierten Ringen zu tun haben werden, folgen einige Bezeichnungen dazu: Sei R ein graduierter Ring, dann sind R–$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$ und R–Mod die Kategorien der R–Moduln mit bzw. ohne Graduierung. $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ seien die Morphismen zwischen M und N in R–$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$. Wir schreiben $\mathrm{Hom}_R^k(M, N)$ für $\mathrm{Hom}(M, N[k])$ und $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M, N)$ für den graduierten Ring $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^k(M, N)$. Falls M endlich erzeugt ist, sind $\mathrm{Hom}_R^\bullet(M, N)$ die Homomorphismen zwischen M und N, aufgefaßt als Objekte in R–Mod.

Nun betrachten wir einen Unterraum Y von X und die Inklusion $i\colon Y \hookrightarrow X$. Die Restriktionsabbildung $\mathrm{H}^\bullet(X) \to \mathrm{H}^\bullet(Y)$ wird durch die Adjunktion $\mathrm{id} \to i_*i^*$ beschrieben. Für einen Komplex $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ mit Träger in Y gilt $i_*i^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$. Aus $i_*i^*\underline{X} \otimes i_*i^*\mathcal{F} = \underline{X} \otimes i_*i^*\mathcal{F} = \underline{X} \otimes \mathcal{F}$ folgt dann, daß das cup-Produkt in X über das cup-Produkt in Y faktorisiert. Das folgende Lemma ist eine direkte Konsequenz.

Lemma 3.6. *Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Komplexe aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ mit Träger in Y.*
(a) Die $\mathrm{H}^\bullet(X)$-Modulstruktur auf $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$ bzw. $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{G})$ ergibt sich mittels der Restriktionsabbildung $r\colon \mathrm{H}^\bullet(X) \to \mathrm{H}^\bullet(Y)$ aus ihrer $\mathrm{H}^\bullet(Y)$-Modulstruktur.
(b) Ist r surjektiv, dann gilt $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{G})\big) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet(Y)}\big(\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet(\mathcal{G})\big)$ als graduierte Vektorräume.

Satz 3.7. *Ist $\pi\colon X \to Y$ eine $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-Faserung und verschwinden $\mathrm{H}^3(Y)$ und $\mathrm{H}_1(Y, \mathbb{Z})$, so folgt $\pi_*\underline{X} \cong \underline{Y} \oplus \underline{Y}[-2]$.*

Bemerkung. Die letzten beiden Voraussetzungen sind beispielsweise erfüllt, wenn Y ein CW-Komplex ohne Zellen ungerader Dimension ist.

Beweis. Wir ergänzen den Morphismus $\underline{Y} \to \pi_*\pi^*\underline{Y} = \pi_*\underline{X}$ zu einem ausgezeichneten Dreieck. Sei $\mathcal{F}$ dessen dritte Ecke. Wir zeigen, daß $\mathcal{F}$ isomorph zu $\underline{Y}[-2]$ ist:

Weil π lokal lediglich eine Projektion $\mathbb{P}^1\mathbb{C} \times U \twoheadrightarrow U$ ist, sind die Kohomologiegarben $\mathcal{H}^k(\pi_*\underline{X})$ lokalkonstant und haben genau für $k = 0$ und $k = 2$ nichttriviale Halme (jeweils $\mathbb{C}$).

Mit der langen exakten Kohomologiegarbensequenz folgt daraus, daß die Kohomologiegarben $\mathcal{H}^k\mathcal{F}$ lokalkonstant sind (also wegen $\mathrm{H}_1(Y, \mathbb{Z}) = 0$ sogar konstant), und weiter, daß die Halme dieser Kohomologiegarben lediglich für $k = 2$ nicht verschwinden. (Dann sind sie $\mathbb{C}$.)

Wir haben also das ausgezeichnete Dreieck

$$\underline{Y} \to \pi_*\underline{X} \to \underline{Y}[-2] \to^{[1]} \quad .$$

Dessen Verbindungsmorphismus liegt in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(Y)}(\underline{Y}[-2], \underline{Y}[1]) = \mathrm{H}^3(Y)$, ist also Null. Daher folgt $\pi_*\underline{X} = \underline{Y} \oplus \underline{Y}[-2]$. □

Stratifizierungen und konstruktible Garben

Die Schnittkohomologiekomplexe, die uns ja eigentlich interessieren, liegen in der Unterkategorie der „konstruktiblen Garben". Um diese Unterkategorie zu definieren benötigen wir den Begriff der „Stratifizierung". Wir orientieren uns an [CG, 3.2] und arbeiten nur im algebraischen Kontext. Bei der anschließenden Definition der perversen Garben und der Schnittkohomologie halten wir uns an [BBD, 2.1 u. 2.2], wobei die Konstruktion jedoch nur für den Fall der „mittleren Perversität" und algebraische Stratifizierungen durchgeführt wird.

Wir gehen von einer Familie $\mathcal{S}$ von endlich vielen glatten, lokal abgeschlossenen und zusammenhängenden Untervarietäten einer komplexen algebraischen Varietät X aus, die X disjunkt zerlegen. Sei $Y \in \mathcal{S}$ solch ein **Stratum** und $x \in Y$ ein Punkt darin. Dann nennt man $Z \subset X$ einen **transversalen Schnitt** (zu Y in x), falls für geeignete Umgebungen U_X und U_Y von x in X bzw. in Y ein Isomorphismus $U_X \xrightarrow{\sim} U_Y \times Z$ existiert, der U_Y auf $U_Y \times \{x\}$ und Z auf $\{x\} \times Z$ abbildet. Der transversale Schnitt Z heißt **stratifiziert**, wenn für jedes $S \in \mathcal{S}$ durch obigen Isomorphismus $S \cap U_X$ auf $U_Y \times (S \cap Z)$ abgebildet wird.

Die obige Familie $\mathcal{S}$ ist eine **(algebraische) Stratifizierung** von X, falls der Abschluß jedes Stratums wieder eine Vereinigung von Strata ist und es zu jedem Stratum $Y \in \mathcal{S}$ und jedem Punkt $x \in Y$ einen stratifizierten transversalen Schnitt gibt.

Eine praktische Methode, Stratifizierungen zu erhalten, gibt uns das folgende Lemma.

Lemma 3.8 ([CG, 3.2.24]). *Wenn V eine glatte algebraische Varietät ist, auf der eine algebraische Gruppe G operiert, und $X \subset V$ die Vereinigung von endlich vielen G-Orbiten ist, dann liefern diese Orbiten eine algebraische Stratifizierung von X.*

Eigentlich wird in [CG] mehr bewiesen:

Lemma 3.9. *Die Aussage von Lemma 3.8 gilt auch, wenn G nur eine topologische Gruppe ist, und es dafür zu jedem G-Orbit $\mathcal{O}$ in X eine algebraische Untergruppe $G_{\mathcal{O}}$ von G gibt, die algebraisch auf ganz V operiert, so daß $\mathcal{O}$ bei dieser Operation ein $G_{\mathcal{O}}$-Orbit ist.*

Bemerkung. Je zwei Stratifizierungen von X haben eine gemeinsame Verfeinerung.

Eine **stratifizierte Abbildung** zwischen stratifizierten Räumen X und Y ist eine Abbildung, für die das Urbild eines Stratums in Y jeweils eine Vereinigung von Strata in X ist.

Sei $\mathcal{S}$ eine Stratifizierung von X. Eine Garbe auf X heißt **$\mathcal{S}$-konstruktibel**, wenn ihre Einschränkung auf jedes Stratum von $\mathcal{S}$ lokalkonstant mit endlich erzeugten Halmen ist, und ein Komplex von Garben $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ heißt $\mathcal{S}$-konstruktibel, wenn alle seine Kohomologiegarben $\mathcal{H}^k(\mathcal{F})$ $\mathcal{S}$-konstruktibel sind.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S})$ bzw. $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$ die vollen Unterkategorien von $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$, die aus den $\mathcal{S}$-konstruktiblen Komplexen bestehen bzw. aus den Komplexen, die konstruktibel bezüglich irgendeiner (algebraischen) Stratifizierung sind.

Lemma 3.10 ([Bo2, V.8 u. 10]). *Seien X und Y stratifizierte Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine stratifizierte Abbildung. Dann bilden die Funktoren f_*, f^*, $f_!$, $f^!$, $\mathcal{H}om$, $\otimes$ und $\mathbb{D}$ konstruktible Komplexe auf konstruktible Komplexe ab.*
Außerdem ist der natürliche Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathbb{D}\,\mathcal{F})$ ein Isomorphismus, wenn $\mathcal{F}$ konstruktibel ist, und es gilt $f_! = \mathbb{D}\, f_*\, \mathbb{D}$ sowie $f^! = \mathbb{D}\, f^*\, \mathbb{D}$, als Funktoren zwischen den Kategorien der konstuktiblen Komplexe.

Bemerkung 3.11. Sei X zusammenziehbar und $p\colon X \twoheadrightarrow pt$ die konstante Abbildung. Hat $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ konstante Kohomologiegarben, dann ist der Adjunktionsmorphismus $p^*p_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ein Isomorphismus. Ist X trivial stratifiziert, dann sind p_* und p^* zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien zwischen $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\{X\})$ und $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(pt)$.

Als nächstes werden wir mit Hilfe einer geeigneten t-Struktur aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$ wieder eine abelsche Kategorie extrahieren, die Kategorie der perversen Garben.

Unter einer **t-Struktur** auf einer triangulierten Kategorie $\mathcal{D}$ versteht man zwei volle Unterkategorien $\mathcal{D}^{\leq 0}$ und $\mathcal{D}^{\geq 0}$ mit den Eigenschaften

1. $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ für $X \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ und $Y \in \mathcal{D}^{\geq 1}$.
2. $\mathcal{D}^{\leq 0} \subset \mathcal{D}^{\leq 1}$ und $\mathcal{D}^{\geq 0} \supset \mathcal{D}^{\geq 1}$
3. Für $X \in \mathcal{D}$ existiert stets ein ausgezeichnetes Dreieck $A \to X \to B \to^{[1]}$ mit $A \in \mathcal{D}^{\leq 0}$ und $B \in \mathcal{D}^{\geq 1}$.

Dabei soll $\mathcal{D}^{\leq k} = \mathcal{D}^{\leq 0}[-k]$ und $\mathcal{D}^{\geq k} = \mathcal{D}^{\geq 0}[-k]$ sein.

Die Inklusion von $\mathcal{D}^{\leq k}$ bzw. $\mathcal{D}^{\geq k}$ in $\mathcal{D}$ besitzt einen rechts- bzw. linksadjungierten Funktor. Dies sind die **Abschneidefunktoren** $\tau_{\leq k}$ und $\tau_{\geq k}$. Das **Herz** einer t-Struktur $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$, definiert als die volle Unterkategorie $\mathcal{C} = \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$ ist stets eine abelsche Kategorie. Jede t-Struktur liefert außerdem einen **Kohomologiefunktor** $\mathcal{H}^0\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, nämlich $\mathcal{H}^0 = \tau_{\leq 0}\tau_{\geq 0} = \tau_{\geq 0}\tau_{\leq 0}$.

Auf der derivierten Kategorie $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$ haben wir zwei interessante t-Strukturen: Die **natürliche t-Struktur** ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\leq 0} &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{D} \,|\, \mathcal{H}^k\mathcal{F} = 0 \text{ für } k > 0\} \\
\mathcal{D}^{\geq 0} &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{D} \,|\, \mathcal{H}^k\mathcal{F} = 0 \text{ für } k < 0\}\,.
\end{aligned}
$$

Das Herz der natürlichen t-Struktur ist gerade wieder die Kategorie $\mathcal{S}h(X)$, von der wir ausgegangen waren, und $\mathcal{H}^0$ ist die gewöhnliche (nullte) Garbenkohomologie.

Zur Definition der perversen t-Struktur auf $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$ fixieren wir zunächst eine Stratifizierung $\mathcal{S}$ von X und betrachten $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S})$. Für $S \in \mathcal{S}$ bezeichnet i_S die Inklusion von S in X. Außerdem benötigen wir noch eine Funktion $p\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$, die sogenannte **Perversität**. Damit setzen wir

$$
\begin{aligned}
{}^p\mathcal{D}^{\leq 0} &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S}) \,|\, \mathcal{H}^k i_S^*\mathcal{F} = 0 \text{ für alle } S \in \mathcal{S} \text{ und } k > p(S)\} \\
{}^p\mathcal{D}^{\geq 0} &= \{\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S}) \,|\, \mathcal{H}^k i_S^!\mathcal{F} = 0 \text{ für alle } S \in \mathcal{S} \text{ und } k < p(S)\}\,.
\end{aligned}
$$

Das Herz dieser t-Struktur nennt man ${}^p\mathcal{S}h(X;\mathcal{S})$, die Kategorie der **$p$-$\mathcal{S}$-perversen Garben**. Wie oben erhalten wir die beiden Abschneidefunktoren ${}^p\tau_{\leq 0}$ und ${}^p\tau_{\geq 0}$ und den Funktor ${}^p\mathcal{H}^0\colon \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;S) \to {}^p\mathcal{S}h(X;S)$, die **perverse Kohomologie**.

Sei $\mathcal{T}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{S}$. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß die perverse t-Struktur auf $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X,\mathcal{T})$ diejenige auf ihrer Unterkategorie $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X,\mathcal{S})$ induziert, ist nach [BBD, 2.1.14]

$$0 \leq -\big(p_{\mathcal{S}}(S) - p_{\mathcal{T}}(T)\big) \leq \dim_{\mathbb{R}} S - \dim_{\mathbb{R}} T, \qquad \text{falls } T \subseteq S\ . \tag{3.3}$$

Um nun eine Definition der perversen Garben auf X zu erhalten, die unabhängig von der speziellen Stratifizierung ist, betrachten wir nur noch solche p, die ausschließlich von der Dimension der Strata abhängen und im übrigen die Ungleichungen (3.3) erfüllen. Dann induzieren die t-Strukturen auf den $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X,\mathcal{S})$ eine t-Struktur auf $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$. Das Herz dieser **perversen t-Struktur** nennt man die **Kategorie der perversen Garben** ${}^p\mathcal{S}h(X)$. Mit dieser Definition gilt ${}^p\mathcal{S}h(X;\mathcal{S}) = {}^p\mathcal{S}h(X) \cap \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S})$, und ${}^p\mathcal{S}h(X)$ ist die Vereinigung aller ${}^p\mathcal{S}h(X;\mathcal{S})$.

Bemerkung. Solange wir (wie später bei den Schubertvarietäten) Stratifizierungen konkret angeben können, so daß die auftretenden Garben konstruktibel und die verwendeten Abbildungen stratifiziert sind, genügen uns meist die Kategorien ${}^p\mathcal{S}h(X;\mathcal{S})$.

Wir verwenden ab sofort nur noch die durch $p(S) = -\dim_{\mathbb{C}}(S)$ gegebene **mittlere Perversität**, für die (3.3) offensichtlich erfüllt ist. Das bedeutet: $\mathcal{F}$ liegt in ${}^p\mathcal{S}h(X)$ genau dann, wenn für irgendeine Stratifizierung $\mathcal{S}$ und Inklusionen von Strata $i_S\colon S \hookrightarrow X$ wie oben folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k i_S^* \mathcal{F} &= 0\ , \qquad && \text{falls } k + \dim_{\mathbb{C}} S > 0 \\ \mathcal{H}^k i_S^! \mathcal{F} &= 0\ , \qquad && \text{falls } k + \dim_{\mathbb{C}} S < 0\ . \end{aligned}$$

Für das Folgende wählen wir wieder eine feste Stratifizierung $\mathcal{S}$. Falls X glatt ist, läßt sich eine perverse Garbe direkt angeben, und zwar $\underline{X}[\dim_{\mathbb{C}} X]$. Etwas allgemeiner ist $\mathcal{L}[\dim_{\mathbb{C}} X]$ eine perverse Garbe für jede lokalkonstante Garbe $\mathcal{L} \in \mathcal{S}h(X)$. (Für die trivialen Stratifizerung $\mathcal{S} = \{X\}$ sind das bereits alle Objekte aus ${}^p\mathcal{S}h(X;\mathcal{S})$.)

Sei U eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X, die die Vereinigung von einigen Strata aus $\mathcal{S}$ ist. Wir betrachten die Inklusion $u\colon U \hookrightarrow X$. Durch $u_!$ und u_* werden dann Funktoren ${}^pu_! = {}^p\mathcal{H}\, u_!$ und ${}^pu_* = {}^p\mathcal{H}\, u_*$ von ${}^p\mathcal{S}h(U)$ nach ${}^p\mathcal{S}h(X)$ induziert. Der Morphismus $u_!\mathcal{F} \to u_*\mathcal{F}$ liefert einen Morphismus ${}^pu_!\mathcal{F} \to {}^pu_*\mathcal{F}$. Dessen Bild ${}^pu_{!*}\mathcal{F}$ hat Träger in $\overline{U}$ und wird als die **mittlere Erweiterung** von $\mathcal{F}$ bezeichnet.

Bemerkung. Allgemein gilt ${}^p\tau_{\leq 0} u_! = u_!$ und ${}^p\tau_{\geq 0} u_* = u_*$. Falls U abgeschlossen in X ist, folgt daraus unter Verwendung von ${}^p\mathcal{H}^0 = {}^p\tau_{\geq 0}{}^p\tau_{\leq 0} = {}^p\tau_{\leq 0}{}^p\tau_{\geq 0}$ die Gleichheit ${}^pu_! = {}^pu_* = {}^pu_{!*}$. Die mittlere Erweiterung ist in diesem Fall also nichts anderes als das Ausdehnen durch 0.

Ist speziell U glatt und $\mathcal{L}$ irreduzibel und selbstdual, so heißt $\mathcal{IC}(\overline{U};\mathcal{L}) = {}^pu_{!*}\mathcal{L}[\dim U]$ (oder kurz $\mathcal{IC}\,\overline{U}$ für $\mathcal{L} = \underline{U}$) der **Schnittkohomologiekomplex** auf $\overline{U}$ mit Koeffizienten in $\mathcal{L}$.

Seine Hyperkohomologie ist die **Schnittkohomologie**. Aus dieser Beschreibung zusammen mit [BBD, 1.4.26 und 2.1] folgt:

Satz 3.12. *Die Schnittkohomologiekomplexe $\mathcal{IC}(\overline{S};\mathcal{L})$ für selbstduale, irreduzible, lokalkonstante Garben $\mathcal{L}$ auf Strata S sind genau die einfachen Objekte in ${}^p\!Sh(X;\mathcal{S})$. Ist S eine irreduzible Untervarietät von X, dann bleibt $\mathcal{IC}(\overline{S};\mathcal{L})$ auch in ${}^p\!Sh(X)$ noch irreduzibel.*

Ist U Vereinigung von Strata derselben Dimension d und $\mathcal{F}$ eine perverse Garbe auf U, so läßt sich nach Deligne ${}^p u_{!*}\mathcal{F}$ auch folgendermaßen mit den Abschneidefunktoren der *natürlichen* t-Struktur beschreiben (siehe [BBD, 2.1.11]):

Zunächst einmal gilt für sukzessive Inklusionen $V \overset{v}{\hookrightarrow} U \overset{u}{\hookrightarrow} X$

$$^p(uv)_{!*} = {}^p u_{!*}{}^p v_{!*}.$$

Bezeichne nun U_k die Vereinigung aller Strata in $\overline{U}$, deren Dimension mindestens k ist, und u_k die Inklusion $U_k \hookrightarrow U_{k-1}$. Dann gilt ${}^p(u_k)_{!*} = \tau_{\leq -k} u_{k*}$, und mit der Kette von Inklusionen

$$U = U_d \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow U_k \overset{u_k}{\hookrightarrow} U_{k-1} \hookrightarrow \cdots \overset{u_1}{\hookrightarrow} U_0 = \overline{U}$$

erhalten wir die mittlere Erweiterung von $\mathcal{F}$ als

$$^p u_{!*}\mathcal{F} = \tau_{\leq -1}\, u_{1*} \,\cdots\, \tau_{\leq -d}\, u_{d*}\mathcal{F}\ . \tag{3.4}$$

Satz 3.13 ([BBD, 2.1.9]). *Ist U offen in X und Vereinigung von Strata, dann sind durch ${}^p u_{!*}$ und ${}^p u^*$ zueinander inverse Äquivalenzen gegeben zwischen ${}^p\!Sh(U;\mathcal{S})$ und der vollen Unterkategorie von ${}^p\!Sh(X;\mathcal{S})$ aller Objekte $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{H}^k i_S^*\mathcal{F} = \mathcal{H}^k i_S^!\mathcal{F} = 0$ für $S \subseteq X \setminus U$ und $k = -\dim S$.*

Direkt aus dem Satz ergibt sich die folgende Beschreibung der Schnittkohomologiekomplexe von Verdier (vgl. [BBD, Prop. 2.1.17]):

Korollar 3.14. *Ist Y abgeschlossen in X und Vereinigung von Strata, dann ist der Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{IC}\,Y$ als Objekt von $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S})$ eindeutig bestimmt durch die folgenden drei Eigenschaften.*

1. *$\mathcal{IC}\,Y$ ist Verdier-selbstdual:*

$$\mathbb{D}(\mathcal{IC}\,Y) = \mathcal{IC}\,Y$$

2. *Die Einschränkung auf ein offenes, dichtes Stratum U in Y ist eine konstante Garbe im Grad $-\dim U$:*

$$i_U^*\,\mathcal{IC}Y = \underline{U}\,[\dim U] \qquad (\textit{mit } i_U\colon U \hookrightarrow X)$$

3. *Die Einschränkung auf ein d-dimensionales Stratum $S \neq U$ hat nichtverschwindende Kohomologie nur in Graden kleiner als $-d$:*

$$\mathcal{H}^k(i_S^*\,\mathcal{IC}X) = 0\ , \quad \textit{falls } k + \dim S \geq 0 \qquad (\textit{mit } i_S\colon S \hookrightarrow X)$$

Eine Komplex von Garben heißt **halbeinfach**, wenn er isomorph ist zu einer direkten Summe verschobener Schnittkohomologiekomplexe.

Bemerkung. Ist $\mathcal{F}$ halbeinfach und $\mathcal{S}$–konstruktibel, dann können als direkte Summanden nur verschobene $\mathcal{IC}(\overline{S};\mathcal{L})$ auftreten, bei denen S ein Stratum aus $\mathcal{S}$ ist.

Damit kommen wir zum zentralen Hilfsmittel bei der Berechnung der Schnittkohomologie, dem Zerlegungssatz von Beilinson, Bernstein, Deligne und Gabber (siehe [BBD, 6.2.5] und [BL]).

Satz 3.15 (Zerlegungssatz). *Ist $f\colon X \to Y$ eigentlich und $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(X)$ halbeinfach, so auch das direkte Bild $f_*\mathcal{F}$.*

Es folgt noch ein technisches Resultat, das wir zum Beweis von Satz 6.4 brauchen werden.

Lemma 3.16. *Sei X eine stratifizierte algebraische Varietät, U ein Stratum und v ein Punkt von X. Wir nehmen an, daß v eine Zariski–offene Umgebung V besitzt, die durch eine geeignete $\mathbb{C}^*$–Operation auf v kontrahiert wird, und daß die Stratifizierung von X invariant unter dieser Operation ist. Dann ist die Restriktionsabbildung $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{IC}\overline{U}) \to \mathrm{H}^\bullet(\mathcal{IC}\overline{U})_v$ auf den Kohomologiehalm an der Stelle v eine Surjektion.*

Um das Lemma zu beweisen, müssen wir eine kleine Exkursion in die Welt der **gemischten Hodge–Moduln** von M. Saito machen (siehe [Sa]). Dadurch erhalten die Schnittkohomologiekomplexe eine Zusatzstruktur, die das Charakteristik–Null–Analogon der Gewichtstheorie aus [BBD] ist.

Saitos „Mixed Hodge Modules“ bilden eine abelsche Kategorie $\mathcal{MHM}(X)$, in der jedes Objekt eine „Gewichts“–Filtrierung besitzt. Die **Gewichte** eines $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{MHM}(X)$ sind diejenigen Grade, in denen die Subquotienten der Filtrierung von $\mathcal{F}$ nichttrivial sind. Sind alle Gewichte von $\mathcal{F}$ höchstens g (bzw. mindestens g), dann heißt $\mathcal{F}$ **gemischt vom Gewicht** $\geq g$ (bzw. $\leq g$). Gilt beides, lebt also das zu $\mathcal{F}$ gehörende graduierte Objekt lediglich im Grad g, dann heißt $\mathcal{F}$ **rein vom Gewicht** g. Diese Definitionen lassen sich auf die beschränkte derivierte Kategorie ausdehnen: Ein Komplex $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{MHM}(X))$ heißt **rein vom Gewicht** g, wenn für alle j das Kohomologieobjekt $\mathcal{H}^j\mathcal{F}$ rein vom Gewicht $j+g$ ist; analog sind gemischte Komplexe definiert. Entscheidend für das Folgende ist nun: In der Kategorie $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{MHM}(X))$ gibt es keine nichttrivialen Morphismen von einem gemischten Komplex vom Gewicht $\leq g$ in einen gemischten Komplex vom Gewicht $\geq g+1$.

Die Objekte aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{MHM}(X))$ lassen sich als (gewisse) Objekte der derivierten Garbenkategorie $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$ auffassen, versehen mit einer zusätzlichen Struktur, und umgekehrt gibt es einen Funktor $\mathsf{rat}\colon \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{MHM}(X)) \to \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(X)$, der diese Struktur wieder „vergißt“. Ein Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{IC}\overline{U}$ liftet bezüglich rat zu einem eindeutig bestimmten Objekt in $\mathcal{MHM}(X)$, das wir ebenfalls mit $\mathcal{IC}\overline{U}$ bezeichnen. Es ist rein vom Gewicht $2\dim_{\mathbb{C}} U$.

Für algebraische Abbildungen f haben wir wie bei den derivierten Garbenkategorien einen Formalismus von Funktoren f^*, $f_!$, f_*, $f^!$ zwischen den derivierten Kategorien der gemischten Hodge Moduln. Diese haben die gewohnten Eigenschaften, und vertauschen mit dem Funktor rat. Außerdem erniedrigen f^* und $f_!$ die Gewichte (d. h. sie stabilisieren die volle Unterkategorie aller gemischten Komplexe vom Gewicht $\leq g$), während $f^!$ und f_* sie erhöhen. Speziell macht $\mathbb{H}^k_c$ (bzw. $\mathbb{H}^k$) aus gemischten Komplexen vom Gewicht $\leq g$ (bzw. $\geq g$) gemischte Hodge–Moduln vom Gewicht $\leq k+g$ (bzw. $\geq k+g$).

Beweis von Lemma 3.16. Seien i_v, i_V und j die Inklusionen von v, V und $X \setminus V$ in X.

In der langen exakten Hyperkohomologiesequenz

$$\cdots \to \mathbb{H}^k(j^! \mathcal{IC}\overline{U}) \to \mathbb{H}^k(\mathcal{IC}\overline{U}) \to \mathbb{H}^k(i_V^* \mathcal{IC}\overline{U}) \xrightarrow{\delta} \mathbb{H}^{k+1}(j^! \mathcal{IC}\overline{U}) \to \cdots$$

können wir $\mathbb{H}^k(i_V^* \mathcal{IC}\overline{X_w})$ nach [So1, Prop.1] (bzw. [Sp2, §3]) ersetzen durch $\mathrm{H}^k(\mathcal{IC}\overline{U})_v = \mathbb{H}^k_c(i_v^* \mathcal{IC}\overline{U})$. Nach den obigen Bemerkungen läßt sich das interpretieren als gemischter Hodge–Modul vom Gewicht $\leq k + 2\dim_{\mathbb{C}} U$, während $\mathbb{H}^{k+1}(j^! \mathcal{IC}\overline{U})$ gemischt vom Gewicht $\geq k+1+2\dim_{\mathbb{C}} U$ ist. Daher ist die Randabbildung δ trivial und somit $\mathbb{H}^k(\mathcal{IC}\overline{U}) \to \mathrm{H}^k(\mathcal{IC}\overline{U})_v$ eine Surjektion. $\square$

Die T-äquivariante derivierte Kategorie von Garben

Nun betrachten wir eine zusammenhängende Liegruppe T (bei uns später immer ein Torus), die auf dem topologischen Raum X stetig operiert, und bilden wie in [BL] die äquivariante derivierte Kategorie $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$.

Bemerkung. Um die unvermeidliche Warnung gleich zu Beginn auszusprechen: Es handelt sich dabei *nicht* um die derivierte Kategorie der (abelschen) Kategorie von äquivarianten Garben. Sie ist aber so konstruiert, daß ihre Eigenschaften denen der (echten) derivierten Kategorie im nichtäquivarianten Fall entsprechen. Das rechtfertigt die Bezeichnung.

Zur Definition von $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$ verwenden wir die Borel-Konstruktion: Sei ET ein zusammenziehbarer Raum, auf dem T frei operiert. Er ist dadurch eindeutig bis auf Homotopie bestimmt (vgl. [tD]). Wir betrachten das Diagramm

$$X \xleftarrow{\ \phi\ } ET \times X \xrightarrow{\ \psi\ } ET \times_T X \quad . \tag{3.5}$$

Darin ist ϕ die Projektion auf die zweite Komponente und ψ die kanonische Abbildung. Die Objekte von $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$ sind Tripel $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_X, \overline{\mathcal{F}}, \beta)$. Dabei ist $\mathcal{F}_X$ ein Objekte aus $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}(X)$ und $\overline{\mathcal{F}}$ eines aus $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}(ET \times_T X)$, und $\beta\colon\ \phi^*\mathcal{F}_X \to \psi^*\overline{\mathcal{F}}$ ist ein Isomorphismus. Ein Morphismus $(\mathcal{F}_X, \overline{\mathcal{F}}, \beta) \to (\mathcal{G}_X, \overline{\mathcal{G}}, \gamma)$ in $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$ ist gegeben durch zwei Morphismen $\mathcal{F}_X \to \mathcal{G}_X$ und $\overline{\mathcal{F}} \to \overline{\mathcal{G}}$, die mit β und γ verträglich sind.

Ist T trivial, so ergibt die Konstruktion gerade wieder die gewöhnliche derivierte Kategorie $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}(X)$, ansonsten haben wir einen Funktor

$$\mathsf{ver}\colon\ \mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X) \to \mathcal{D}^{\mathsf{b}}(X)\ ,$$

der die äquivariante Struktur „vergißt“, also $\mathsf{ver}(\mathcal{F}_X, \overline{\mathcal{F}}, \beta) = \mathcal{F}_X$.

Speziell für einen einpunktigen Raum $X = pt$ steht in obigem Diagramm 3.5 rechts der klassifizierende Raum $BT = ET/T$. Für zusammenhängendes T ist dieser einfach zusammenhängend, und $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(pt)$ wird durch das folgende Lemma beschrieben.

Lemma 3.17 ([BL, 2.7.2]). *Die Kategorie $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(pt)$ ist äquivalent zur vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}(BT)$ aller Komplexe mit konstanten Kohomologiegarben.*

Wir benutzen das, um die **äquivariante konstante Garbe** $\underline{pt}$ auf dem einpunktigen Raum zu definieren: Das soll derjenige Komplex sein, der unter dieser Äquivalenz von Kategorien $\underline{BT}$ entspricht.

Manchmal bereitet die Verwendung des unendlichdimensionalen Totalraums ET Schwierigkeiten, die durch eine andere Beschreibung der Kategorie $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$ umgangen werden können:

Wir definieren zunächst $\mathcal{D}^{[-n,n]}(X)$ als die volle Unterkategorie von $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}(X)$ der Objekte $\mathcal{F}_X$ mit $\mathcal{H}^k(\mathcal{F}_X) = 0$ für $|k| > n$. Die Objekte $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_X, \overline{\mathcal{F}}, \beta)$ von $\mathcal{D}^{[-n,n]}_T(X)$ sind dann diejenigen aus $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$, für die $\mathcal{F}_X = \mathsf{ver}\,\mathcal{F}$ in $\mathcal{D}^{[-n,n]}(X)$ liegt. Wollen wir irgendwelche Aussagen über (typischerweise endlich viele) Objekte aus $\mathcal{D}^{\mathsf{b}}_T(X)$ beweisen, so genügt es meist, $\mathcal{D}^{[-n,n]}_T(X)$ zu betrachten für genügend großes n.

Die Kategorie $\mathcal{D}_T^{[-n,n]}(X)$ wiederum ist äquivalent zu einer vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}^{[-n,n]}(\overline{P})$, wobei $\overline{P} = P/T$ ist und P eine genügend azyklische glatte Auflösung von X. (Das bedeutet, P ist ein Raum, auf dem T frei operiert zusammen mit einem T–äquivarianten glatten Morphismus $P \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} X$ mit $2n$–azyklischen Fasern.) Solch eine Auflösung existiert für eine Liegruppe T immer (siehe [BL, 3.1]).

Genauer gesagt betrachten wir ähnlich wie oben ein Diagramm

$$X \xleftarrow{\ \phi\ } P \xrightarrow{\ \psi\ } \overline{P} \tag{3.6}$$

und erhalten dann:

Lemma 3.18 ([BL, 2.3.2]). *Mit den obigen Bezeichnungen ist $\mathcal{D}_T^{[-n,n]}(X)$ äquivalent zur vollen Unterkategorie von $\mathcal{D}^{[-n,n]}(\overline{P})$, deren Objekte $\overline{\mathcal{F}}$ dadurch charakterisiert sind, daß es ein $\mathcal{F}_X$ aus $\mathcal{D}^{[-n,n]}(X)$ gibt mit $\psi^*\overline{\mathcal{F}} \cong \phi^*\mathcal{F}_X$.*

Wir betrachten nun einen T-äquivarianten Morphismus $f\colon X \to Y$. Dann lassen sich wieder Funktoren

$$f_*,\ f_!\colon\ \mathcal{D}_T^b(X) \to \mathcal{D}_T^b(Y)$$

und

$$f^*,\ f^!\colon\ \mathcal{D}_T^b(Y) \to \mathcal{D}_T^b(X)$$

konstruieren sowie

$$\mathcal{H}om,\ \otimes,\ \mathbb{D}\colon\ \mathcal{D}_T^b(X) \to \mathcal{D}_T^b(X)\ .$$

(Für Details sei auf [BL, Kap. 3] und den Spezialfall unten verwiesen.) Ist $T = \{e\}$, dann stimmen diese Funktoren mit den gleich bezeichneten nicht–äquivarianten Funktoren überein. Sonst verhalten sie sich weitgehend analog zu diesen: Auch im äquivarianten Fall ist f^* linksadjungiert zu f_* und $f^!$ rechtsadjungiert zu $f_!$, und die Aussagen von Lemma 3.1 bis 3.4 gelten weiter.

Lemma 3.19 ([BL, Thm. 3.4.1 und 3.5.2]). *Die Funktoren f_*, $f_!$, f^*, $f^!$, $\mathcal{H}om$, $\otimes$ und $\mathbb{D}$ kommutieren alle mit dem Vergißfunktor* ver.

Betrachten wir wieder die Einbettung von $\mathcal{D}_T^{[-n,n]}(X)$ in $\mathcal{D}^{[-n,n]}(\overline{P})$ (siehe oben), so läßt sich f_* wie folgt beschreiben:

Sei Q eine glatte $2n$–azyklische Auflösung von Y, so können wir für P die induzierte Auflösung $Q \times^Y X$ wählen. (Diese ist dann ebenfalls glatt und $2n$–azyklisch.)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & P \arrow[l, two heads] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \overline{P} \arrow[d, "\bar{f}"'] \\
Y & Q \arrow[l, two heads] \arrow[r, two heads] & \overline{Q}
\end{tikzcd}$$

Durch $f\colon X \to Y$ wird ein $\bar{f}\colon \overline{P} \to \overline{Q}$ induziert, und unter der Äquivalenz von Kategorien aus Lemma 3.18 entspricht $f_*\mathcal{F}_X$ aus $\mathcal{D}_T^{[-n,n]}(Y)$ mit $\mathcal{F}_X$ aus $\mathcal{D}_T^{[-n,n]}(X)$ gerade $\bar{f}_*\overline{\mathcal{F}}$ (siehe [BL, 3.3]).

Im äquivarianten Fall definiert man wie oben $\mathbb{H}_T$ bzw. $\mathbb{H}_{T,c}$ als p_* bzw. $p_!$ (mit $p\colon X \twoheadrightarrow pt$). $\mathbb{H}_T\,\mathcal{F}$ und $\mathbb{H}_{T,c}\,\mathcal{F}$ lassen sich daher nach dem Lemma 3.17 als Objekte in $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(BT)$ auffassen. Unter $\mathbb{H}_T^q\,\mathcal{F}$ und $\mathbb{H}_{T,c}^q\,\mathcal{F}$ verstehen wir dann die q-te Kohomologie davon.

Bemerkung. Üblicherweise wird die T–äquivariante Kohomologie eines Raumes X definiert als $\mathrm{H}_T^\bullet(X) = \mathrm{H}^\bullet(X \times^T ET)$. Nach [GKM] läßt sich aber $p_*\underline{X}$ in obigem Sinne gerade als $\tilde{p}_*(\underline{X \times ET})$ interpretieren für $\tilde{p}\colon X \times ET \twoheadrightarrow BT$. Daraus ergibt sich $\mathbb{H}_T^\bullet(\underline{X}) = \mathrm{H}_T^\bullet(X)$.

Manchmal ist es aus technischen Gründen nötig, die Kompaktheit der operierenden Gruppe vorauszusetzen (z. B. bei der Berechnung der äquivarianten Kohomologie der Schubertvarietäten mit den Lokalisierungsmethoden aus [GKM]). Für Tori macht das jedoch keinen Unterschied:

Lemma 3.20. *Sei T ein komplexer Torus und K der maximale kompakte Untertorus von T, dann können wir $\mathbb{H}_K^\bullet$ mit $\mathbb{H}_T^\bullet$ identifizieren.*

Beweis. Nach [BL, 2.6.3] haben wir eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(T \times^K X) \cong \mathcal{D}_K^{\mathrm{b}}(X)$, und die Projektion $\pi\colon T \times^K X \to X$ liefert einen Restriktionsfunktor

$$\pi^*\colon \mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X) \to \mathcal{D}_K^{\mathrm{b}}(X)\ .$$

Dieser ist nach [BL, 3.7.3] volltreu, da die Fasern T/K von π zusammenziehbar sind. Das Bild der T-äquivarianten konstanten Garbe auf X ist die K-äquivariante konstante Garbe auf X. Daraus folgt für $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)$

$$\mathbb{H}_K^\bullet(\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_K^{\mathrm{b}}(X)}(\underline{X}, \pi^*\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)}(\underline{X}, \mathcal{F}) = \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})\ .$$

□

Wir betrachten ein Objekt $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(pt)$, das wir nach Lemma 3.17 auffassen können als einen Komplex $\overline{\mathcal{G}}$ aus $\mathcal{D}^{\mathrm{b}}(BT)$ mit konstanten Kohomologiegarben. Daher können wir $\mathcal{H}^q\overline{\mathcal{G}}$ schreiben als $\mathbb{H}^q(\mathsf{ver}\,\mathcal{G}) \otimes \underline{BT}$.

Es existiert somit eine **Spektralsequenz der Hyperkohomologie** mit

$$E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(BT; \mathcal{H}^q\overline{\mathcal{G}}) = \mathrm{H}_T^p(pt) \otimes \mathbb{H}^q(\mathsf{ver}\,\mathcal{G})\ ,$$

die gegen $\mathbb{H}^{p+q}(BT; \overline{\mathcal{G}})$ konvergiert (vgl. [Bo2, V.1.4] oder [GKM]).

Bemerkung. Die Identifikation $\mathcal{H}^q\overline{\mathcal{G}} \cong \mathbb{H}^q(\mathsf{ver}\,\mathcal{G}) \otimes \underline{BT}$ wird, mit den Bezeichnungen aus (3.5), durch den Isomorphismus $\beta : \phi^*\mathcal{G}_{pt} \to \psi^*\overline{\mathcal{G}}$ induziert. Deshalb ist die ganze Konstruktion funktoriell in $\mathcal{G}$.

Setzen wir oben $\mathcal{G} = p_*\mathcal{F}$ oder $\mathcal{G} = p_!\mathcal{F}$, dann erhalten wir allgemeiner die Spektralsequenzen

$$E_2^{pq} = \mathrm{H}_T^p(pt) \otimes \mathbb{H}^q(\mathsf{ver}\,\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{H}_T^{p+q}(\mathcal{F})$$

bzw.

$$E_2^{pq} = \mathrm{H}_T^p(pt) \otimes \mathbb{H}_c^q(\mathsf{ver}\,\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{H}_{T,c}^{p+q}(\mathcal{F}) \ .$$

Lemma 3.21. *Verschwindet $\mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F})$ bzw. $\mathbb{H}_c^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F})$ in allen ungeraden Graden, so degenerieren obige Spektralsequenzen schon am E_2-Term und es folgt*

$$\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_T^\bullet(pt) \otimes \mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F})$$

bzw.

$$\mathbb{H}_{T,c}^\bullet(\mathcal{F}) \cong \mathrm{H}_T^\bullet(pt) \otimes \mathbb{H}_c^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F}) \ .$$

Insbesondere sind dann $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$ bzw. $\mathbb{H}_{T,c}^\bullet(\mathcal{F})$ freie $\mathrm{H}_T^\bullet(pt)$-Moduln, die ebenfalls nur in geraden Graden nichttrivial sind.

Auch das cup–Produkt läßt sich wieder wie oben definieren. Es ist $\mathrm{H}_T^\bullet(pt)$–bilinear, und macht $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$ bzw. $\mathbb{H}_{T,c}^\bullet(\mathcal{F})$ zu Moduln über dem Kohomologiering $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$.

Bemerkung 3.22. Aus der Funktorialität der Hyperkohomologie–Spektralsequenz ergibt sich außerdem, daß das äquivariante cup–Produkt kompatibel mit dem nichtäquivarianten cup–Produkt ist. Unter den Voraussetzungen und mit den Identifikationen des Lemmas gilt also einfach

$$(s \otimes \alpha) \smile (t \otimes \beta) = s\,t \otimes (\alpha \smile \beta) \ ,$$

und außerdem auch das äquivariante Analogon zu Lemma 3.6.

Für die äquivariante Version von Satz 3.7 muß man etwas mehr arbeiten:

Satz 3.23. *Ist $\pi\colon X \to Y$ eine $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-Faserung, und verschwinden $\mathrm{H}_T^3(Y)$ und $\mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Z})$, dann gilt $\pi_*\underline{X} \cong \underline{Y} \oplus \underline{Y}[-2]$.*

Beweis. Wir fassen wie in Lemma 3.18 $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ auf als Objekte in $\mathcal{D}^{[-n,n]}(\overline{P})$ bzw. $\mathcal{D}^{[-n,n]}(\overline{Q})$ mit Q einer glatten genügend azyklischen Auflösung von Y und P der induzierten Auflösung von X. Dort entsprechen sie einfach den konstanten Garben auf $\overline{P}$ bzw. $\overline{Q}$ und wir können die nichtäquivariante Version unseres Satzes anwenden. □

Wir kommen nun zu konstruktiblen Garben im äquivarianten Fall. Ein Objekt $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_T(X)$ heißt $\mathcal{S}$-konstruktibel, wenn $\mathsf{ver}(\mathcal{F})$ $\mathcal{S}$-konstruktibel ist. Es bezeichnet $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X;\mathcal{S})$ dann die beschränkte T-äquivariante derivierte Kategorie von $\mathcal{S}$-konstruktiblen Garben auf X und $\mathcal{D}_{T,c}^{\mathrm{b}}(X)$ die derivierte Kategorie T-äquivarianter Garben, die bezüglich einer beliebigen algebraischen Stratifizierung konstruktibel sind (siehe [BL, Kapitel 2 und 3.7]). Eine T-äquivariante Garbe $\mathcal{F}$ heißt **(äquivariante) perverse Garbe**, wenn $\mathsf{ver}\,\mathcal{F}$ eine perverse Garbe ist. Auf $\mathcal{D}_{T,c}^{\mathrm{b}}(X)$ läßt sich wie im nicht-äquivarianten Fall eine natürliche und eine perverse t-Struktur definieren (vgl. [BL, Kap. 5]). Das geschieht ebenfalls dadurch, daß $\mathcal{F}$ in $D^{\leq 0}$ liegen soll, wenn $\mathsf{ver}\,\mathcal{F}$ in $D^{\leq 0}$ liegt usw.

Als Herz dieser beiden t-Strukturen erhält man die Kategorien der T-äquivarianten Garben $\mathcal{S}h_T(X)$ und der T-äquivarianten perversen Garben ${}^p\mathcal{S}h_T(X)$.

Bemerkung. Für unsere Zwecke ist es bequem, dies als Definition von $\mathcal{S}h_T(X)$ zu benutzen, obwohl es eigentlich Nonsense ist, zuerst die derivierte Kategorie äquivarianter Garben und dann daraus die äquivarianten Garben zu konstruieren.

Sei U eine glatte, lokal abgeschlossene T-invariante Teilmenge von X und $j\colon U \hookrightarrow X$ die Inklusion. Für die perverse Garbe $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}(U)$ können wir genauso wie früher die **mittlere Erweiterung** $j_{!*}\mathcal{F}$ konstruieren. Ist insbesondere $\mathcal{L} \in \mathcal{S}h_T(U)$ eine lokalkonstante T-äquivariante Garbe, verschoben um $\dim U$, so ist der **äquivariante Schnittkohomologiekomplex** mit Koeffizienten in $\mathcal{L}$ definiert als ${}^{p}j_{!*}\mathcal{L}$ und wird bezeichnet mit $\mathcal{IC}_T(\overline{U}, \mathcal{L})$. Speziell bei $\overline{U} = X$ und konstantem $\mathcal{L} = \underline{U}$ schreiben wir kurz $\mathcal{IC}_T(X)$ dafür.

Diese Konstruktion läßt sich wieder mit den Abschneidefunktoren der natürlichen t-Struktur beschreiben und vertauscht folglich mit dem Vergißfunktor, in Formeln

$$\mathsf{ver}\,\mathcal{IC}_T(X; \mathcal{L}) = \mathcal{IC}(X; \mathsf{ver}\,\mathcal{L}) \;. \tag{3.7}$$

Lemma 3.24. *Die Schnittkohomologiekomplexe für irreduzible lokale Systeme $\mathcal{L}$ sind genau die irreduziblen perversen Garben in ${}^{p}\mathcal{S}h_T(X)$.*

Verdiers Charakterisierung der Schnittkohomologie (Satz 3.14) überträgt sich direkt auf den äquivarianten Fall, und mit der gleichen Definition von halbeinfachen Garben wie im früher hat auch der Zerlegungssatz hat eine äquivariante Form ([BL, 5.3]):

Satz 3.25 (äquivarianter Zerlegungssatz). *Ist $f\colon X \to Y$ eigentlich (und algebraisch!) und $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}_{T,c}(X)$ halbeinfach, so auch $f_*\mathcal{F}$.*

Aus (3.7) (und der Unzerlegbarkeit der Schnittkohomologiekomplexe) folgt, daß sich die Zerlegung von $f_*\mathcal{IC}_T(X)$ mit dem Vergißfunktor verträgt:

Lemma 3.26. *Seien $f\colon X \to Y$ und $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathrm{b}}_{T,c}(X)$ wie oben gegeben. Dann stimmen die Verschiebungen n_k und die Multiplizitäten m_k in*

$$f_*\mathcal{F} = \bigoplus_k m_k\, \mathcal{IC}_T(\mathcal{L}_k)[n_k]$$

überein mit denjenigen in

$$f_*\,\mathsf{ver}(\mathcal{F}) = \bigoplus_k m_k\, \mathcal{IC}(\mathsf{ver}\,\mathcal{L}_k)[n_k] \;.$$

4 Der Kohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit

Sei $G \supset P \supset B \supset T$ eine Kac–Moody–Gruppe mit Untergruppen wie in Abschnitt 2. Beschreibungen des T–äquivarianten Kohomologierings $\mathrm{H}_T^\bullet(G/P)$ ihrer Fahnenmannigfaltigkeit finden sich in [Ar] und [KK] oder lassen sich unter Verwendung der Resultate aus [GKM] oder [Br] gewinnen. Wie bisher betrachten wir stets Kohomologie mit komplexen Koeffizienten.

Der Kohomologiering des klassifizierenden Raumes einer Liegruppe und damit der äquivariante Kohomologiering eines einpunktigen Raumes wurde von A. Borel bereits in [Bo1] bestimmt. Speziell für den komplexen Torus T mit Liealgebra $\mathfrak{h}$ bezeichnen wir diesen graduierten Ring mit S. Es gilt dann (siehe auch [Hs])

$$S = \mathrm{H}_T^\bullet(pt) = \mathrm{H}^\bullet(BT) = \mathbb{C}^{\bullet/2}[\mathfrak{h}] \ .$$

(Mit $\mathbb{C}^{\bullet/2}[\mathfrak{h}]$ ist dabei gemeint, daß die Elemente aus $\mathfrak{h}^*$ in S den Grad 2 haben sollen.)

Sei Z ein topologischer Raum mit (stetiger) T–Operation. Die Inklusion der Fixpunktmenge Z^T in Z liefert auf der Kohomologie eine Restriktionsabbildung

$$\theta_Z \colon \mathrm{H}_T^\bullet(Z) \to \mathrm{H}_T^\bullet(Z^T) \ ,$$

die im folgenden näher untersucht wird. Wir nehmen an, daß die Menge Z^T diskret ist und somit ihre Kohomologie im Grad 0 konzentriert ist. $\mathrm{H}^0(Z^T)$ ist einfach ein Produkt von Kopien von $\mathbb{C}$ — für jeden Fixpunkt eine. Deshalb liegt

$$\mathrm{H}_T^\bullet(Z^T) = \mathrm{H}^\bullet(Z^T) \otimes S = \mathrm{H}^0(Z^T) \otimes S$$

als Unterring der Elemente mit beschränktem Grad im entsprechenden Produkt von Kopien von S. Wir schreiben kurz $\prod^{\mathrm{b}}_{x \in Z^T} S$ dafür. (Für endliches Z^T ist dies dasselbe wie $\bigoplus_{x \in Z^T} S$.) Damit ist erklärt, was gemeint ist, wenn wir ein Element von $\mathrm{H}_T^\bullet(Z^T)$ in der Form $(p_x)_{x \in Z^T}$ schreiben.

Ist Z eine komplexe algebraische Varietät, auf der T algebraisch operiert, und gibt es jeweils nur endlich viele Fixpunkte und eindimensionale Orbiten, dann läßt sich die Abbildung θ_Z nach M. Goresky, R. Kottwitz und R. MacPherson wie folgt beschreiben.

Satz 4.1 ([GKM, Theorem 7.2]). *Sei $\mathrm{H}_T^\bullet(Z)$ frei über S. Dann ist die Restriktionsabbildung θ_Z injektiv, und $(p_x)_{x \in Z^T} \in \bigoplus_{x \in Z^T} S$ liegt in ihrem Bild genau dann, wenn für alle Paare x, y von T-Fixpunkten, die durch einen eindimensionalen T-Orbit $\mathcal{O}$ verbunden sind,*

$$p_x = p_y \qquad \textit{auf } \mathfrak{h}_{\mathcal{O}}$$

gilt. Dabei ist $\mathfrak{h}_{\mathcal{O}}$ die Liealgebra des (größten) Untertorus von T, der $\mathcal{O}$ punktweise festhält.

Bemerkung. (a) Abweichend von der zitierten Arbeit ist der Satz für die T–äquivariante und nicht für die K–äquivariante Kohomologie (wobei $K \subset T$ ein *kompakter* Torus ist) formuliert. Wie wir in Lemma 3.20 sehen konnten, ist das aber unerheblich.
(b) Dasselbe Resultat erhält man mit [Br, Cor. 7].

Sei nun $Y = G/P$ eine Fahnenmannigfaltigkeit (mit $P = P_I$, $I \subset \Sigma$). Nach Satz 2.12 ist Y^T gerade die Menge $\{F_w \mid w \in W^I\}$ mit $F_w = wP/P$, und die eindimensionalen Orbiten verbinden jeweils F_y mit $F_{s_\alpha y}$, falls α eine reelle Wurzel ist und $F_y \neq F_{s_\alpha y}$. Der Stabilisator eines Punktes eines solchen Orbits ist dann $\operatorname{Kern} \alpha \subseteq T$ und seine Liealgebra $\operatorname{Kern} \alpha \subseteq \mathfrak{h}$. (Hier rächt sich die Identifikation von Wurzeln und Charakteren etwas!)

Notation. Wir werden im folgenden dort, wo Elemente aus Y^T als Indizes stehen sollten, diese durch entsprechende Weylgruppenelemente — nicht immer jedoch die „kürzesten Repräsentanten" aus W^I — ersetzen. Ein typisches Element von $\mathrm{H}_T^\bullet(Y^T) = \prod^{\mathrm{b}}_{w \in W^I} S$ schreiben wir also z. B. in der Form $(p_w)_{w \in W^I}$.

Wir wenden nun Satz 4.1 auf den Fall $Z = \overline{Y_w}$ an. Daß $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ ein freier S–Modul ist, wissen wir aus Lemma 3.21.

Satz 4.2. *Der äquivariante Kohomologiering der Schubertvarietät $\overline{Y_w}$ ist der Unterring von $\bigoplus_{y \leq w} S$, der aus den $(p_y)_{y \leq w}$ besteht, die die Bedingungen $p_y \equiv p_{s_\alpha y} \pmod{\alpha}$ für alle y und α erfüllen, für die $s_\alpha y < y \leq w$ gilt.*

Bei der Bestimmung von $\mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ nutzen wir aus, daß sich Y durch die kompakten Schubertvarietäten ausschöpfen läßt. Es folgen daher einige Bemerkungen dazu, wie $\mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ mit der Kohomologie der Schubertvarietäten zusammenhängt.

Lemma 4.3. *Die natürliche Abbildung $\mathrm{H}_T^\bullet(Y) \to \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ ist für jedes $w \in W$ eine Surjektion, und falls $\overline{Y_w}$ alle höchstens k–dimensionalen Zellen enthält, ist $\mathrm{H}_T^k(X) \to \mathrm{H}_T^k(\overline{Y_w})$ sogar ein Isomorphismus.*

Bemerkung. Ein solches $\overline{Y_w}$, das alle Zellen bis zur Dimension k umfaßt, gibt es tatsächlich zu jedem k. Das folgt daraus, daß zu einer endlichen Menge von Weylgruppenelementen (den Indizes aller Zellen bis zur Dimension k resp. den Wörtern aus W^I mit Länge höchstens k) stets ein $w \in W$ existiert, das sie alle dominiert.

Beweis. Da Y als CW–Komplex nur Zellen gerader Dimension hat, bilden diese Zellen (mit einer Orientierung versehen) eine Basis der gewöhnlichen zellulären Homologie von Y. Weil in jeder Dimension nur endlich viele Zellen liegen, existiert dual dazu eine Basis der Kohomologie $\mathrm{H}^\bullet(Y)$, in der eine Basis von $\mathrm{H}^\bullet(\overline{Y_w})$ enthalten ist.

Mit Lemma 3.21 bekommen wir daraus eine S–Basis der äquivarianten Kohomologie $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$, die sich zur entsprechenden S–Basis von $\mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ ergänzen läßt. $\square$

Ist $\varphi\colon \widehat{R} \to R$ ein Ringhomomorphismus und sind M und N zwei R–Moduln, dann werden diese durch φ automatisch zu $\widehat{R}$–Moduln. Falls φ surjektiv ist, gilt $\operatorname{Hom}_{\widehat{R}}(M, N) = \operatorname{Hom}_R(M, N)$.

Das wenden wir auf $\widehat{R} = \mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ und $R = \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ an. Wir erhalten dadurch die richtige Operation von $\mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ auf $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$ bzw. $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})$, falls $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ außerhalb von $\overline{Y_w}$ verschwinden (siehe Bemerkung 3.22).

Das liefert das folgende Korollar, das uns später weitgehend das Arbeiten mit dem unendlichdimensionalen Raum Y ersparen wird.

Korollar 4.4. *Für $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(Y)$ mit Träger in $\overline{Y_w}$ gilt*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}_T^\bullet(Y)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}),\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}),\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big).$$

Lemma 4.5. $\mathrm{H}_T^\bullet(Y) \to \varprojlim{}_w \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ *ist eine Injektion. Das Bild besteht aus denjenigen Elementen im projektiven Limes, für die die kanonischen Projektionen auf die* $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ *nicht beliebig hohen Grad haben.*

Beweis. Wegen Lemma 3.21 genügt es wieder, die entsprechende nichtäquivariante Aussage einzusehen. Nun liegt jeder Zykel der gewöhnlichen singulären Homologie von Y nach Korollar 2.9 schon ganz in einer der Schubertvarietäten $\overline{Y_w}$. Das liefert eine Surjektion $\varinjlim \mathrm{H}_\bullet(\overline{X_w}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_\bullet(Y)$, aus der durch Dualisieren die Behauptung folgt, da wir mit Koeffizienten in einem Körper arbeiten. Außerdem sehen wir damit ein, daß $\mathrm{H}_T^\bullet(Y)$ auf diejenigen Elemente in $\varprojlim \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ abgebildet wird, für die der Grad ihres Bildes unter den natürlichen Abbildungen in die $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w})$ beschränkt bleibt. □

Durch den Übergang zu $\varprojlim \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w}^T)$ fällt die Bedingung an den Grad einfach weg, d. h. wir identifizieren in obigem Bild diesen projektiven Limes mit $\prod_{w\in W^I} S$. Entsprechendes wie in Lemma 4.5 gilt für Y^T und $\overline{Y_w}^T$ statt Y und $\overline{Y_w}$. Die vertikalen Pfeile in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_T^\bullet(Y) \arrow[r, "\theta_Y"] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}_T^\bullet(Y^T) = \prod^{\mathrm{b}}_{y\in W^I} S \arrow[d, hook] \\
\varprojlim \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w}) \arrow[r] & \varprojlim \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{Y_w}^T) = \prod_{y\in W^I} S
\end{tikzcd}$$

sind also injektiv. Aus Satz 4.1 wissen wir, daß auch die untere Zeile eine Injektion ist. Daher folgt (siehe auch [Ar, Prop. 2.6.1]):

Lemma 4.6. *Die Restriktionsabbildung* $\theta_Y\colon \mathrm{H}_T^\bullet(Y) \to \mathrm{H}_T^\bullet(Y^T) = \prod^{\mathrm{b}}_{y\in W^I} S$ *ist injektiv.*

Die untere Zeile in dem eben betrachteten kommutativen Diagramm kennen wir nach Satz 4.2. Daher gilt:

Satz 4.7. *Der T–äquivariante Kohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit Y ist der Unterring von* $\prod^{\mathrm{b}}_{y\in W^I} S$, *der aus den* $(p_w)_{w\in W^I}$ *besteht, die die Bedingungen* $p_y \equiv p_{s_\alpha y} \pmod{\alpha}$ *für alle $y \in W^I$ und alle Wurzeln α erfüllen.*

Sei nun speziell $Y = Y^s = G/P_s$ und $X = G/B$. Da die Einschränkung auf die Fixpunkte mit dem Zurückziehen entlang der Faserung $\pi_s\colon X \twoheadrightarrow Y$ vertauscht, d. h.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_T^\bullet(X) \arrow[r] & \mathrm{H}_T^\bullet(X^T) \\
\mathrm{H}_T^\bullet(Y) \arrow[r] \arrow[u, "\pi_s^*"] & \mathrm{H}_T^\bullet(Y^T)\,. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

da weiterhin über jedem T–Fixpunkt wP/P in Y die beiden T–Fixpunkte wB/B und wsB/B liegen, und außerdem jeder eindimensionale Orbit in G/P zu einem in G/B liftet (siehe 2.14), folgt sofort:

Korollar 4.8. *Ist s eine einfache Spiegelung, dann besteht $\pi_s^* \mathrm{H}_T^\bullet(Y^s)$ aus den $(p_w)_{w\in W}$ in $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$ mit $p_{ws} = p_w$ für alle w. (Vorsicht, s operiert hier von rechts auf w!)*

Bemerkung. Eine andere Beschreibung des Bildes von θ_X und damit von $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$ für $X = G/B$ gibt A. Arabia in [Ar, Thm. 3.5.1]. Sei dazu $\prod^{\mathrm{b}}_{w\in W} S$ eingebettet in $\prod_{w\in W} Q$, die Abbildungen von W in den Quotientenkörper $Q = \operatorname{Quot} S$ (ohne Beschränkungen an den Grad).

Für jede einfache Wurzel α mit zugehöriger Spiegelung s_α wird ein Endomorphismus A_α von $\prod_{w\in W} Q$ definiert, der sich mit unseren Bezeichnungen wie folgt schreiben läßt:

$$A_\alpha \colon \big(p_w\big)_{w\in W} \mapsto \Big(\frac{p_{ws_\alpha} - p_w}{w(\alpha)}\Big)_{w\in W}$$

Dann ist das Bild von $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$ unter der Restriktion θ_X gerade der maximale Unterring von $\prod^{\mathrm{b}}_{w\in W} S$, der unter allen A_α $(\alpha \in \Delta)$ stabil bleibt. Für $s = s_\alpha$ gilt $\pi_s^* \mathrm{H}_T^\bullet(Y^s) = \operatorname{Kern} A_\alpha$.

Die Äquivalenz der beiden Beschreibungen des Bildes von θ_X läßt sich nach S. Kumar (unveröffentlicht) mit den Ergebnissen aus [KK] auch direkt beweisen.

5 Berechnung der Schnittkohomologiekomplexe

Wir wollen jetzt die (T-äquivarianten) Schnittkohomologiekomplexe der in Abschnitt 2 konstruierten Schubertvarietäten rekursiv bestimmen, indem wir das Verfahren zur Berechnung der Kazhdan-Lusztig-Basis am Ende von Abschnitt 1 geometrisch imitieren.

Der Formalismus aus Abschnitt 3 wird dazu konkret auf die Fahnenmannigfaltigkeiten einer Kac–Moody–Gruppe angewandt. Wir werden zeigen, daß der Komplex $\pi_s^* \pi_{s*} \mathcal{IC}_T \overline{X_x}[1]$, der durch „Integration über die Fasern" der Abbildung $\pi_s \colon G/B \to G/P^s$ aus $\mathcal{IC}_T \overline{X_x}$ entsteht (vgl. dazu den Anhang von [Ar]), für $w = xs > x$ in eine direkte Summe von (T-äquivarianten) Schnittkohomologiekomplexen von Schubertvarietäten zerfällt, wobei $\mathcal{IC}_T \overline{X_w}$ genau einmal vorkommt und ansonsten nur $\mathcal{IC}_T \overline{X_y}$ für $y < w$, und daß deren Multiplizitäten durch dieselben Zahlen μ_y gegeben sind, wie bei der Kazhdan-Lusztig-Basis.

Bemerkung. Da alle Konstruktionen mit dem Vergißfunktor $\mathsf{ver} \colon \mathcal{D}_T(X) \to \mathcal{D}(X)$ vertauschen, können wir dabei zunächst auf die T-äquivariante Struktur verzichten und die Ergebnisse später dann auf diesen Fall übertragen.

Sei also G eine Kac–Moody–Gruppe mit Untergruppen B und P^s (für jedes $s \in \Sigma$), und seien $X = G/B$ und $Y^s = G/P^s$ die entsprechenden Fahnenmannigfaltigkeiten.

Lemma 5.1. *Die Bruhatzerlegung von $\overline{X_w}$ ist eine algebraische Stratifizierung.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 3.9. $\overline{X_w}$ liegt in einem endlichdimensionalen projektiven Raum und die Bruhatzellen sind genau die B–Orbiten im Abschluß von X_w. Jeder solche Orbit ByB/B ist dabei ein Orbit der unipotenten algebraischen Gruppe $U_y \subset B$ (siehe Lemma 2.6). $\square$

Sei $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_c^{\mathrm{b}}(X; \{X_w \mid w \in W\})$ bzw. $\mathcal{D}_Y = \mathcal{D}_c^{\mathrm{b}}(Y; \{Y_w \mid w \in W\})$ die beschränkte derivierte Kategorie von Garben auf X bzw. Y^s, deren Kohomologie konstruktibel bezüglich der durch die Bruhatzerlegung der Fahnenmannigfaltigkeit gegebenen Stratifizierung ist.

In den folgenden Konstruktionen werden nur stratifizierte Abbildungen vorkommen, nämlich die Projektion $\pi_s \colon X \to Y^s$ (sowie Einschränkungen davon auf Vereinigungen von Strata) und verschiedene Inklusionen von Unterräumen jeweils mit der induzierten Stratifizierung.

Da die Bruhatzellen einfach zusammenhängend sind, ist die Restriktion eines Komplexes aus $\mathcal{D}_X$ auf eine der Zellen X_w lediglich eine Summe verschobener konstanter Garben. Die Halme an einem (beliebigen) Punkt der Zelle liefern also schon die ganze Information über diese Restriktion.

Als Hilfsmittel für das weitere Vorgehen betrachten wir die Abbildung (vgl. [Sp1])

$$\begin{aligned} h \colon \mathcal{D}_X &\to \mathcal{H} \\ \mathcal{G} &\mapsto \sum_{\substack{y \in W \\ k \in \mathbb{Z}}} \dim \mathcal{H}_y^k \mathcal{G} \; v^{-\ell(y)-k} H_y \end{aligned}$$

in die Heckealgebra $\mathcal{H}$ (siehe Abschnitt 1). Dabei schreiben wir kurz $\mathcal{H}^k_y\mathcal{G}$ für $(\mathcal{H}^k\mathcal{G})_{yB/B}$, den Halm der k-ten Kohomologiegarbe von $\mathcal{G}$ an dem Punkt yB/B (oder einem beliebigen anderen Punkt des Stratums ByB/B). Hier und auch künftig meinen wir mit $\dim V$ immer die komplexe Dimension eines Vektorraums (bzw. einer Varietät) V.

Direkt aus der Definition von h folgen die beiden Eigenschaften

$$h(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}) = h(\mathcal{F}) + h(\mathcal{G}) \tag{5.1}$$

und

$$h(\mathcal{F}[1]) = v\, h(\mathcal{F})\ . \tag{5.2}$$

Wir schauen uns nun an, welche Aussagen sich aus der Verdiercharakterisierung der Schnittkohomologie für $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$ ergeben. Wenn wir $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ auf X_w einschränken, erhalten wir die konstante Garbe im Grad $-\ell(w)$, d. h.

$$\mathcal{H}^k_w(\mathcal{IC}\overline{X_w}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{, falls } k = -\ell(w) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Also hat H_w in $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$ den Koeffizienten 1. Die Einschränkung von $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ auf das $\ell(y)$-dimensionale Stratum X_y mit $y < w$ besitzt nach Satz 3.14 keine k-te Kohomologie, falls $k + \ell(y) \geq 0$ ist. Mit anderen Worten: Der Koeffizient von H_y in $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$ enthält keine Monome v^{-i} mit $i \geq 0$. Folglich gilt

$$h(\mathcal{IC}\overline{X_w}) \in H_w + \sum_{y<w} v\mathbb{Z}[v]H_y\ . \tag{5.3}$$

Wir notieren eine direkte Konsequenz daraus:

Korollar 5.2. *Für alle $w \in W$ gilt sowohl als $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$–Moduln als auch als $\mathbb{Z}[v]$–Moduln jeweils* $\mathrm{Spann}\{h(\mathcal{IC}\overline{X_y})\,|\, y \leq w\} = \mathrm{Spann}\{H_y \,|\, y \leq w\}$.
Insbesondere ist $\{h(\mathcal{IC}\overline{X_w})\,|\, w \in W\}$ eine $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$–Basis der Heckealgebra $\mathcal{H}$.

Die Form der $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$ stimmt mit der Charakterisierung der selbstdualen Basis von $\mathcal{H}$ in (1.2) überein, und tatsächlich werden wir im Verlauf dieses Abschnitts schließlich sehen (Satz 5.8), daß das Bild von $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ unter h, das Kazhdan-Lusztig-Basiselement $\underline{H}_w$ ist.

Um das zu zeigen, müssen wir neben (5.3) nur noch einsehen, warum $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$ invariant unter der Kazhdan-Lusztig-Involution ist. Der Beweis läuft induktiv, und zwar schreiben wir wieder $w = xs$ mit $x < w$ und $s \in \Sigma$ und betrachten die partielle Fahnenmannigfaltigkeit $Y = Y^s$ zu diesem s sowie die zugehörige Projektion $\pi = \pi_s \colon X \to P^s$.

Wir zeigen, daß $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ in eine direkte Summe von Schnittkohomologiekomplexen zerfällt, in der $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ als Summand vorkommt und sonst nur noch Komplexe $\mathcal{IC}\overline{X_y}$ mit $y < w$, von denen bereits bekannt ist, daß $h(\mathcal{IC}\overline{X_y})$ selbstdual ist. Außerdem werden wir gleich sehen, daß auch $h(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1])$ selbstdual ist. Zusammen liefert das die Selbstdualität von $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$.

Für die weiteren Überlegungen werden wir in der obigen Ausgangssituation den Funktor

$$\mathcal{G} \mapsto \pi^*\pi_*\mathcal{G}[1]$$

genauer untersuchen und als Schlüsselresultat den Satz 5.4 erhalten. Vorher soll aber noch ein eher technisches Lemma stehen:

Lemma 5.3. *Es gilt $\pi_* = \pi_!$ und $\pi^*(\cdot)[1] = \pi^!(\cdot)[-1]$, und diese beiden Funktoren vertauschen mit der Verdierdualität $\mathbb{D}$. Insbesondere ist mit $\mathcal{F}$ auch $\pi_*\mathcal{F}$ und mit $\mathcal{G}$ auch $\pi^*\mathcal{G}[1]$ selbstdual, und der Funktor $\pi^*\pi_*(\cdot)[1]$ ist selbstadjungiert.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus Lemma 3.1 bzw. Lemma 3.2 und der Rechnung

$$\mathbb{D}(\pi_*\mathcal{F}) = \pi_!(\mathbb{D}\,\mathcal{F}) = \pi_*(\mathbb{D}\,\mathcal{F})$$

bzw.

$$\mathbb{D}(\pi^*\mathcal{G}[1]) = \pi^!\,\mathbb{D}(\mathcal{G}[1]) = \pi^!(\mathbb{D}\,\mathcal{G})[-1] = \pi^*(\mathbb{D}\,\mathcal{G})[1]\ .$$

□

Zur bequemeren Formulierung des Folgenden dient noch eine Sprechweise: Wir sagen, ein Komplex von Garben erfüllt die **Paritätsbedingung**, falls alle seine ungeraden Kohomologiegarben oder alle seine geraden Kohomologiegarben verschwinden.

Es ist unmittelbar klar, daß jeder direkte Summand eines solchen Komplexes ebenfalls die Paritätsbedingung erfüllt, und daß diese Bedingung unempfindlich gegen Verschiebungen ist.

Satz 5.4. *Erfüllt $\mathcal{G} \in \mathcal{D}$ die Paritätsbedingung, dann auch $\pi^*\pi_*\mathcal{G}$, und es gilt in diesem Fall $h(\pi^*\pi_*\mathcal{G}[1]) = h(\mathcal{G})\underline{H}_s$.*

Beweis. O. B. d. A. seien es die ungeraden Kohomologiegarben von $\mathcal{G}$, die alle verschwinden.

Zum Nachweis, daß $\pi^*\pi_*\mathcal{G}$ die Paritätsbedingung erfüllt, genügt es, nachzurechnen, daß für ungerades k und beliebiges $x \in W$ der Halm $\mathcal{H}^k_x(\pi^*\pi_*\mathcal{G})$ verschwindet.

Um $h(\pi^*\pi_*\mathcal{G}[1]) = h(\mathcal{G})\underline{H}_s$ zu zeigen, müssen wir wegen

$$h(\mathcal{G}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{-k} \sum_{y\in W} \dim\bigl(\mathcal{H}^k_y\mathcal{G}\bigr)\,\frac{H_y}{v^{\ell(y)}} = \sum_{\substack{y\in W\\ ys>y}} \frac{H_y}{v^{\ell(y)}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{-k}\Bigl(\dim\bigl(\mathcal{H}^k_{ys}\mathcal{G}\bigr)\,\frac{H_s}{v} + \dim\bigl(\mathcal{H}^k_y\mathcal{G}\bigr)\,H_e\Bigr)$$

die Gleichheit

$$(5.4)\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{-k}\Bigl(\dim\bigl(\mathcal{H}^k_{ys}(\pi^*\pi_*\mathcal{G}[1])\bigr)\,\frac{H_s}{v} + \dim\bigl(\mathcal{H}^k_y(\pi^*\pi_*\mathcal{G}[1])\bigr)\,H_e\Bigr)$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{-k}\Bigl(\dim\bigl(\mathcal{H}^k_{ys}\mathcal{G}\bigr)\,\frac{H_s}{v} + \dim\bigl(\mathcal{H}^k_y\mathcal{G}\bigr)\,H_e\Bigr)(H_s + v)$$

für alle $y \in W$ mit $ys > y$ bestätigen.

Ausmultiplizieren der rechten Seite (unter Verwendung von $H_s(H_s + v) = v^{-1}(H_s + v)$) und Koeffizientenvergleich zeigt, daß die Gleichung (5.4) äquivalent zu der Behauptung

$$\dim\big(\mathcal{H}^k_{ys}(\pi^*\pi_*\mathcal{G})\big) = \dim\big(\mathcal{H}^k_{y}(\pi^*\pi_*\mathcal{G})\big) = \dim\big(\mathcal{H}^{k-2}_{ys}\mathcal{G}\big) + \dim\big(\mathcal{H}^k_{y}\mathcal{G}\big) \tag{5.5}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Wir wollen daher jetzt (5.5) zeigen. Ein schöner Nebeneffekt ist, daß dies nach dem eingangs Gesagten gleich noch den Beweis dafür mitliefert, daß $\pi^*\pi_*\mathcal{G}$ die Paritätsbedingung erfüllt, denn die rechte Seite von (5.5) ist nach Voraussetzung für ungerades k stets 0.

Wir fixieren y. Da uns dann nur noch die Kohomologiehalme von $\mathcal{G}$ an den beiden Punkten ysB/B und yB/B interessieren, schränken wir $\mathcal{G}$ auf $F = \pi^{-1}(yP/P) = yP/B$, die Faser von π über dem T-Fixpunkt yP/P von Y, ein.

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook, "i_F"] \arrow[d, "\pi_{|F}"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ pt \arrow[r, hook, "i_{pt}"'] & Y \end{tikzcd}$$

ist kartesisch, und mit den angegebenen Bezeichnungen liefert das Basiswechsel-Lemma 3.3

$$(\pi^*\pi_*\mathcal{G})_{|F} = i_F^*\pi^*\pi_!\mathcal{G} = (\pi_{|F})^* i_{pt}^*\pi_!\mathcal{G} = (\pi_{|F})^*(\pi_{|F})_!\, i_F^*\mathcal{G} = (\pi_{|F})^*(\pi_{|F})_*\,\mathcal{G}_{|F}\ .$$

Das bedeutet, daß wir in Gleichung (5.5) π und $\mathcal{G}$ jeweils durch ihre Einschränkung auf F ersetzen können. Um das Folgende lesbarer zu machen, werden wir auch weiterhin π und $\mathcal{G}$ schreiben – aber ab sofort (bis zum Ende dieses Beweises) $\pi_{|F}$ bzw. $\mathcal{G}_{|F}$ damit meinen.

F ist isomorph zur projektiven Gerade $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ also selbst eine Fahnenmannigfaltigkeit (vgl. die Bemerkung im Anschluß an den Beweis), und die Bruhatzerlegung von $X = G/B$ induziert die Zerlegung $F = F_{ys} \cup F_y$ in den affinen Teil $F_{ys} = F \cap X_{ys} \cong \mathbb{C}$ und den unendlich fernen Punkt $F_y = F \cap X_y \cong \{\infty\}$. Somit können wir $\mathcal{G}$ als ein Objekt der Kategorie $\mathcal{D}_F = \mathcal{D}^{\mathrm{b}}_c(\mathbb{P}^1\mathbb{C}, \{\mathbb{C}, \infty\})$ auffassen.

Mit den Bezeichnungen aus dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{P}^1\mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] & \infty \arrow[l, hook', "j"'] \\ & pt & \end{tikzcd}$$

erhalten wir das folgende ausgezeichnete Dreieck (Gysin-Sequenz) in $\mathcal{D}_F$:

$$i_!i^!\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{G} \longrightarrow^{[1]}$$

Darauf wenden wir $\pi_* = \pi_!$ an und bilden dann die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^k(\pi_!i_!i^!\mathcal{G}) \longrightarrow H^k(\pi_*\mathcal{G}) \longrightarrow H^k(\pi_*j_*j^*\mathcal{G}) \longrightarrow H^{k+1}(\pi_!i_!i^!\mathcal{G}) \longrightarrow \ldots \tag{5.6}$$

Wir wollen die einzelnen Terme in der Sequenz getrennt betrachten: Für die konstante Garbe $\underline{\mathbb{C}}$ berechnet $\pi_! i_! \underline{\mathbb{C}}$ die Kohomologie mit kompaktem Träger von $\mathbb{C}$. Es gilt also

$$\pi_! i_! \underline{\mathbb{C}} = \underline{pt}[-2] = (\underline{\mathbb{C}}[-2])_0$$

Nun ist $i^! \mathcal{G} = i^* \mathcal{G}$ direkte Summe von (evtl. verschobenen) konstanten Garben auf $\mathbb{C}$ (siehe Bemerkung 3.11). Daher ist $H^k(\pi_! i_!(i^! \mathcal{G}))$ gleich dem Halm der $(k-2)$-ten Kohomologiegarbe von $\mathcal{G}$ an einem Punkt von $\mathbb{C}$, etwa dem Fixpunkt 0. Genauso ist die $H^k(\pi_* j_*(j^* \mathcal{G}))$ der Halm der k-ten Kohomologiegarbe von $\mathcal{G}$ am Punkt ∞.

Da sich die Halme beim Zurückziehen π^* nicht ändern, ist schließlich $H^k(\pi_* \mathcal{G})$ der Halm der k-ten Kohomologiegarbe von $\pi^* \pi_* \mathcal{G}$ an einem beliebigen Punkt x von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

Die lange exakte Folge (5.6) läßt sich damit so schreiben:

$$(5.7) \qquad \ldots \longrightarrow (\mathcal{H}^{k-2}\mathcal{G})_0 \longrightarrow (\mathcal{H}^k(\pi^*\pi_*\mathcal{G}))_x \longrightarrow (\mathcal{H}^k\mathcal{G})_\infty \longrightarrow (\mathcal{H}^{k-1}\mathcal{G})_0 \longrightarrow \ldots$$

Die Randabbildung $(\mathcal{H}^k\mathcal{G})_\infty \to (\mathcal{H}^{k-1}\mathcal{G})_0$ darin ist stets trivial, da $\mathcal{H}^k\mathcal{G} = 0$ oder $\mathcal{H}^{k-1}\mathcal{G} = 0$, je nachdem, ob k ungerade oder gerade ist. Die Sequenz (5.7) zerfällt daher in kurze exakte Folgen

$$0 \longrightarrow \big(\mathcal{H}^{k-2}\mathcal{G}\big)_0 \longrightarrow \big(\mathcal{H}^k(\pi^*\pi_*\mathcal{G})\big)_x \longrightarrow \big(\mathcal{H}^k\mathcal{G}\big)_\infty \longrightarrow 0$$

Das bedeutet, daß

$$\begin{aligned} \dim\big(\mathcal{H}^k(\pi^*\pi_*\mathcal{G})\big)_\infty = \dim\big(\mathcal{H}^k(\pi^*\pi_*\mathcal{G})\big)_0 & \\ &= \dim\big(\mathcal{H}^k\mathcal{G}\big)_\infty + \dim\big(\mathcal{H}^{k-2}\mathcal{G}\big)_0 \end{aligned}$$

gilt. Das war zu zeigen. □

Bemerkung. (a) $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ ist selbst eine Fahnenmannigfaltigkeit zur Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ mit den oberen Dreiecksmatrizen als Borelscher. Die Weylgruppe hat dann nur zwei Elemente.

(b) Ist α die einfache Wurzel zur Spiegelung s, dann haben wir in G eine von U_α und $U_{-\alpha}$ erzeugte Kopie S_α von $SL(2,\mathbb{C})$, und P ist das Erzeugnis von S_α zusammen mit B. Außerdem entspricht $S_\alpha \cap B$ den oberen Dreiecksmatrizen in $SL(2,\mathbb{C})$. Die Inklusion $S_\alpha \hookrightarrow G$ induziert folglich einen Isomorphismus von der $SL(2,\mathbb{C})$–Fahnenmannigfaltigkeit $S_\alpha/(S_\alpha \cap B)$ auf P/B. Die T-Operation auf P/B faktorisiert über den (eindimensionalen) Torus in S_α.

Die Bruhatzerlegung $U_\alpha sB/B \cup B/B$ von P/B läßt sich mit der Standardparametrisierung von U_α gerade als die Zerlegung von $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ in den affinen Teil $\mathbb{C} \cong U_\alpha sB/B$ mit dem T-Fixpunkt 0 und den unendlich fernen Punkt $\infty \cong B/B$ interpretieren.

Diese wird durch Linkstranslation mit y auf die obige Zerlegung $F = F_{ys} \cup F_y$ übertragen. Es gilt also

$$F_{ys} = F \cap BysB/B = U_{y(\alpha)} ysB \cong \mathbb{C} \quad \text{und} \quad F_y = F \cap ByB/B = yB/B \cong \infty\,.$$

Was wir im ersten Teil des Beweises getan haben, sollte deshalb als eine Reduktion auf den $SL(2)$–Fall angesehen werden. ◇

Nach den obigen allgemeineren Aussagen wenden wir uns nun konkret den Schnittkohomologiekomplexen zu.

Lemma 5.5. *(a) Sei $x \in W$ mit $xs > x$. Dann gilt $\pi^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1] = \mathcal{IC}\overline{X_{xs}}$.*
(b) Für jedes $x \in W$ ist der Komplex $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ halbeinfach.

Beweis. (a) Wir benutzen wieder die Charakterisierung aus Satz 3.14. Die Invarianz von $\pi^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1]$ unter der Verdierdualität wurde schon in Lemma 5.3 gezeigt. Sei nun S ein Stratum von $\overline{X_{xs}}$ und $\widetilde{S}$ sein Bild unter π.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, "\pi_{|S}"'] & \overline{X_{xs}} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{S} \arrow[r, hook, "\tilde{s}"] & \overline{Y_x} \end{tikzcd}$$

Für die „größte“ Zelle $S = X_{xs}$ gilt dann mit den obigen Bezeichnungen

$$s^*(\pi^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1]) = (\pi_{|S})^*\tilde{s}^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1] = (\pi_{|S})^*\underline{Y_x}[l(x)+1] = \underline{X_{xs}}[l(xs)]\,.$$

Falls $S = X_y \neq X_{xs}$ ein anderes Stratum ist mit $\dim S = \ell(y)$, haben wir $\dim \widetilde{S} = \ell(y)$ oder $\dim \widetilde{S} = \ell(ys) = \ell(y) - 1$, je nachdem, ob $ys > y$ oder $ys < y$. Somit gilt, falls $k + \dim S \geq 0$ ist, erst recht $k + 1 + \dim \widetilde{S} \geq 0$ und damit

$$\mathcal{H}^k\big(s^*\pi^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1]\big) = \mathcal{H}^{k+1}\big((\pi_{|S})^*\tilde{s}^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}\big) = \mathcal{H}^{k+1}\big(\tilde{s}^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}\big)_{|S} = 0\,.$$

Wir haben also alle drei Bedingungen aus Satz 3.14 geprüft, und daher ist $\pi^*\mathcal{IC}\overline{Y_x}[1] = \mathcal{IC}\overline{X_{xs}}$.

(b) Zunächst sagt der Zerlegungssatz, daß $\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}$ eine direkte Summe evtl. verschobener Schnittkohomologiekomplexe ist. Diese sind alle konstruktibel bezüglich der durch die Bruhatzerlegung gegebenen Stratifizierung, d. h. die Summanden sind alle von der Form $\mathcal{IC}\overline{Y_y}[k]$ (mit $y \leq x$).

Nach dem, was wir gerade in Teil (a) gesehen haben, werden diese durch $\pi^*(\cdot)[1]$ wieder in verschobene Schnittkohomologiekomplexe überführt, deren Träger irgendwelche Schubertvarietäten in X sind. □

Nun haben wir alle Hilfsmittel beisammen, um die folgenden drei Sätze zu beweisen, die die Hauptresultate dieses Abschnitts bilden.

Satz 5.6. *Für jedes $w \in W$ erfüllt der Schnittkohomologiekomplex $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ die Paritätsbedingung. Genauer gilt sogar: Die ungeraden Kohomologiegarben von $\mathcal{IC}\overline{X_w}[\ell(w)]$ verschwinden alle.*

Satz 5.7. *Sei $w = xs > x$. Dann zerfällt $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ in eine direkte Summe von Schnittkohomologiekomplexen von Schubertvarietäten, und die Multiplizität von $\mathcal{IC}\overline{X_y}$ ist dabei dieselbe wie die Multiplizität von $\underline{H}_y$ in $\underline{H}_x\underline{H}_s$. Insbesondere kommt $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ genau einmal vor und ansonsten nur noch $\mathcal{IC}\overline{X_y}$ mit $y < w$.*

Bemerkung. (a) Für $xs < x$ treten in $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ tatsächlich auch *verschobene* Schnittkohomologiekomplexe als direkte Summanden auf. Aufgrund der Selbstdualität von $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ kommt dabei jedoch $\mathcal{IC}\overline{X_y}[k]$ stets mit derselben Vielfachheit vor wie $\mathcal{IC}\overline{X_y}[-k]$.

(b) In der zerfällenden Grothendieckgruppe $[{}^p\mathcal{S}h(X)]_\oplus$ der abelschen Kategorie der perversen Garben können wir die Behauptung des Satzes auch so schreiben:

$$\left[\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]\right]_\oplus = \left[\mathcal{IC}\overline{X_w}\right]_\oplus + \sum_{y<w} \mu_y \left[\mathcal{IC}\overline{X_y}\right]_\oplus , \quad \text{falls } \underline{H}_x\underline{H}_s = \underline{H}_w + \sum_{y<w} \mu_y \underline{H}_y \ .$$

Satz 5.8. *Das Bild von $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ unter h ist das Kazhdan-Lusztig-Basiselement $\underline{H}_w$.*

Beweis der Sätze 5.6 bis 5.8. Wir verwenden Induktion nach w bezüglich der Bruhatordnung. Ist $w = e$ und damit $\mathcal{IC}\overline{X_w} = \underline{pt}$, dann sind die Aussagen von 5.6 und 5.8 sicher richtig. (In 5.7 ist implizit $w > e$ vorausgesetzt.)

Sei also nun $w = xs > x$ und seien insbesondere die Sätze 5.6 und 5.8 für alle kleineren w bestätigt. Das bedeutet, daß $\mathcal{IC}\overline{X_x}$ die Paritätsbedingung erfüllt. Nach Satz 5.4 entsteht dann $h(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1])$ durch Multiplikation eines Ausdrucks der Form (5.3) mit $\underline{H}_s = H_s + v$.

Wegen $xs > x$ gilt folglich (vgl. Gleichung (1.3))

$$h(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]) \in H_w + \sum_{y<w} \mathbb{Z}[v]\, H_y \ .$$

Nach Korollar 5.2 ist die rechte Seite aber identisch mit

$$h(\mathcal{IC}\overline{X_w}) + \sum_{y<w} \mathbb{Z}[v]\, h(\mathcal{IC}\overline{X_y}) \ .$$

Andererseits sagt Lemma 5.5, daß $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ in direkte Summanden der Form $\mathcal{IC}\overline{X_y}[k]$ mit $y < w$ und $k \in \mathbb{Z}$ zerfällt, und daher $h(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1])$ die Summe der entsprechenden Ausdrücke $v^k\, h(\mathcal{IC}\overline{X_y})$ ist.

Ein Vergleich mit den obigen Ergebnissen zeigt nun, daß $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ als Summand einmal vorkommt und daß überhaupt keine $\mathcal{IC}\overline{X_y}[k]$ mit negativem k als Summanden auftreten können. Die aus Lemma 5.3 folgende Selbstdualität von $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ schließt dann aber auch die $\mathcal{IC}\overline{X_y}[k]$ mit positivem k aus (vgl. auch die Bemerkung im Anschluß an Satz 5.7).

Damit gilt

$$h(\mathcal{IC}\overline{X_x})\underline{H}_s = h(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]) = h(\mathcal{IC}\overline{X_w}) + \sum_{y<w} \mu_y h(\mathcal{IC}\overline{X_y}) \tag{5.8}$$

mit den nichtnegativen ganzen μ_y aus

$$\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1] = \mathcal{IC}\overline{X_w} \oplus \bigoplus_{y<w} \mu_y\, \mathcal{IC}\overline{X_y} \ .$$

Wir wissen nach Induktionsvoraussetzung und Satz 5.4 von allen Termen in der Gleichung (5.8) außer $h(\mathcal{IC}\overline{X_w})$, daß sie invariant unter der Kazhdan–Lusztig–Involution sind. Also gilt das auch für diesen Term und daraus folgt $h(\mathcal{IC}\overline{X_w}) = \underline{H}_w$. Einsetzen in Gleichung (5.8) liefert die Behauptung über die μ_y.

Schließlich folgt noch, daß $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ als direkter Summand von $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$ die Paritätsbedingung erfüllt. Damit ist der Induktionsschluß beendet. □

Satz 5.7 hat noch ein unmittelbares Korollar:

Korollar 5.9. *Sei $w = xs > x$. Dann ist $\mathcal{IC}\overline{X_w}$ der einzige unzerlegbare direkte Summand von $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}\overline{X_x}[1]$, der nicht isomorph ist zu einem der $\mathcal{IC}\overline{X_y}$ mit $y < w$.*

Die Aussagen von Satz 5.7 und Korollar 5.9 gelten ebenso für die T-äquivariante Schnittkohomologie:

Korollar 5.10. *Sei $w = xs > x$. Dann zerfällt $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}_T\overline{X_x}[1]$ in eine direkte Summe von Schnittkohomologiekomplexen von Schubertvarietäten, und die Multiplizität von $\mathcal{IC}_T\overline{X_y}$ ist dabei dieselbe wie die Multiplizität von $\underline{H}_y$ in $\underline{H}_x\underline{H}_s$. Insbesondere kommt $\mathcal{IC}_T\overline{X_w}$ genau einmal vor und ansonsten nur noch $\mathcal{IC}_T\overline{X_y}$ mit $y < w$.*
$\mathcal{IC}_T\overline{X_w}$ ist als der einzige unzerlegbare direkte Summand von $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}_T\overline{X_x}[1]$, der nicht isomorph ist zu einem der $\mathcal{IC}_T\overline{X_y}$ mit $y < w$, eindeutig bestimmt.

Beweis. Benutzt man den äquivarianten Zerlegungssatz sieht man wie oben, daß $\pi^*\pi_*\mathcal{IC}_T\overline{X_x}[1]$ direkte Summe von Schnittkohomologiekomplexen ist. Da die Zerlegung im Zerlegungssatz mit dem Vergißfunktor kommutiert, sind die Multiplizitäten durch die gleichen Zahlen, wie im nichtäquivarianten Fall gegeben (siehe Lemma 3.26). □

6 Schnittkohomologie von Schubertvarietäten als $\mathrm{H}_T^\bullet(G/B)$–Moduln

Seien wie seither $X = G/B$ und $Y = G/P^s$ Fahnenmannigfaltigkeiten (für eine einfache Spiegelung s) sowie $\pi = \pi_s\colon X \to Y$ die Projektion. Die Schnittkohomologie einer Schubertvarietät $\overline{X_w}$ ist als die Hyperkohomologie des Komplexes $\mathcal{IC}_T\overline{X_w}$ (siehe Abschnitt 3) in natürlicher Weise ein Modul über dem Kohomologiering $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$. Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß die auf diese Art erhaltenen $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$–Moduln alle unzerlegbar sind, und übertragen den Algorithmus zur rekursiven Berechnung der $\mathcal{IC}_T\overline{X_w}$ auf die Bestimmung dieser unzerlegbaren Moduln.

Satz 6.1. *Die $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ sind paarweise nichtisomorphe unzerlegbare $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$–Moduln, selbst wenn man ihre Graduierung vergißt.*

Beweis folgt später.

Satz 6.2. *Sei $\mathcal{F}$ ein Komplex aus $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)$, dessen Träger schon ganz in einer der Schubertvarietäten enthalten ist. Dann gilt*

$$\mathbb{H}_T^\bullet(\pi^*\pi_*\mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \otimes_{\mathrm{H}_T^\bullet(Y)} \mathrm{H}_T^\bullet(X)$$

als graduierte $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$-Moduln.

Beweis. Sei $\widetilde{X}$ eine Schubertvarietät, die den Träger von $\mathcal{F}$ enthält und $\widetilde{Y}$ ihr Bild unter π. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, nehmen wir an, daß $\pi^{-1}(\widetilde{Y}) = \widetilde{X}$ gilt. Aufgrund von Lemma 4.3 reicht es nun, den Satz zu beweisen, wenn wir X und Y durch $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ ersetzen und $\mathcal{F}$ durch die Restriktion auf $\widetilde{X}$, die wir jedoch weiterhin einfach mit $\mathcal{F}$ bezeichnen, ebenso wie wir π jetzt als Abbildung $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ auffassen.

Weil π eine $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$-Faserung ist, gilt $\pi^! = \pi^*[2]$ und $\pi_! = \pi_*$, und nach Satz 3.23 ist $\pi_*\underline{\widetilde{X}} = \underline{\widetilde{Y}} \oplus \underline{\widetilde{Y}}[-2]$.

Die $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})$–Modulstruktur der linke Seite von $\mathrm{Ext}^\bullet(\underline{\widetilde{Y}}, \pi_*\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^\bullet(\underline{\widetilde{X}}, \mathcal{F})$ überträgt sich via $\pi^*\colon \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y}) \to \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})$ auf die rechte Seite. In diesem Sinne gilt also

$$\mathbb{H}_T^\bullet(\pi_*\mathcal{F}) \cong \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \quad \text{als } \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})\text{–Rechtsmodul.}$$

Ganz analog haben wir für $\mathcal{G}$ aus $\mathcal{D}_T^b(\widetilde{Y})$ eine $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})$–Modulstruktur auf der linken Seite von $\mathrm{Ext}^\bullet(\underline{\widetilde{X}}, \pi^!\mathcal{G}[-1]) = \mathrm{Ext}^\bullet(\pi_*\underline{\widetilde{X}}[1], \mathcal{G}) = \mathrm{Ext}^\bullet(\underline{\widetilde{Y}}[1] \oplus \underline{\widetilde{Y}}[-1], \mathcal{G})$, die via $\pi_*\colon \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X}) \to \mathrm{Ext}^\bullet(\pi_*\underline{\widetilde{X}}, \pi_*\underline{\widetilde{X}})$ auch die rechte Seite zu einem $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})$–Modul macht. Damit gilt

$$\mathbb{H}_T^\bullet(\pi^*\mathcal{G}[1]) \cong \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G}[1]) \oplus \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G}[-1]) \quad \text{als } \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})\text{–Rechtsmodul.}$$

Speziell für $\mathcal{G} = \underline{\widetilde{Y}}$ gilt $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})[1] \cong \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})[1] \oplus \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})[-1]$, und die natürliche $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})$–Rechtsmodulstruktur der linken Seite wird via π_* zu einer ebensolchen der rechten Seite, während umgekehrt die natürliche $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})$–Linksmodulstruktur der rechten Seite via π^* eine $\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})$–Linksmodulstruktur auf der linken Seite liefert. Zusammen haben wir wie behauptet

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_T^\bullet(\pi^*\pi_*\mathcal{F}[1]) &= \mathbb{H}_T^\bullet(\pi_*\mathcal{F}[1]) \oplus \mathbb{H}_T^\bullet(\pi_*\mathcal{F}[-1]) \\ &= \mathbb{H}_T^\bullet(\pi_*\mathcal{F}) \otimes_{\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})} \big(\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})[1] \oplus \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})[-1]\big) \\ &= \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \otimes_{\pi^*\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{Y})} \mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})[1]\,.\end{aligned}$$

□

Mit diesen beiden Sätzen schreibt sich das Ergebnis aus Korollar 5.9 so:

Satz 6.3. *Sei $w = xs > x$. Dann zerfällt $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) \otimes_{\mathrm{H}_T^\bullet(Y)} \mathrm{H}_T^\bullet(X)$ in eine direkte Summe von unzerlegbaren $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$–Moduln. $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ tritt dabei genau einmal als unzerlegbarer Summand auf und sonst nur Summanden isomorph zu Moduln $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})$ mit $y < w$.*

Wir leiten Satz 6.1 aus dem folgenden Resultat her.

Satz 6.4. *Der Hyperkohomologiefunktor liefert einen Isomorphismus graduierter Vektorräume*

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)}\big(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}, \mathcal{IC}_T\overline{X_y}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})\big)\,.$$

Bemerkung. Da es in der abelschen Kategorie ${}^p\mathcal{S}h_T(X)$ keine Erweiterungen im negativen Grad gibt, folgt $\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})\big) = 0$ für $k < 0$.

Beweis von Satz 6.1. Objekte in $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)$ bzw. in $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$-$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$ sind genau dann unzerlegbar, wenn ihr Endomorphismenring in der jeweiligen Kategorie keine nichttrivialen idempotenten Elemente enthält. Da nach dem Satz aber $\mathrm{End}_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w}))$ isomorph zu $\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)}(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ ist, folgt aus der Unzerlegbarkeit von $\mathcal{IC}_T\overline{X_w}$ auch die von $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$.

Um zu beweisen, daß $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ auch ohne die Graduierung noch unzerlegbar ist, genügt es, das entsprechende Problem für die nichtäquivariante Schnittkohomologie zu behandeln. Da $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ ein freier S–Modul ist, würde eine nichttriviale direkte Zerlegung nämlich auch eine solche von $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{IC}\overline{X_w}) = S/(S^+) \otimes_S \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ liefern, wobei S^+ das Ideal der Elemente von positivem Grad in S ist (vgl. Bemerkung 3.22).

Den nichtäquivarianten Fall behandelt man nun folgendermaßen: Der graduierte Ring $\mathrm{End}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet(X)}(\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{IC}\overline{X_w}))$ ist endlichdimensional über $\mathbb{C}$ und enthält keine Elemente von negativem Grad. Alle homogenen Elemente von positivem Grad sind also nilpotent, und folglich können keine Idempotenten vorkommen, die nicht schon in $\mathrm{End}^0_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}(\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{IC}\overline{X_w}))$ liegen. Dort gibt es aber wie oben gesehen nur 0 und id.

Für $x \neq y$ und $k \in \mathbb{Z}$ sind $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x})$ und $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})[k]$ nichtisomorph, denn o. E. gilt $k \leq 0$, und dann ist $\mathrm{Hom}^k_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})\big) = \mathrm{Ext}^k\big(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}, \mathcal{IC}_T\overline{X_y}\big) = 0$ (vgl. die Bemerkung oben). □

Zumindest für den endlichdimensionalen Fall ($\mathfrak{g}$ halbeinfach) ist der Satz 6.4 das Hauptresultat aus der Arbeit [Gi] (siehe auch [So4]). Wir passen Ginzburgs Beweis an den Kac–Moody–Fall an, und betrachten dazu ganz allgemein folgende Situation:

1. T operiert auf einem topologischen Raum $\widetilde{X}$ mit einer Filtrierung

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = \widetilde{X} \tag{6.1}$$

durch kompakte Mengen K_j, und die Strata $U_j = K_j \setminus K_{j-1}$ sind T–invariante affine Zellen.

2. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind Objekte aus $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(\widetilde{X})$. Die Kohomologiegarben von $\mathsf{ver}\,\mathcal{A}$ und $\mathsf{ver}\,\mathbb{D}\,\mathcal{B}$ sind konstant auf den U_j und verschwinden außerdem in allen ungeraden Dimensionen.

3. Für jeden Punkt $v \in \widetilde{X}$ ist die Restriktionsabbildung $\mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{A}) \to \mathrm{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{A})_v$ auf den Kohomologiehalm surjektiv, ebenso $\mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathbb{D}\,\mathcal{B}) \to \mathrm{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathbb{D}\,\mathcal{B})_v$.

Satz 6.5. *Unter den oben genannten Voraussetzungen liefert die Hyperkohomologie einen graduierten Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(\widetilde{X})}(\mathbb{H}_T^\bullet\,\mathcal{A}, \mathbb{H}_T^\bullet\,\mathcal{B}).$$

Daraus folgt tatsächlich auch Satz 6.4, denn nach Korollar 4.4 können wir darin die Fahnenmannigfaltigkeit X durch eine Schubertvarietät $\widetilde{X}$ ersetzen, die $\overline{X_x}$ und $\overline{X_y}$ beide enthält. Eine Filtrierung (6.1) erhält man dann aus der Bruhatzerlegung: Die U_j sind dadurch gegeben, daß wir die Elemente der Weylgruppe W und damit die Zellen $X_w \subset \widetilde{X}$ in einer mit der Bruhatordnung verträglichen Weise totalordnen.

Die Voraussetzung 2. ist für die Schnittkohomologiekomplexe der Schubertvarietäten eventuell erst nach einer Verschiebung im Grad erfüllt (siehe Satz 5.6), aber das genügt ja, um den Satz 6.4 zu erhalten. Die Gültigkeit von Voraussetzung 3. für Schnittkohomologiekomplexe $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt sich aus Lemma 3.16 zusammen mit Lemma 2.13.

Beweis von Satz 6.5. Sei i_j die Inklusion von K_j in X. Wir zeigen

$$\mathbb{H}_T^\bullet\colon\ \mathrm{Ext}^\bullet(i_j^*\mathcal{A}, i_j^!\mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(i_j^*\mathcal{A}), \mathbb{H}_T^\bullet(i_j^!\mathcal{B})\big) \tag{6.2}$$

für $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ per Induktion. Zunächst ist (6.2) trivial erfüllt, falls $j = 0$. (Beide Seiten enthalten dann nur ein Element!)

Wir fixieren nun ein $j \geq 1$ und lassen fortan die Indizes von U_j und K_j weg. Mit u und v bezeichnen wir die Inklusionen von U bzw. $K_{j-1} = K \setminus U$ in K:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ K \setminus U \arrow[ur, hook, "i_{j-1}"] \arrow[r, hook, "v"'] & K \arrow[u, hook, "i_j"'] & U \arrow[l, hook', "u"] \end{tikzcd}$$

Außerdem kürzen wir $i_j^*\mathcal{A}$ durch $\mathcal{F}$ und $i_j^!\mathcal{B}$ durch $\mathcal{G}$ ab. Es gilt $i_{j-1} = i_j \circ v$, und daraus folgt $v^*\mathcal{F} = i_{j-1}^*\mathcal{A}$ sowie $v^!\mathcal{G} = i_{j-1}^!\mathcal{B}$. Damit läßt sich die Induktionsvoraussetzung so schreiben:

$$\mathbb{H}_T^\bullet\colon\ \mathrm{Ext}^\bullet(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G})\big)$$

Weiter stellen wir fest, daß die entsprechende Behauptung, die sich ergibt, wenn wir statt auf $K \setminus U$ auf die affine Zelle U einschränken, ebenfalls gilt, d. h.

$$\mathbb{H}_T^\bullet \colon \operatorname{Ext}^\bullet(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(u^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(u^!\mathcal{G})\big)\ .$$

Dies folgt daraus, daß nach Voraussetzung 2. sowohl $u^*\mathcal{F}$ als auch $u^!\mathcal{G}$ in $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(U, \{U\})$ liegen und $\mathbb{H}_T^\bullet$ eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(U, \{U\}) \to \mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(pt)$ liefert.

Im Rest dieses Abschnitts werden wir ein kommutatives Diagramm

(6.3)
$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^\bullet(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathbb{H}_T^\bullet"', "\wr"] & \operatorname{Ext}^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\mathbb{H}_T^\bullet"'] & \operatorname{Ext}^\bullet(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G}) \arrow[d, "\mathbb{H}_T^\bullet"', "\wr"] \\
\operatorname{Hom}^\bullet\big(\mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G})\big) \arrow[r, hook] & \operatorname{Hom}^\bullet\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) \arrow[r] & \operatorname{Hom}^\bullet\big(\mathbb{H}_T^\bullet(u^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(u^!\mathcal{G})\big)
\end{tikzcd}$$

konstruieren, aus dem sich dann die Behauptung (mit dem Fünferlemma) ergibt. □

Die obere Zeile des Diagramms läßt sich recht einfach erhalten: Im ausgezeichneten Dreieck

$$v_!v^!\mathcal{G} \to \mathcal{G} \to u_*u^*\mathcal{G} \to^{[1]}$$

können wir u^* durch $u^!$ und $v_!$ durch v_* ersetzen, weil u eine offene Einbettung und v eigentlich ist. Das führt zur langen exakten Hyperkohomologiesequenz

(6.4)
$$\ldots \to \mathbb{H}_T^k(v^!\mathcal{G}) \to \mathbb{H}_T^k(\mathcal{G}) \to \mathbb{H}_T^k(u^!\mathcal{G}) \to \ldots \quad .$$

Die lange exakte Sequenz, die man mit dem Funktor $\operatorname{Ext}^\bullet(\mathcal{F}, \cdot) = \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot))$ aus obigem Dreieck bekommt, sieht aufgrund der Adjungiertheit von (v^*, v_*) bzw. (u^*, u_*), folgendermaßen aus:

(6.5)
$$\ldots \to \operatorname{Ext}^k(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) \to \operatorname{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \operatorname{Ext}^k(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G}) \to \ldots \quad .$$

Schließlich erhalten wir noch mittels Verdierdualität aus (6.4) die Sequenz

(6.6)
$$\ldots \leftarrow \mathbb{H}_{T,c}^k(v^*\mathcal{F}) \leftarrow \mathbb{H}_{T,c}^k(\mathcal{F}) \leftarrow \mathbb{H}_{T,c}^k(u^*\mathcal{F}) \leftarrow \ldots \quad .$$

Bemerkung. In Wahrheit sind (6.4) und (6.5) Spezialfälle voneinander: Ersetzt man in (6.5) $\mathcal{F}$ durch $\underline{K}$, so erhält man (6.4), und umgekehrt ist (6.5) nichts anderes als (6.4) mit $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ statt $\mathcal{G}$.

Untersuchen wir die Abbildungen in der Sequenz (6.5) etwas genauer: Ein Element f aus $\operatorname{Ext}^k(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) = \operatorname{Ext}^k(\mathcal{F}, v_!v^!\mathcal{G})$ ist ein Morphismus $v^*\mathcal{F} \xrightarrow{f} v^!\mathcal{G}[k]$ in $\mathcal{D}_T^b(K \setminus U)$, bzw. gleichwertig ein Morphismus $\mathcal{F} \to v_*v^*\mathcal{F} \xrightarrow{v_*f} v_!v^!\mathcal{G}[k]$ in $\mathcal{D}_T^b(K)$. Sein Bild $\hat{f}$ in $\operatorname{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ wurde oben definiert als die Verkettung

$$\mathcal{F} \to v_*v^*\mathcal{F} \xrightarrow{v_*f} v_!v^!\mathcal{G}[k] \to \mathcal{G}[k]\ .$$

Ein Element g aus $\operatorname{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, als Morphismus $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}[k]$ in $\mathcal{D}_T^b(K)$ aufgefaßt, wird auf die Verkettung $\mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}[k] \to u_*u^*\mathcal{G}[k]$ abgebildet. Unter der Adjunktion entspricht das dem

Morphismus $u^*\mathcal{F} \xrightarrow{u^*g} u^*\mathcal{G}[k] \to u^*u_*u^*\mathcal{G}[k] \to u^*\mathcal{G}[k]$ in $\mathrm{Ext}^k(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G})$ oder, weil die letzten beiden Pfeile darin die Identität ergeben, kürzer

$$u^*\mathcal{F} \xrightarrow{u^*g} u^*\mathcal{G}[k] \ .$$

Genauso lassen sich die entsprechenden Abbildungen aus (6.4) und (6.6) beschreiben.

Lemma 6.6. *In den Sequenzen* (6.4) *bis* (6.6) *sind die Terme mit ungeradem k alle Null. Insbesondere zerfallen sie in lauter kurze exakte Sequenzen*

$$\mathbb{H}_T^k(v^!\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathbb{H}_T^k(\mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}_T^k(u^!\mathcal{G}) \ ,$$

$$\mathrm{Ext}^k(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^k(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G})$$

und

$$\mathbb{H}_{T,c}^k(v^*\mathcal{F}) \twoheadleftarrow \mathbb{H}_{T,c}^k(\mathcal{F}) \hookleftarrow \mathbb{H}_{T,c}^k(u^*\mathcal{F}) \ .$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für die Ext–Sequenz; der Rest geht analog. Aufgrund der Voraussetzungen an $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind die Objekte $\mathsf{ver}(u^*\mathcal{F})$ und $\mathsf{ver}(u^!\mathcal{G})$ direkte Summen von konstanten Garben mit einer geradzahligen Verschiebung in der Dimension. Folglich gilt dasselbe auch für $\mathsf{ver}\,\mathcal{H}om(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G}) = \mathcal{H}om\big(\mathsf{ver}(u^*\mathcal{F}), \mathsf{ver}(u^!\mathcal{G})\big)$.

Daraus folgt $\mathbb{H}^k\big(\mathsf{ver}\,\mathcal{H}om(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G})\big) = 0$, falls k ungerade ist, und mit der Spektralsequenz der Hyperkohomologie schließlich $\mathrm{Ext}^k(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G}) = \mathbb{H}_T^k\big(\mathcal{H}om(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G})\big) = 0$ (siehe Lemma 3.21).

Da $u = \mathrm{id}$ für $j = 1$ und $v^*\mathcal{F} = i_{j-1}^*\mathcal{A}$ sowie $v^!\mathcal{G} = i_{j-1}^!\mathcal{B}$ für alle j gilt, ergeben sich die Behauptungen $\mathrm{Ext}^k(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G}) = 0$ und $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ dann durch Induktion nach j. ☐

Bemerkung. In der langen exakten Sequenz (6.4) können wir $\mathcal{G}$ natürlich durch $\mathcal{F}$ ersetzen. Da U eine affine Zelle ist und $\mathsf{ver}\,\mathcal{F}$ auf ihr konstant ist, gilt $\mathrm{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F})_v = \mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,u^!\mathcal{F})$ für $v \in U$. Nach der Voraussetzung an $\mathcal{A}$ ist dann $\mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet(\mathsf{ver}\,u^!\mathcal{F})$ und damit auch $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}_T^\bullet(u^!\mathcal{F})$ eine Surjektion.

Nun können wir damit beginnen, die untere Zeile des Diagramms (6.3) zu konstruieren. Der linke Pfeil

$$\text{(6.7)} \qquad \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G})\big) \hookrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) \to \dots$$

schickt ein $\phi \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G})\big)$ einfach auf die Komposition

$$\text{(6.8)} \qquad \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G}) \quad ,$$

wobei $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F})$ und $\mathbb{H}_T^\bullet(v^!\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})$ die Morphismen aus Lemma 6.6 sind. (Da K und $K \setminus U$ kompakt sind, können wir $\mathbb{H}_{T,c}^\bullet(\mathcal{F})$ durch $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$ ersetzen und $\mathbb{H}_{T,c}^\bullet(v^*\mathcal{F})$ durch $\mathbb{H}_T^\bullet(v^*\mathcal{F})$.)

Lemma 6.7. *Das linke Quadrat im Diagramm* (6.3) *kommutiert.*

Beweis. Sei $f \in \operatorname{Ext}^k(v^*\mathcal{F}, v^!\mathcal{G})$ und $\hat{f}$ sein Bild in $\operatorname{Ext}^k(\mathcal{F},\mathcal{G})$ wie oben. Wir zeigen, daß (6.8) für $\phi = \mathbb{H}_T^\bullet f$ dasselbe ist wie $\mathbb{H}_T^\bullet \hat{f}$. Dazu wenden wir diese beiden Abbildungen auf ein $\alpha \in \mathbb{H}_T^l(\mathcal{F})$ an, hier aufgefaßt als Morphismus $\underline{K} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}[l]$. Durch die erste Abbildung wird α via $v^*\alpha$ und $f \circ v^*\alpha$ auf

$$\underline{K} \longrightarrow v_*v^*\underline{K} \xrightarrow{v_*(f\circ v^*\alpha)} v_!v^!\mathcal{G}[k+l] \longrightarrow \mathcal{G}[k+l]$$

abgebildet. Unter $\mathbb{H}_T^\bullet \hat{f}$ ist das Bild von α einfach $\hat{f}\circ\alpha$. Die Behauptung folgt also aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\underline{K} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d] & \mathcal{G} \\
v_*v^*\underline{K} \arrow[r, "v_*v^*\alpha"] & v_*v^*\mathcal{F} \arrow[r, "v_*f"] & v_!v^!\mathcal{G} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

□

$\mathrm{H}_{T,c}^\bullet(U)$ ist als $\mathrm{H}_T^\bullet(pt)$–Modul frei vom Rang 1 (siehe Lemma 3.21). Sei $\kappa \in \mathrm{H}_{T,c}^d(U)$ (mit $d = \dim_{\mathbb{R}} U$) ein Erzeuger. Dieser operiert auf $\mathbb{H}_T^\bullet(u^!\mathcal{F})$ und mittels der durch den Morphismus $u_!u^! \to \mathrm{id}$ definierten „Ausdehnung durch 0“ $\mathrm{H}_{T,c}^\bullet(U) \to \mathrm{H}_{T,c}^\bullet(K)$ auch auf $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$.

Lemma 6.8. *Multiplikation mit* κ *liefert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\smile\kappa"'] & \mathbb{H}_T^\bullet(u^!\mathcal{F}) \arrow[d, "\smile\kappa"', "\wr"] \\
\mathbb{H}_{T,c}^{\bullet+d}(\mathcal{F}) & \mathbb{H}_{T,c}^{\bullet+d}(u^*\mathcal{F}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

(Die horizontalen Abbildungen darin sind die aus Lemma 6.6 bzw. der anschließenden Bemerkung.)

Beweis. Wir können uns beim Beweis auf den nichtäquivarianten Fall beschränken und κ als Erzeuger von $\mathrm{H}_c^d(U)$ ansehen. Da die Hyperkohomologie von $\mathcal{F}$ bzw. $u^*\mathcal{F}$ in ungeraden Dimensionen verschwindet, folgt die äquivariante Aussage dann mit Lemma 3.21.

Auf der Ebene der Garben entspricht die Behauptung nun dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
p_*\mathcal{F}\otimes p_!\underline{K} \arrow[d, "\wr"] & p_*\mathcal{F}\otimes(pu)_!\underline{U} \arrow[l, dotted] \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (pu)_*u^*\mathcal{F}\otimes(pu)_!\underline{U} \arrow[d, "\wr"] \\
p_!p^*p_*\mathcal{F} \arrow[ddd] & (pu)_!(pu)^*p_*\mathcal{F} \arrow[l, dotted] \arrow[r] \arrow[d] & (pu)_!(pu)^*(pu)_*u^*\mathcal{F} \arrow[d] \arrow[ddd, bend left, "\wr"] \\
 & (pu)_!u^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr, equal] & (pu)_!u^*u_*u^*\mathcal{F} \arrow[dd] \\
 & & \\
p_!\mathcal{F} \arrow[r, equal, dotted] & p_!\mathcal{F} & (pu)_!u^*\mathcal{F} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Darin bezeichnet p wieder mal die konstante Abbildung $K \twoheadrightarrow pt$, und die Morphismen von der ersten zur zweiten Zeile sind diejenigen aus (3.2). Alle übrigen Pfeile sind Adjunktionsmorphismen. Mit den Standardidentitäten für solche Morphismen prüft man leicht, daß die verschiedenen Kästchen im Diagramm kommutieren. Der gebogene Pfeil ist ein Isomorphismus, weil U zusammenziehbar ist und $u^*\mathcal{F}$ konstante Kohomologie hat.

Wenden wir auf das ganze Diagramm $\mathrm{H}^\bullet$ an, dann beschreibt die rechte Spalte gerade das cup–Produkt $\mathbb{H}^\bullet(u^!\mathcal{F}) \otimes \mathrm{H}^\bullet_c(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^\bullet_c(u^*\mathcal{F})$, und die mittlere Spalte beschreibt, wie $\mathrm{H}^\bullet_c(U)$ auf $\mathbb{H}^\bullet(\mathcal{F})$ operiert. Die linke Spalte dient dazu, zu zeigen, daß diese Operation tatsächlich durch das cup–Produkt mit durch 0 auf K ausgedehnten Elementen von $\mathrm{H}^\bullet_c(U)$ gegeben ist. $\square$

Korollar 6.9. *Es gelten*

$$\mathrm{Kern}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{F})\Big) = \mathrm{Kern}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \xrightarrow{\smile\kappa} \mathbb{H}^\bullet_{T,c}(\mathcal{F})\Big), \tag{6.9}$$

$$\mathrm{Bild}\Big(\mathbb{H}^\bullet_{T,c}(u^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{T,c}(\mathcal{F})\Big) = \mathrm{Bild}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \xrightarrow{\smile\kappa} \mathbb{H}^\bullet_{T,c}(\mathcal{F})\Big) \tag{6.10}$$

sowie die selben Gleichungen mit $\mathcal{G}$ statt $\mathcal{F}$.

Beweis. Die Behauptungen für $\mathcal{F}$ lassen sich unmittelbar aus dem Diagramm im Lemma ablesen, und für $\mathcal{G}$ erhalten wir dasselbe Diagramm, wenn wir $\mathcal{F}$ durch $\mathbb{D}\,\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{A}$ durch $\mathbb{D}\,\mathcal{B}$) ersetzen und Verdierdualität verwenden. $\square$

Wir konstruieren jetzt den rechten Pfeil in der unteren Zeile von (6.3), d. h. die Abbildung

$$\ldots \hookrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(X)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G})\big) \to \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(X)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(u^*\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{G})\big)\ . \tag{6.11}$$

Nach (6.9) bildet $\psi \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(X)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G})\big)$ den Kern von $\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(u^*\mathcal{F})$ in den Kern von $\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{G})$ ab und induziert daher ein $\widehat{\psi} \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(X)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(u^*\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{G})\big)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \arrow[r, two heads, "u^*"] \arrow[d, "\psi"] & \mathbb{H}^\bullet_T(u^*\mathcal{F}) \arrow[d, dotted, "\widehat{\psi}"] \\
\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G}) \arrow[r, two heads, "u^*"] & \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

Dieses $\widehat{\psi}$ soll das Bild von ψ in (6.11) sein.

Lemma 6.10. *Das rechte Quadrat im Diagramm* (6.3) *kommutiert.*

Beweis. Sei $\psi = \mathbb{H}^\bullet_T\, g$ für ein $g \in \mathrm{Ext}^\bullet(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, und $\hat{g} = u^*g$ dessen Bild in $\mathrm{Ext}^\bullet(u^*\mathcal{F}, u^!\mathcal{G})$. Um das oben definierte $\widehat{\psi}$ auf ein $u^*\underline{K} \xrightarrow{\beta} u^*\mathcal{F}[k]$ aus $\mathbb{H}^k_T(u^*\mathcal{F})$ anzuwenden, wählen wir ein Urbild α in $\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F})$. Dieses wird durch ψ auf $g \circ \alpha$ und durch u^* schließlich auf $u^*g \circ u^*\alpha$ abgebildet. Da α so gewählt war, daß $u^*\alpha = \beta$ gilt, erhalten wir so tatsächlich $(\mathbb{H}^\bullet_T\, u^*g)\beta$. $\square$

Lemma 6.11. *Die untere Zeile von* (6.3) *ist exakt.*

Beweis. Nach Konstruktion ist klar, daß die Abbildung (6.7) injektiv ist, und ein beliebiger Morphismus $\psi \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(K)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G})\big)$ liegt genau dann im ihrem Bild, wenn er wie in (6.8) über einen Morphismus $\phi \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}^\bullet_T(K\setminus U)}\big(\mathbb{H}^\bullet_T(v^*\mathcal{F}), \mathbb{H}^\bullet_T(v^!\mathcal{G})\big)$ faktorisiert, also genau dann, wenn die beiden Bedingungen

$$\text{(6.12)} \qquad \mathrm{Bild}(\psi) \subseteq \mathrm{Bild}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(v^!\mathcal{G}) \hookrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G})\Big) = \mathrm{Kern}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(u^!\mathcal{G})\Big)$$

und

$$\text{(6.13)} \qquad \mathrm{Kern}(\psi) \supseteq \mathrm{Kern}\Big(\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{H}^\bullet_T(v^*\mathcal{F})\Big) = \mathrm{Bild}\Big(\mathbb{H}^\bullet_{T,c}(u^*\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{T,c}(\mathcal{F})\Big)$$

erfüllt sind. Die erste dieser Bedingungen ist aber notwendig und hinreichend dafür, daß ψ durch (6.11) auf Null abgebildet wird, und die zweite ist zu ihr äquivalent. Unter Verwendung von Korollar 6.9 sieht man nämlich, daß die beiden Bedingungen den Forderungen

$$\psi \circ (\cdot \smile \kappa) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (\cdot \smile \kappa) \circ \psi = 0$$

entsprechen, und ψ vertauscht mit der Multiplikation mit κ. $\square$

Damit ist der Beweis von Satz 6.5 komplett.

7 Schnittkohomologie von Schubertvarietäten als $\mathrm{H}^\bullet_T(pt)$–Bimoduln

Die Resultate der letzten beiden Abschnitte sollen nun dadurch konkretisiert werden, daß die Beschreibung des äquivarianten Kohomologierings der Fahnenmannigfaltigkeit aus Abschnitt 4 verwendet wird. Auf diese Weise wird es möglich, die Schnittkohomologie einer Schubertvarietät als graduierten Bimodul über $S = \mathrm{H}^\bullet_T(pt) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, dem äquivarianten Kohomologiering eines Punktes, zu betrachten. Wir werden sehen, daß die $\mathbb{H}^\bullet_T(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ auch in S–Mod–S noch unzerlegbar bleiben.

Seien $S^s \subset S$ die Invarianten unter der einfachen Spiegelung $s \in \Sigma$ und S^W die Invarianten unter der ganzen Weylgruppe.

Lemma 7.1. *Es gibt einen Homomorphismus graduierter Ringe $\Phi\colon S \otimes S \to \mathrm{H}^\bullet_T(X)$, der über $S \otimes_{S^W} S$ faktorisiert. Das Urbild von $\pi_s^*\mathrm{H}^\bullet_T(Y^s)$ unter Φ ist $S \otimes S^s$.*

Beweis. Wir definieren Φ durch

$$f \otimes g \mapsto \big(p_w\big)_{w\in W}$$

mit $p_w = f \cdot w(g)$, wobei $\mathrm{H}^\bullet_T(X)$ wie in Satz 4.7 als Unterring von $\prod_{w\in W} S$ aufgefaßt wird. Tatsächlich ist $(p_w)_{w\in W}$ in $\mathrm{H}^\bullet_T(X)$ enthalten, denn alle p_w haben denselben Grad und für jede positive reelle Wurzel α ist der zweite Faktor in

$$p_{s_\alpha w} - p_w = f \cdot \big(s_\alpha w(g) - w(g)\big)$$

durch α teilbar. Φ bildet $f \otimes 1 - 1 \otimes f$ auf Null ab, wenn $f \in S$ ein W–invariantes Polynom ist. Darum umfaßt der Kern von Φ den Kern der natürlichen Projektion $S \otimes S \twoheadrightarrow S \otimes_{S^W} S$.

Die Behauptung über das Urbild von $\pi_s^*\mathrm{H}^\bullet_T(Y^s)$ ist eine direkte Konsequenz von Korollar 4.8. □

Lemma 7.2. *Der Homomorphismus $S \otimes S \to \mathrm{H}^\bullet_T(X) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w})$ wird nach Tensorieren mit dem Quotientenkörper $Q = \operatorname{Quot} S$ zu einer Surjektion $Q \otimes S \twoheadrightarrow Q \otimes_S \mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w})$.*

Beweis. Die Teilbarkeitsbedingungen aus Satz 4.2, die beschreiben, wann ein Element aus $\bigoplus_{y\le w} S$ im Bild der Injektion $\mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w}) \hookrightarrow \bigoplus_{y\le w} S$ liegt, sind nach dem Lokalisieren trivial erfüllt, d. h. $Q \otimes_S \mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w}) \to Q \otimes_S (\bigoplus_{y\le w} S)$ ist eine Surjektion. Da $\mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w})$ außerdem als S–Modul frei ist, gilt $Q \otimes_S \mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w}) = \bigoplus_{y\le w} Q$.

Sei nun f ein Element von $\mathfrak{h}^* \subset S$ derart, daß die $x(f)$ mit $x \le w$ alle verschieden sind. Mit

$$\prod_{\substack{x\le w\\ x\ne y}} \big(x(f) \otimes 1 - 1 \otimes f\big)$$

können wir dann für jedes $y \le w$ ein Element von $S \otimes S$ angeben, dessen Bild unter dem Homomorphismus $Q \otimes S \to Q \otimes_S \mathrm{H}^\bullet_T(\overline{X_w}) = \bigoplus_{y\le w} Q$ genau in der y–Komponente ungleich 0 ist. □

Aufgrund von Lemma 7.1 können und werden wir die Schnittkohomologie (allgemein jeden $\mathrm{H}_T^\bullet(X)$–Modul) als Modul über $S \otimes S$ resp. als S–Bimodul betrachten. Die linke Kopie von S operiert dabei wie gewohnt und die Operation der rechten Kopie ist mit einem W–Twist versehen.

Lemma 7.3. *Der Endomorphismenring* $\mathrm{End}_{S\otimes S}(M)$ *eines unzerlegbaren, endlich erzeugten graduierten* S*–Bimoduls* M *ist lokal.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{End}_{S\otimes S}(M)$. Wir zeigen, daß entweder f oder $\mathrm{id} - f$ ein Automorphismus ist. Dazu betrachten wir die Untermoduln $K = \bigcup_j \mathrm{Kern}\, f^j$ und $B = \bigcap_j \mathrm{Bild}\, f^j$ von M. Die homogenen Komponenten M^ν von $M = \bigoplus_\nu M^\nu$ sind endlichdimensional über $\mathbb{C}$ und werden von f stabilisiert. Daher besitzt jedes M^ν (als $\mathbb{C}$–Vektorraum) eine Fittingzerlegung. Da diese offensichtlich die Form $M^\nu = (M^\nu \cap K) \oplus (M^\nu \cap B)$ hat, gilt $M = K \oplus B$.

Ist nun M unzerlegbar ist, so muß einer der beiden Fälle $K = M$ und $K = 0$ auftreten. Im ersten Fall ist f lokal nilpotent und damit $\mathrm{id}-f$ invertierbar (mit Inversem $\mathrm{id}+f+f^2+\dots$). Im zweiten Fall gilt $\mathrm{Kern}\, f \subseteq K = 0$ und $\mathrm{Bild}\, f \supseteq B = M$; dann ist f ein Automorphismus. □

Endlich erzeugte S–Bimoduln sind noethersch und fortgesetztes Zerlegen in direkte Summanden muß daher irgendwann abbrechen. Mit dem gerade bewiesenen Lemma zusammen folgt (wie in [AF, Kapitel 12]) die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Krull–Schmidt.

Satz 7.4. *Jeder endlich erzeugte graduierte* S*–Bimodul* M *ist die direkte Summe von endlich vielen unzerlegbaren* S*–Bimoduln. Die dabei auftretenden Summanden sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, ebenso ihre jeweilige Vielfachheit.*

Wir sind natürlich an ganz speziellen S–Bimoduln interessiert:

Satz 7.5. *Für jedes* $w \in W$ *ist die* T*–äquivariante Schnittkohomologie* $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ *der Schubertvarietät* $\overline{X_w}$ *ein unzerlegbarer graduierter Bimodul über* S*, selbst wenn man die Graduierung vergißt. Die auf diese Weise erhaltenen* S*–Bimoduln sind paarweise nichtisomorph.*

Beweis. Da sich die Unzerlegbarkeit eines Moduls $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ schon an seinem Endomorphismenring sehen läßt, ergeben sich die Behauptungen analog zu Satz 6.1 aus dem folgenden „Erweiterungssatz“. □

Satz 7.6. *Seien* $\mathcal{F}$ *und* $\mathcal{G}$ *Komplexe aus* $\mathcal{D}_T^{\mathrm{b}}(X)$ *mit kompaktem Träger, etwa zwei Schnittkohomologiekomplexe. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{S\otimes S}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(X)}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big)$$

als graduierte Vektorräume.

Beweis. Nach Korollar 2.9 sind die Träger von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ bereits in einer geeigneten Schubertvarietät $\overline{X_w}$ enthalten. Wir müssen also lediglich

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{S\otimes S}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})}\big(\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) \tag{7.1}$$

zeigen (siehe Korollar 4.4). Nach obigen Definitionen und Lemma 3.6 erhalten wir die Operation von $S \otimes S$ auf $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F})$ (bzw. $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})$) via $S \otimes S \to \mathrm{H}_T^\bullet(X) \to \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})$ aus derjenigen von $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})$.

Wir lokalisieren bezüglich der Teilmenge $\{f \otimes 1 \mid f \neq 0\}$ von $S \otimes S$ bzw. deren Bild in $\mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})$, d. h. wir wenden den Funktor $Q \otimes_S (\cdot)$ an.

$$\begin{tikzcd} S \otimes S \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w}) \arrow[d, hook] \\ Q \otimes S \arrow[r, two heads] & Q \otimes_S \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w}) \end{tikzcd}$$

Damit befinden wir uns in folgendem allgemeinen Szenario: R ein Ring, M und N zwei torsionsfreie R–Moduln und V eine multiplikative Teilmenge von R. Dann ist $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ stets isomorph zum Unterring von $\mathrm{Hom}_{R[V^{-1}]}(M[V^{-1}], N[V^{-1}])$ aller φ mit $\varphi(M) \subseteq N$.

In unserem Fall bedeutet das nun, daß es genügt, statt (7.1) die Identität

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{Q\otimes S}\big(Q \otimes_S \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), Q \otimes_S \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big) = \mathrm{Hom}^\bullet_{Q\otimes_S \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})}\big(Q \otimes_S \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{F}), Q \otimes_S \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{G})\big)$$

zu zeigen. Die folgt aber genau wie in Korollar 4.4 daraus, daß die Operation von $Q\otimes S$ auf den lokalisierten Moduln über die Operation von $Q \otimes_S \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})$ faktorisiert und der entsprechende Homomorphismus $Q \otimes S \to Q \otimes_S \mathrm{H}_T^\bullet(\overline{X_w})$ surjektiv ist, wie in Lemma 7.2 gezeigt wurde. □

Der folgende Satz beschreibt, wie sich die $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ als S–Bimoduln erhalten lassen, startend mit dem Modul $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_e}) = \mathbb{H}_T^\bullet(\underline{pt}) = S$, auf dem S von beiden Seiten ungetwistet operiert.

Satz 7.7. *Sei $w = xs > x$. Dann ist $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ der (nach Satz 7.4 eindeutig bestimmte) direkte Summand in $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) \otimes_{S^s} S[1]$, der zu keinem $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})$ mit $y < w$ isomorph ist.*

Beweis. Das Urbild von $\pi_s^*\mathrm{H}_T^\bullet(Y^s)$ unter dem Homomorphismus $S \otimes S \to \mathrm{H}_T^\bullet(X)$ ist gerade $S \otimes S^s$ (siehe Lemma 7.1). Das bedeutet, daß

$$\mathrm{H}_T^\bullet(X)[1] \otimes_{\mathrm{H}_T^\bullet(Y^s)} \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) = (S \otimes S)[1] \otimes_{(S\otimes S^s)} \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) = \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) \otimes_{S^s} S[1]$$

als $S \otimes S$–Moduln. Die Behauptung ist damit eine direkte Konsequenz aus Satz 6.3. □

Korollar 7.8. *Sei $s_1 \cdots s_l$ ein reduzierter Ausdruck für $w \in W$. Dann ist $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})$ der (eindeutig bestimmte) unzerlegbare direkte Summand in $S\otimes_{S^{s_1}} \cdots \otimes_{S^{s_l}} S[\ell(w)]$, der zu keinem $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})[k]$ mit $y < w$ und $k \in \mathbb{Z}$ isomorph ist.*

Beweis. Da $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_x}) \otimes_{S^s} S[1] = \mathbb{H}_T^\bullet(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}_T\overline{X_x}[1])$ für $xs < x$ in eine direkte Summe von $\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_y})$ mit $y \leq x$ zerfällt, folgt die Behauptung induktiv aus dem Satz. □

Wir erinnern daran, daß die zerfällende Grothendieckgruppe von S–$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$–$S$ durch $\cdot \otimes_S \cdot$ eine Ringstruktur erhält. Der folgende Satz sagt, daß $[S - \mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}} - S]_\oplus$ außerdem ein $\mathcal{H}$–Modul ist.

Satz 7.9. *Es gibt einen injektiven Ringhomomorphismus von der Heckealgebra $\mathcal{H}$ in den zerfällenden Grothendieckring von S–$\mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}}$–$S$, der definiert ist durch $v \mapsto \left[S[1]\right]_\oplus$ sowie $\underline{H}_s \mapsto \left[S \otimes_{S^s} S[1]\right]_\oplus$ für $s \in \Sigma$.*
Dem Kazhdan–Lusztig–Basiselement $\underline{H}_w$ entspricht dabei die Klasse des unzerlegbaren Moduls $\left[\mathbb{H}_T^\bullet(\overline{X_w})\right]_\oplus$.

Beweis. Wir gehen umgekehrt vor und definieren durch $\underline{H}_w \mapsto [\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w})]_\oplus$ zunächst einen Homomorphismus abelscher Gruppen $\mathcal{H} \to [S - \mathsf{Mod}^{\mathsf{gr}} - S]$. Dessen Injektivität folgt aus dem Satz von Krull–Schmidt.

Um nachzuweisen, daß dies tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist, zeigen wir noch, daß $\underline{H}_s^2$ auf $\left[(S \otimes_{S^s} S) \otimes_S (S \otimes_{S^s} S)\right]_\oplus$ und $\underline{H}_w \underline{H}_s$ auf $\left[\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w}) \otimes_S (S \otimes_{S^s} S)\right]_\oplus$ abgebildet wird, falls $s \in \Sigma$ und $w \in W$ mit $ws > w$. Es ist aber

$$\mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w}) \otimes_S (S \otimes_{S^s} S[1]) = \mathbb{H}_T^\bullet(\mathcal{IC}_T\overline{X_w}) \otimes_{S^s} S[1] = \mathbb{H}_T^\bullet(\pi^*\pi_*\mathcal{IC}_T\overline{X_w}[1]) \ ,$$

und daher folgt die Aussage aus Satz 5.7 (vgl. die Bemerkung im Anschluß an den Satz und Korollar 5.10). $\square$

Literatur

[AF] F. W. Anderson, K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules,* Springer 1992.

[Ar] A. Arabia. Cohomologie T-équivariante de la varieté de drapeaux d'un groupe de Kač-Moody, *Bull. Soc. math. France* **117**(1989), S. 129–165.

[BBD] A. A. Beilinson, J. N. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers, *Astérisque* **100**(1982).

[BL] J. N. Bernstein, V. Lunts. *Equivariant Sheaves and Functors,* Lecture Notes 1578, Springer 1994.

[Bo1] A. Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Annals of Math.* **57**(1953).

[Bo2] A. Borel et al. *Intersection Cohomology,* Birkhäuser 1984.

[Bo3] A. Borel. *Linear Algebraic Groups*, Springer 1991.

[Bou] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie 4-6,* Masson 1981.

[Br] M. Brion. Equivariant cohomology and equivariant intersection theory, in: *Representation Theories and Algebraic Geometry,* Hrsg. A. Broer, ASI Series C Bd. 514, Kluver 1998.

[CG] N. Chriss, V. Ginsburg. *Representation Theory and Complex Geometry,* Birkhäuser 1997.

[tD] T. tom Dieck. *Topologie,* de Gruyter 1991.

[Gi] V. Ginsburg. Perverse Sheaves and $\mathbb{C}^*$-actions, *Journal AMS* **4**(1991), S. 483–490.

[Go] R. Godement. *Topologie algébrique et theorie des faisceaux,* Paris, Hermann 1964.

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson. Equivariant cohomology, Koszul duality and the localization theorem, *Inventiones* **131**(1998), S. 25–83.

[GM] M. Goresky, R. MacPherson. Intersection Homology II, *Inventiones* **71**(1983), S. 77–129.

[Ha] R. Hartshorne. *Residues and Duality,* Lecture Notes 20, Springer 1966.

[Hs] W.Y. Hsiang. *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups,* Ergebnisse 85, Springer 1975.

[Hu1] J.E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups,* Cambridge studies in advanced mathematics 29, 1990.

[Hu2] J.E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups,* Springer 1981

[Iv] B. Iversen. *Cohomology of Sheaves,* Springer 1986.

[Ka1] V. Kac. Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras *Proc. of the MSRI conference on Infinite-dimensional groups* (1984), S. 167–216.

[Ka2] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras,* Cambridge University Press 1990.

[KP] V. Kac, D. Peterson. Regular Functions on Certain Infinite-dimensional Groups, in: *Arithmetic and Geometry II,* Hrsg. M. Artin, J. Tate, Birkhäuser 1983, S. 141–166.

[KS] M. Kashiwara, P. Shapira. *Sheaves on Manifolds,* Grundlehren 292, Springer 1994.

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Inventiones* **53**(1979), S. 191-213.

[Ke] G. R. Kempf. *Algebraic Varieties,* LMS lecture notes 172, Cambridge 1993.

[KK] B. Kostant, S. Kumar. The Nil Hecke Ring and Cohomology of G/P for a Kac–Moody Group G, *Advances in Math.* **62**(1986), S. 187–237.

[Sa] M. Saito. Introduction to mixed Hodge Modules, *Astérisque* **179**(1989), S. 145–162.

[Sl1] P. Slodowy. *Singularitäten, Kac-Moody Liealgebren, assoziierte Gruppen und Verallgemeinerungen*, Habilitationsschrift, Universität Bonn, 1984.

[Sl2] P. Slodowy. On the Geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras, *Canadian Math. Soc. Conference Proceedings* **6**(1986), S. 405–442.

[So1] W. Soergel. $\mathfrak{n}$–Cohomology of simple highest weight modules on walls and purity, *Inventiones* **98**(1989), S. 565–580.

[So2] W. Soergel. Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten der Weylgruppe, *Journal AMS* **3**(1990), S. 421–445.

[So3] W. Soergel. The Combinatorics of Harish–Chandra bimodules, *J. reine angew. Math.* **429**(1992), S. 49–74.

[So4] W. Soergel. Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln, *Representation Theory* **1**(1997), S. 37-68.

[Sp1] T. Springer. Quelques applications de la cohomologie d'intersection, exp. 589 in Séminaire Bourbaki 1981/82, *Astérisque* **92–93**(1982), S. 249–273.

[Sp2] T. Springer. A purity result for fixed point varieties in flag manifolds, *Journal of the Faculty of Sciences Univ. Tokyo, Sect. IA* **31**(1984), S. 271–282.

[Ve] J.L. Verdier. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, exp. 300 in Séminaire Bourbaki 1965/66, New York, W.A. Benjamin 1966.