Einbettung partieller Ebenen in projektive Ebenen

Dissertation
zur
Erlangung
des
Doktorgrades
der
Mathematischen Fakultät
der
Albert-Ludwigs-Universität
Freiburg im Breisgau

vorgelegt von

Herrn Dipl. Math. Stefan Zimmermann
aus
Schopfheim
am
20.07.1999

Dekan:	Prof. Dr. W. Soergel
Betreuer der Arbeit:	Prof. Dr. O.H. Kegel
Zweitreferent:	Prof. Dr. K. Strambach, Erlangen
Datum der Promotion:	24. November 1999

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort **5**
- 0.1 Einbettung in projektive Ebenen 5
- 0.2 Der „klassische“ Fall 8
- 0.3 Die Rolle des Dimensionsbegriffes 13
- 0.4 Von unendlichen zu endlichen Ebenen 20
- 0.5 Translationsebenen 22
- 0.6 Ausblicke 24
- 0.7 Danken 24

1 Ein Beispiel **25**
- 1.1 Formulierung des Problems 25
- 1.2 Die zugrundeliegenden Schiefkörper 26
- 1.3 Der Ansatz 29
- 1.4 Die Hilfsaussagen 31
- 1.5 Das Ergebnis 35

2 Modular abgeschlossene Räume **41**
- 2.1 Die Idee einer Einbettungsaussage 42
- 2.2 Eigenschaften 44
- 2.3 Endlichdimensionale Unterräume 50
- 2.4 Der endliche Fall 58

3 Von unendlichen zu endlichen Ebenen **65**
- 3.1 Ein Gegenbeispiel 65
- 3.2 Der Reduktionssatz 71

4 Translationsebenen **81**
- 4.1 Existenz regulärer Einbettungen 81
- 4.2 Eine neue Version des Satzes von Kalhoff 86

Kapitel 0

Vorwort

0.1 Einbettung in projektive Ebenen

Wenn bereits im Altertum Geometrie betrieben wurde, dann waren die Beweggründe zumeist praktischer Natur (Navigation, Geographie,...). Das zugrundeliegende Objekt der ersten ideellen Beschreibung war die „Ebene“. Die erste Abstraktionsleistung war wohl, die Objekte „Punkt“, „Gerade“ und „Ebene“ in einem axiomatischen Rahmen zu stellen. Das Ergebnis war der Begriff der (affinen) Ebene.

Jedoch werden durch den Begriff der Parallelität die Punkte und Geraden ungleich behandelt: zwar besitzen je zwei Punkte ihre Verbindungsgerade, aber zwei Geraden können einen Schnittpunkt haben - oder auch nicht (dann nannte man sie parallel).

Das Konzept der projektiven Ebene vereint die Anschauung einer (affinen) Ebene und die Symmentrie der Begriffe ausgezeichnet durch eine neutrale Notation der Begriffe „geht durch“ beziehungsweise des „liegt auf“ mit der Relation der „Inzidenz“.

Eine **projektive Ebene** ist ein Tripel (P, L, I), so daß P (*Punkte*) und L (*Geraden*) möglichst disjunkte Mengen sind und I eine Relation (*Inzidenzrelation*), also $I \subseteq P \times L$, und folgende Bedingungen erfüllt sind (statt $(p, g) \in I$ sagen wir p und g **inzidieren**):

1. Zu je zwei Punkten p, q gibt es genau eine Gerade g, so daß sowohl p und g als auch q und g inzidieren.

2. Zu je zwei Geraden g, h gibt es genau einen Punkt p, so daß sowohl p und g als auch p und h inzidieren.

3. Es gibt ein Viereck. Das heißt, es gibt vier Punkte $p_1, \ldots, p_4$ und vier

Geraden $g_1, \ldots, g_4$, so daß jeder Punkt p_i mit genau zwei Geraden g_j und umgekehrt jede Gerade g_i mit genau zwei Punkten p_j inzidiert.

Daß es neben den anschaulichen unendlichen Ebenen (mit unendlich vielen Punkten und Geraden) auch *endliche* gibt, ist wiederum eine Sache die man bei der Definition der projektiven Ebene wahrscheinlich nicht im Auge hatte. Die kleinste solche ist die Fanoebene mit sieben Punkten und ebensovielen Geraden. Für jede endliche projektive Ebene gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ (die *Ordnung* der projektiven Ebene), so daß jede Gerade mit genau n Punkten und jeder Punkt mit genau n Geraden inzidiert. Man hat dann n^2+n+1 Punkte und ebensoviele Geraden.

Mit der Zeit sind dann gerade die endlichen projektiven Ebenen in den Fokus der Mathematiker geraten, insbesondere wohl weil viele kombinatorische Probleme eine natürliche Formulierung in der Sprache der endlichen Inzidenzstrukturen haben.

Die Frage

„Läßt sich diese Inzidenzstruktur als Teil einer projektiven Ebene ansehen ? “

wurde so eine natürliche Konsequenz (durch die lange Geschichte der projektiven Ebenen war ja auch schon viel Material über sie vorhanden).

Ein natürlicher Kandidat für diese Einbettungen waren die partiellen Ebenen. Ein System (P, L, I) von Punkten P und Geraden L und einer Inzidenzrelation I heißt **partielle Ebene** genau dann, wenn die folgenden zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Zu je zwei Punkten p, q gibt es höchstens eine Gerade g, so daß sowohl p und g als auch q und g inzidieren.

2. Zu je zwei Geraden g, h gibt es höchstens einen Punkt p, so daß sowohl p und g als auch p und h inzidieren.

Die allgemeine Einbettungsfrage, wie wir sie oben formulierten, konnte Hall [18] durch die Konstruktion der freien Erweiterungen beantworten:

Satz 1 (Hall) *Jede partielle Ebene läßt sich in eine projektive Ebene einbetten.*

Zum Beispiel in diejenige projektive Ebene, die man durch den Prozeß der freien Erweiterung erhält. Diese Ebene hat aber die Eigenschaft, daß sie immer unendlich ist, wenn die Ausgangsstruktur nicht bereits selbst eine

(verallgemeinerte) projektive Ebene war. Der Prozeß der freien Erweiterung bricht nicht ab, und erst im Limes erhält man die projektive Ebene.

Also selbst bei endlichen partiellen Ebenen erhält man im allgemeinen nur eine unendliche projektive Ebene, die als Zielraum der Einbettung im Satz von Hall auftaucht. Die folgende Vermutung war schon in der Arbeit von Hall enthalten:

Vermutung 2 *Jede endliche partielle Ebene ist in eine endliche projektive Ebene einbettbar.*

Diese Vermutung ist die Triebfeder vieler Arbeiten in der Kombinatorik und war letztendlich auch das Leitmotiv für die vorliegende Dissertation. In dieser Allgemeinheit ist das Problem immer noch weit von einer Lösung entfernt. Viele Arbeiten in der Richtung charakterisieren Einbettbarkeit in Abhängigkeit von Parametern der partiellen Ebene. Zum Beispiel zeigt Metsch [35]:

Satz 3 *Sei $S = (P, L)$ ein linearer Raum der Ordnung n. Wenn die Ungleichungen $v \geq n^2 - \frac{n}{2} + 1$ und $n \geq 222$ gelten, dann ist S in eine projektive Ebene der Ordnung n einbettbar.*

(Ein **linearer Raum** ist eine partielle Ebene, in der je zwei Punkte stets eine mit ihnen gemeinsam inzidente Gerade besitzen. Man hat $v := P$ und die Ordnung n des linearen Raumes ist hier definiert als Lösung von $|L| = n^2 + n + 1$.)

Nun gibt es eine Klasse von projektiven Ebenen, die sich bei der Koordinatisierung besonders „gutartig“ verhalten: die desarguesschen projektiven Ebenen. Diese lassen sich durch einen Schiefkörper koordinatisieren und werden so den Methoden der linearen Algebra zugänglich.

Haben wir einen Vektorraum V, dann bezeichnet $\mathbf{PG}(V)$ den zugehörigen projektiven Raum. Abkürzend schreiben wir $\mathbf{PG}(n, K)$ für den $n-$ dimensionalen projektiven Raum über dem Schiefkörper K, der sich von dem $(n+1)-$ dimensionalen Links $K-$ Vektorraum $\mathbf{V}(n+1, K)$ ableiten läßt. Jedem Vektor $v \in V$ ordnen wir den Punkt $\mathbf{P}(v) \in \mathbf{PG}(V)$ zu.

Mit $\mathbf{PG}(n, K)^{(d)}$ wollen wir die Menge der $d-$ dimensionalen Unterräume von $\mathbf{PG}(n, K)$ bezeichnen. Damit haben wir mit $\mathbf{PG}(n, K)^{(0)}$ die Punkte, mit $\mathbf{PG}(n, K)^{(1)}$ die Geraden und mit $\mathbf{PG}(n, K)^{(2)}$ die Ebenen des projektiven Raumes. Damit sind also die desarguesschen projektiven Ebenen die „projektiven Räume“ $\mathbf{PG}(2, K)$ für einen Schiefkörper K.

Nun ist die Klasse derjenigen partiellen Ebenen, die in desarguessche projektive Ebenen einbettbar sind, offenbar klein (die Desarguesbedingung darf

nicht verletzt sein). Man kann daher erwarten, daß bei einer Einschränkung der Zielräume auf desarguessche Ebenen das Einbettungsproblem besser entschieden werden kann.

Das Problem ist das folgende:

Problem 1 *Gegeben eine partielle Ebene* $\Pi = (P, L, I)$. *Gesucht ist ein Schiefkörper* K *und eine Abbildung* ϕ

$$\phi : P \cup L \to \mathbf{PG}(2, K)^{(0)} \cup \mathbf{PG}(2, K)^{(1)}$$

so daß

$$\begin{aligned} \phi(P) &\subseteq \mathbf{PG}(2, K)^{(0)} \\ \phi(L) &\subseteq \mathbf{PG}(2, K)^{(1)} \end{aligned}$$

und

$$\forall p \in P, g \in L : \; p\, I\, g \Leftrightarrow \; \phi(p) \in \phi(g)$$

(wir sagen später: ϕ ist eine Isometrie von Π nach $\mathbf{PG}(2, K)$).

0.2 Der „klassische“ Fall

Eine Klasse von partiellen Ebenen, welche die Desargueskonfiguration sicherlich nicht verletzen, sind die „klassischen“ partiellen Ebenen. Damit meinen wir die Systeme von Punkten und Geraden eines projektiven oder affinen Raumes. Im 1. Kapitel beschäftigen wir uns mit einigen dieser partiellen Ebenen.

Betrachten wir einen projektiven oder affinen Raum und vergessen einen Teil der Struktur, die wir durch den Dimensionsbegriff erhalten, zum Beispiel betrachten wir einmal nur das System von Punkten und Geraden eines projektiven Raumes $\mathbf{PG}(3, k)$ für einen Schiefkörper k. Ist dieses System in eine projektive desarguessche Ebene einbettbar?

Problem 2 *Gibt es einen Körper* K *und Abbildungen*

$$\begin{aligned} \varphi_0 &: \mathbf{PG}(3, k)^{(0)} \to \mathbf{PG}(2, K)^{(0)} && \textit{(Punkte auf Punkte)} \\ \varphi_1 &: \mathbf{PG}(3, k)^{(1)} \to \mathbf{PG}(2, K)^{(1)} && \textit{(Geraden auf Geraden),} \end{aligned}$$

so daß die Inzidenz erhalten bleibt, also

$$\forall p \in \mathbf{PG}(3, k)^{(0)}, g \in \mathbf{PG}(3, k)^{(1)} : \; p \in g \Leftrightarrow \; \phi(p) \in \phi(g)$$

Dabei muß die Charakteristik von k nicht notwendig mit der von K übereinstimmen. Zum Beispiel sind folgende Phänomene bereits bekannt (vergleiche Rigby [42], sowie Ostrom und Sherk [37]):

1. Die affine Ebene $\mathbf{AG}\,(2,2)$ *(affine Fanoebene)* besteht aus vier Punkten, von denen keine drei kollinear sind („Viereck“), und ist somit - per Definition - in *jede* projektive Ebene einbettbar.

2. Die affine Ebene $\mathbf{AG}(2,3)$, die im Satz von Rigby ausgeschlossen ist, kann zum Beispiel in die projektive Ebene $\mathbf{PG}\,(2,4)$ eingebettet werden.

3. Die desarguessche projektive Ebene $\mathbf{PG}\,(2,K)$ (K ein Schiefkörper) enthält die affine Ebene $\mathbf{AG}\,(2,3)$ genau dann, wenn es ein Element $t \in K$ gibt, für das $t^2+t+1=0$ ist (vergleiche Kapitel 1 Satz 5).

Rigby klärte die Situation für affine und projektive Unterebenen von projektiven Ebenen (vergleiche Kapitel 1 Satz 1, Seite 26 und 2, Seite 26). Das Ergebnis ist - bis auf wenige Ausnahmen - daß affine oder projektive Unterebenen von desarguesschen Ebenen ebenfalls desarguessch sind und zwar von der selben Charakteristik.

In unserem Fall wollen wir uns nicht auf die Einbettung von linearen Räumen beschränken, sondern die Situation etwas allgemeiner als Einbettungsfrage *dimensionaler linearer Räume* betrachten.

Definition 4 *Ein* $n-$dimensionaler linearer Raum *($n-$ DLS)* $\Sigma = (\Sigma^{(i)}, i = 0,\ldots,n)$ *ist eine Menge von Punkten* $\Sigma^{(0)}$ *und* $n-1$ *- Familien* $\Sigma^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ *(die* $i-$ dimensionalen Unterräume*) von echten Teilmengen von* $\Sigma^{(0)}$*, sowie einem Unterraum* $\Sigma^{(n)} = \left\{\Sigma^{(0)}\right\}$ *(der volle Raum), so daß:*

1. *Für jeden* $i-$*dimensionalen Unterraum* U $(0 \leq i < n)$ *und jeden Punkt* $p \in \Sigma^{(0)} \backslash U$ *gibt es einen eindeutig bestimmten* $(i+1)-$ *dimensionalen Unterraum* V*, der sowohl* p *als auch* U *enthält. Wir bezeichnen ihn mit* $\langle p, U\rangle_{\Sigma}$ *.*

2. *Jeder* $j-$*dimensionale Unterraum* W*, der* p *und* U *(wie oben bei 1) enthält, enthält auch* $V = \langle p, U\rangle_{\Sigma}$

3. *Jeder* $i-$*dimensionale Unterraum* $(1 \leq i \leq n)$ *enthält mindestens einen* $(i-1)-$ *dimensionalen Unterraum als echte Teilmenge.*

Die trivialen Fälle schließen wir immer stillschweigend aus, so daß wir im folgenden immer $n \geq 2$ annehmen können.

Die linearen Räume sind dann gerade die $2-$ DLS. Für jeden $n-$DLS $\Sigma = \left(\Sigma^{(i)}, 0 \leq i < n\right)$ und $m < n$ ist die Struktur $\Sigma' = \left(\Sigma^{(i)}, 0 \leq i < m\right)$ ein $m-$ DLS, die $m-$ *Einschränkung* von Σ („$m-$ truncation"). Wir schreiben dann auch $m - \Sigma$ für die $m-$ Einschränkung des $n-$ DLS Σ. Insbesondere ist die $2-$ Einschränkung eines jeden DLS ein linearer Raum.

Haben wir einen $n-$ DLS Σ, so bezeichnen wir mit $\Sigma^{(d)}$ für ein $d < n$ stets die Menge der $d-$ dimensionalen Unterräume. Für einen Unterraum $U \subseteq \Sigma^{(0)}$ schreiben wir $\dim_\Sigma U = d$ genau dann, wenn $U \in \Sigma^{(d)}$ ist. Für eine Teilmenge $X \subseteq \Sigma^{(0)}$ ist $\langle X \rangle_\Sigma$ der kleinste Unterraum, der X enthält.

In Verallgemeinerung des Rigbyschen Satzes zeigen wir in Kapitel 1, Satz 3:

Satz 5 *Sei V ein Links k-Vektorraum der Dimension $\dim V \geq n+1$ (für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) und W ein $(n+1)-$ dimensionaler Links K-Vektorraum.*

1. *Es gebe eine n-DLS Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{PG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

   Dann gilt char(k) =char(K) und K muß ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.

2. *Es gebe eine n-DLS Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{AG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

   Dann gilt

   (a) *Falls $|k| \geq 4$ ist, dann muß char(k) =char(K) und K ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.*

   (b) *Falls $|k| \leq 3$, aber $n \geq 3$ ist, dann muß ebenfalls char(k) =char(K) und K ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.*

In dem klassischen Fall können wir bei unseren Betrachtungen also oBdA $\mathrm{char}(k) = \mathrm{char}(K)$ annehmen. Wir können K als Erweiterungsschiefkörper von k ansehen und Methoden der Algebra anwenden.

Nun können wir unser Problem 1 nochmals für dimensionale lineare Räume formulieren. Dabei sollen nicht nur Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden, sondern weiter auch bestimmte $d-$dimensionale Unterräume auf

ebensolche abgebildet werden. Sei Σ_1 ein $n-$DLS und Σ_2 ein $m-$DLS mit $n \geq m$. Wir nennen eine Abbildung

$$\phi : \bigcup_{i=0}^{m} \Sigma_1^{(i)} \to \bigcup_{i=0}^{m} \Sigma_2^{(i)}$$

mit

$$\phi : \left(\Sigma_1^{(i)}\right) \subseteq \Sigma_2^{(i)} \quad \forall i = 0, \ldots, m$$

eine *Isometrie* von Σ_1 nach Σ_2. Man überzeugt sich leicht, daß eine solche Abbildung stets injektiv ist auf den $d-$dimensionalen Unterräumen für $d = 0, \ldots, m-1$, dagegen (für $n > m$) sicher nicht injektiv auf $\Sigma_1^{(m)}$, da $\Sigma_1^{(m)}$ dann mehr als ein Element enthält, jedoch $\Sigma_2^{(m)} = \left\{\Sigma_2^{(0)}\right\}$ nur aus einem Element besteht.

Unser Problem lautet aber nun wie folgt:

Problem 3 *Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ und k ein Körper. Gibt es eine Isometrie des $m-$ DLS $m-\mathbf{PG}(n,k)$ in den $m-$ DLS $\mathbf{PG}(m,K)$ für einen Erweiterungsschiefkörper K von k (und wie muß dieser Erweiterungsschiefkörper aussehen)?*

Limbos (in [30]) veröffentlichte die folgende Antwort:

Satz 6

1. *Sei $n \geq 3$. $\mathbf{PG}(n,q)$ ist einbettbar in $\mathbf{PG}(n-1,q^r)$, dann und nur dann, wenn $r \geq 4$ ist.*
2. *Sei $n \geq 4$. $\mathbf{PG}(n,q)$ ist einbettbar in $\mathbf{PG}(2,q^s)$ mit $s := n^2 - 1$.*

Zu diesem Problem können wir in Kapitel 1 folgende Antwort anbieten (Satz 19, Seite 38):

Satz 7 *Sei k ein Schiefkörper und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq m < n$.*

1. *Für einen Erweiterungsschiefkörper K von k mit $[K:k] \geq m+2$ existiert eine Isometrie:*

$$\iota : m - \mathbf{PG}(n,k) \hookrightarrow m - \mathbf{PG}(\ m, K)$$

2. *Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $n > d \geq m$. Falls es eine Kette von Schiefkörpererweiterungen $k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \ldots \subseteq k_{n-d} = K$ gibt mit $[k_{i+1} : k_i] \geq m+2$, dann gibt es auch eine isometrische Einbettung $\iota : m - \mathbf{PG}(n,k) \hookrightarrow m - \mathbf{PG}(d,K)$*

(Man beachte, daß in der Tat keine Einschränkungen für die Mächtigkeit des Ausgangsschiefkörpers k bestehen.)

Die Idee, die dem Beweis zugrunde liegt, wollen wir für $n = 3$, $m = 2$ kurz erläutern. Ein wichtiges Konzept ist der Begriff des *Quotienten-DLS* oder *Residuums*. Nehmen wir einen $n-$ DLS Σ und einen $d-$ dimensionalen Unterraum U (mit $d + 2 < n$). Wir definieren den neuen dimensionalen linearen Raum Σ_U durch:

$$\Sigma_U^{(i)} := \left\{ W \in \Sigma^{(i+d+1)} \,|\, U \subseteq W \right\}$$

(Inzidenz wie gehabt.) Dann ist Σ_U ein $(n - d - 1) -$ dimensionaler linearer Raum, der *Quotientenraum* oder das *Residuum* von Σ nach U.

Wir betrachten - auf unser Problem zurückkommend - den dreidimensionalen Raum $\mathbf{PG}\,(3, K)$, in den *beide* linearen Räume $\mathbf{PG}(2, K)$ und $2 - \mathbf{PG}(3, k)$ einbettbar sind. Wir betrachten folgende Punkt- und Geradenmengen in $\mathbf{PG}\,(3, K)$:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{\mathbf{P}\,(x_0, x_1, x_2, x_3) \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in k\} \\ L_0 &= \text{Verbindungsgeraden zweier Punkte von } P_0 \end{aligned}$$

und haben damit offenbar einen linearen Raum $\Lambda_0 = (P_0, L_0) \cong 2-\mathbf{PG}\,(3, k)$ in $\mathbf{PG}\,(3, K)$ gefunden. Nun suchen wir einen Punkt $p \in \mathbf{PG}\,(3, K)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $q, r \in P_0$ mit $q \neq r$ gilt $\langle p, q\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \neq \langle p, r\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)}$
2. Für alle $g, h \in L_0$ mit $g \neq h$ gilt $\langle p, g\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \neq \langle p, h\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)}$

Dann können wir die Abbildung $\varphi : \Lambda_0 \longrightarrow \mathbf{PG}\,(3, K)_p$ (das Punktresiduum) definieren durch:

$$\begin{aligned} \varphi\,(q) &= \langle p, q\rangle \quad \forall q \in P_0 \\ \varphi\,(g) &= \langle p, g\rangle \quad \forall g \in L_0 \end{aligned}$$

und erhalten aufgrund der Wahl von p:

Proposition 8 *Die Abbildung φ ist eine Einbettung linearer Räume von Λ_0 in das Residuum $\mathbf{PG}\,(3, K)_p$.*

Denn die beiden oberen Bedingungen sorgen gerade für die Injektivität dieser Einbettung. Die formulierten Bedingungen 1 und 2 von oben ergeben aber folgende Bedingungen an die Koordinaten des Punktes $p = \mathbf{P}\,(p_0, p_1, p_2, p_3)$:

Für alle Elemente $x, y, z \in k^4$ (also $x = (x_i), y = (y_i)$ und $z = z_i$ mit $i = 0, \ldots, 3$) besitzt das LGS:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

keine Lösung (λ, μ, ν) in K.

Wie kann man $p_0, \ldots, p_3 \in K$ finden, so daß diese Bedingung erfüllt ist? Nehmen wir an, $(\lambda, \mu, \nu) \in K^3$ ist eine Lösung des oberen Gleichungssystem für $p_0, \ldots, p_3 \in K$. Betrachten wir K als $k-$ Vektorraum, dann gilt offenbar

$$p_i \in \langle \lambda, \mu, \nu \rangle_k \quad \text{für } i = 0, 1, 2, 3$$

und damit $\dim_k \langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle_k \leq 3$. Wählen wir also K so, daß $[K : k] \geq 4$ ist, dann erhalten wir auch Elemente $p_0, p_1, p_2, p_3 \in K$, so daß $\dim_k \langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle_k \geq 4$ gilt. Dann kann aber das Gleichungssystem (0.1) keine Lösung besitzen, der Punkt $p = \mathbf{P}(p_0, p_1, p_2, p_3)$ erfüllt die gewünschten Bedingungen.

Soweit die Idee des Satzes für den Fall $n = 3$, $m = 2$. Hier müssen wir also $[K : k] \geq 4 = m + 2$ wählen. Für die höherdimensionalen Fälle ist natürlich etwas mehr lineare Algebra vonnöten, um das Resultat zu erzielen, die Idee ist aber die selbe.

Bemerkung 9 *Man beachte die Tatsache, daß für endliche Körper k der Erweiterungskörper K (und damit die erhaltene projektive Ebene) ebenfalls endlich gewählt werden kann. Jeder endliche projektive Raum ist somit als partielle Ebene in eine endliche desarguessche projektive Ebene einbettbar.*

0.3 Die Rolle des Dimensionsbegriffes bei Einbettungsfragen

Der erhaltene Einbettungssatz sagt uns doch folgendes:

> Wenn eine partielle Ebene als solche in einen projektiven Raum einbettbar ist, dann ist sie auch in eine projektive desarguessche Ebene einbettbar. War der Raum endlich, kann auch die projektive Ebene endlich gewählt werden.

Wir wollen diese Aussage noch etwas weiter treiben und fragen einmal:

> Ist jede partielle Ebene, die in einen genügend großen (etwa im Sinne von „Anzahl der Punkte“) DLS einbettbar ist, selbst in eine desarguessche Ebene einbettbar ?

Daß dem nicht so sein kann, ist sofort klar, denn sonst wäre *jeder* DLS in eine desarguessche Ebene einbettbar. Wir bräuchten nur die freie DLS-Erweiterung durchführen und kämen so zu Räumen mit einer beliebig hohen Anzahl von Punkten, die unseren Ausgangsraum enthalten. Wir müssen das „genügend groß“ des Raumes und eventuell auch das „Wie“ des Enthaltenseins etwas einschränken, um wirklich zu Ergebnissen kommen zu können.

Betrachtet man die in der Literatur zu findenden Sätze, die Aussagen über Einbettbarkeit von dimensionalen linearen Räumen in projektive Räume machen, fällt auf, daß meistens das Ergebnis - einbettbar oder nicht - abhängt von der Gültigkeit gewisser Ungleichungen in den Parametern der Räume. Schöner wäre eine strukturelle Bedingung, die Einbettbarkeit erzwingt. Hier sind negative Ergebnisse bekannt (verbotene Untergeometrien und ähnliches), die Aussagen machen können, wann ein DLS sicher *nicht* in einen projektiven Raum einbettbar ist (zum Beispiel Vamos-DLS). Welche strukturellen Merkmale projektiver Räume könnten wir zu einer Einbettungstheorie heranziehen ?

Nun haben die projektiven Räume eine wichtige Eigenschaft, die sie von den anderen DLS abheben: Sie sind *modular*. Im endlichdimensionalen Fall (und nur dort) bedeutet dies:

Definition 10 *Ein $n-$ DLS Σ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$) heißt* ***modular****, wenn für je zwei Unterräume U, V gilt:*

$$\dim_\Sigma U + \dim_\Sigma V = \dim_\Sigma \langle U, V \rangle + \dim_\Sigma (U \cap V)$$

Umgekehrt ist jeder modulare DLS Σ direkte Summe von projektiven Räumen. Nehmen wir zum Beispiel einen endlichen zweidimensionalen modularen DLS, dann schneiden sich je zwei Geraden in einem Punkt. Wir haben also entweder eine projektive Ebene (falls es ein Viereck gibt), oder der DLS besteht aus einer Geraden g mit n Punkten und einem Punkt p, durch den n Geraden laufen, die p mit den Punkten von g verbinden (eine ausgeartete oder verallgemeinerte projektive Ebene).

Modulare DLS wollen wir deshalb verallgemeinerte projektive Räume nennen. Wenn eine partielle Ebene in einen verallgemeinerten projektiven Raum einbettbar ist und selbst nicht in eine direkte Summe zerlegt werden kann, dann ist sie in eine projektive Ebene einbettbar.

Wir wollen im weiteren etwas weniger als Modularität voraussetzen (denn die modularen dimensionalen linearen Räume haben wir in Kapitel 1 schon

betrachtet) und setzen einmal folgende Definition unseren weiteren Betrachtungen voraus (vergleiche Definition 30, Seite 47):

Definition 11 *Sei (U, V) ein Paar von Unterräumen des DLS Σ. Wir nennen das Paar (U', V') eine* ***modulare Erweiterung*** *des Paares (U, V), wenn*

(a) $U' \cap \langle U, V\rangle = U$ und $V' \cap \langle U, V\rangle = V$.

(b) (U', V') ist ein modulares Paar.

Offenbar haben alle modularen Paare (U, V) mit $U' = U$ und $V' = V$ eine modulare Erweiterung (U', V'). Wir brauchen aber noch die stärkere Bedingung (vergleiche Definition 30, Seite 47):

Definition 12 *Betrachten wir einen Unterraum $W \subseteq \Sigma$ und zwei Unterräume $U, V \subseteq W$. Wir sagen, das Paar (U, V) sei* ***über*** *W* ***hinaus modular erweiterbar****, wenn es eine modulare Erweiterung (U', V') des Paares (U, V) gibt, für das $U' \cap W = U$ und $V' \cap W = V$ ist.*

Das Paar (U', V') nennen wir in diesem Fall eine ***modulare Erweiterung von*** *(U, V)* ***über*** *W* ***hinaus****.*

Wieder sind in einem projektiven Raum alle Unterraumpaare (U, V), die in einem dritten Unterraum W liegen, über W hinaus modular erweiterbar (wieder mit $U' = U$ und $V' = V$). Ein projektiver Raum ist also in diesem Sinne **modular abgeschlossen**, erfüllt also gerade das, was wir in einer wichtigen Definition zu fassen versuchen:

Definition 13 *der DLS Σ sei* ***modular abgeschlossen****, wenn für jeden Unterraum $W \in \Sigma$ und jedes Paar (U, V) von Unterräumen von W eine modulare Erweiterung von (U', V') über W hinaus existiert.*

Leider überlegt man sich leicht, daß die endlichdimensionalen modular abgeschlossenen DLS gerade die (verallgemeinerten) projektiven Räume sind (jedes Paar (H, g) mit einer Hyperebene H und einer Geraden g schneiden sich). Wir haben also nichts gewonnen!

Betrachten wir aber, wie wir unsere Einbettungssätze (über die wir hier noch gar nicht verfügen) verwenden würden:

Von einem DLS Σ_0 aus startend würden wir einen Erweiterungs-DLS Σ_1 suchen, dessen Eigenschaften näher an denen eines einbettbaren DLS liegen als diejenigen von Σ_1. Dabei würde natürlich etwa die Anzahl der Punkte wachsen, aber auch eventuell die Dimension, so daß $\dim \Sigma_0 < \dim \Sigma_1$ sein könnte.

Führen wir dies fort - beschreiben also einen Algorithmus, der uns eine Einbettung liefern soll - so werden wir eventuell (analog zu der freien Erweiterung der partiellen Ebenen, wo wir im Limes unendlich viele Punkte erhalten) dimensionale lineare Räume beliebig hoher Dimension erhalten. Im Limes sind dies dann tatsächlich unendlich dimensionale lineare Räume.

So werden wir die oberen Überlegungen weiterführen, sind aber gezwungen, unsere Begriffe und Beweise auf „unendlich dimensionale“ lineare Räume auszudehnen (dabei müssen wir auch einige Einschränkungen in Kauf nehmen, die uns die Mengenlehre auferlegt).

Die Erweiterung des Begriffes des dimensionalen linearen Raumes soll in Analogie zu der Situation bei den Vektorräumen erfolgen (in Wahrheit werden die endlichdimensionalen Vektorräume als Einschränkung der Klasse der Vektorräume definiert). Technisch sieht das etwa wie folgt aus (zu den Details vergleiche man das 6. Kapiel (von Delandtsheers) des Handbuchs [10]):

Ein **Raum mit Abschluß** (*closure space*) $\Delta = (P, C)$ ist eine Menge von Punkten P und eine Familie von Teilmengen C von P (abgeschlossene Mengen), so daß der Durchschnitt abgeschlossener Mengen stets wieder abgeschlossen ist. Der **Abschluß** (*closure*) oder **Span** einer Teilmenge $X \subseteq P$ wird mit $\langle X \rangle_\Delta$ bezeichnet und ist definiert als Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die X enthalten. Ein Raum mit Abschluß ist **einfach** (*simple*), wenn die leere Menge und die einelementigen Teilmengen von P abgeschlossen sind.

Ein **dimensionaler linearer Raum** auf P ist ein einfacher Raum mit Abschluß $\Delta = (P, C)$, der das **starke Austauschaxiom** erfüllt:

Definition 14 (starkes Austauschaxiom)
Sei $X \subseteq Y \subseteq P$ und $z \in \langle Y \rangle_\Delta \setminus \langle Y \setminus X \rangle_\Delta$, dann gibt es ein $x \in X$, so daß $x \in \langle z \cup (Y \setminus x) \rangle_\Delta$.

Die abgeschlossenen Mengen C nennen wir gemeinhin **Unterräume**.

Der Begriff des dimensionalen linearen Raumes (DLS nach ***d**imensional **l**inear **s**pace*), wie wir ihn oben eingeführt haben ($n-$ DLS), geht in diesem Schema offenbar voll auf. Für den unendlichen Fall ist der so definierte Begriff noch etwas zu weit gefaßt. Nimmt man zum Beispiel die Punkte P eines unendlichdimensionalen projektiven Raumes und definiert die Menge $C \subseteq \mathbf{Pot}\,(P)$ der abgeschlossenen Mengen als Vereinigung von $\{P\}$ und den *endlichdimensionalen* Unterräumen, dann wird $\Delta = (P, C)$ ebenfalls zu einem DLS, die unendlichdimensionalen Unterräume des Ursprungsraumes wären aber nicht abgeschlossen.

Die allgemeine Definition erzwingt noch nicht den endlichen Charakter der Unabhängigkeit. Eine Teilmenge X heißt **unabhängig** genau dann,

wenn für alle $x \in X$ stets $x \notin \langle X \rangle_\Delta$ gilt. In einem projektiven Raum ist eine Menge unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge unabhängig ist (man sagt, die Unabhängigkeit hat endlichen Charakter). Nehmen wir im oberen Beispiel (unendlich-dimensionaler projektiver Raum) eine Basis B, so ist diese nicht unabhängig, denn für jedes $x \in B$ ist $B \setminus x$ immer noch unendlich, also $\langle B \setminus x \rangle_\Delta = P$. Andererseits ist jede endliche Teilmenge von B natürlich unabhängig.

Wir definieren einen **finitären** DLS Σ als einen dimensionalen linearen Raum Σ, so daß es für jede Teilmenge $X \subseteq P$ und $x \in X$ eine *endliche* Teilmenge $Y \subseteq X$ gibt, so daß $x \in \langle Y \rangle_\Sigma$ ist. Dies ist äquivalent dazu, daß eine Teilmenge von X von Σ genau dann unabhängig ist, wenn dies auf jede *endliche* Teilmenge zutrifft.

Die Klasse der finitären DLS soll diejenige sein, die unseren weiteren Überlegungen zugrunde liegt.

Eine dimensionsfreie Definition des modularen Paares lautet wie folgt (vergleiche Definition 24, Seite 44):

Definition 15 *Sei Σ ein finitärer DLS, U und V zwei Unterräume von Σ. Wir nennen (U, V) ein* ***modulares Paar*** *genau dann, wenn:*

$$X = \langle X, U \rangle \cap V \quad \forall X \in [U \cap V, V]$$

Dabei bezeichnet $[U, V]$ das Intervall der Unterräume, die zwischen U und V liegen.

Die Begriffe der modularen Erweiterung über einen Unterraum hinaus müssen wir nicht anpassen, wohl aber noch den der modularen Abgeschlossenheit:

Definition 16 *Sei Σ ein finitärer DLS*

1. *Zu der Kardinalzahl κ definieren wir*

$$\Sigma^{(<\kappa)} := \{U \text{ Unterraum von } \Sigma \mid \dim U < \kappa\}$$

   mit anderen Worten die Menge aller Unterräume, die weniger als $\kappa-$dimensional sind. (Zum Beispiel ist $\Sigma^{(<\aleph_0)}$ die Menge der endlichdimensionalen Unterräume von Σ.)

2. *Sei κ eine* reguläre *Kardinalzahl, dann sagen wir, der DLS Σ sei* ***$\kappa-$modular abgeschlossen****, wenn für jeden Unterraum $W \in \Sigma^{(<\kappa)}$ und jedes Paar (U, V) von Unterräumen von W eine modulare Erweiterung von (U', V') über W hinaus existiert, so daß*

$$h([U, U']) < \infty \text{ und } h([V, V']) < \infty$$

beziehungsweise äquivalent dazu

$$\dim U'_U < \infty \text{ und } \dim V'_V < \infty$$

Wir nennen den DLS Σ ***endlich modular abgeschlossen****, falls er $\aleph_0-$ modular abgeschlossen.*

Falls keine Mißverständnisse auftreten können, nennen wir Σ in einem der oberen Fälle auch einfach ***modular abgeschlossen***

Die Regularität der Kardinalzahl κ benötigen wir um Konstruktionen folgender Art durchführen zu können: Nehmen wir eine (wohlgeordnete) Indexmenge $(I, \prec)$ mit $|I| < \kappa$ und eine aufsteigende Folge von Unterräumen $(U_i)_{i\in I}$ mit $\dim_\Sigma U_i < \kappa$ für alle $i \in I$. Wir setzen $U := \bigcup_{i\in I} U_i$, dann soll auch $\dim_\Sigma U < \kappa$ gelten, und hier sind wir auf der sicheren Seite, wenn wir von κ die Regularität fordern.

Diese Begriffe reichen aus, um die Hauptresultate des 2. Kapitels zu formulieren (Satz 34 und Satz 43):

Satz 17 *Sei Σ ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum und $\mathcal{P}$ eine Teilmenge der Menge aller Unterraumpaare von W mit $|\mathcal{P}| < \kappa$. Dann gibt es einen Unterraum $Y \in \Sigma^{(<\kappa)}$, so daß die Einschränkung $\iota := \pi_Y|_W$ eine Einbettung $\iota : W \hookrightarrow \Sigma_Y$ induziert und für alle $(U, V) \in \mathcal{P}$ das Paar $(\iota(U), \iota(V))$ in $\iota(W)$ modular ist.*

Dazu die folgende Bemerkungen:

Bemerkung 18 *Galt bereits $|W| < \kappa$, dann ist $|\mathcal{P}| < \kappa$ für jede Teilmenge von Unterräumen erfüllt, also auch für die Menge $\mathcal{P}$ = alle Unterräume von W.*

Die modulare Abgeschlossenheit bleibt bei bestimmten Bedingungen unter Quotientenbildung erhalten. Dies ermöglicht uns dann Induktion mit dem oberen Resultat durchzuführen und ergibt den Satz (Kapitel 2 Satz 43):

Satz 19 *Sei Σ ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum. Falls die Kardinalität aller Elemente von $\Sigma^{(<\kappa)}$ kleiner als κ ist - also*

$$\forall X \in \Sigma^{(<\kappa)} \quad |X| < \kappa$$

gilt - dann ist W in einen modularen DLS $\widehat{W}$ einbettbar und $\dim \widehat{W} = \dim W$.

Mit anderen Worten: In einem $\kappa-$ modular abgeschlossenen DLS, in dem die Elemente in $\Sigma^{(<\kappa)}$ nicht zu groß sind ($\forall X \in \Sigma^{(<\kappa)} \quad |X| < \kappa$), ist jeder endlichdimensionale Unterraum in einen modularen DLS gleicher Dimension einbettbar.

Wir haben in der Tat immer starke Beschränkungen gebraucht, damit unsere Objekte nicht zu groß werden. Daß diese aber vernünftig sind, zeigt sich, wenn man den oberen Satz für $\kappa = \aleph_0$ nochmals formuliert:

Korollar 20 *Sei Σ ein endlich modular abgeschlossener DLS. Die endlichdimensionalen Unterräume von Σ seien endlich, dann sind sie in modulare DLS gleicher Dimension einbettbar.*

Will man nun noch Parameter bemühen, um die Räume beschränkt zu halten, dann erhält man folgende Variante der oberen Sätze (Proposition 46):

Proposition 21 *Sei Σ ein finitärer DLS, dessen endlichdimensionale Unterräume alle endlich sind. Es gebe Konstanten $C_1, C_2, x > 0$ mit*

$$C_2 > C_1 \text{ und } x > \left(\frac{C_2 x - C_1}{C_1 x - C_2}\right)^2 \tag{0.2}$$

so daß für jeden endlichdimensionalen Unterraum U gilt:

$$C_1 x^{\dim_\Sigma U} \leq |U| \leq C_2 x^{\dim_\Sigma U} \tag{0.3}$$

Dann ist Σ endlich modular abgeschlossen und jeder endlichdimensionale Unterraum W ist in einen modularen DLS $\widehat{W}$ der selben Dimension einbettbar.

Diese Aussage legt nun folgendes Vorgehen bei einer gewünschten Einbettung nahe: Man startet mit einem $n-$ DLS Σ_0. Nun sucht man eine Erweiterung von Σ_0 (nennen wir sie $\Sigma_1 \supseteq \Sigma_0$, $\Sigma_1 \neq \Sigma_0$), so daß in dem von Σ_0 aufgespannten Unterraum von Σ_1 nur die Punkte von Σ_0 liegen. Damit gilt automatisch $\dim \Sigma_1 > \dim \Sigma_0$. Wir nehmen an, alle Unterräume von Σ_0 erfüllen die Bedingungen 0.2 und 0.3 für geeignete Konstanten. Liegen in $\Sigma_1 \backslash \Sigma_0$ nicht zu viele und nicht zu wenige Punkte, dann erfüllt auch Σ_1 diese Bedingungen. Nun iteriert man das Vorgehen. Im Limes ist $\Sigma := \bigcup \Sigma_i$ ein finitärer DLS („Abschluß“ auf natürliche Weise definiert), und er erfüllt die Bedingungen der Proposition. Mithin ist Σ_0 in einen modularen DLS einbettbar.

Man kann hierin also einen Ansatz für einen Algorithmus zur Einbettung von $n-$ dimensionalen linearen Räumen sehen. Allerdings besitzt dieses Vorgehen einen gewichtigen Nachteil (zumindest wenn man es aus der Sicht der

endlichen Kombinatorik sehen möchte): Selbst wenn in den drei erwähnten Sätzen eine Einbettung eines $n-$ DLS W in einen modularen DLS $\widehat{W}$ mit $\dim W = \dim \widehat{W}$ garantiert wird, so ist leider noch nichts über die Kardinalität von $\widehat{W}$ gesagt. Im allgemeinen wird $\widehat{W}$ - auch wenn W endlich ist - unendlich viele Punkte enthalten!

Kombiniert man diese Sätze mit denen von Kapitel 1, dann bekommt man, daß für einen endlichen DLS W, der die Voraussetzungen einer der Propositionen erfüllt, die Einschränkung $2 - W$ in eine (eventuell unendliche) desarguessche Ebene einbettbar ist. Kann man dann auf eine Einbettung in eine *endliche* projektive Ebene schließen (und damit auch auf die Einbettbarkeit in einen *endlichen* modularen DLS $\widehat{W}$)? Im 3. Kapitel wollen wir darauf eingehen.

0.4 Von unendlichen zu endlichen Ebenen

Wir haben die Frage nach der Endlichkeit des modularen DLS $\widehat{W}$, den wir als Folge der Sätze 34 und 43 beziehungsweise der Proposition 46 erhalten, gestellt. Zu Beginn von Kapitel 3 zeigen wir, daß es in der Tat Fälle gibt, in denen diese Sätze zwar greifen, aber die modularen Räume, die wir erhalten, nicht endlich sind. Genauer zeigen wir das Folgende:

Proposition 22 *Es gibt einen finitären DLS Σ, der die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Die endlichdimensionalen Unterräume von Σ sind endlich.*
2. *Σ ist endlich modular abgeschlossen.*
3. *Eine Unterebene $E = U_0$ von Σ ist nicht in eine endliche projektive desarguessche Ebene $\widehat{E}$ einbettbar.*
4. *Es gibt einen Unterraum $U_1 \supseteq U_0$ mit folgender Eigenschaft: Kein endlichdimensionaler Unterraum W von Σ, der den Unterraum U_1 enthält, ist in einen* endlichen *modularen DLS $\widehat{W}$ einbettbar.*

Wir konstruieren so einen DLS Σ ausgehend von einer verletzten Pappus-Konfiguration. In der Tat gilt ja folgendes: Da jeder endliche Körper kommutativ ist, ist jede endliche desarguessche Ebene durch einen kommutativen Körper koordinatisierbar. Da projektive Ebenen über kommutativen Ebenen stets pappussch sind, müssen alle endlichen desarguesschen Ebenen ebenfalls pappussch sein.

(Nicht so unendliche desarguessche Ebenen. Sind sie durch einen *echten* Schiefkörper koordinatisiert, dann sind sie auch nicht pappussch.) Die Pappusbedingung läßt sich als Schließungssatz analog zum desarguesschen Satz formulieren. Eine verletzte Pappusbedingung in einem DLS W sorgt dafür, daß $2 - W$ nicht in eine endliche projektive Ebene einbettbar ist.

Wir müssen also die Kommutativität des Schiefkörpers K voraussetzen, wenn wir untersuchen wollen, ob eine endliche Teilmenge von $\mathbf{PG}\,(2, K)$ auch in eine endliche projektive Ebene einbettbar ist. Wir können dann aber zeigen (Kapitel 3 Satz 57):

Satz 23 *Sei* Π *eine* endliche *partielle Ebene, die in eine projektive Ebene* $\boldsymbol{PG}(2, K)$ *über einem* nichtendlichen, (kommutativen) *Körper* K *einbettbar ist. Dann kann man* Π *auch in eine projektive Ebene* $\boldsymbol{PG}(2, F)$ *über einem* endlichen *Körper* F *einbetten.*

Die Beweisidee ist die Folgende:

Man betrachtet die Koordinaten $\mathcal{M}$ der endlichen Teilmenge der Punkte von $\mathbf{PG}\,(2, K)$, die durch die partielle Ebene Π gegeben sind. Sei k der Primkörper von K. Nun betrachten wir den Unterring $R := k\,[\mathcal{M}] \subseteq K$. Wir können dann zeigen, daß das **Jakobsonradikal** $Jac\,(R) = 0$ ist. Damit liegt *kein* Element von R in *allen* maximalen Idealen von R, ja weitergehend kann man sogar zeigen, daß es dann zu jeder endlichen Menge (insbesondere auch zu $\mathcal{M}$) ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gibt, so daß je zwei Elemente von $\mathcal{M}$ zu verschiedenen Restklassen modulo $\mathfrak{m}$ gehören. Mit anderen Worten: Die Projektion $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}$ induziert auf $\mathcal{M}$ eine Injektion. Nun ist $F := R/\mathfrak{m}$ ein Körper und wir haben $\mathcal{M}$ in diesen Körper eingebettet. Diese Einbettung gibt uns eine Einbettung der partiellen Ebene in die projektive Ebene $\mathbf{PG}\,(2, F)$

Da F als $k-$ Algebra endlich erzeugt war und - wie man noch extra zeigen sollte - F/k algebraisch ist, gilt $[F : k] < \infty$. Falls k endlich war - falls also K positive Charakteristik besaß - sind wir fertig, denn dann ist - nach oben gesagtem - auch F endlich.

Falls $char\,(K) = 0$, also $k = \mathbb{Q}$, ist, müssen wir uns noch etwas anstrengen. In diesem Fall ist F eine endliche algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ also ein algebraischer Zahlkörper. Wir können unsere partielle Ebene, von der wir gestartet sind, somit in eine projektive desarguessche Ebene über einem algebraischen Zahlkörper einbetten. Wieder betrachten wir die endlich vielen Punkte der Einbettung von Π und nennen ihre Koordinaten $\mathcal{M}$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathcal{M}$ im **Ring der ganzen Zahlen** von F (nämlich $\mathcal{O}_F$) liegt. Auch für den Ring können wir $Jac\,(\mathcal{O}_F) = 0$ nachweisen. Nehmen wir ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ wie oben,

so daß je zwei Elemente von $\mathcal{M}$ inkongruent modulo $\mathfrak{m}$ sind, dann erhalten wir eine Einbettung $\mathcal{M} \hookrightarrow F' := F/\mathfrak{m}$.

Aber die maximalen Ideale im Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers haben endlichen Index! Somit ist der Körper F' endlich und wir können Π in die projektive Ebene $\mathbf{PG}\,(2, F')$ für den endlichen Körper F' einbetten.

Die technischen Einzelheiten finden sich in zweiten Abschnitt des 3. Kapitels.

0.5 Translationsebenen

Im letzten Abschnitt (Kapitel 4) wollen wir einen Ausblick auf die Einbettung in Translationsebenen wagen. Diese große Klasse von Ebenen hat zwar eine schwächere Struktur als die desarguesschen, aber diese ist immer noch streng genug, um eine schöne Theorie zu ermöglichen (man vergleiche das Buch von Lüneburg [32]). Kalhoff gelang es kürzlich zu zeigen (man vergleiche [21]):

Satz 24 (Kalhoff) *Jede endliche partielle Ebene kann in eine abzählbare Translationsebene von beliebiger Charakteristik und Lenzklasse mindestens V eingebettet werden.*

Jede Translationsebene wird koordinatisiert durch einen **Quasikörper** Q (vergleiche [32]). In einem solchen gibt es zwei Verknüpfungen „+“ und „$\circ$“. Es muß - neben ein paar anderen Axiomen - das **Linksdistributivgesetz** gelten:

$$(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c \quad \forall a, b, c \in Q$$

nicht aber das Rechtsdistributivgesetz. Die Translationsebenen von Lenzklasse V sind genau diejenigen Translationsebenen, in deren koordinatisierendem Quasikörper das rechtsdistributive Gesetz ebenfalls erfüllt ist. (Der Satz von Kalhoff läßt sich also umschreiben zu: Jede endliche partielle Ebene läßt sich in eine Translationsebene mit einem rechtsdistributiven Quasikörper einbetten.)

In dem Quasikörper Q sitzt stets ein Körper K (der **Kern** des Quasikörpers) und Q ist ein Vektorraum über K. Allerdings hat der Satz von Kalhoff in dieser Version einen Nachteil: Der Koordinatenquasikörper ist *unendlichdimensional* über dem Kern (wir werden später sehen warum es wünschenswert wäre, daß Q endlichdimensional über K ist).

Wir wollen eine etwas andere Version dieses Satzes zeigen, müssen dabei allerdings auf die Aussage über die Lenzklasse der erhaltenen Translationsebene verzichten:

Satz 25 *Jede endliche partielle Ebene kann in eine Translationsebene über einem lokalendlichen abzählbaren Körper K beliebiger Charakteristik eingebettet werden, so daß der sie koordinatisierende Quasikörper endlichdimensional über K ist.*

Zum Beweis benützt man die Einbettungssätze aus Kapitel 1 und die Darstellung von Translationsebenen in projektiven Räumen. Man bettet die endliche partielle Ebene als System von Punkten $P \subseteq \mathbf{PG}(n,k)^{(0)}$ und $d-$dimensionalen Unterräumen $L \subseteq \mathbf{PG}(n,k)^{(d)}$ in einen projektiven Raum $\mathbf{PG}(n,k)$ (für passende $d, n \in \mathbb{N}$ und einen Teilkörper k von K) ein. Jetzt bettet man das ganze - mit den Methoden von Kapitel 1 - in einen Raum $PG(n',K)$ ein ($n' \leq n$), so daß $n' = 2d$ ist (wir nennen diese Einbettung später eine *reguläre* Einbettung). Die Bilder seien $P' \subseteq \mathbf{PG}(n,K)^{(0)}$ und $L' \subseteq \mathbf{PG}(n,K)^{(d)}$. Nun nimmt man eine Hyperebene $H \subseteq \mathbf{PG}(n',K)$, so daß je zwei Unterräume $g_1, g_2 \in L'$ und H insgesamt leeren Schnitt haben ($g_1 \cap g_2 \cap H = \emptyset$). Damit definieren die Unterräume $H \cap g$ für $g \in L'$ ein *partielles Spread* von H. Zum Schluß muß man noch zeigen, daß so ein partielles Spread - zumindest in unserem Fall - zu einem vollen Spread erweiterbar ist. Mit der algebraischen Darstellung der Translationsebenen (auf Bruck und Bose zurückgehend, vgl. [7]) hat man dann das Ergebnis.

Hier ist die Unendlichkeit des Körpers essentiell, denn für einen *endlichen* Körper K kann man ein partielles Spread eines Raumes $\mathbf{PG}(m,K)$ leider nicht unbedingt zu einem Spread erweitern.

Daß man mit einer Kombination der beiden Versionen des Kalhoffschen Satzes einem allgemeinen Einbettungssatz recht nahe kommt, soll noch folgende Proposition zeigen:

Proposition 26 *Sei Π eine partielle Ebene. Diese lasse sich in eine Translationsebene θ einbetten, die durch den Quasikörper Q über dem Kern K koordinatisiert wird. Es gelte:*

1. *θ besitzt Lenzklasse mindestens V (i.e. Q ist distributiv).*
2. *Q ist endlichdimensional über K.*
3. *K ist lokalendlich.*

Dann läßt sich Π in eine endliche Translationsebene einbetten.

Es genügt offenbar zu zeigen, daß der koordinatisierende Quasikörper Q lokal endlich ist; also für jede endliche Teilmenge $M \subseteq Q$ gibt es einen *endlichen* Teil-Quasikörper Q_M mit $M \subseteq Q_M \subseteq Q$.

0.6 Ausblicke

Natürlich konnte man nicht erwarten, das allgemeine Problem der Einbettbarkeit endlicher partieller Ebenen in endliche projektive Ebenen zu lösen. Doch gerade mit dem zuletzt beschriebenen Ansatz kommt man einer Lösung scheinbar recht nahe.

Zu erwähnen ist dabei, daß K im Satz 25 nicht zwingend lokalendlich sein muß. Für den Beweis benötigt man lediglich einen Körper, der über genügend Teilkörper verfügt. Ein solcher Körper kann auch $\mathbb{C}$ sein! Dann kann man versuchen, analog zu dem Vorgehen in Kapitel 3 etwas kommutative Algebra ins Spiel zu bringen um die Reduktion zu erreichen.

Denkbar ist auch in die Betrachtung noch topologische Aspekte einzubringen. Hilfreich dürfte da die Theorie der topologischen projektiven Ebenen sein. Auf diesem Wege kann man vielleicht noch bessere Aussagen erzielen.

Diese Ansätze konnte im Rahmen dieser Arbeit leider nicht weiter verfolgt werden.

0.7 Danken

möchte ich Herrn Prof.Dr. O.H. Kegel vom MI Freiburg für die unermüdliche Unterstützung dieses Arbeitsvorhabens, ferner der Universität Freiburg für die Förderung dieses Vorhabens im Rahmen des LGFG und selbstverständlich meiner Frau, die es immer wieder geschafft hat, mich in schwierigen Phasen zur Arbeit zu motivieren.

Kapitel 1

Ein Beispiel

1.1 Formulierung des Problems

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Einbettung „klassischer“ linearer Räume (partieller Ebenen) in eine projektive desarguessche Ebene beschäftigen.

„Klassisch“ sollen hier die Geometrien $\mathbf{PG}(V)$ beziehungsweise $\mathbf{AG}(V)$ für einen Vektorraum V sein (noch wollen wir Endlichkeit nicht voraussetzen).

Problem 4 *Gegeben ein Links $k-$ Vektorraum V (mit $\dim V \geq 4$) und der zugehörigen linearen Raum $\Lambda = 2-\mathbf{PG}(V)$. Unter welchen Voraussetzungen an V läßt er sich in eine desarguessche Ebene einbetten, wann also existiert ein dreidimensionaler Links $K-$ Vektorraum E und eine Isometrie ι ?*

$$\iota : \quad 2 - \mathbf{PG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(E)$$

Dabei sollen die zwei Schiefkörper K und k nicht notwendig die gleiche Charakteristik besitzen.

Und dasselbe mit $\mathbf{AG}(V)$. Unter welchen Bedingungen läßt sich $2 - \mathbf{AG}(V)$ in eine projektive desarguesche Ebene einbetten? Wann also existieren E und ι analog zum nicht affinen Fall ?

$$\iota : \quad 2 - \mathbf{AG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(E)$$

Problem 5 *Unter welchen zusätzlichen Bedingungen kann man bei endlichem $\mathbf{PG}(V)$ bzw. $\mathbf{AG}(V)$ den dreidimensionalen Raum E (also den zugrunde liegenden Schiefkörper) endlich wählen?*

Wir wollen die Probleme hier etwas allgemeiner formulieren (es ist hier ja nicht einzusehen, warum der Vektorraum E dreidimensional sein soll).

Problem 6 *Gegeben ein Vektorraum V (mit $\dim V \geq n+1$) und der zugehörigen DLS $\Lambda = n - \mathbf{PG}(V)$. Unter welchen Voraussetzungen an V läßt sich Λ in einen „klassischen" n-DLS einbetten, wann also existiert ein $n+1$-dimensionaler Vektorraum W und eine Isometrie ι ?*

$$\iota : \quad n - \mathbf{PG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

Und dasselbe mit $\mathbf{AG}(V)$: Wann existiert eine Isometrie

$$\iota : \quad n - \mathbf{AG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

für einen $n+1$-dimensionalen Raum W ?

Im folgenden betrachten wir das allgemeinere Problem 6.

1.2 Die zugrundeliegenden Schiefkörper

Bisher haben wir nichts über die den Vektorräumen zugrundeliegenden Schiefkörper ausgesagt. Nehmen wir also an, V sei ein Links k-Vektorraum und W ein $n+1$-dimensionaler Links K-Vektorraum mit zwei Schiefkörpern k und K. Offenbar ist die Voraussetzung (mit $\dim V \geq n+1$) sinnvoll.

Nun führt jede Einbettung $n - \mathbf{PG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$ zu Einbettungen aller in $\mathbf{PG}(V)$ enthaltenen Ebenen in den Raum $\mathbf{PG}(W)$. In diesem Zusammenhang ist ein Resultat von Rigby [42] nützlich:

Satz 1 (Rigby) *Sei Π eine projektive desarguessche Ebene, koordinatisiert durch den Schiefkörper K, die eine affine Unterebene Π_0 der Ordnung größer als 3 enthält. Dann gilt:*

1. *Π_0 ist desarguessch und hat die selbe Charakteristik wie Π.*
2. *Wenn Π endlich ist, dann ist die Ordnung von Π eine Potenz der Ordnung von Π_0.*

Zum Beweis dieses Satzes zeigt Rigby, daß die projektive Erweiterung von Π_0 (die zu Π_0 gehörende *projektive* Ebene) auch in Π einbettbar sein muß, und schließt dann weiter mit folgender einfacher Tatsache:

Proposition 2 *Sei Π eine projektive desarguessche Ebene, koordinatisiert durch den Schiefkörper K, die eine projektive Unterebene Π_0 enthält. Dann gilt:*

1. *Π_0 ist desarguessch und hat die selbe Charakteristik wie Π.*

2. *Sei k der Koordinatenschiefkörper von Π_0 , dann ist K ein Erweiterungsschiefkörper von k.*

3. *Wenn Π endlich ist, dann ist die Ordnung von Π eine Potenz der Ordnung von Π_0.*

Beweis vergleiche Rigby [42].

Kombiniert man diese beiden Aussagen, kann man viele Kombinationen von Schiefkörpern K und k in unserem Problem 6 von vorne herein ausschließen:

Satz 3 *Sei V ein Links k-Vektorraum der Dimension $\dim V \geq n+1$ (für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) und W ein $(n+1)-$ dimensionaler Links K-Vektorraum.*

1. *Es gebe eine n-DLS Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{PG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

Dann gilt $char(k) = char(K)$, und K muß ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.

2. *Es gebe eine n-DLS Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{AG}(V) \hookrightarrow \mathbf{PG}(W)$$

Dann gilt

(a) *Falls $|k| \geq 4$ ist, dann muß $char(k) = char(K)$ und K ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.*

(b) *Falls $|k| \leq 3$, aber $n \geq 3$ ist, dann muß ebenfalls $char(k) = char(K)$ und K ein Erweiterungsschiefkörper von k sein.*

Beweis *Zu 1:* Wir betrachten eine beliebige Ebene $E \in \mathbf{PG}(V)^{(2)}$. Dann liegt das Bild von E unter ι auch in einer Ebene von $\mathbf{PG}(W)$. Da aber E isomorph zu $\mathbf{PG}(2,k)$ und die Ebenen in $\mathbf{PG}(W)$ isomorph zu $\mathbf{PG}(2,K)$ sind, erhalten wir eine Einbettung ϕ :

$$\phi : \mathbf{PG}(2,k) \hookrightarrow \mathbf{PG}(2,K)$$

Und diese führt mit Proposition 2 zu der Behauptung.

Zu 2: In diesem Fall gibt uns ι eine Einbettung der affinen Ebenen, die in $\mathbf{AG}(V)$ enthalten sind, in Ebenen von $\mathbf{PG}(W)$. Wir nehmen eine dieser Einbettungen:

$$\varphi : \mathbf{AG}\,(2,k) \hookrightarrow \mathbf{PG}\,(2,K)$$

Falls $|k| \geq 4$ ist, das heißt im Falle (a), folgt also die Behauptung mit Satz 1. Falls $|k| \leq 3$ ist, müssen wir anders argumentieren. Hier gilt aber, daß das Residuum eines Punktes isomorph zu einem projektiven Raum ist. Präziser gehen wir vor wie folgt: Wir nehmen einen Punkt $p \in \mathbf{AG}\,(V)^{(0)}$ und den dazugehörenden eindimensionalen Unterraum U von V. Dann gilt aber offenbar für das Residuum:

$$\mathbf{AG}\,(V)_p \cong \mathbf{PG}\,(V/U)$$

Nun sei $p' = \iota(p) \in \mathbf{PG}\,(W)$ und $U' \subseteq W$ der zugehörige eindimensionale Unterraum, dann ist andererseits $\mathbf{PG}\,(W)_{p'} \cong \mathbf{PG}\,(W/U')$. Da aber ι eine Einbettung von $n-$ DLS mit $n \geq 3$ ist, ergibt sich, daß $\iota' : \mathbf{AG}\,(V)_p \hookrightarrow \mathbf{PG}\,(W)_{p'}$ eine Einbettung von $(n-1)-$ DLS ist (also mindestens eine Einbettung linearer Räume). Kombiniert man diese Tatsachen, erhält man eine Einbettung von $(n-1)-$ DLS mit $(n-1) \geq 2$:

$$\mathbf{PG}\,(V/U) \cong \mathbf{AG}\,(V)_p \hookrightarrow \mathbf{PG}\,(W)_{p'} \cong \mathbf{PG}\,(W/U')$$

Dabei ist V/U ein $k-$ und W/U' ein $K-$ Vektorraum. Die Behauptung folgt hier also mit Teil 1 des Satzes. ■

Bemerkung 4 *Daß die Aussage des Satzes von Rigby nicht trivial ist, zeigen folgende Beispiele:*

1. *Die affine Ebene* $\mathbf{AG}\,(2,2)$ (affine Fanoebene) *besteht aus vier Punkten, von denen keine drei kollinear sind („Viereck"), und ist somit - per Definition - in* jede *projektive Ebene einbettbar.*

2. *Die affine Ebene* $\mathbf{AG}(2,3)$, *die im Satz von Rigby ausgeschlossen ist, kann zum Beispiel in die projektive Ebene* $\mathbf{PG}\,(2,4)$ *eingebettet werden. Mit diesem Phänomen haben sich Ostrom und Sherk [37], sowie dann auch Rigby [42] auseinandergesetzt. Das Ergebnis lautet bei letztgenanntem:*

Satz 5 *Die desarguessche projektive Ebene* $\mathbf{PG}\,(2,K)$ *(K ein Schiefkörper) enthält die affine Ebene* $\mathbf{AG}\,(2,3)$ *genau dann, wenn es ein Element $t \in K$ gibt, für das $t^2 + t + 1 = 0$ ist. Das bedeutet, daß entweder*

1. *K hat Charakteristik 3 (dann tut es $t = 1$), oder*

2. *K enthält eine primitive dritte Wurzel der 1. Wenn K endlich ist, tritt dieser Fall genau dann ein, wenn* $|K| \equiv 1 \pmod 3$.

Wir wollen uns im weiteren auf das Problem der Einbettung projektiver Räume (bzw. deren Einschränkungen) in projektive Räume kleinerer Dimension beschränken. Dazu ist es offenbar notwendig, daß der „Zielraum“ dieselbe Charakteristik besitzt wie der „Ausgangsraum“ (Satz 3).

1.3 Der Ansatz

Wir besprechen einen Ansatz, der uns dann im folgenden auf das Resultat bringen wird. Dabei betrachten wir nicht das allgemeine Problem 6, sondern beschränken uns - in diesem Abschnitt - auf einen Spezialfall, der dem Problem 4 entspricht:

Problem 7 *Gegeben ein Schiefkörper k und der lineare Raum $2-\mathbf{PG}(3,k)$, also das System von Punkten und Geraden des dreidimensionalen projektiven Raumes über k. Gibt es einen Erweiterungsschiefkörper $K \supseteq k$ und eine Einbettung $2-\mathbf{PG}(3,k) \hookrightarrow \mathbf{PG}(2,K)$ in die projektive Ebene über K ?*

Dazu betrachten wir den dreidimensionalen Raum $\mathbf{PG}(3,K)$, in den *beide* lineare Räume $\mathbf{PG}(2,K)$ und $2-\mathbf{PG}(3,k)$ einbettbar sind. Wir betrachten folgende Punkt- und Geradenmenge in $\mathbf{PG}(3,K)$:

$$\begin{aligned} P_0 &= \{\mathbf{P}(x_0,x_1,x_2,x_3) \mid x_0,x_1,x_2,x_3 \in k\} \\ L_0 &= \text{Verbindungsgeraden zweier Punkte von } P_0 \end{aligned}$$

und haben damit offenbar einen linearen Raum $\Lambda_0 = (P_0, L_0) \cong 2-\mathbf{PG}(3,k)$ in $\mathbf{PG}(3,K)$ gefunden. Nun suchen wir einen Punkt $p \in \mathbf{PG}(3,K)^{(0)}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $q,r \in P_0$ mit $q \neq r$ gilt $\langle p,q\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \neq \langle p,r\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)}$
2. Für alle $g,h \in L_0$ mit $g \neq h$ gilt $\langle p,g\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \neq \langle p,h\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)}$

Dann können wir die Abbildung $\varphi : \Lambda_0 \longrightarrow \mathbf{PG}(3,K)_p$ definieren durch:

$$\begin{aligned} \varphi(q) &= \langle p,q\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \quad \forall q \in P_0 \\ \varphi(g) &= \langle p,g\rangle_{\mathbf{PG}(3,K)} \quad \forall g \in L_0 \end{aligned}$$

und erhalten aufgrund der Wahl von p:

Proposition 6 *Die Abbildung φ ist eine Einbettung linearer Räume von Λ_0 in das Residuum* $\mathbf{PG}(3,K)_p$.

Beweis Aus der Eigenschaft 1 folgt insbesondere, daß $p \notin \Lambda_0$ ist. Dann bildet φ aber tatsächlich die Elemente von P_0 auf die Geraden durch p und die Elemente von L_0 auf Ebenen durch p ab. Da bei φ das Enthaltensein von Unterräumen erhalten bleibt, ($q \in g \Rightarrow \varphi(q) \subseteq \varphi(g)$) ist φ in der Tat ein Homomorphismus linearer Räume. Die Bedingungen 1 und 2 sorgen dafür, daß φ tatsächlich injektiv ist, die Behauptung folgt. ■

Da $\Lambda_0 \cong 2-\mathbf{PG}(3,k)$ und $\mathbf{PG}(3,K)_p \cong \mathbf{PG}(2,K)$ führt uns φ zu einer Einbettung $2-\mathbf{PG}(3,k) \hookrightarrow \mathbf{PG}(2,K)$ wie gewünscht. Man muß sich nur noch überlegen, wann es so einen Punkt p mit den gewünschten Eigenschaften gibt. Wir werden später (Proposition 18) die Gültigkeit der folgenden Aussage sehen:

Proposition 7 *Es gibt so einen Punkt p mit den gewünschten Eigenschaften 1 und 2 genau dann, wenn für den Grad der Schiefkörpererweiterung $[K:k] \geq 4$ gilt.*

Dies ergibt den folgenden Satz:

Satz 8 *Der lineare Raum $2-\mathbf{PG}(3,k)$ ist in die projektive Ebene $\mathbf{PG}(2,K)$ einbettbar, wenn $[K:k] \geq 4$ ist.*

Dies ist ein Spezialfall (und dann auch nur eine Richtung) eines Satzes von Limbos [30].

Um einen Satz in der Art von Satz 8 zu beweisen, werden wir aber etwas rechnen müssen. Dafür ist es geeigneter, die Bedingungen für den Punkt p, den wir zur Definition von φ wählen mußten, mittels der linearen Algebra zu formulieren. Dann lautet das Problem: Wir betrachten den vierdimensionalen Vektorraum $V_K = \mathbf{V}(4,K)$. In diesem Vektorraum betrachten wir die Menge von Vektoren

$$\mathcal{M} := \{v \in V \mid v = (x_0, x_1, x_2, x_3) \text{ mit } x_i \in k \text{ für } i = 0,1,2,3\}$$

also gerade die Einbettung $V_k = \mathbf{V}(4,k) \hookrightarrow K \otimes_k V_K$. Nun suchen wir einen eindimensionalen Unterraum U von V_K, für den gilt:

1. Für alle $v, w \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\langle U, v\rangle_K = \langle U, w\rangle_K \Longleftrightarrow \langle v\rangle_k = \langle w\rangle_k$$

2. Für alle $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\langle U, v_1, v_2 \rangle_K = \langle U, w_1, w_2 \rangle_K \Longleftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle_k = \langle w_1, w_2 \rangle_k$$

Offenbar ist Bedingung 1 ein Sonderfall von Bedingung 2 für $v_1 = v_2$ beziehungsweise $w_1 = w_2$.

So einen eindimensionalen Unterraum werden wir finden, wenn wir die Schiefkörpererweiterung K/k genügend groß wählen. Dies werden wir im nächsten Abschnitt in Form eines Lemmas nachrechnen. Im übernächsten Abschnitt werden wir damit unser Resultat für dieses Kapitel ableiten.

1.4 Die Hilfsaussagen

Wie angekündigt werden wir hier den Grundstein für den Beweis des folgenden Resultates legen.

Zuerst betrachten wir eine Schiefkörpererweiterung K/k (wir fassen dabei K stets als Rechtsvektorraum über k auf). Sei V_k ein Links k-Vektorraum und $V_K = K \otimes_k V_k$ der entsprechende Links K-Vektorraum mit der Einbettung:

$$\tau : V_k \hookrightarrow V_K \tag{1.1}$$

$$v \mapsto \tau(v) = 1 \otimes v$$

Jede Basis von V_k wird auf eine ebensolche von V_K abgebildet. Wir wählen - für den weiteren Verlauf dieses Kapitels - eine Basis $\mathcal{B}_k$ von V_k fest. Dann ist $\mathcal{B}_K := \tau(\mathcal{B}_k)$ eine Basis von V_K. Da τ k-linear ist, bleiben die Koordinaten der Vektoren unter der Abbildung τ erhalten, das heißt:

$$v = \sum_{b \in \mathcal{B}_k} \lambda_b b \Rightarrow \tau(v) = \sum_{b \in \mathcal{B}_k} \lambda_b \tau(b) = \sum_{b' \in \mathcal{B}_K} \lambda_{\tau^{-1}(b')} b'$$

Wir identifizieren daher die Vektorenmenge von V_k mit der Menge der Vektoren $\tau(v)$ für $v \in V_k$ und benötigen somit nur noch eine Basis $\mathcal{B} := \mathcal{B}_K$, dann ist

$$V_k = \left\{ v \in V_K \mid v = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b \text{ und } \lambda_b \in k \ \forall b \in \mathcal{B} \right\} \tag{1.2}$$

Der erste Hilfssatz ist nach den Erläuterungen des Absatzes (1.3) relativ einleuchtend:

Lemma 9 *Sei U ein Unterraum von V_K und $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n < \dim_K V_K$. Falls für jede Wahl von $2n$-Vektoren $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in V_k$ (nicht notwendig paarweise verschiedene) gilt:*

$$\langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \Leftrightarrow \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \qquad (*)$$

dann läßt sich $n - \mathbf{PG}(V_k)$ in den projektiven Raum $\mathbf{PG}(V_K/U)$ - genauer gesagt in $n - \mathbf{PG}(V_K/U)$ - isometrisch einbetten.

Bemerkung 10 *Weil $n < \dim V_K$ ist, folgt aus dem Lemma 9 offenbar $\operatorname{codim}_{V_K} U < n$. Im endlichdimensionalen heißt das also $n < \dim V_K - \dim U$.*

Beweis (Lemma 9)

Wir betrachten die kanonische Projektion $\pi_{can} : V_K \longrightarrow V_K/U$ und definieren die Abbildung $\varphi : V_k \longrightarrow V_K/U$ als Einschränkung $\varphi := \pi_{can}|_{V_k}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \varphi &: V_k \longrightarrow V_K/U \\ \varphi &: v \longmapsto v + U \end{aligned}$$

Dann ist φ als Einschränkung der Projektion π_{can} natürlich k-linear. Aus der Bedingung (*) des Satzes folgt für alle Unterräume $W_1, W_2 \subseteq V_k$ mit $\dim W_i \leq n$ $(i = 1, 2)$:

$$\varphi(W_1) \subseteq \varphi(W_2) \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2 \qquad (**)$$

Denn:

„$\Leftarrow$“: Klar, wegen der k-Linearität der Abbildung.

„$\Rightarrow$“: Es seien W_1 und W_2 wie vorausgesetzt und $\varphi(W_1) \subseteq \varphi(W_2)$. Wir wollen $W_1 \subseteq W_2$ nachweisen. Dazu wählen wir zwei $n-$elementige Erzeugendensysteme von W_1 beziehungsweise W_2, etwa:

$$\begin{aligned} W_1 &= \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \\ W_2 &= \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \end{aligned}$$

Nun betrachten wir für ein beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ den Vektor v_i. Wegen $\varphi(v_i) \in \varphi(W_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} & v_i + U \in W_2 + U \\ \Rightarrow \quad & v_i \in \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \end{aligned}$$

also (da i beliebig war):

$$\begin{aligned} & \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \\ \Rightarrow \quad & \langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \end{aligned}$$

und das bedeutet nach Voraussetzung an U :

$$W_1 = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle = W_2$$

wie in (**) behauptet.

Nach Definition der projektiven Räume $\mathbf{PG}(V_k)$ und $\mathbf{PG}(V_K/U)$ sowie wegen der $k-$Linearität von φ ist nun aber klar, daß φ die Menge der Unterräume von $\mathbf{PG}(V_k)$ in die Menge der Unterräume von $\mathbf{PG}(V_K/U)$ abbildet. Auf der Teilmenge $\left\{X \text{ Unterraum von } \mathbf{PG}(V_k) \text{ mit } \dim_{\mathbf{PG}(V_k)}(X) \leq n-1\right\}$ ist φ gemäß (**) sogar injektiv. Die Behauptung folgt, da $n-\mathbf{PG}(V_k)$ genau aus jenen Unterräumen besteht. ■

Wir wollen nun sehen, wie ein Unterraum U von V_K mit den gewünschten Eigenschaften aussehen müßte. Dazu führen wir folgende abkürzende Schreibweise ein:

Definition 11 *Wir sagen der Unterraum U von V_K* erfüllt die Bedingung (*,n)*, falls für jede Wahl von $2n$-Vektoren $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in V_k$ (nicht notwendig paarweise verschiedene) gilt:*

$$\langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \Longleftrightarrow \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$$

Falls für ein Vektor $u \in V_K$ der eindimensionale Unterraum $\langle u \rangle$ die Bedingung (, n) erfüllt, sagen wir auch kurz u* erfüllt die Bedingung (*, n).

Bemerkung 12 *Trivialerweise ist*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \Rightarrow \langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle$$

immer erfüllt, so daß das Besondere an der oberen Definition die andere Richtung ist.

Nun gilt die

Proposition 13 *Folgende Aussagen für $U \subseteq V_K$ und die Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n < \dim V_K$ sind äquivalent:*

1. *U erfüllt (*, n).*
2. *Für jede Wahl von $n+1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ ($v_j \in V_k$, $j = 1, \ldots, n+1$) ist*
$$U \cap \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle = 0$$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2) : Wir können oBdA annehmen, daß $v_1, \ldots, v_{n+1}$ linear unabängig sind. Wäre zum Beispiel $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, so könnte man v_{n+1} durch $v'_{n+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ersetzen. Aus $U \cap \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle \subseteq U \cap \langle v_1, \ldots, v'_{n+1} \rangle = 0$ folgt die Behauptung für die ursprüngliche Wahl der Vektoren, wenn sie für $v_1, \ldots, v_n, v'_{n+1}$ gezeigt ist.

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ seien also linear unabhängig. Unter der Annahme, die Behauptung wäre falsch, nehmen wir $u \in U \cap \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle$, $u \neq 0$ und betrachten die Darstellung

$$u = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j v_j \tag{1.3}$$

von u als Linearkombination der v_j mit Koeffizienten $\lambda_j \in K$. Nun ist mindestens ein λ_j ungleich Null. Sei oBdA $\lambda_{n+1} \neq 0$, dann ist $v_{n+1} \in \langle u, v_1, \ldots, v_n \rangle$, aber $v_{n+1} \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Mit $w_1 = v_{n+1}$ und (willkürlich gewählt) $w_j = v_j$ für $j \in \{2, \ldots, n\}$ gilt also

$$\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \subseteq \langle u, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \tag{1.4}$$

und somit:

$$\begin{aligned} & \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle \subseteq \langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \\ \overset{(*,n)}{\Rightarrow} \quad & \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle \end{aligned} \tag{1.5}$$

im Widerspruch zur Tatsache, daß $w_1 \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ sein sollte. Somit folgt die Behauptung.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Wieder argumentieren wir mit Widerspruch. Nehmen wir an, U erfülle die Bedingung in (2), aber es gäbe trotzdem Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_n \in V_k$, so daß zwar $\langle U, v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle$, aber eben *nicht* $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ erfüllt ist. Dann muß aber für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Vektor $v_j \notin \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ sein, oBdA sei dies für $j = 1$ der Fall. Da aber auf jeden Fall $v_1 \in \langle U, w_1, \ldots, w_n \rangle$ ist, gibt es $\lambda_j \in K$ und $u \in U$, so daß

$$v_1 = u + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \tag{1.6}$$

Dabei ist $u \neq 0$, da $v_1 \notin \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ ist. Dann gilt aber $0 \neq u = v_1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j \in \langle v_1, w_1, \ldots, w_n \rangle$ und damit

$$U \cap \langle v_1, w_1, \ldots, w_n \rangle \neq 0$$

im Widerspruch zur Annahme. Die Behauptung folgt. ■

1.5 Das Ergebnis

Bisher haben wir die Struktur von V_k noch nicht voll ausgenutzt. Die Sätze des letzten Abschnitts sind auch richtig, wenn V_k *irgendeine* Teilmenge der Vektoren von V_K wäre und U die gewünschten Eigenschaften besäße. Die Struktur von V_k als k-rationale Vektoren von V_K wird indes bei der Frage wichtig, ob ein Unterraum U mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Dazu zuerst folgende hilfreiche

Definition 14 *Wir betrachten unsere fest gewählte Basis $\mathcal{B}$ von V_K. Für jeden Vektor $v \in V_K$ definieren wir die Menge $\mathcal{C}(v)$ wie folgt:*

$$v = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b \Rightarrow \mathcal{C}(v) := \{\lambda_b \mid b \in \mathcal{B}\}$$

Also ist $\mathcal{C}(v)$ gerade die Menge der Koordinaten. *Offenbar ist die Menge $\mathcal{C}(v)$ stets endlich, da jeder Vektor eine endliche Linearkombination von Basiselementen ist.*

Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}(v)$ den von $\mathcal{C}(v)$ in K erzeugten $k-$Unterraum (also $\mathcal{S}(v) = \langle \mathcal{C}(v) \rangle_k \subseteq K$) und mit $Rg(v)$ ("Rang von v") die maximale Anzahl von $k-$linear unabhängigen Elementen der Menge $\mathcal{C}(v)$, *also die Dimension von $\mathcal{S}(v)$ ($Rg(v) = \dim_k \mathcal{S}(v)$). Stets gilt $Rg(v) \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 15 *Nach unserer Defintion ist dann $V_k = \{v \in V_K \mid \mathcal{C}(v) \subseteq k\}$ $= \{v \in V_K \mid \mathcal{S}(v) = k \vee \mathcal{S}(v) = 0\} = \{v \in V_K \mid Rg(v) \leq 1\}$*

Nun kann man mit dieser Definition nicht nur formulieren, welche Vektoren in V_k liegen, sondern kann die Vektoren bezüglich der Lage ihrer Koordinaten in K unterscheiden:

Satz 16 *Folgende Aussagen für $U \subseteq V_K$ ($U \neq 0$) und $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq \dim_K V_K - 2$ sind äquivalent:*

1. *Für jede Wahl von $n+1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ ($v_j \in V_k$, $j = 1, \ldots, n+1$) ist*
$$U \cap \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle = 0$$
2. *Für alle Vektoren $u \in U \setminus 0$ gilt für den Rang: $Rg(u) \geq n+2$.*

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2) : Wir nehmen einmal an, es gäbe ein $u \in U \setminus 0$, das der behaupteten Eigenschaft widerspricht. Also sollen für ein $m \in \mathbb{N}$ Basisvektoren $b_j \in \mathcal{B}$ ($j = 1, \ldots, m$) und Zahlen $\lambda_j \in K$ ($j = 1, \ldots, m$) existieren, so daß $u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j$ ist, aber $\dim_k \mathcal{S}(u) =: d \leq n+1$. Dann gibt es eine Basis

$\mu_1, \ldots \mu_d \in K$ des $k-$Vektorraumes $\mathcal{S}(u)$, und jede der Zahlen λ_j läßt sich als $k-$Linearkombination von $\mu_1, \ldots \mu_d$ schreiben. Etwa:

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{d} \mu_i c_{ji} \text{ mit } c_{ji} \in k \text{ für } i = 1, \ldots, d \tag{1.7}$$

und damit ergibt sich für u :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} \mu_i c_{ji} b_j \\ &= \sum_{i=1}^{d} \mu_i \sum_{j=1}^{m} c_{ji} b_j \end{aligned} \tag{1.8}$$

Schreibt man abkürzend $\sum_{j=1}^{m} c_{ji} b_j = v_i$ dann ergibt sich vorerst:

$$u = \sum_{i=1}^{d} \mu_i v_i \tag{1.9}$$

Da aber alle $c_{ji} \in k$ waren, ist $v_i \in V_k$ für $(i = 1, \ldots, d)$. Falls $d < n+1$ ist, können wir (willkürlich) $v_{d+1} = \ldots = v_{n+1} = 0$ setzen und erhalten dann wegen Identität (1.9):

$$\begin{aligned} & 0 \neq u \in \langle v_1, \ldots v_{n+1} \rangle \\ \Rightarrow \quad & 0 \neq u \in U \cap \langle v_1, \ldots v_{n+1} \rangle \end{aligned} \tag{1.10}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung in (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) : Nehmen wir $0 \neq u \in U$ und $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V_k$ mit $u \in \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle$, etwa $u = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j v_j$ und $\lambda_j \in K$ $(j = 1, \ldots, n+1)$. Hier haben wir nun für $j = 1, \ldots, n+1$ jeweils eine Darstellung:

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} c_{ji} b_i \tag{1.11}$$

wenn wir $N \in \mathbb{N}$ und die Basisvektoren b_i geeignet wählen. Die Koeffizienten c_{ji} sind dann allesamt aus k nach Wahl der v_j als Vektoren von V_k. Wieder setzen wir ein und rechnen nach:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{N} \lambda_j c_{ji} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j c_{ji} \right) b_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mu_i b_i \end{aligned}$$

wenn man abkürzend $\mu_i := \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j c_{ji}$ schreibt. Offenbar gilt dann aber $\mathcal{C}(u) \subseteq \{0\} \cup \{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$ und somit:

$$\mathcal{S}(u) \subseteq \langle \mu_1, \ldots, \mu_N \rangle_k \subseteq K \tag{1.12}$$

andererseits sind alle $\mu_i \in \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \rangle_k$, nach Definition der μ_i (es galt $c_{ji} \in k$). Damit ergibt sich dann:

$$\mathcal{S}(u) \subseteq \langle \mu_1, \ldots, \mu_N \rangle_k \subseteq \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \rangle_k \tag{1.13}$$

insbesondere für den Rang von u:

$$Rg(u) = \dim_k \mathcal{S}(u) \leq \dim_k \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \rangle_k \leq n+1 \tag{1.14}$$

Wir haben also gerade die Kontraposition gezeigt, die Behauptung folgt. ■

Mit diesem Wissen können wir Lemma 9 noch etwas besser formulieren:

Lemma 17 *Sei U ein Unterraum von V_K und $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq \dim V_K - 2$. Falls*

$$\forall\, u \in U \setminus 0 \;\; Rg(u) \geq n+2$$

ist, dann läßt sich $n - \mathbf{PG}(V_k)$ in den projektiven Raum $\mathbf{PG}(V_K/U)$ - genauer gesagt in $n - \mathbf{PG}(V_K/U)$ - isometrisch einbetten.

Beweis Kombiniert man Proposition 13 und Satz 16, sieht man, daß U die Bedingung (*, n) - wie in Definition 11 eingeführt - erfüllt, die Behauptung folgt mit Lemma 9. ■

Die Bedingung von Lemma 17 mag man nun dazu benützen, um einen Unterraum U mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Wir wollen dies hier nur für einen *eindimensionalen* Unterraum $U = \langle u \rangle \subseteq V_K$ durchführen, um weitere technische Verwicklungen zu vermeiden. Dies und ein Induktionsargument werden uns das Hauptergebnis dieses Kapitels für endlichdimensionale projektive Räume liefern. Zur Konstruktion:

Proposition 18 *Sei $2 \leq n \leq \dim V_K - 2$. Ein eindimensionaler Unterraum U mit $Rg(u) \geq n+2\ \forall u \in U \setminus 0$ existiert genau dann, wenn $[K:k] \geq n+2$ ist.*

Beweis Es sei $u \in V_K$ mit $Rg(u) \geq n+2$. Dann gilt (mit den oberen Bezeichnungen)

$$n+2 \leq Rg(u) = \dim_k \mathcal{S}(u) \leq \dim_k K = [K:k] \tag{1.15}$$

Sei andererseits $[K:k] = d \geq n+2$. Dann nehmen wir eine Basis $\{\lambda_1 = 1, \ldots, \lambda_d\}$ von K über k und d paarweise verschiedene Basisvektoren $b_1, \ldots, b_d \in \mathcal{B}$ (man beachte $\dim V_K \geq n+2$) und betrachten den Vektor

$$u = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i b_i \tag{1.16}$$

dann gilt offenbar $Rg\,(u) = d \geq n+2$. Sei nun $U = \langle u \rangle$, der von u aufgespannte eindimensionale $K-$Untervektorraum von V_K. Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor in U hat die Form $u' = \mu u$ mit $\mu \in K \backslash 0$.Wir wollen $Rg\,(u')$ berechnen. u' hat die Form

$$u' = \sum_{i=1}^{d} \mu \lambda_i b_i \tag{1.17}$$

Nun sind die Elemente $\mu\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ $k-$linear unabhängig. Wäre dies nicht der Fall, gäbe es etwa eine $k-$Linearkombination

$$0 = \sum_{i=1}^{d} \mu \lambda_i c_i \tag{1.18}$$

mit $c_i \in k$ für $i = 1, \ldots, d$, dann würde aus der Relation (1.18) nach Multiplikation (von links) mit μ^{-1} folgen:

$$0 = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i c_i \tag{1.19}$$

im Widerspruch zur Wahl von $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Da aber $\mathcal{S}\,(u') = \langle \mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_d \rangle_k$, gilt also:

$$Rg\,(u') = \dim_k \mathcal{S}\,(u') = \dim_k \langle \mu\lambda_1, \ldots, \mu\lambda_d \rangle_k = d \tag{1.20}$$

und somit $Rg\,(u') = d \geq n+2$ wie behauptet. ■

Nun sind wir in der Lage das Ergebnis zu formulieren:

Satz 19 *Sei k ein Schiefkörper und $d, n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n < d$.*

1. *Für einen Erweiterungsschiefkörper K von k mit $[K:k] \geq n+2$ existiert eine isometrische Einbettung:*

$$\iota : n - \mathbf{PG}\,(d,k) \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(d-1, K)$$

2. *Sei $d' \in \mathbb{N}$ mit $d > d' \geq n$. Falls es eine Kette von Schiefkörpererweiterungen $k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \ldots \subseteq k_{d-d'} = K$ gibt mit $[k_{i+1} : k_i] \geq n+2$, dann gibt es auch eine isometrische Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{PG}\,(d,k) \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(d',K)$$

Beweis *Zu 1.* Seien k, K, n und d wie im Satz angegeben. Wir betrachten die $d+1-$ dimensionalen Vektorräume $V_k = \mathbf{V}(d+1,k) \subseteq \mathbf{V}(d+1,K) = V_K$. Die Einbettung sei hier wie in Identität (1.1) (vergleiche Seite 31) gegeben. Nach Voraussetzung ist $n < d$ und damit $n \leq d+1-2 = \dim V_K - 2$. Mit Proposition 18 können wir auf die Existenz eines eindimensionalen Unterraumes U schließen, so daß $Rg\,(u) \geq n+2\ \forall\, u \in U \setminus 0$. Nun argumentieren wir mit Lemma 17 und erhalten eine Einbettung:

$$\iota : n - \mathbf{PG}\,(V_k) \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(V_K/U)$$

Offenbar gilt $\mathbf{PG}\,(V_k) \cong \mathbf{PG}\,(d,k)$ und (wegen $V_K/U \cong \mathbf{V}\,(d,K)$) auch $\mathbf{PG}\,(V_K/U) \cong \mathbf{PG}\,(d-1,K)$. Die Behauptung folgt.

Zu 2. Induktiv erhält man mit Teil 1. dieses Satzes durch die Schiefkörpererweiterungen $k_{i+1} \supseteq k_i$ eine Folge von Einbettungen:

$$n - \mathbf{PG}\,(d,k_0) \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(d-1,k_1) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(d-d',k_{d-d'})$$

also wegen $k_0 = k$ und $k_{d-d'} = K$ die Behauptung. ■

Wenn der (Schief-)Körper k endlich ist, gibt es Erweiterungskörper wie sie in Satz 19 auftreten immer, und sie können endlich gewählt werden. Man kann in dieser Situation dann sagen:

Satz 20 *Sei k ein endlicher Körper und $d, d', n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq d' < d$. Es gibt einen endlichen Erweiterungskörper K von k der eine isometrische Einbettung*

$$\iota : n - \mathbf{PG}\,(d,k) \hookrightarrow n - \mathbf{PG}\,(d',K)$$

zuläßt.

Beweis Falls k endlich ist, gibt es eine Kette von endlichen Körpern $k = k_0 \subseteq k_1 \subseteq \ldots \subseteq k_{d-d'} = K$ mit $[k_{i+1} : k_i] \geq n+2$ und nach Satz 19 Teil 2. folgt dann die Behauptung. ■

Kapitel 2

Einbettungstheorie modular abgeschlossener Räume

Die Eigenschaft, in eine projektive Koordinatenebene (desarguessche Ebene) einbettbar zu sein, scheint eine partielle Ebene in einem gewissen Sinne handhabbar zu machen. Als Unterstruktur einer wohlbekannten, algebraisch gut zu formulierenden Struktur scheint sie dann gut beschrieben zu sein. Aber bereits wenn es um die Endlichkeit der Zielebene geht, treten Probleme auf: Eine endliche partielle Ebene, die in eine (unendliche) projektive Koordinatenebene einbettbar ist, braucht längst noch nicht in eine ebensolche endliche einbettbar sein (Beispiele geben wir im Laufe des Kapitels). Ferner muß man sich fragen, ob es den partiellen Ebenen (linearen Räumen) angesehen werden kann, daß sie in eine projektive Koordinatenebene eingebettet werden können. Auch hier scheint es kein einfaches Kriterium zu geben.

Kapitel 1 hat gezeigt, daß die "klassischen" linearen Räume - die projektiven Koordinatenräume $\mathbf{PG}(n, k)$ sämtlich in eine projektive Koordinatenebene einbettbar sind. Dabei haben die Eigenschaften der projektiven Räume (Dimension, Residuen von Punkten sind lineare Räume) eine entscheidende Rolle gespielt. Diese Zusatzstruktur machte die klassischen linearen Räume für unsere Einbettungsstrategie erst zugänglich.

Ein weiterer Punkt, bei dem man den Zusammenhang zwischen der Koordinatisierbarkeit mit einem Schiefkörper und dem Begriff der Dimension sieht, ist dieser: Genau diejenigen projektiven Ebenen sind desarguessch, welche sich in einen projektiven Raum einbetten lassen. Eine analoge Aussage für lineare Räume kann man nicht so einfach erwarten.

2.1 Die Idee einer Einbettungsaussage

Ziel wird es sein, aufgrund der Einbettbarkeit einer partiellen Ebene in höherdimensionale lineare Räume auf die Einbettbarkeit in eine projektive Ebene zu schließen. Wir wollen dabei die Idee verwenden, einen linearen Unterraum in das Residuum eines außerhalb liegenden Punktes einzubetten. Welche Forderungen müßten wir stellen? Der Plan sieht wie folgt aus:

Betrachten wir die Situation, die sich ergibt, wenn wir eine partielle Ebene sukzessive in immer höherdimensionale lineare Räume einbetten. Es gebe also für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ einen $n-$ dimensionalen linearen Raum Λ^n und Einbettungen $\Pi \hookrightarrow \Lambda^2$, $\Lambda^n \hookrightarrow \Lambda^{n+1}$. Dann ergibt sich:

$$\Pi \hookrightarrow \Lambda^2 \hookrightarrow \Lambda^3 \hookrightarrow \Lambda^4 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Lambda^n \hookrightarrow \Lambda^{n+1} \hookrightarrow \ldots$$

Der Einfachheit halber identifizieren wir die Räume mit ihren Bildern und erhalten dann:

$$\Pi \subseteq \Lambda^2 \subset \Lambda^3 \subset \Lambda^4 \subset \ldots \subset \Lambda^n \subset \Lambda^{n+1} \subset \ldots$$

Die aufsteigende Kette der Räume Λ^n liegt also in dem unendlich- dimensionalen linearen Raum $\Lambda^\infty = \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} \Lambda^n$.

Ziel ist es, den planaren Raum Λ^3 in einen *projektiven* dreidimensionalen Raum einzubetten, denn dann ergäbe sich die Einbettung von Λ^2 und damit auch Π in eine *projektive desarguessche* Ebene.

Betrachten wir zuerst den *ersten* Erweiterungsschritt $\Lambda^3 \subset \Lambda^4$. Für jeden Punkt $p \in \Lambda^4 \setminus \Lambda^3$ erhalten wir eine isometrische Einbettung *planarer* Räume $\iota_p : \Lambda^3 \hookrightarrow \Lambda^4_p$. Wählen wir den Punkt p noch so, daß er folgende Bedingung erfüllt:

(*) Es gibt zwei komplanare Geraden g_1 und g_2 in Λ^3, die sich *nicht* in einem Punkt schneiden, für die es aber eine Gerade h in Λ_4 gibt, die

1. den Punkt p enthält,
2. komplanar ist, mit jeder der beiden Geraden g_1 und g_2.

dann haben die Geraden $\iota_p(g_1)$ und $\iota_p(g_2)$ einen Schnittpunkt in Λ^4_p , nämlich den "Punkt" h in Λ^4_p :

$$\begin{aligned} \iota_p(g_1) \cap \iota_p(g_2) &= \langle g_1, p\rangle \cap \langle g_2, p\rangle \\ &= \langle g_1, h\rangle \cap \langle g_2, h\rangle \\ &= h \end{aligned}$$

Die Einbettung $\Lambda^3 \hookrightarrow \Lambda^4_p$ bringt also eine *echte* Erweiterung des planaren Raumes Λ^3 um mindestens einen Punkt. Mithilfe der höherdimensionalen Räume Λ^n $(n \geq 5)$ wollen wir versuchen, den planaren Raum Λ^3 sukzessive zu erweitern, bis wir einen projektiven dreidimensionalen Raum erreichen. Um diese "Konvergenz" zu erreichen, müssen wir die Bedingung (*) von oben nochmals etwas umformulieren. Dazu brauchen wir folgende *vorläufige*

Definition 21 *Sei Σ ein DLS, U und V zwei endlichdimensionale Unterräume von Σ. Wir nennen (U, V) ein* ***modulares Paar*** *genau dann, wenn:*

$$\dim_\Sigma(\langle U, V\rangle) + \dim_\Sigma(U \cap V) = \dim_\Sigma U + \dim_\Sigma V$$

Beispiel 22

1. *Zwei Geraden g_1 und g_2 bilden ein modulares Paar (g_1, g_2), wenn entweder g_1 und g_2 windschief sind (also nicht komplanar) oder g_1 und g_2 sich in einem Punkt schneiden oder $g_1 = g_2$ gilt. Es kann also nicht sein, daß g_1 und g_2 komplanar sind, sich aber nicht in einem Punkt schneiden.*

2. *Eine Ebene E und eine Gerade g sollen ein modulares Paar (E, g) bilden. Dann ist entweder $\dim\langle E, g\rangle \geq 4$ oder E und g schneiden sich in einem Punkt oder $g \subseteq E$. Daß E und g in einem dreidimensionalen Unterraum liegen und sich nicht schneiden kann also nicht vorkommen.*

3. *Zwei Ebenen E_1 und E_2 in einem dreidimensionalen Raum Σ bilden ein modulares Paar gdw. E_1 und E_2 sich in einer Geraden schneiden.*

4. *Zwei Ebenen E_1 und E_2 in einem vierdimensionalen Raum Σ' bilden ein modulares Paar gdw. E_1 und E_2 sich in einer Geraden schneiden oder $\langle E_1, E_2\rangle = \Sigma'$ ist und $E_1 \cap E_2$ genau einen Punkt enthält.*

Erinnern wir uns noch einmal an die einführende Betrachtung von $\Lambda^3 \subset \Lambda^4$ und nehmen nun großzügig an, daß alle Paare von komplanaren Geraden $g_1, g_2 \in \Lambda^3$ in Λ^4 über Λ^3 hinaus *modular erweiterbar* seien, das heißt, es gibt Ebenen E_1 und E_2 in Λ^4, für die gilt:

1. $E_1 \cap \Lambda^3 = g_1$ und $E_2 \cap \Lambda^3 = g_2$.

2. Das Paar (E_1, E_2) ist ein modulares Paar.

Schneiden sich alle Paare komplanarer Geraden $g_1 \neq g_2$, wären wir fertig. Nehmen wir also zwei komplanare Geraden $g_1 \neq g_2$, die sich *nicht* schneiden. Dann erhalten wir Ebenen E_1 und E_2 von Λ^4, die Λ^3 nur in g_1 bzw. g_2 schneiden und für welche (E_1, E_2) ein modulares Paar sind.

Man kann sich nun (wegen $\dim \Lambda^4 = \dim \Lambda^3 + 1 = 4$) leicht davon überzeugen, daß E_1 und E_2 jeweils Ebenen sind, die sich in einer Geraden h schneiden(E_1 und E_2 haben mindestens einen Punkt gemeinsam - vgl. Beispiel 22(4) - etwa p. Dann liegen E_1 und E_2 aber in dem dreidimensionalen Raum $\langle g_1, g_2, p\rangle$ und - vgl. Beispiel 22(3) - schneiden sich damit in einer Geraden). Nehmen wir nun noch einen Punkt $p \in h$ (der dann wegen $E_1 \cap E_2 \cap \Lambda^3 = (E_1 \cap \Lambda^3) \cap (E_2 \cap \Lambda^3) = g_1 \cap g_2 = \emptyset$ nicht in Λ^3 liegt), dann haben wir die Situation von oben, nämlich einen Punkt $p \in \Lambda^4 \backslash \Lambda^3$ und eine Gerade h, die durch p geht, so daß g_1 und h, bzw. g_2 und h komplanar sind.

Damit ergibt sich bei der Einbettung $\iota_p : \Lambda^3 \hookrightarrow \Lambda^4_p$ eine *echte Erweiterung*, da die Bilder der sich vormals nicht schneidenen Geraden $g_1$und g_2 sich nun in einem Punkt schneiden.

2.2 Eigenschaften modular abgeschlossener dimensionaler linearer Räume

Definition 23 *1. Haben wir zwei Unterräume U, V so bezeichnen wir mit $[U, V] := \{X \subseteq \Sigma \mid U \subseteq X \subseteq V\}$ die Menge der Unterräume zwischen U und V* ***(das „Intervall“*** *$[U, V]$****).***

2. Die ***Länge des Intervalls*** *$h([U, V])$ ist die Dimension des Quotienten-DLS V_U (also $\dim_{\Sigma_U} \pi_U(V)$). Ist dieser DLS unendlich dimensional, dann ist die Länge unendlich, anderenfalls hat das Intervall endliche Länge.*

3. Für jeden Unterraum $U \subseteq \Sigma$ bezeichnen wir mit Φ_U die Abbildung:

$$\Phi_U : \Sigma \longrightarrow \Sigma \quad , \quad \Phi_U(X) := \langle U, X\rangle$$

Im folgenden müssen wir den Begriff des modularen Paares auf unendlichdimensionale Unterräume ausdehnen:

Definition 24 *Sei Σ ein DLS, U und V zwei Unterräume von Σ. Wir nennen (U, V) ein* ***modulares Paar*** *genau dann, wenn:*

$$X = \langle X, U\rangle \cap V \quad \forall X \in [U \cap V, V]$$

Zusätzlich nennen wir das Paar (U, V) ***modular disjunkt*** *genau dann, wenn (U, V) ein modulares Paar ist und desweiteren $U \cap V = \emptyset$ ist.*

Einige grundlegende Eigenschaften modularer Paare wollen wir nur zitieren. Zuerst folgendes

Lemma 25 *Für den DLS Σ und $U, V \subseteq \Sigma$ sind äquivalent:*

1. *(U, V) ist ein modulares Paar.*
2. *Φ_U bildet das Intervall $[U \cap V, V]$ injektiv (isometrisch) in das Intervall $[U, \langle U, V \rangle]$ ab.*
3. *Φ_V bildet das Intervall $[U \cap V, U]$ injektiv (isometrisch) in das Intervall $[V, \langle U, V \rangle]$ ab.*
4. *(V, U) ist ein modulares Paar.*

Beweis Vergleiche Birkhoff [6], Kapitel IV. ■

Bemerkung 26 *Offenbar ist das Paar (U, V) modular disjunkt, gdw. $\pi_U|_V : V \to \pi_U(V)$ eine Einbettung ist.*

Die Verträglichkeit der Definitionen für endlichdimensionale Unterräume gibt uns:

Proposition 27 *Sei Σ ein DLS, U und V zwei Unterräume von Σ, (U, V) ein modulares Paar. Das Intervall $[U \cap V, U]$ habe endliche Länge, dann gilt: das Intervall $[V, \langle U, V \rangle]$ hat ebenfalls endliche Länge und es ist*

$$h([U \cap V, U]) = h([V, \langle U, V \rangle])$$

bzw. äquivalent dazu

$$\dim_{\Sigma_{U \cap V}} \pi_{U \cap V}(U) = \dim_{\Sigma_V} \pi_V(\langle U, V \rangle)$$

Falls U und V sogar zwei endlichdimensionale Unterräume von Σ sind, dann gilt:

$$\dim(\langle U, V \rangle) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V \tag{2.1}$$

Umgekehrt ist jedes Paar (U, V) endlichdimensionaler Unterräume, das die Gleichung 2.1 erfüllt, ein modulares Paar.

Beweis Vergleiche Birkhoff [6], Kapitel IV. ■

Zuerst noch sammeln wir ein paar einfache Tatsachen über Quotienten.

Lemma 28 *Sei $X \subseteq \Sigma$ und $\pi_X : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_X$ die Projektion auf den Faktorraum.*

1. *Für Unterräume $U, V \subseteq \Sigma$ gilt:*

(a) $\pi_X(\langle U,V\rangle) = \langle \pi_X(U), \pi_X(V)\rangle$

(b) $\pi_X(U \cap V) \subseteq \pi_X(U) \cap \pi_X(V)$ *(i.a. aber nicht Gleichheit !)*

2. *Falls* $X \subseteq U \cap V$ *gilt* $\pi_X(U \cap V) = \pi_X(U) \cap \pi_X(V)$

3. *Seien* $X \subseteq U \subseteq W$ *Unterräume von* Σ *und* V *ein weiterer Unterraum mit* $X \subseteq V$*,dann gilt:*

$$U = V \cap W \Leftrightarrow \pi_X(U) = \pi_X(V) \cap \pi_X(W)$$

4. *Sei* $U \subseteq \Sigma$*, so daß* U *endlichdimensional und* (U,X) *ein modulares Paar ist, dann gilt die Dimensionsformel:*

$$\dim_{\Sigma_X} \pi_X(U) = \dim_\Sigma U - \dim_\Sigma U \cap X - 1$$

Beweis

1. In den beiden Fällen klammert man um:

   (a) $\langle \pi_X(U), \pi_X(V)\rangle = \langle\langle X,U\rangle, \langle X,V\rangle\rangle = \langle X,U,V\rangle = \langle X,\langle U,V\rangle\rangle = \pi_X(\langle U,V\rangle)$.

   (b) $\pi_X(U \cap V) = \langle X, U \cap V\rangle \subseteq \langle X,U\rangle \cap \langle X,V\rangle = \pi_X(U) \cap \pi_X(V)$.

2. In diesem Fall ist $\pi_X(U \cap V) = \langle X, U \cap V\rangle = U \cap V = \langle X,U\rangle \cap \langle X,V\rangle = \pi_X(U) \cap \pi_X(V)$

3. Weil X in allen Unterräumen enthalten ist, gilt trivialerweise

$$U = \pi_X(U) \text{ und } V \cap W = \pi_X(V \cap W)$$

   Wegen 2. gilt sogar weiter

$$V \cap W = \pi_X(V \cap W) = \pi_X(V) \cap \pi_X(W)$$

   Die Behauptung folgt sofort.

4. Setzen wir $Y := U \cap X$, dann gilt $\dim_{\Sigma_X} \pi_X(U) = \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U)$ (Proposition 27). Weil U endlichdimensional ist, gilt ferner $\dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U) = \dim_\Sigma U - \dim_\Sigma Y - 1$. Nach Definition von Y also:

$$\begin{aligned} \dim_{\Sigma_X} \pi_X(U) &= \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U) \\ &= \dim_\Sigma U - \dim_\Sigma Y - 1 \\ &= \dim_\Sigma U - \dim_\Sigma U \cap X - 1 \end{aligned}$$

   wie behauptet. ■

Damit können wir das Verhalten modularer Paare bei Quotientenbildung analysieren. Dazu sei (U, V) ein modulares Paar in Σ. Wir nehmen einen Unterraum $X \subseteq U \cap V$ und einen Punkt $p \in U \setminus V$. Wir bezeichnen ferner mit $\pi_x : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_X$ und $\pi_p : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_p$ die Projektionen auf die Faktorräume.

Proposition 29 *Mit den voranstehenden Bezeichnungen gilt:*

1. $(\pi_X(U), \pi_X(V))$ *ist ein modulares Paar in* Σ_X.
2. $(\pi_p(U), \pi_p(V))$ *ist ein modulares Paar in* Σ_p

Beweis

1. Weil X in $U \cap V$ liegt, ist $\pi_X(U) = U$ und $\pi_X(V) = V$. Für jeden Unterraum Y aus $[\pi_X(U) \cap \pi_X(V), \pi_X(U)]$ gilt demnach auch - da (U, V) modular war

$$\langle Y, \pi_X(V)\rangle \cap \pi_X(U) = \langle Y, V\rangle \cap U = Y$$

   und somit ist auch $(\pi_X(U), \pi_X(V))$ ein modulares Paar.

2. Für $p \in U \setminus V$ ist $\pi_p(U) = U$ und $\pi_p(V) = \langle V, p\rangle \neq V$. Nehmen wir $Y \in [\pi_X(U) \cap \pi_X(V), \pi_X(U)] = [U \cap \langle V, p\rangle, U]$ dann ist sicher $p \in Y$ und damit

$$\begin{aligned} \langle Y, \pi_X(V)\rangle \cap \pi_X(U) &= \langle Y, \langle V, p\rangle\rangle \cap U = \langle Y, p, V\rangle \cap U \\ &= \langle Y, V\rangle \cap U = Y \end{aligned}$$

   weil Y auch in $[U \cap V, U]$ liegt und (U, V) modular war. Mit dieser Zeile folgt, daß auch $(\pi_X(U), \pi_X(V))$ modular ist (vergleiche Definition 24). ■

Um unser Resultat formulieren zu können, benötigen wir weitere wichtige Bezeichnungen:

Definition 30 *1. Sei (U, V) ein Unterraumpaar von Σ (nicht notwendig modular) mit $U \neq V$. Ein Paar von Unterräumen (U', V') nennen wir* ***modulare Erweiterung*** *des Paares (U, V),wenn*

   (a) $U' \cap \langle U, V\rangle = U$ und $V' \cap \langle U, V\rangle = V$.

   (b) (U', V') ist ein modulares Paar.

2. *Betrachten wir einen Unterraum $W \subseteq \Sigma$ und zwei Unterräume $U, V \subseteq W$. Wir sagen, das Paar (U, V) sei* ***über*** W ***hinaus modular erweiterbar****, wenn es eine modulare Erweiterung (U', V') des Paares (U, V) gibt, für das $U' \cap W = U$ und $V' \cap W = V$ ist.*

   Das Paar (U', V') nennen wir in diesem Fall eine ***modulare Erweiterung von*** (U, V) ***über*** W ***hinaus****.*

3. *Zu der Kardinalzahl κ definieren wir*

$$\Sigma^{(<\kappa)} := \{U \text{ Unterraum von } \Sigma \mid \dim_\Sigma U < \kappa\}$$

   mit anderen Worten die Menge aller Unterräume, die weniger als $\kappa-$ dimensional sind. (Zum Beispiel ist für $\Sigma^{(<\aleph_0)}$ die Menge der endlichdimensionalen Unterräume von Σ.)

4. *Sei κ eine* reguläre *Kardinalzahl, dann sagen wir, der DLS Σ sei* ***$\kappa-$ modular abgeschlossen****, wenn für jeden Unterraum $W \in \Sigma^{(<\kappa)}$ und jedes Paar (U, V) von Unterräumen von W eine modulare Erweiterung von (U', V') über W hinaus existiert, so daß*

$$h([U, U']) < \infty \text{ und } h([V, V']) < \infty$$

   beziehungsweise äquivalent dazu

$$\dim U'_U < \infty \text{ und } \dim V'_V < \infty$$

   Wir nennen den DLS Σ ***endlich modular abgeschlossen****, falls er $\aleph_0-$ modular abgeschlossen.*

   Falls keine Mißverständnisse auftreten können, nennen wir Σ in einem der oberen Fälle auch einfach ***modular abgeschlossen****.*

Bemerkung 31 1. *In Definition 30.2 beachte man den Sonderfall, daß (U, V) bereits ein modulares Paar ist. Dann ist nämlich mit $U' = U$ und $V' = V$ das Paar (U, V) trivialerweise über W hinaus modular erweiterbar.*

2. *Aus der vorhergehenden Bemerkung ersieht man auch, daß ein modularer DLS Σ auch modular abgeschlossen ist.*

3. *Es ist klar, daß modular abgeschlossene DLS nur modular oder unendlich dimensional sein können. Genauer gilt: Ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS Σ hat Dimension mindestens κ oder ist modular (man nehme $W = \Sigma$ falls $\dim \Sigma < \kappa$, dann muß jedes Paar (U, V) von Unterräumen modular sein).*

4. *Offenbar ist ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS auch $\lambda-$ modular abgeschlossen für $\lambda < \kappa$. Insbesondere ist jeder modular abgeschlossene DLS endlich modular abgeschlossen.*

5. *Man beachte auch, daß in der Definition der modularen Abgeschlossenheit κ eine reguläre Kardinalzahl war.*

Erst später wird klar ersichtlich, warum wir uns in der Definition der modularen Abgeschlossenheit auf *reguläre* Kardinalzahlen κ beschränken. Vorerst bemerken wir, daß wegen der Regularität von κ folgendes Lemma gilt (den - mengentheoretischen - Beweis lassen wir an dieser Stelle weg):

Lemma 32 *Sei Σ ein (nicht notwendig modular abgeschlossener) DLS und κ eine reguläre Kardinalzahl.*

1. *Seien U und V Unterräume von Σ, so daß $\dim_\Sigma U < \kappa$ und*

$$\dim_{\Sigma_U} \pi_U(V) = h([U, \langle U, V\rangle]) < \kappa \quad ,$$

   dann gilt auch $\dim_\Sigma V < \kappa$.

2. *Sei $(I, \prec)$ eine (wohlgeordnete) Indexmenge und $(U_i)_{i\in I}$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen mit $\dim_\Sigma U_i < \kappa$ für alle $i \in I$. Wir setzen $U := \bigcup_{i\in I} U_i$, dann gilt:*

   (a) *Ist $|I| < \kappa$, dann ist auch $\dim_\Sigma U < \kappa$.*

   (b) *Ist $|I| \leq \kappa$, dann ist auch $\dim_\Sigma U \leq \kappa$.* ■

Das Hauptresultat dieses Abschnittes stellt der folgende Satz dar, der uns später ein induktives Vorgehen erlauben wird.

Satz 33 *Sei Σ ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS und $X \in \Sigma^{(<\kappa)}$. Dann ist der Quotientenraum Σ_X ebenfalls $\kappa-$ modular abgeschlossen.*

Beweis Sei $\pi : \Sigma \to \Sigma_X$ die Projektion. Wir betrachten den Unterraum $W_0 \in \Sigma_X^{(<\kappa)}$ und sein *volles Urbild* $W := \pi^{-1}(W_0)$. Nach Lemma 32.(1) ist $\dim_\Sigma W < \kappa$.

Zu den Unterräumen U_0, V_0 von W_0 betrachten wir die *vollen Urbilder* $U := \pi^{-1}(U_0), V := \pi^{-1}(V_0)$, so daß in allen drei Urbildräumen X enthalten ist, sprich $X \subseteq U, X \subseteq V$ und $X \subseteq W$ gilt und $U, V \subseteq W$ liegen. Diese drei Unterräume sind alle in $\Sigma^{(<\kappa)}$.

Zu dem Paar (U, V) gibt es nach Voraussetzung eine modulare Erweiterung von (U', V') über W hinaus, so daß $h([U, U']) < \infty$ und $h([V, V']) < \infty$.

Weiterhin setzten wir $U_0' = \pi(U')$ und $V_0' = \pi(V')$. Wir behaupten das Paar (U_0', V_0') sei eine modulare Erweiterung von (U_0, V_0) über W_0 hinaus, $h([U_0, U_0']) < \infty$ und $h([V_0, V_0']) < \infty$.. Damit wäre der Satz bewiesen.

Zuerst einmal ist $U_0 \subseteq U_0'$ und $V_0 \subseteq V_0'$ klar nach Konstruktion, denn dies galt bereits für die Urbilder und Projektionen sind inklusionserhaltend.

Weil $X \subseteq U \cap V \subseteq U' \cap V'$ liegt, ist $(\pi_X(U'), \pi_X(V')) = (U_0', V_0')$ gemäß Proposition 29 (1) ein modulares Paar. Wegen Lemma 28 (3) gilt auch $U_0' \cap W_0 = U_0$ und $V_0' \cap W_0 = V_0$. Das zeigt, daß (U_0', V_0') eine modulare Erweiterung von (U_0, V_0) über W_0 hinaus ist.

Wegen $X \subseteq U \subseteq U'$ ist das Intervall $[U, U'] \simeq [U_0, U_0']$, ebenso gilt $[V, V'] \simeq [V_0, V_0']$. Damit gilt natürlich auch

$$\begin{aligned} h([U_0, U_0']) &= h([U, U']) < \infty \\ h([V_0, V_0']) &= h([V, V']) < \infty \end{aligned}$$

und wir sind fertig, denn (U_0, V_0) waren beliebig gewählt. ■

2.3 Endlichdimensionale Unterräume

Nun haben wir also gesehen, daß die Eigenschaft modular abgeschlossen zu sein unter Quotientenbildung erhalten bleibt. Jetzt wollen wir die Quotientenbildung iterieren und sehen, was bei so einer „Folge“ von Einbettungen herauskommt.

Genauer lautet unser erstes Ziel:

Satz 34 *Sei Σ ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum und $\mathcal{P}$ eine Teilmenge der Menge aller Unterraumpaare von W mit $|\mathcal{P}| < \kappa$. Dann gibt es einen Unterraum $Y \in \Sigma^{(<\kappa)}$, so daß die Einschränkung $\iota := \pi_Y|_W$ eine Einbettung $\iota : W \hookrightarrow \Sigma_Y$ induziert und für alle $(U, V) \in \mathcal{P}$ das Paar $(\iota(U), \iota(V))$ in $\iota(W)$ modular ist.*

Ein erster Schritt auf dem Weg zum Beweis von Satz 34 ist der Beweis der folgenden Behauptung:

Proposition 35 *Sei Σ ein modular abgeschlossener DLS und W ein endlichdimensionaler Unterraum. Für jedes Paar (U, V) von Unterräumen von W gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $Y \subseteq \Sigma$, so daß die Einschränkung $\iota := \pi_Y|_W$ eine Einbettung $\iota : W \hookrightarrow \Sigma_Y$ induziert und $(\iota(U), \iota(V))$ ein modulares Paar ist.*

Zum Beweis von Proposition 35 wählen wir Folgendes zu einem gegebenen endlichdimensionalen Unterraum W fest: ein Paar (U, V) von Unterräumen von W und eine modulare Erweiterung (U', V') über W hinaus. Von Bedeutung sein wird folgende

Bemerkung 36 *Mit U und V sind - wegen $h([U, U']) < \infty$ und $h([V, V']) < \infty$ - natürlich auch U' und V' endlichdimensional, ebenso wie der Unterraum $\langle U', V' \rangle$*

Dazu noch ein paar technische Definitionen, die nur für diesen Abschnitt relevant sein werden:

Definition 37 *Wir nennen einen Unterraum $Y \subseteq \langle U', V' \rangle$* ***zulässig****, wenn er, bzw. die Projektion $\pi_Y : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_Y$ folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Das Paar (W, Y) ist modular disjunkt.*
2. *$(\pi_Y(U'), \pi_Y(V'))$ ist ein modulares Paar.*

Durch die Menge $\mathcal{M} := \{Y \subseteq \langle U', V' \rangle \mid Y \text{ zulässig}\}$ sei die Menge aller zulässigen Unterräume gegeben.

Insbesondere gilt:

Lemma 38 *Sei $Y \subseteq \langle U', V' \rangle$, so daß $(\pi_Y(U'), \pi_Y(V'))$ ein modulares Paar in Σ_Y darstellt. Dann sind äquivalent:*

1. *Y ist zulässig.*
2. *$\pi_Y|_W : W \to \pi_Y(W)$ ist isometrisch.*

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei zuerst Y zulässig. Weil (W, Y) ein modulares Paar ist, bildet Φ_Y das Intervall $[W \cap Y, W]$ isometrisch in das Intervall $[Y, \langle W, Y \rangle]$ ab (vgl. Lemma 25). Da $W \cap Y = \emptyset$ ist (modulare Disjunktheit) gilt sogar: $\Phi_Y : [\emptyset, W] \hookrightarrow [Y, \langle W, Y \rangle]$ und somit ist $\pi_Y|_W : W \to \pi_Y(W)$ isometrisch. Somit gilt (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Nun nehmen wir an $\pi_Y|_W : W \to \pi_Y(W)$ ist isometrisch. Wegen der Isometrie-Eigenschaft ist $W \cap Y = \emptyset$ (denn für alle $p \in W \cap Y$ ist $\pi_Y(p) = \pi_Y(\emptyset) = \emptyset$), und dann folgt aus der Injektivität von $\pi_Y|_W : W \to \pi_Y(W)$ die Injektivität von $\Phi_Y : [W \cap Y, W] \to [Y, \langle W, Y \rangle]$ und damit mit Lemma 25 die Tatsache, daß (W, Y) ein modulares Paar ist. Somit ist Y dann auch zulässig. ■

Lemma 39 *Sei $Y \in \mathcal{M}$ und $p \in \pi_Y(U') \setminus \pi_Y(U)$. Bezeichne P das volle Urbild von p, also einen Unterraum $Y \subseteq P \subseteq \langle Y, U' \rangle$ mit $\pi_Y(P) = p$. Dann ist auch $P \in \mathcal{M}$. Analoges gilt für $p \in \pi_Y(V') \setminus \pi_Y(V)$.*

Beweis

Wir nehmen ein $p \in \pi_Y(U') \setminus \pi_Y(U)$ und das dazugehörige volle Urbild P mit $Y \subseteq P \subseteq \langle Y, U' \rangle$ und $\pi_Y(P) = p$.

Betrachten wir den DLS $\overline{\Sigma} := \pi_Y(\Sigma)$ und bezeichnen mit $\overline{W} := \pi_Y(W)$, $\overline{U} := \pi_Y(U)$, $\overline{V} := \pi_Y(V)$, $\overline{U}' := \pi_Y(U')$ und $\overline{V}' := \pi_Y(V')$. Da Y zulässig war, ist $\left(\overline{U}', \overline{V}'\right)$ ein modulares Paar (Definition 37(2)), ja sogar eine modulare Erweiterung von $\left(\overline{U}, \overline{V}\right)$ über $\overline{W}$ hinaus.

Der Punkt $p \in \overline{\Sigma}$ definiert eine Abbildung $\overline{\pi}_p : \overline{\Sigma} \to \overline{\Sigma}_p$. Offenbar kann man $\overline{\Sigma}_p$ mit Σ_P identifizieren, die Verkettung $\overline{\pi}_p \circ \pi_Y : \Sigma \to \overline{\Sigma}_p = \Sigma_P$ ist dann gleich der Abbildung π_P.

Weil $p \in \overline{U}'$ ist, gilt entweder $p \in \overline{U}' \cap \overline{V}'$ oder $p \in \overline{U}' \setminus \overline{V}'$. In beiden Fällen ist wegen Proposition 29 das Paar $\left(\overline{\pi}_p\left(\overline{U}'\right), \overline{\pi}_p\left(\overline{V}'\right)\right) = (\pi_P(U'), \pi_P(V'))$ modular. Um zu zeigen, daß P zulässig ist, wollen wir Lemma 38 auf die Abbildung π_P anwenden.

Da $p \notin \overline{W}$ war, ist $\overline{\pi}_p|_{\overline{W}} : \overline{W} \to \overline{\pi}_p\left(\overline{W}\right)$ isometrisch. Mit anderen Worten: die Verknüpfung $\overline{\pi}_p \circ \pi_Y = \pi_P$ ist - eingeschränkt auf W - isometrisch und Lemma 38 greift.

Der Fall $p \in \pi_Y(V') \setminus \pi_Y(V)$ ist damit auch bewiesen (vertausche U und V,...). ■

Wir nehmen nun einmal an, es gäbe ein maximales Element $Y_0 \in \mathcal{M}$. Wegen Lemma 39 muß dann gelten:

Korollar 40 *Für ein maximales Element $Y_0 \in \mathcal{M}$ gilt $\pi_{Y_0}(U') = \pi_{Y_0}(U)$ und $\pi_{Y_0}(V') = \pi_{Y_0}(V)$.* ■

Die Existenz eines maximalen Elementes folgt aber leicht:

Lemma 41 *$\mathcal{M}$ besitzt maximale Elemente und jedes maximale Element ist endlichdimensional.*

Beweis Dies folgt einfach aus der Bemerkung 36, denn die Elemente von $\mathcal{M}$ sind Unterräume des endlichdimensionalen Unterraums $\langle U', V' \rangle$. ■

Damit ist der Beweis von Proposition 35 eine einfache Folgerung:

Beweis *(von Proposition 35).*

Seien Σ, W, U und V wie in der Proposition angegeben. Wir wählen (U', V') und $\mathcal{M}$ wie oben. Hier betrachten wir nun ein *maximales Element*

$Y \in \mathcal{M}$ und behaupten, daß Y den Forderungen des Satzes genügt. Lemma 41 gibt uns - neben der Existenz von Y - auch $\dim Y < \infty$.

Da Y zulässig war, ist $\iota := \pi_Y|_W$ injektiv und isometrisch von W nach $\iota(W)$ (vgl. Lemma 38) also eine Einbettung.

Weil wir Y als maximales Element gewählt haben, ist $\pi_Y(U') = \pi_Y(U)$ und $\pi_Y(V') = \pi_Y(V)$ (Korollar 40), und wegen der Definition des Begriffes zulässig (Definition 37(2)) muß $(\pi_Y(U'), \pi_Y(V'))$ ein modulares Paar darstellen. Mithin ist auch $(\iota(U), \iota(V)) = (\pi_Y(U), \pi_Y(V)) = (\pi_Y(U'), \pi_Y(V'))$ ein modulares Paar. Die Behauptung von Proposition 35 ist bewiesen. ■

Um nun das Resultat aus Proposition 35 herzuleiten, ist - in der einen oder anderen Form - eine Induktion notwendig. Da sie über die Menge der nichtmodularen Paare (U, V) in W laufen muß, brauchen wir die Bedingung an die Mächtigkeit dieser Menge.

Das folgende Lemma stellt die benötigten Tatsachen zusammen, die wir bei der Induktion brauchen.

Lemma 42 *Wir nehmen mit $(I, \prec)$ eine (wohlgeordnete) Indexmenge und $(Y_i)_{i \in I}$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen von Σ.*

1. *Sei $W \subseteq \Sigma$ ein Unterraum, so daß die Paare (W, Y_i) modular disjunkt sind für alle $i \prec j$. Dann ist auch das Paar $\left(W, \bigcup_{i \prec j} Y_i\right)$ modular disjunkt.*

2. *Sei $W \subseteq \Sigma$ ein endlichdimensionaler Unterraum, so daß die Paare (W, Y_i) modular disjunkt sind für alle $i \in I$. Ist (U, V) ein modulares Paar in W, dann sind für alle $i \in I$ die Paare $(\langle Y_i, U\rangle, \langle Y_i, V\rangle)$ in $[Y_i, \langle Y_i, W\rangle]$ modular. Mit anderen Worten gilt dann für alle $i \in I$: $(\pi_{Y_i}(U), \pi_{Y_i}(V))$ ist modular in $\pi_{Y_i}(W)$.*

3. *Sei W und $(Y_i)_{i \in I}$ wie in 2, $U, V \subseteq \Sigma$, und es gebe ein $j \in I$, so daß $U, V \in [Y_j, \langle Y_j, W\rangle]$ liegen und (U, V) ein modulares Paar ist. Dann ist für alle $k \succ j$ das Paar $(\langle Y_k, U\rangle, \langle Y_k, V\rangle)$ modular in $[Y_k, \langle Y_k, W\rangle]$.*

Beweis

1. Zuerst ist Disjunktheit klar, denn $W \cap \bigcup_{i \prec j} Y_i = \bigcup_{i \prec j} (W \cap Y_i)$. Definieren wir $Y := \bigcup_{i \prec j} Y_i$ dann müssen wir $\langle X, Y\rangle \cap W = X$ für alle $X \subseteq W$ nachweisen. Ist aber $p \in \langle X, Y\rangle \cap W$, dann muß es - wegen $\langle X, Y\rangle = \bigcup_{i \prec j} \langle X, Y_i\rangle$ - ein i geben, so daß $p \in \langle X, Y_i\rangle \cap W = X$ und es folgt $\langle X, Y\rangle \cap W \subseteq X$. Die andere Inklusion ist aber trivial.

2. Sei $i \in I$ beliebig, aber fest und $Y_i =: Y$. Offenbar sind U und V jeweils endlichdimensional. Da auch die Paare (U, Y) und (V, Y) modular disjunkt sind, gilt:

$$\dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U) = \dim_\Sigma \pi(U) \text{ und } \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(V) = \dim_\Sigma \pi(V) \quad (2.2)$$

sowie (vergleiche Lemma 28.1)

$$\dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(\langle U, V\rangle) = \dim_\Sigma \langle U, V\rangle \quad (2.3)$$

Nun ist andererseits $\dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U \cap V) = \dim_\Sigma (U \cap V)$ und $\pi_Y(U \cap V) \subseteq \pi_Y(U) \cap \pi_Y(V)$ also mit (2.2) und (2.3):

$$\begin{aligned}
\dim_\Sigma (U \cap V) &= \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U \cap V) \\
&\leq \dim_{\Sigma_Y} (\pi_Y(U) \cap \pi_Y(V)) \\
&\leq \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U) + \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(V) \\
&\quad - \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(\langle U, V\rangle) \\
&= \dim_\Sigma U + \dim_\Sigma V - \dim_\Sigma \langle U, V\rangle \\
&= \dim_\Sigma (U \cap V)
\end{aligned}$$

(die letzte Zeile folgt aus der Modularität von (U, V)). Insgesamt muß die obere Ungleichungskette in Wirklichkeit eine Gleichungskette sein, insbesondere muß

$$\begin{aligned}
\dim_{\Sigma_Y} (\pi_Y(U) \cap \pi_Y(V)) &= \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(U) + \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(V) \\
&\quad - \dim_{\Sigma_Y} \pi_Y(\langle U, V\rangle)
\end{aligned}$$

gelten, also $(\pi_Y(U), \pi_Y(V))$ modular sein. Daraus folgt aber jetzt unmittelbar die Behauptung ($i \in I$ war fest aber beliebig).

3. Dies folgt sofort aus 2, wenn man zuvor die Quotientenbildung $\pi_{Y_j} : \Sigma \to \Sigma_{Y_j}$ durchführt. ■

Beweis *(von Satz 34).*

Wir wählen eine wohlgeordnete Indexmenge I mit Wohlordnung „$\prec$ “. Dabei können wir I so wählen, daß - bezüglich eines Elementes $i_{\sup}$ - $\mathcal{P}$ folgendermaßen abgezählt werden kann

$$\mathcal{P} = \{(U_i, V_i) \mid i \in I\,,\ i \prec i_{\sup}\}$$

und $|\{i \in I \mid i \prec i_{\sup}\}| < \kappa$. Wir schreiben $I' := \{i \in I \mid i \prec i_{\sup}\}$ und können OBdA $I = I' \cup \{i_{\sup}\}$ annehmen. Aus technischen Gründen soll I als kleinstes

Element die 0 enthalten, für jedes $i \in I$ sei $i+1$ das nächstgrößere Element (Nachfolger), $0+1$ sei 1.

Wir definieren für $j \in I$

$$\mathcal{P}_j := \{(U_i, V_i) \mid i \prec j\}$$

Per Induktion wollen wir nun eine aufsteigende Folge von Unterräumen $(Y_i)_{i \in I}$ konstruieren, so daß die Menge $\mathcal{P}_i$ die Aussage des Satzes mit dem Unterraum Y_i erfüllt, mit anderen Worten, wenn man in Satz 34 $\mathcal{P}$ durch $\mathcal{P}_i$ ersetzt und Y durch Y_i, dann entsteht eine wahre Aussage.

Zuerst bemerken wir, daß wir für $\mathcal{P}_1 := \{(U_0, V_0)\}$ Proposition 35 zu Hilfe ziehen können, und erhalten einen Unterraum Y_1, so daß die Aussage des Satzes stimmt. Y_1 ist endlichdimensional, also insbesondere ist $\dim Y_1 < \kappa$.

Sei $\mathcal{P}_i$ und Y_i schon konstruiert für $i \preceq j \prec i_{\sup}$. Wir nehmen an, daß $j+1 \preceq i_{\sup}$ gilt, und wollen $\mathcal{P}_{j+1}$ und Y_{j+1} konstruieren. Dann ist $\mathcal{P}_{j+1} := \mathcal{P}_j \cup \{(U_j, V_j)\}$ und Y_j der für $\mathcal{P}_j$ gefundene Unterraum von Σ, der die Anforderungen des Satzes erfüllt. Wir betrachten $\pi_{Y_j} : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_{Y_j} =: \Sigma^*$, dann ist Σ^* modular abgeschlossen. Nennen wir $W^* := \pi_{Y_j}(W), U^* := \pi_{Y_j}(U_j)$ und $V^* := \pi_{Y_j}(V_j)$, können wir Proposition 35 auf das Paar (U^*, V^*) von Unterräumen von $W^* \subseteq \Sigma^*$ anwenden und erhalten einen endlichdimensionalen Unterraum $Y^* \subseteq \Sigma^*$ mit der Eigenschaft, daß $\pi'_{Y^*} : \Sigma^* \twoheadrightarrow (\Sigma^*)_{Y^*}$ eingeschränkt auf W^* eine Isometrie $\pi'_{Y^*}|_{W^*} : W^* \hookrightarrow (\Sigma^*)_{Y^*}$ induziert und $(\pi'_{Y^*}(U^*), \pi'_{Y^*}(V^*))$ ein modulares Paar ist.

Wir betrachten das volle Urbild $\overline{Y} := \pi_{Y_j}^{-1}(Y^*)$, so daß die Verkettung $\pi'_{Y^*} \circ \pi_{Y_j}$ gegeben ist durch $\pi_{\overline{Y}} : \Sigma \twoheadrightarrow \Sigma_{\overline{Y}}$. Offenbar ist $\dim \overline{Y} < \kappa$, denn $\dim Y_j < \kappa$ und $h\left(\left[\overline{Y}, Y_j\right]\right) = \dim Y^* < \infty$ (man beachte Lemma 32.(1)). Nun ist

$$\pi_{\overline{Y}}|_W = \pi'_{Y^*}|_{W^*} \circ \pi_{Y_j}\big|_W$$

also bettet $\pi_{\overline{Y}}|_W$ als Verkettung zweier isometrischen Einbettungen den Raum W in den Raum $\pi_{\overline{Y}}(W) \subseteq \Sigma_{\overline{Y}}$ ein.

Für das Paar (U_j, V_j) ist

$$\begin{aligned}(\pi_{\overline{Y}}(U_j), \pi_{\overline{Y}}(V_j)) &= (\pi'_{Y^*}(\pi_Y(U)), \pi'_{Y^*}(\pi_Y(V))) \\ &= (\pi'_{Y^*}(U^*), \pi'_{Y^*}(V^*))\end{aligned}$$

also ist $(\pi_{\overline{Y}}(U_j), \pi_{\overline{Y}}(V_j))$ modular. Da die Paare $\left(\pi_{Y_j}(U_i), \pi_{Y_j}(V_i)\right)$ für $i < j$ modular waren, sind auch ihre Bilder unter der Einbettung π'_{Y^*} modular, mit anderen Worten alle Paare $(\pi_{\overline{Y}}(U_i), \pi_{\overline{Y}}(V_i))$ für $i \leq j$ sind modular. Damit sind aber alle Bilder der Paare von $\mathcal{P}_{j+1}$ unter der Abbildung $\pi_{\overline{Y}}$ modular. Insgesamt erfüllt $\overline{Y}$ die Erfordernisse des Satzes für die Menge $\mathcal{P}_{j+1}$, wir setzen also $Y_{j+1} := \overline{Y}$ und haben $Y_{j+1} = \overline{Y} \supseteq Y_j$.

Sei nun j eine Limeszahl, so daß j keinen direkten Vorgänger besitzt. Dann ist offenbar $\mathcal{P}_j = \bigcup_{i \prec j} \mathcal{P}_i$. Wir definieren $Y_j := \bigcup_{i \prec j} Y_i$ und behaupten, daß dieser Unterraum das gewünschte tut. Wegen Lemma 42 ist das Paar (W, Y_j) modular disjunkt, also $\pi_{Y_j}\big|_W$ eine Einbettung von W in Σ_{Y_j}. Sei nun $(U_{i_0}, V_{i_0}) \in \mathcal{P}_j$, dann ist offenbar $i_0 \prec j$ und (U_{i_0}, V_{i_0}) bereits in $\mathcal{P}_{i_0+1}$ enthalten. Damit ist aber $(\langle Y_{i_0+1}, U_{i_0}\rangle, \langle Y_{i_0+1}, V_{i_0}\rangle)$ modular und wegen Lemma 42.3 also auch

$$\left(\pi_{Y_j}(U_{i_0}), \pi_{Y_j}(V_{i_0})\right) = (\langle Y_j, U_{i_0}\rangle, \langle Y_j, V_{i_0}\rangle)$$

ein modulares Paar in $[Y_j, \langle Y_j, W\rangle]$. Weil für alle $i \prec j$ $\dim Y_i < \kappa$ war und $|\mathcal{P}_j| \leq |I'| < \kappa$ ist, gilt auch $\dim Y_j < \kappa$. Damit erfüllen auch Y_j und P_j die Erfordernisse des Satzes.

So haben wir die aufsteigende Folge $(Y_i)_{i \in I}$ zu den Mengen $\mathcal{P}_i$ mit $i \in I$ konstruiert. Offenbar ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{i_{\sup}}$ und mit $Y := Y_{i_{\sup}}$ haben wir den Unterraum mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. ■

Falls wir wissen, daß es in W weniger als κ Paare von Unterräumen gibt, kann W offenbar in Σ_Y so eingebettet werden, daß alle Bildpaare von Unterräumen modular sind. Ist $\iota : W \to \Sigma_Y$ diese Einbettung, dann ist leider noch nicht erreicht, daß $\iota(W)$ modular ist, denn es kommen ja eventuell „neue“ Unterräume hinzu.

Nun ist der DLS Σ_Y in Satz 34 selbst wieder $\kappa-$ modular abgeschlossen, denn Y war in $\Sigma^{(<\kappa)}$ und Σ war $\kappa-$ modular abgeschlossen. Somit kann man das Vorgehen in diesem Falle wieder iterieren und erhält eine (aufsteigende) Folge von Erweiterungen von W, so daß - lax formuliert - je zwei Unterräume in der „nächsten“ Erweiterung modular werden. Nimmt man die „Vereinigung“, dann erhält man einen modularen Raum. Dies beschreibt informell das weitere Vorgehen in diesem Abschnitt. Wir formulieren das Ziel:

Satz 43 *Sei Σ ein $\kappa-$ modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum. Falls die Kardinalität aller Elemente von $\Sigma^{(<\kappa)}$ kleiner als κ ist - also*

$$\forall X \in \Sigma^{(<\kappa)} \quad |X| < \kappa$$

gilt - dann ist W in einen modularen DLS $\widehat{W}$ einbettbar und $\dim \widehat{W} = \dim W$.

Beweis Wir wollen eine aufsteigende Folge von Unterräumen $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - $Y_i \in \Sigma^{(<\kappa)}$ - konstruieren mit folgenden Eigenschaften:

(E1) Für alle Y_i ist (Y_i, W) modular disjunkt. (Damit ist $\pi_{Y_i}|_W$ eine Einbettung $W \hookrightarrow \Sigma_{Y_i}$)

(E2) Für zwei aufeinanderfolgende Unterräume Y_i und Y_{i+1} gilt: Sind $U, V \in [Y_i, \langle Y_i, W\rangle]$, dann ist $(\langle Y_{i+1}, U\rangle, \langle Y_{i+1}, V\rangle)$ ein modulares Paar in $\Sigma_{Y_{i+1}}$.

Haben wir eine solche aufsteigende Folge gefunden, dann bilden wir $Y := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Y_i$. Aus Lemma 42.1 folgt, daß Y und W modular disjunkt sind. Desweiteren gilt:

$$\text{Sind } U, V \in [Y, \langle Y, W\rangle], \text{ dann ist } (U, V) \text{ modular.}$$

Denn weil U und V über Y endlichdimensional sind, gibt es Elemente $u_1, \ldots, u_n \in U$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$, so daß $U = \langle Y, u_1, \ldots, u_n\rangle$ bzw. $V = \langle Y, v_1, \ldots, v_m\rangle$ gilt. Zu den endlich vielen Punkten $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_m$ in $\langle Y, W\rangle$ wiederum gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_m \in \langle Y_i, W\rangle$ gilt. Wegen Bedingung (E2) folgt dann

$$(\langle Y_{i+1}, u_1, \ldots, u_n\rangle, \langle Y_{i+1}, v_1, \ldots, v_m\rangle) \text{ ist modular.}$$

Definieren wir einmal $\overline{U} := \langle Y_{i+1}, u_1, \ldots, u_n\rangle$ und $\overline{V} := \langle Y_{i+1}, v_1, \ldots, v_m\rangle$, dann sind also $\overline{U}, \overline{V} \in [Y_{i+1}, \langle Y_{i+1}, W\rangle]$ und $\left(\overline{U}, \overline{V}\right)$ ein modulares Paar. Mit Lemma 42.3 folgt dann, daß $\left(\left\langle Y, \overline{U}\right\rangle, \left\langle Y, \overline{V}\right\rangle\right)$ ein modulares Paar in $[Y, \langle Y, W\rangle]$ sind. Da aber $\left\langle Y, \overline{U}\right\rangle = U$ und $\left\langle Y, \overline{V}\right\rangle = V$ sind, folgt die obere Aussage.

Aus den oben gezeigten Punkten folgt nun aber, daß für unseren konstruierten Unterraum Y, die Einschränkung der Projektion $\pi_Y|_W$ eine Einbettung $W \hookrightarrow \Sigma_Y$ induziert und $\forall U, V \subseteq \pi_Y(W)$ das Paar (U, V) modular ist.

Definieren wir daher $\widehat{W} := \pi_Y(W)$, so haben wir die Behauptung des Satzes gezeigt. Es bleibt noch eine Folge $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Unterräumen mit den gewünschten Eigenschaften (E1) und (E2) zu konstruieren. Diese Folge wollen wir induktiv definieren:

Zu Beginn setzen wir $Y_0 = \emptyset$ und interpretieren $\Sigma_{Y_0} = \Sigma, \pi_{Y_0} = id_\Sigma$. Dann ist offenbar (E1) erfüllt.

Dann nehmen wir für $\mathcal{P}$ die Menge aller Unterraumpaare von W. Nach Voraussetzung ist $|\mathcal{P}| < \kappa$ und mit Satz 34 erhalten wir die Existenz eines Unterraumes $Y_1 \in \Sigma^{(<\kappa)}$, so daß die Einschränkung von π_{Y_1} auf W eine Einbettung $\pi_{Y_1}|_W : W \hookrightarrow \Sigma_{Y_1}$ induziert und für alle $U, V \subseteq W = \pi_{Y_0}(W)$ das Paar

$$(\pi_{Y_1}(U), \pi_{Y_1}(V)) = (\langle Y_1, U\rangle, \langle Y_1, V\rangle)$$

in $\pi_{Y_1}(W)$ modular ist. Damit ist (E2) erfüllt, ebenso wie (E1), da Satz 34 bereits die modulare Disjunktheit von Y_1 und W geliefert hat.

Nehmen wir an, wir hätten die Folge bereits bis zu dem Unterraum Y_n (mit $n \in \mathbb{N}$) konstruiert. Bezeichnen wir: $\widetilde{\Sigma} := \Sigma_{Y_n}, \widetilde{W} := \pi_{Y_n}(W)$, dann ist

$\widetilde{\Sigma}$ modular abgeschlossen und $\widetilde{W}$ ein endlichdimensionaler Unterraum und $\left|\widetilde{W}\right| < \kappa$. Mit Satz 34 erhalten wir einen endlichdimensionalen Unterraum $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{\Sigma}$ und die Projektion $\widetilde{\pi} : \widetilde{\Sigma} \twoheadrightarrow \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{Y}}$, so daß

1. $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{\Sigma}_{\widetilde{Y}}$ injektiv und
2. für alle $\widetilde{U}, \widetilde{V} \subseteq \widetilde{W}$ das Paar $\left(\widetilde{\pi}\left(\widetilde{U}\right), \widetilde{\pi}\left(\widetilde{V}\right)\right)$ modular ist.

Setzen wir $Y_{n+1} := \pi_{Y_n}^{-1}\left(\widetilde{Y}\right)$, mit anderen Worten Y_{n+1} sei das volle Urbild von $\widetilde{Y}$ der Abbildung π_{Y_n}. Offenbar gilt $\pi_{Y_{n+1}} = \widetilde{\pi} \circ \pi_{Y_n}$, und da $\pi_{Y_n}|_W$ und $\widetilde{\pi}|_{\widetilde{W}}$ injektiv sind, ist es auch $\pi_{Y_{n+1}}\big|_W$. Daraus folgt aber, daß (Y_{n+1}, W) modular disjunkt sind, also (E1).

Seien ferner $\widetilde{U}, \widetilde{V} \in [Y_n, \langle Y_n, W\rangle] \cong \pi_{Y_n}(W) = \widetilde{W}$. Dann haben wir oben schon bemerkt, daß das Paar $\left(\widetilde{\pi}\left(\widetilde{U}\right), \widetilde{\pi}\left(\widetilde{V}\right)\right)$ modular ist in $\Sigma_{Y_{n+1}}$. Aber es gilt ja

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}\left(\widetilde{U}\right) &= \pi_{Y_{n+1}}\left(\pi_{Y_n}^{-1}\left(\widetilde{U}\right)\right) = \left\langle Y_{n+1}, \widetilde{U}\right\rangle \\
\widetilde{\pi}\left(\widetilde{V}\right) &= \pi_{Y_{n+1}}\left(\pi_{Y_n}^{-1}\left(\widetilde{V}\right)\right) = \left\langle Y_{n+1}, \widetilde{V}\right\rangle,
\end{aligned}$$

und damit folgt ebenfalls (E2).

Damit ist unsere Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden und somit der Beweis des Satzes abgeschlossen. ■

2.4 Der endliche Fall ($\kappa = \aleph_0$)

Die Aussagen der Sätze des letzten Abschnitts wollen wir noch einmal für den Spezialfall $\kappa = \aleph_0$ formulieren:

Satz 34 liest sich dann:

Korollar 44 *Sei Σ ein modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum und $\mathcal{P}$ eine endliche Teilmenge der Menge aller Unterraumpaare von W. Dann gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum Y, so daß die Einschränkung $\iota := \pi_Y|_W$ eine Einbettung $\iota : W \hookrightarrow \Sigma_Y$ induziert und für alle $(U, V) \in \mathcal{P}$ das Paar $(\iota(U), \iota(V))$ in $\iota(W)$ modular ist.* ■

Satz 43 dagegen hat die Form:

Korollar 45 *Sei Σ ein modular abgeschlossener DLS, W ein endlichdimensionaler Unterraum. Falls alle endlichdimensionalen Unterräume von Σ endlich sind, dann ist W in einen modularen DLS $\widehat{W}$ einbettbar und* $\dim \widehat{W} = \dim W$. ■

Nun können wir sogar eine Bedingung angeben, wann ein (finitärer) DLS, dessen endlichdimensionalen Unterräume alle endlich sind, (endlich) modular abgeschlossen ist. Diese lautet wie folgt:

Proposition 46 *Sei Σ ein DLS, dessen endlichdimensionale Unterräume alle endlich sind. Es gebe Konstanten $C_1, C_2, x > 0$ mit*

$$C_2 > C_1 \text{ und } x > \left(\frac{C_2 x - C_1}{C_1 x - C_2}\right)^2$$

Falls für jeden endlichdimensionalen Unterraum U gilt:

$$C_1 x^{\dim_\Sigma U} \leq |U| \leq C_2 x^{\dim_\Sigma U}$$

Dann ist Σ endlich modular abgeschlossen, und jeder endlichdimensionale Unterraum W ist in einen modularen DLS $\widehat{W}$ der selben Dimension einbettbar.

Für den Beweis brauchen wir einige technische Begriffe. Starten wir mit

Definition 47 *Betrachten wir zwei endlichdimensionale Unterräume U, V, dann bezeichnen wir mit*

$$\delta(U,V) := \dim_\Sigma U + \dim_\Sigma V - \dim_\Sigma \langle U, V\rangle - \dim_\Sigma (U \cap V)$$

Die Semimodularität von Σ bedeutet gerade, daß $\delta(U,V) \geq 0$ für alle Paare (U,V). Ferner ist das Paar (U,V) modular genau dann wenn $\delta(U,V) = 0$.

Lemma 48 *Für jedes Tripel von endlichdimensionalen Unterräumen (U,V,W), wobei $U, V \subseteq W$ liegen und das Paar (U,V) nicht modular ist, gebe es ein Paar (U',V') von endlichdimensionalen Unterräumen mit*

$$U' \cap W = U \text{ und } V' \cap W = V$$

und

$$\delta(U',V') < \delta(U,V)$$

Dann ist Σ (endlich) modular abgeschlossen.

Beweis Wir müssen zeigen, daß für jedes Paar (U, V) in einem Unterraum W eine modulare Erweiterung über W hinaus existiert. Induktion über $\delta(U, V)$ gibt das Ergebnis schnell: Falls $\delta(U, V) = 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Ist $\delta(U, V) = 1$, dann wenden wir die Voraussetzung des Lemmas einmal an und erhalten ein Paar (U', V') mit $U' \cap W = U$ und $V' \cap W = V$ und $\delta(U', V') < \delta(U, V) = 1$, also $\delta(U', V') = 0$, und (U', V') ist eine modulare Erweiterung von (U, V) über W hinaus.

Sei $\delta(U, V) > 1$. Dann bekommen wir nach Voraussetzung ein Paar (U', V') mit $U' \cap W = U$ und $V' \cap W = V$ und $\delta(U', V') \leq \delta(U, V) - 1$. Für das Paar (U', V') und den Unterraum $W' = \langle W, U', V' \rangle$ können wir die Voraussetzung des Lemmas anwenden und erhalten ein modulares Paar (U'', V'') mit $U'' \cap W' = U'$ und $V'' \cap W' = V'$. Dieses Paar ist aber auch eine modulare Erweiterung von (U, V) über W hinaus, denn:

$$\begin{aligned} U'' \cap W &= (U'' \cap W') \cap W = U' \cap W = U \\ V'' \cap W &= (V'' \cap W') \cap W = V' \cap W = V \end{aligned}$$

die Behauptung folgt. ■

Wir werden jetzt - unter den Voraussetzungen von Proposition 46 - versuchen, so ein Paar (U', V') wie im Lemma zu konstruieren. Dazu betrachten wir *beliebige, aber fest gewählte* endlichdimensionale Unterräume U, V und W mit $U, V \subseteq W$, so daß (U, V) nicht modular ist.

Der Ansatz soll folgender sein: Wir betrachten „Einpunkterweiterungen“ von U und V, das heißt, wir wählen einen Punkt $p \in \Sigma \setminus W$, betrachten $U' := \langle U, p \rangle$ und suchen nun einen Unterraum V' in $\langle W, p \rangle$, der die gewünschten Eigenschaften aufweist. Die Details legen wir im Beweis zur Proposition dar:

Beweis *(von Proposition 46).*

Nehmen wir U, V, W und p wie oben. Betrachten wir $U' := \langle U, p \rangle$. Nun bilden wir die Menge

$$\mathcal{M} := \{V' \subseteq \langle U', V \rangle \mid V \subseteq V' \nsubseteq W \text{ und } \dim_\Sigma V' = \dim_\Sigma V + 1\}$$

und bemerken sofort, daß $\mathcal{M}$ nicht leer sein kann, da $\langle p, V \rangle \in \mathcal{M}$ ist. Nun gilt weiter

$$V' \cap W = V \quad \forall V' \in \mathcal{M} \tag{2.4}$$

Falls nämlich $V' \cap W \neq V$ wäre, müßte (wegen $\dim V' = \dim V + 1$) V' schon in W liegen.

Desweiteren ist $\mathcal{M}$ natürlich endlich, sei etwa $|\mathcal{M}| =: t$ und

$$\mathcal{M} = \left\{V_1', V_2', \ldots, V_t'\right\}$$

Wir setzen weiter $S := U \cap V$ und $S_i := U' \cap V_i^{'}$ für $i = 1, \ldots, t$, dann gilt

$$S_i \cap W = S \quad \forall i \in \{1, \ldots, t\} \tag{2.5}$$

denn:

$$\begin{aligned} S_i \cap W &= \left(V_i^{'} \cap U'\right) \cap W \\ &= \left(V_i^{'} \cap W\right) \cap (U' \cap W) \\ &= V \cap U \\ &= S \end{aligned}$$

wie in (2.5) behauptet. Für die Schnitte der S_i untereinander gilt sogar:

$$S_i \cap S_j = S \quad \text{für } i \neq j \tag{2.6}$$

Sei etwa $q \in (S_i \cap S_j) \setminus S$, dann muß wegen (2.5) $q \in V_i \setminus V$ und $q \in V_j \setminus V$ gelten, und wegen $\dim_\Sigma V_i = \dim_\Sigma V_j = \dim_\Sigma V + 1$ muß dann $V_i = \langle V, q \rangle = V_j$, also $i = j$ sein. Für $i \neq j$ muß daher $(S_i \cap S_j) \setminus S$ leer sein, (2.6) folgt.

Damit sind die Mengen $S_i \setminus S$ ($i \in \{1, \ldots, t\}$) paarweise disjunkt. Das gibt schon den zweiten Teil der folgenden Aussage:

$$\bigcup_{i=1}^{t} (S_i \setminus S) = U' \setminus U \quad \text{und die Vereinigung ist disjunkt.}$$

Der erste Teil gilt, denn für jedes $q \in U' \setminus U$ ist $\langle V, q \rangle \in \mathcal{M}$ und damit q in einer der Mengen S_i. Für die Mächtigkeiten bedeutet (2.6) $\sum_{i=1}^{t} |S_i \setminus S| = |U' \setminus U|$ und damit

$$|U' \setminus U| \leq t \cdot \max_{i=1,\ldots t} |S_i \setminus S| \tag{2.7}$$

Nun wollen wir die Schranken, die in der Proposition angegeben sind, ausnutzen. Dazu setzen wir erst einmal:

$$\begin{aligned} \dim_\Sigma S &= : d, \dim_\Sigma S_i =: d_i \text{ und } D := \max_{i=1,\ldots,t} d_i \\ \dim_\Sigma U &= : n \text{ und } \dim_\Sigma V =: m \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt für die an der Gleichung (2.7) beteiligten Glieder nach Voraussetzung:

$$|U' \setminus U| = |U'| - |U| \geq C_1 x^{n+1} - C_2 x^n = x^n (C_1 x - C_2) \tag{2.8}$$

$$|S_i \setminus S| = |S_i| - |S| \leq C_2 x^{d_i} - C_1 x^d \leq C_2 x^D - C_1 x^d \tag{2.9}$$

Dieses wirkt sich auf (2.7) wie folgt aus:

$$x^n (C_1 x - C_2) \leq t \cdot x^d \left(C_2 x^{D-d} - C_1 x\right)$$

Und das gibt uns eine Abschätzung für t:

$$t \geq x^{n-d} \frac{C_1 x - C_2}{C_2 x^{D-d} - C_1} \tag{2.10}$$

Ferner folgt aus (2.4) und der Tatsache, daß für jedes $q \in \langle U, V, p \rangle \setminus \langle U, V \rangle$ der Unterraum $\langle V, q \rangle \in \mathcal{M}$ ist,

$$\bigcup_{i=1}^{t} (V_i \setminus V) = \langle U, V, p \rangle \setminus \langle U, V \rangle \quad \text{disjunkt!}$$

Setzen wir $\dim_\Sigma \langle U, V \rangle =: l$, dann ergibt sich wie oben:

$$\begin{aligned} |\langle U, V, p \rangle \setminus \langle U, V \rangle| &= |\langle U, V, p \rangle| - |\langle U, V \rangle| \\ &\leq C_2 x^{l+1} - C_1 x^l \\ &= x^l \left(C_2 x - C_1 \right) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t} |V_i \setminus V| &= \sum_{i=1}^{t} \left(|V_i| - |V| \right) \\ &\geq t \cdot \left(\min_{i=1,\ldots,t} |V_i| - |V| \right) \\ &\geq t \cdot \left(C_1 x^{m+1} - C_2 x^m \right) \\ &= t \cdot x^m \left(C_1 x - C_2 \right) \end{aligned}$$

Setzen wir diese beiden Ergebnisse zusammen, erhalten wir als Abschätzung für t :

$$t \leq x^{l-m} \frac{C_2 x - C_1}{C_1 x - C_2}$$

Zusammen mit (2.10) ergibt sich:

$$x^{l-m} \frac{C_2 x - C_1}{C_1 x - C_2} \geq x^{n-d} \frac{C_1 x - C_2}{C_2 x^{D-d} - C_1}$$

also

$$x^{n+m-l-d} \leq \left(C_2 x^{D-d} - C_1 \right) \frac{C_2 x - C_1}{\left(C_1 x - C_2 \right)^2} \tag{2.11}$$

Da aber $n + m - l - d = \delta(U, V) > 0$ war (und aus den Voraussetzungen $x > 1$ folgt), gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{C_2 x - C_1}{C_1 x - C_2} \right)^2 &< x \leq x^{\delta(U,V)} \\ &\leq \left(C_2 x^{D-d} - C_1 \right) \frac{C_2 x - C_1}{\left(C_1 x - C_2 \right)^2} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & C_2 x - C_1 < C_2 x^{D-d} - C_1 \\ \Rightarrow \quad & x < x^{D-d} \end{aligned}$$

Woraus schließlich $D - d > 1$ also $D \geq d + 2$ folgt.

Sei jetzt OBdA $d_1 = D$, dann gilt offenbar:

$$\begin{aligned} \delta\left(U', V_1^{'}\right) &= \dim U' + \dim V_1^{'} \\ &\quad - \dim \left\langle U', V_1^{'} \right\rangle - \dim U' \cap V_1^{'} \\ &= (n+1) + (m+1) - (l+1) - D \\ &= n + m - l - (D-1) \\ &< n + m - l - d = \delta\left(U, V\right) \end{aligned}$$

und $U' \cap W = U$ beziehungsweise $V_1^{'} \cap W = V$. Damit haben wir zu einem beliebigen Tripel (U, V, W) mit $U, V \subseteq W$ ein Paar $\left(U', V_1^{'}\right)$ konstruiert, das den Bedingungen von Lemma 48 genügt. Wir schließen, daß Σ endlich modular abgeschlossen ist, und erhalten, daß wir jeden endlichdimensionalen Unterraum in einen modularen DLS einbetten können. ■

Kapitel 3

Von unendlichen zu endlichen Ebenen

3.1 Ein Gegenbeispiel

In Kapitel 2 haben wir gesehen, daß in einem gewissen Sinne lineare Räume, die in dimensionale lineare Räume beliebiger Dimension einbettbar sind, in projektive desarguessche Ebenen eingebettet werden können. Wir haben dazu den Begriff des (finitären) modular abgeschlossenen DLS entwickelt und gesehen, daß in einem solchen DLS - unter der Voraussetzung, daß endlichdimensionale Unterräume endlich sind - jede Ebene, die mindestens ein nichtausgeartetes Viereck enthält, in eine projektive desarguessche Ebene einbettbar ist. Wir haben uns keine Gedanken über die Endlichkeit der Zielebene gemacht. Ist die desarguessche Ebene, die wir zum Beispiel in diesem Fall erhalten, endlich?

Im allgemeinen wohl nicht, da in jedem Fall im letzten Schritt des Beweises von Satz 2.43 (Seite 56) eine *abzählbare* Vereinigung vonnöten war. In der Tat können wir Folgendes sagen:

Bemerkung 49 *Es gibt einen modular abgeschlossenen DLS Σ, dessen sämtliche endlichdimensionalen Unterräume endlich sind, und eine Unterebene $E \subseteq \Sigma$, so daß E* nicht *in eine* endliche *desarguessche projektive Ebene einbettbar ist.*

(Nach Satz 2.43 ist diese Ebene aber in eine projektive desarguessche Ebene einbettbar.)

Der Schlüssel zu diesem Gegenbeispiel liegt in der Tatsache, daß sich die Kommutativität des der Ebene zugrundeliegenden Körpers in der Gültigkeit der Pappusbedingung widerspiegelt. Wir wollen diese hier kurz angeben:

Definition 50 (Pappusbedingung)
Sei E eine projektive Ebene. Wir sagen E erfüllt die Pappusbedingung, wenn Folgendes gilt:

> *Seien A_1, B_1, C_1 drei kollineare Punkte und A_2, B_2, C_2 ebenfalls kollinear. Die Punkte seien paarweise verschieden und keine drei der vier Punkte A_1, A_2, B_1, B_2 seien kollinear, dann sind die Diagonalenschnittpunkte*

$$C_3 \ : \ = \overline{A_1B_2} \cap \overline{A_2B_1} \tag{3.1}$$
$$B_3 \ : \ = \overline{A_1C_2} \cap \overline{A_2C_1} \tag{3.2}$$
$$A_3 \ : \ = \overline{B_1C_2} \cap \overline{B_2C_1} \tag{3.3}$$

> *kollinear.*

Abbildung~3.1: Pappusfigur

Es gilt dann bekannterweise:

Proposition 51 *Die projektive Ebene E erfülle die Pappusbedingung. Dann ist E bereits desarguessch und der zugrundeliegende Koordinatenkörper ist kommutativ.* ■

Da nach Wedderburn jeder endliche Schiefkörper kommutativ ist, gilt außerdem:

Proposition 52 (Wedderburn)
Jede endliche desarguessche Ebene erfüllt die Pappusbedingung. ■

Definition 53 *Wir nennen neun paarweise verschiedene Punkte A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ einer partiellen Ebene* ***anti-pappussch****, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 sind kollinear.*
2. *Die Punkte A_3, B_3, C_3 ergeben sich als Schnittpunkte wie in Abbildung 3.1, also:*

$$\begin{aligned} C_3 &:= \overline{A_1B_2} \cap \overline{A_2B_1} \\ B_3 &:= \overline{A_1C_2} \cap \overline{A_2C_1} \\ A_3 &:= \overline{B_1C_2} \cap \overline{B_2C_1} \end{aligned}$$

3. *Die Geraden $\overline{A_3B_3}$, $\overline{A_3C_3}$, $\overline{B_3C_3}$ existieren, sind aber nicht identisch.*

Wir können damit die Aussage von Proposition 52 für unsere Zwecke in einer negativen Form aufschreiben

Lemma 54 *Die partielle Ebene Π enhalte neun Punkte A_i, B_i und C_i $(i = 1, 2, 3)$, diese seien anti-pappussch.*

Dann ist Π nicht *in eine* endliche *desarguessche projektive Ebene einbettbar (wenngleich dies für eine unendliche desarguessche Ebene der Fall sein kann).* ■

Nun kann man diese Bedingung leicht ausnutzen, um einen endlich modular abgeschlossenen DLS Σ anzugeben, dessen Unterräume sämtlich endlich sind, sowie einen endlichdimensionalen Unterraum $W \subseteq \Sigma$ der nicht in eine *endliche* desarguessche Ebene einbettbar ist (nach Satz 43 von Kapitel 2 ist W aber in eine desarguessche Ebene einbettbar).

Dazu nehmen wir einen unendlichdimensionalen desarguesschen Raum $\mathbf{PG}(\infty, K)$ über einem (echten) Schiefkörper K. Hier nehmen wir uns eine Ebene E. Diese enthält bestimmt neun paarweise verschiedene Punkte A_i, B_i und C_i $(i = 1, 2, 3)$, die anti-pappussch sind. Nun wählen wir in E eine endliche Punktmenge P_0 aus, die diese neun Punkte enthält.

Jetzt wollen wir induktiv immer weitere endliche Punktmengen aus dem Raum $\mathbf{PG}(\infty, K)$ auswählen, nämlich $P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots$, so daß die Punkte in P_i jeweils einen $i + 2$ - dimensionalen Unterraum von $\mathbf{PG}(\infty, K)$ aufspannen. Diese nennen wir $U_i := \langle P_i \rangle = \langle P_i \rangle_{\mathbf{PG}(\infty,K)}$. Unseren DLS Σ, den wir konstruieren wollen, erhalten wir dann wie folgt: Die Punktmenge von Σ ist die Vereinigung $\bigcup_{i=0}^{\infty} P_i$, und die Unterräume bekommen wir durch die Unterräume von $\mathbf{PG}(\infty, K)$ die von den Punkten in dieser Vereinigung aufgespannt werden (alle Dimensions- und Erzeugnisbetrachtungen

im folgenden beziehen sich auf $\mathbf{PG}(\infty, K)$). Bis jetzt haben wir erst P_0 und $U_0 = \langle P_0 \rangle = E$ definiert.

Nehmen wir an, wir hätten alle Punktmengen P_i und Unterräume U_i für $i = 1, \ldots, n$ definiert. Zuerst nehmen wir nun irgendeinen über U_n liegenden Unterraum U_{n+1} der Dimension $\dim U_{n+1} = \dim U_n + 1$.

Nun betrachten wir die Menge der Unterräume von U_n, die von Punkten von P_n erzeugt werden:

$$\mathcal{M}_n := \{\langle X \rangle \subseteq U_n \mid X \subseteq P_n\} \tag{3.4}$$

Bei der Wahl der „neuen" Punkte $P_{n+1} \backslash P_n$ müssen wir berücksichtigen, daß unser DLS Σ modular abgeschlossen sein soll. Dies lösen wir wie folgt: Zu je zwei Elementen $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_n$, für die $V_1 \cap V_2$ *kein* Element von $\mathcal{M}_n$ ist, nehmen wir einen Punkt $p \in U_{n+1} \backslash U_n$ und betrachten die Unterräume W_1, W_2 in U_{n+1}, so daß

$$W_j = \langle V_j, p \rangle \quad j = 1, 2$$

ist. Offenbar ist $\dim (W_1 \cap W_2) = \dim (V_1 \cap V_2) + 1$. Dann können wir eine Basis B_0 von $W_1 \cap W_2$ wählen, die *ganz in* $U_{n+1} \backslash U_n$ liegt. (B kann den Punkt p enthalten, muß aber nicht. Der Punkt p wird nicht weiter benötigt.)

Diese Basis ergänzen wir zu Basen B_1 von W_1 beziehungsweise B_2 von W_2, so daß:

$$B_1 \cap B_2 = B_0$$

$$B_j \subseteq U_{n+1} \backslash U_n$$

(Die Wahl der Basen B_0, B_1 und B_2 auf diese Art und Weise wird dadurch ermöglicht, daß die Unterräume V_1, V_2 und $V_1 \cap V_2$ *echt* in W_1, W_2 und $W_1 \cap W_2$ liegen.)

Nun fügen wir die Punkte von B_1 und B_2 zu P_n hinzu. So verfahren wir mit allen Unterraumpaaren $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_n$, für die $V_1 \cap V_2$ *kein* Element von $\mathcal{M}_n$ ist. Die Punktmenge, die wir dann durch Hinzufügen der Basispunkte zu P_n bekommen, nennen wir P_{n+1}.

Damit haben wir die Mengen P_n für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert!

Nach Konstruktion gilt offenbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\langle P_{n+1} \rangle = U_{n+1} \tag{3.5}$$

$$P_{n+1} \setminus P_n \subseteq U_{n+1} \backslash U_n \tag{3.6}$$

Betrachten wir $\mathcal{M}_{n+1}$ (oben unter (3.4) definiert), dann gibt es nach Wahl der Punkte in P_{n+1} für jedes Paar von Unterräumen $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_n$, für die $V_1 \cap V_2$ nicht in $\mathcal{M}_n$ liegt, ein Paar $W_1, W_2 \in \mathcal{M}_{n+1}$, so daß:

$$W_j \cap U_n = V_j \quad (j = 1, 2) \tag{3.7}$$

$$W_1 \cap W_2 \in \mathcal{M}_{n+1} \tag{3.8}$$

Sind in P_n nur endlich viele Punkte, dann ist auch die Menge $\mathcal{M}_n$ endlich. Damit ist aber auch P_{n+1} wieder endlich, da zu P_n nur endlich oft endlich viele Elemente hinzugefügt wurden (für jedes Paar $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_n$ weniger als $2 \dim U_{n+1} = 2(n+3)$ Punkte). Da wir mit der endlichen Menge P_0 begannen, sind alle P_n endlich.

Nun definieren wir unseren DLS Σ wie folgt: Die Punktmenge von Σ ist $P := \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, und die Unterräume sind die von den Teilmengen von P erzeugten Unterräume von $\mathbf{PG}(\infty, K)$. Offenbar erhalten wir einen finitären DLS, in dem die Unabhängigkeit von der linearen Unabhängigkeit in $\mathbf{PG}(\infty, K)$ geerbt ist und die Dimension der $\Sigma-$ Unterräume mit ihrer $\mathbf{PG}(\infty, K)$ - Dimension übereinstimmt.

Man sieht dann auch leicht, daß für zwei $\Sigma-$ Unterräume V_1 und V_2 der Raum $\langle V_1, V_2 \rangle_{\mathbf{PG}(\infty,K)}$ ebenfalls ein Unterraum vom Σ darstellt. Da in $\mathbf{PG}(\infty, K)$ alle Unterraumpaare modular sind, ist das Paar (V_1, V_2) in Σ modular dann und nur dann, wenn der $\mathbf{PG}(\infty, K)$ - Unterraum $V_1 \cap V_2$ ebenfalls ein Unterraum von Σ ist.

Man sieht auch sofort, daß die Menge der *endlichdimensionalen* $\Sigma-$ Unterräume gegeben ist durch $\mathcal{M} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$ (es gibt aber auch unendlichdimensionale Unterräume in Σ !). Die weiteren Eigenschaften von Σ sind:

Proposition 55 *Der wie oben angegeben konstruierte finitäre DLS Σ hat die folgenden Eigenschaften:*

1. *Die endlichdimensionalen Unterräume von Σ sind endlich.*

2. *Σ ist endlich modular abgeschlossen.*

3. *Die Unterebene $E = U_0$ von Σ ist nicht in eine endliche projektive desarguessche Ebene $\widehat{E}$ einbettbar.*

4. *Kein endlichdimensionaler Unterraum W von Σ, der den Unterraum U_1 enthält, ist in einen* endlichen *modularen DLS $\widehat{W}$ einbettbar.*

Beweis

1. Wir nehmen einen endlichdimensionalen Unterraum von Σ. Dieser entspricht einem Unterraum W vom $\mathbf{PG}(\infty, K)$ mit einer endlichen Basis $B \subseteq P$. Wir müssen zeigen, daß W nur endlich viele Punkte von P enthält.

Dazu betrachten wir ein festes n, für welches $B \subseteq P_n$ liegt. Dann gilt offenbar (vgl. (3.5)) $W \subseteq U_n$ und wegen (3.6) auch

$$W \cap (P_{n+1} \setminus P_n) = \emptyset$$

Daraus folgt nun direkt:

$$|W \cap P| = |W \cap P_n| < \infty$$

und damit die Behauptung.

2. Hier gehen wir ähnlich wie beim ersten Teil vor. Nehmen wir einen endlichdimensionalen Unterraum W von Σ (dieser soll auch gleich ein Unterraum von $\mathbf{PG}(\infty, K)$ sein), dann gibt es ein n (dieses wählen wir fest), für das $W \subseteq U_n$ liegt. Ferner seien V_1 und V_2 zwei $\Sigma-$Unterräume von W, die - in Σ - nicht modular sind, für die also der $\mathbf{PG}(\infty, K)$-Unterraum $V_1 \cap V_2$ nicht in $\mathcal{M}_n$ liegt.

   Nach Konstruktion bekommen wir Unterräume W_1 und W_2 von Σ, für die auch der $\mathbf{PG}(\infty, K)$-Unterraum $W_1 \cap W_2$ ein $\Sigma-$ Unterraum ist. Damit ist das Paar (W_1, W_2) ein modulares Paar von Σ (vgl. (3.8)). Wegen (3.7) ist dieses Paar sogar eine modulare Erweiterung von (V_1, V_2) über U_n - und damit auch über W - hinaus. Weil alle betrachteten Unterräume endlichdimensional sind, folgt die Behauptung.

3. Gäbe es eine Einbettung $\iota : E \hookrightarrow \widehat{E}$, dann enthielte die - wegen Proposition 52 pappussche - Ebene $\widehat{E}$ mit $\iota(A_i), \iota(B_i)$ und $\iota(C_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ anti-pappussche Punkte. Ein Widerspruch.

4. Nehmen wir einfach das Gegenteil an. W sei in $\widehat{W}$, den endlich modularen DLS, durch $\iota : W \hookrightarrow \widehat{W}$, einbettbar. Da Unterräume modularer DLS selbst wieder modular sind, muß das Bild von U_1 in einem endlichen modularen DLS $\widehat{U_1}$ der Dimension 3 liegen. $\widehat{U_1}$ ist somit ein verallgemeinerter projektiver 3-dimensionaler Raum (also entweder ein 3-dimensionaler projektiver Raum, die Summe einer projektiven Ebene und eines Punktes oder die Summe von zwei Geraden).

   Nun besitzt aber U_1 schon einmal mit den Punkten A_1, A_2, B_1, B_2 ein Viereck in $U_0 = E$. Damit liegt U_0 in $\langle \iota(U_0) \rangle_{\widehat{W}} =: \widehat{U_0}$ und diese muß eine endliche projektive Ebene sein. Damit kann $\widehat{U_1}$ nicht die Summe von zwei Geraden sein.

   Wäre $\widehat{U_1}$ nun die Summe der Ebene $\widehat{U_0}$ mit einem Punkt, dürfte die Punktmenge $\widehat{U_1} \setminus \widehat{U_0}$ nur aus einem Punkt bestehen. Wegen (3.5) muß

es in $U_1 \backslash U_0$ mindestens noch zwei weitere Punkte geben und damit auch in $\widehat{U_1} \setminus \widehat{U_0}$, womit auch der zweite entartete Fall ausscheidet.

$\widehat{U_1}$ ist also ein endlicher 3-dimensionaler projektiver Raum. Damit ist $\widehat{U_0}$ eine endliche projektive pappussche Ebene. Damit haben wir aber den gewünschten Widerspruch wie bei 3. ■

Mit dieser Proposition haben wir gezeigt, daß Σ wirklich das angekündigte Gegenbeispiel darstellt. In der Tat kann man sich mit einer leicht modifizierten Konstruktion auch Folgendes überlegen:

Bemerkung 56 *Es gibt einen modular abgeschlossenen DLS Σ, dessen sämtliche endlichdimensionalen Unterräume endlich sind, und eine Unterebene $E \subseteq \Sigma$, so daß Folgendes gilt:*

1. *Das Verfahren von Satz 43 liefert eine Einbettung von E in eine pappussche projektive Ebene $\widehat{E}$.*
2. *$\widehat{E}$ ist aber nicht endlich.*

Das heißt, selbst wenn uns das in Kapitel 2 entwickelte Verfahren zur Einbettung in modulare Räume als Zielraum einen Raum über einem kommutativen Koordinatenkörper liefert, können wir nicht genau vorhersehen, ob dieser Zielraum endlich oder unendlich ist. Diesen Nachteil soll der folgende Abschnitt „ausbügeln“.

3.2 Der Reduktionssatz

In vorherigen Abschnitt haben wir bemerkt, daß unser in Kapitel 2 entwickeltes Verfahren eine endliche partielle Ebene zwar in eine projektive Koordinatenebene über einem kommutativen Körper einbetten kann, jedoch nichts über Endlichkeit oder Unendlichkeit der Zielebene hergibt. Ziel dieses Abschnittes wird der Beweis der folgenden Aussage sein:

Satz 57 *Sei Π eine* endliche *partielle Ebene, die in eine projektive Ebene $\boldsymbol{PG}(2, K)$ über einem* nichtendlichen, kommutativen *Körper K einbettbar ist. Dann kann man Π auch in eine projektive Ebene $\boldsymbol{PG}(2, F)$ über einem* endlichen *Körper F einbetten.*

Bemerkung 58 *1. Die Aussage wird offenbar falsch, wenn man auf die Kommutativität von K verzichtet (wie wir im ersten Abschnitt sahen). Damit sieht man auch , daß Satz 57 nicht ganz trivial ist.*

2. *Es wurde nichts über die Charakteristik des Körpers K ausgesagt. In der Tat ist auch $\mathrm{char}\,(K) = 0$ zugelassen. Trivialerweise besitzt F dagegen positive Charakteristik.*

Um den angegebenen Satz beweisen zu können, benötigen wir etwas kommutative Algebra. Die Vorgehensweise wird wie folgt sein:

Wir identifizieren der Einfachheit halber die partielle Ebene mit dem Bild der Einbettung und betrachten die endliche Punktmenge P der Punkte von Π in $\mathbf{PG}(2, K)$ sowie sämtliche durch die Punkte von P definierten Geraden L. Im folgenden wollen wir diesen linearen Raum in eine endliche Koordinatenebene einbetten.

Nun vereinfachen wir die Aufgabe weiter, indem wir OBdA annehmen, die Punkte und Geraden lägen sämtlich in dem kanonischen affinen Teil $\mathbf{AG}(2, K)$ (man nehme die Punkte $\mathbf{P}(x, y, z) \in \mathbf{PG}(2, K)$ für die $z \neq 0$ ist) und können so affin rechnen.

Dazu müssen wir die Koordinaten der entsprechenden Punkte *und Geraden* betrachten. Nehmen wir etwa an, wir hätten n Punkte und $m \geq n$ Geraden:

$$\begin{aligned} P &= \{p_1, \ldots, p_n\} \\ L &= \{g_1, \ldots, g_m\} \end{aligned}$$

dann sind die Punkte gegeben durch Koordinatenpaare:

$$p_i = \mathbf{P}\,(x_i, y_i) \quad x_i, y_i \in K,\ i = 1, \ldots, n$$

die Geraden werden charakterisiert durch „Koordinaten“ a_j, b_j und c_j :

$$g_j = \mathbf{L}\,(a_j, b_j, c_j) \quad a_j, b_j, c_j \in K,\ j = 1, \ldots, m$$

so daß die Menge der mit einer Geraden inzidenten Punkte gegeben ist durch:

$$p_i \ \mathrm{I}\ g_j \Leftrightarrow a_j x_i + b_j y_i + c_j = 0$$

Die Punkte einer Geraden sind also gegeben durch Nullstellen eines Polynomes ersten Grades mit Koeffizienten in K. Wir definieren jetzt weiter die Zahlen

$$\delta_{ij} := a_j x_i + b_j y_i + c_j \quad i = 1, \ldots, n\,;\ j = 1, \ldots, m$$

und haben dann $p_i \in g_j \Leftrightarrow \delta_{ij} = 0$.

Die Menge aller für Π relevanten auftretenden Zahlen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} := \{x_i, y_i, a_j, b_j, c_j, \delta_{ij} \mid i = 1, \ldots, n\,;\ j = 1, \ldots, m\}$$

Nun betrachten wir den Primkörper k von K und den von k und $\mathcal{M}$ erzeugten Unterring R von K :

$$k \subseteq k[\mathcal{M}] =: R \subseteq K$$

R ist natürlich ein Integritätsbereich.

Falls R bereits ein Körper ist, ist er eine algebraische Erweiterung des Primkörpers k, denn als $k-$ Algebra ist er endlich erzeugt (vgl. Proposition 59 weiter unten).

Ist R kein Körper, dann suchen wir in R ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ mit $m_1 \neq m_2$ gilt: $m_1 - m_2 \notin \mathfrak{m}$. Dann betrachten wir den Restklassenhomomorphismus:

$$\pi_{\mathfrak{m}} : R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m} =: K_0$$

und werden sehen, daß man Π in eine affine Ebene über dem Körper K_0 einbetten kann. Da K_0 als $k-$ Algebra endlich erzeugt ist, ist K_0 eine algebraische Erweiterung des Primkörpers k.

Wäre die Charakteristik von k positiv, dann wären wir jetzt fertig, da K_0 als endlich erzeugter algebraischer Erweiterungskörper natürlich endlich wäre und wir hätten Π in eine endliche affine Ebene eingebettet.

Ist nun $k = \mathbb{Q}$, dann erhalten wir mit K_0 nur einen algebraischen Zahlkörper und eine Einbettung von Π in eine affine Ebene über dem Körper K_0. Wir gehen analog zu oben vor und nehmen OBdA an, daß die Menge $\mathcal{M}_0 := \pi_{\mathfrak{m}}(\mathcal{M})$ in dem ganzen Abschluß $\mathcal{O}_{K_0}$von $\mathbb{Z}$ in K_0 liegt:

$$\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{O}_{K_0}$$

Hier suchen wir wieder ein maximales Ideal $\mathfrak{n}$, so daß $m_1 - m_2 \notin \mathfrak{n}$ für alle $m_1 \neq m_2$ von $\mathcal{M}_0$ gilt. Dann erhalten wir eine Einbettung von Π in die affine Ebene über dem Restklassenkörper $K_1 := \mathcal{O}_{K_0}/\mathfrak{n}$. Da $\mathfrak{n}$ endlichen Index in $\mathcal{O}_{K_0}$ hat, ist K_1 nun endlich und wir haben unser Ziel erreicht.

Jetzt wollen wir mit der Ausführung beginnen und starten mit einigen Hilfsaussagen:

Proposition 59 (Hilberts Nullstellensatz, körpertheoretische Form)

Sei k ein Körper und $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ eine endlich erzeugte Ringerweiterung von k. Falls R ein Körper ist, dann ist R algebraisch über k.

Beweis Lang [28] Korollar IX.1.2. (Seite 379) ■

Mit $Max(R)$ bezeichnen wir die Menge der maximalen Ideale eines Ringes R.

Lemma 60 *Sei R ein Integritätsbereich (kommutativer nullteilerfreier Ring mit 1), der als $k-$ Algebra endlich erzeugt ist, dann gilt für das Jacobsonradikal*

$$Jac\,(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in Max(R)} \mathfrak{m} = \emptyset$$

Beweis Wir betrachten das Element $a \in R$, $a \neq 0$ und wollen ein maximales Ideal konstruieren, das a nicht enthält. Dann folgt die Behauptung. Offenbar sind nur Nichteinheiten $a \notin R^{\times}$ relevant.

Dazu betrachten wir den von R und a^{-1} erzeugten Unterring von $K = \mathrm{Quot}(R)$, dem Quotientenkörper von K. Sei also:

$$R \subseteq R\left[a^{-1}\right] =: S \subseteq K$$

Wir wählen ein maximales Ideal $\mathfrak{m}'$ in S und betrachten die Projektion von S auf den Körper $S/\mathfrak{m}' =: K'$:

$$\varphi : S \twoheadrightarrow S/\mathfrak{m}' = K'$$

Nun betrachten wir die Einschränkung $\psi := \varphi|_R$ und wollen zeigen, daß bereits ψ surjektiv ist.

Da R eine endlich erzeugte $k-$ Algebra war, trifft dies auch auf S und K' zu. Als Erweiterungskörper $K' \supseteq k$, der als $k-$ Algebra endlich erzeugt ist, ist K' eine algebraische Erweiterung von k (vergleiche Proposition 59).

Es ist $\overline{a} := \psi(a) = \varphi(a) \neq 0$, denn a war nach Konstruktion in S invertierbar. Da K' algebraisch über k ist, gibt es ein Polynom $f(X) \in k[X]$ (in einer Variablen X), so daß $f(\overline{a}) = \overline{a}^{-1} = \varphi(a^{-1})$ ist. Damit ist in der Tat $\varphi(a^{-1}) \in \psi(R)$, also

$$\psi(R) \supseteq \left\langle \varphi\left(a^{-1}\right), \varphi(R) \right\rangle = \varphi\left(\left\langle a^{-1}, R \right\rangle\right) = \varphi(S) = K'$$

und damit ist $\psi : R \twoheadrightarrow K'$ surjektiv.

Jetzt nehmen wir den Kern dieses Homomorphismuses: $\mathfrak{m} := \ker \psi$. Da $R/\mathfrak{m} \cong K'$ ist, muß $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R sein. Da $\psi(a) \neq 0$ ist, gilt auch $a \notin \mathfrak{m}$. Die Behauptung folgt. ■

Proposition 61 *Sei R ein Integritätsbereich mit $Jac(R) = 0$. Sei ferner $\mathcal{M} \subseteq R$ eine endliche Teilmenge. Dann gilt:*

1. *Es gibt ein $\mathfrak{m} \in Max\,(R)$, so daß $x_1 - x_2 \notin \mathfrak{m}$ ist für $x_1 \neq x_2$.*
2. *Es gibt für den Körper $F = R/\mathfrak{m}$ einen Ringhomomorphismus $\phi \in Hom(R, F)$, so daß*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathfrak{m} \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ ist } \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$$

3. *Falls $R = k[\mathcal{M}]$ für einen Körper k gilt, dann ist F ein Erweiterungskörper von k und es gibt eine Identität von $k-$ Algebren*

$$F = k[\phi(x) \mid x \in \mathcal{M}]$$

Da M endlich war ist speziell (wegen Proposition 59) F eine algebraische Erweiterung von k.

Beweis

1. Sei $\mathcal{M} = \{x_1, \ldots, x_l\}$ mit paarweise verschiedenen x_i. Wir nehmen die Zahlen $y_{i,j} := x_i - x_j$ und das Produkt: $z := \prod_{i \neq j} y_{i,j}$. Da R ein Integritätsbereich ist, muß $z \neq 0$ sein, denn da die x_i paarweise verschieden sind, müssen die $y_{i,j}$ für $i \neq j$ auch von Null verschieden sein.

   Nach Lemma 60 gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$, so daß $z \notin \mathfrak{m}$ ist. Dann ist aber auch keine der Zahlen $y_{i,j}$ für $i \neq j$ in $\mathfrak{m}$ sonst würde dies auch für das Produkt z gelten. Also gilt:

$$\forall i \neq j: \quad x_i - x_j = y_{i,j} \notin \mathfrak{m}$$

   und $\mathfrak{m}$ ist das maximale Ideal mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Wir nehmen das maximale Ideal mit den Eigenschaften von Teil 1 und betrachten den Körper $F := R/\mathfrak{m}$ sowie den Ringhomomorphismus $\phi : R \twoheadrightarrow F$, der durch die Restklassenabbildung gegeben ist. Da $x_1 - x_2 \notin \mathfrak{m}$ für $x_1 \neq x_2$ gilt, muß auch $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathcal{M})$ gelten.

3. Der Ringhomomorphismus von Teil 2 dieser Proposition ist in diesem Fall ein $k-$ Algebrenhomomorphismus. Denn durch ϕ wird der Körper k in den Körper F homomorph abgebildet. Da Homomorphismen von Körpern stets injektiv sind, ist auch F ein Erweiterungskörper von k.

   Da $R = k[\mathcal{M}]$ galt, ist natürlich $F = k[\phi(\mathcal{M})]$ als $k-$ Algebra. Da $\mathcal{M}$ endlich war, folgt mit Proposition 59, daß F eine algebraische Erweiterung von k ist. ■

Nun gilt aber folgende elementare Tatsache:

Lemma 62 *Sei F/k eine algebraische Körpererweiterung und F sei als $k-$ Algebra endlich erzeugt, dann ist $[F : k]$ endlich.*

Beweis Sei $F = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $\gamma_i := \deg x_i$ dann ist

$$\{x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\varepsilon n} \text{ mit } 0 \leq \varepsilon_i \leq \gamma_i \text{ für } i = 1, \ldots n\}$$

eine $k-$ Vektorraumbasis von F. ■

Bemerkung 63 *Die erste Bedingung folgt aus der zweiten eigentlich mit Proposition 59.*

Jetzt betrachten wir - wie eingangs erwähnt - die affine Ebene $\mathbf{AG}(2, K)$ und die Punkte

$$p_i = \mathbf{P}(x_i, y_i) \quad x_i, y_i \in K \ , \ 1 \leq i \leq n \tag{3.9}$$

Auch seien alle Verbindungsgeraden gegeben

$$g_j = \mathbf{L}(a_j, b_j, c_j) \quad a_j, b_j, c_j \in K \ , \ 1 \leq j \leq m \tag{3.10}$$

und Π sei der durch das System dieser Punkte und Geraden gegebene lineare Raum. Den trivialen Fall, daß alle Punkte auf einer Geraden liegen, wollen wir hier und auch im folgenden stets ausschließen.

Als Punktmenge haben wir:

$$g_j = \{\mathbf{P}(x, y) \mid a_j x + b_j y + c_j = 0\}$$

Wir setzen weiter

$$\delta_{i,j} := a_j x_i + b_j y_i + c_j \tag{3.11}$$

und haben also

$$p_i \in g_j \Leftrightarrow \delta_{i,j} = 0$$

Nun fassen wir die auftretenden Zahlen noch in einer Menge zusammen:

$$\mathcal{M} := \{x_i, y_i, a_j, b_j, c_j, \delta_{ij} \mid i = 1, \ldots, n\,;\, j = 1, \ldots, m\} \tag{3.12}$$

Sehr hilfreich im weiteren ist folgende Tatsache:

Lemma 64 *Sei K wie oben, R ein Unterring von K der $\mathcal{M}$ enthält und F ein weiterer Körper. Weiter sei $\varphi \in Hom(R, F)$ ein Ringhomomorphismus, so daß*

$$\forall z_1, z_2 \in \mathcal{M} : z_1 \neq z_2 \Rightarrow \varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$$

(mit anderen Worten φ ist auf $\mathcal{M}$ injektiv, insbesondere ist $0 \in \mathcal{M}$ und damit $\varphi(z) = 0$ für $z \in \mathcal{M}$ dann und nur dann, wenn $z = 0$).

Dann ist das System von Punkten

$$\overline{p_i} := \mathbf{P}\left(\varphi\left(x_i\right), \varphi\left(y_i\right)\right) \quad i = 1, \ldots, n$$

beziehungsweise Geraden

$$\overline{g_j} = \mathbf{L}\left(\varphi\left(a_j\right), \varphi\left(b_j\right), \varphi\left(c_j\right)\right) \quad j = 1, \ldots, m$$

in der Ebene $AG\left(2, F\right)$ *ein zu* Π *isomorpher linearer Raum.*

Beweis Sei α die durch

$$\begin{aligned} \alpha &: p_i \longmapsto \overline{p_i} \\ \alpha &: g_j \longmapsto \overline{g_j} \end{aligned}$$

gegebene Abbildung. Es gilt:

$$\begin{aligned} \overline{p_i} \in \overline{g_j} \quad & \Leftrightarrow \varphi\left(a_j\right)\varphi\left(x_i\right) + \varphi\left(b_j\right)\varphi\left(y_i\right) + \varphi\left(c_j\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \varphi\left(a_j x_i + b_j y_i + c_j\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \varphi\left(\delta_{i,j}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \delta_{i,j} = 0 \\ & \Leftrightarrow p_i \in g_j \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gibt es zu zwei verschiedenen Punkten p_i, p_k mindestens eine Gerade g_j mit $p_i \in g_j$, aber $p_k \notin g_j$. Somit gilt auch $\alpha\left(p_i\right) \in \alpha\left(g_j\right)$, aber $\alpha\left(p_k\right) \notin \alpha\left(g_j\right)$ und mithin $\alpha\left(p_i\right) \neq \alpha\left(p_j\right)$. Analog sieht man $\alpha\left(g_j\right) \neq \alpha\left(g_k\right)$ für zwei verschiedene Geraden $g_j \neq g_k$. Die Behauptung folgt. ■

Wir wollen dieses Lemma direkt anwenden, um einen ersten Schritt unseres Einbettungssatzes zu beweisen:

Proposition 65 *Sei* Π *eine partielle Ebene, die in die projektive Ebene* $\mathbf{PG}\left(2, K\right)$ *einbettbar ist. Sei weiter* k *der Primkörper von* K*, dann gibt es einen Erweiterungskörper* F *von* k *mit* $\left[F : k\right] < \infty$*, so daß* Π *in* $PG\left(2, F\right)$ *einbettbar ist.*

Falls $char\left(K\right) \neq 0$ *war, ist* F *endlich.*

Beweis Wir vereinfachen die Situation wie oben, so daß Π der durch die Punkte wie in (3.9) und Geraden wie in (3.10) gegebene lineare Raum ist, der in $\mathbf{AG}\left(2, K\right)$ liegt. Wir verwenden auch die Bezeichnungen (3.11) und (3.12).

Nun betrachten wir den Unterring $R := k[\mathcal{M}]$. Da $\mathcal{M}$ endlich ist, gilt für R nach Lemma 60 $\mathrm{Jac}(R) = 0$ und wir erhalten nach Proposition 61 einen Körper F und einen Ringhomomorphismus$\varphi \in$Hom(R, F), so daß

$$\forall z_1, z_2 \in \mathcal{M} : z_1 \neq z_2 \Rightarrow \varphi(z_1) \neq \varphi(z_2)$$

Mit Lemma 64 folgt die Existenz eines zu Π isomorphen linearen Raumes in $\mathbf{AG}(2, F)$.

Da F nach Proposition 61 als $k-$ Algebra endlich erzeugt war und F/k algebraisch war, ist $[F : k] < \infty$ (vergleiche Lemma 62) und das bedeutet im Falle, daß $char(K) \neq 0$, natürlich auch, daß F endlich ist. ■

Im Falle, daß unsere partielle Ebene Π in eine projektive Ebene $\mathbf{PG}(2, K)$ mit $char(K) \neq 0$ einbettbar ist, haben wir jetzt gesehen, daß Π in eine *endliche* projektive Ebene $\mathbf{PG}(2, F)$ (mit einem *endlichen* Körper F) eingebettet werden kann. Es bleibt noch der Fall $char(K) = 0$ zu behandeln. Dann ist $k = \mathbb{Q}$ und Proposition 65 ergibt nur:

Korollar 66 *Sei Π eine partielle Ebene, die in die projektive Ebene $\mathbf{PG}(2, K)$ einbettbar ist. Falls $char(K) = 0$ ist, gibt es einen algebraischen Zahlkörper F (eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$), so daß Π in $PG(2, F)$ einbettbar ist.* ■

Nun benötigen wir wieder einige Tatsachen.

Lemma 67 *Sei F ein algebraischer Zahlkörper und $\mathcal{O}_F$ der Ring der ganzen Zahlen von F. Dann gilt:*

1. *$Quot(\mathcal{O}_F) = F$*
2. *Für jedes $x \in F$ gibt es $N \in \mathcal{O}_F$ so daß $xN \in \mathcal{O}_F$.*
3. *Für jede endliche Menge $x_1, \ldots, x_n$ von Elementen von F gibt es $N \in \mathcal{O}_F$ so daß $x_i N \in \mathcal{O}_F$ („gemeinsamer Nenner“).*

Beweis Klar. ■

Damit können wir unsere Situation noch einmal etwas verbessern. Dazu betrachten wir den linearen Raum Π im algebraischen Zahlkörper F und wollen ihn noch „klein“ kriegen.

Lemma 68 *OBdA gilt in unserer Situation: $M \subseteq \mathcal{O}_F$, mit anderen Worten $x_i, y_i, a_j, b_j, c_j, \delta_{i,j} \in \mathcal{O}_F$.*

Beweis Man kombiniere das vorherige Lemma mit der Tatsache, daß die Abbildung

$$\mathbf{P}(x,y) \mapsto \mathbf{P}(Nx, Ny)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{L}(a,b,c) \mapsto \mathbf{L}(Na, Nb, Nc)$$

eine Kollineation der affinen Ebene $\mathbf{AG}(2,F)$ nach sich zieht ■

Nun gilt wie oben:

Proposition 69 *Für das Jacobsonradikal gilt: $Jac(\mathcal{O}_F) = 0$.*

Beweis In dem Dedekindring $\mathcal{O}_F$ ist jedes Primideal ein maximales Ideal. Damit gilt für das Jacobsonradikal (vergleiche die Bemerkungen zu Theorem 1.2 in Matsumura [33]):

$$\mathrm{Jac}(\mathcal{O}_F) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in Max(\mathcal{O}_F)} \mathfrak{m} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(\mathcal{O}_F)} \mathfrak{p} = \mathrm{Nil}(\mathcal{O}_F)$$

Natürlich ist $Spec(\mathcal{O}_F)$ die Menge aller Primideale und $\mathrm{Nil}(\mathcal{O}_F) = \sqrt{0}$ das Nilradikal von $\mathcal{O}_F$. Da $\mathcal{O}_F$ ein Integritätsbereich ist, muß $\mathrm{Nil}(\mathcal{O}_F) = 0$ sein, die Behauptung folgt. ■

Weiter gilt für die von Null verschiedenen Ideale in $\mathcal{O}_F$:

Lemma 70 *Sei F ein algebraischer Zahlkörper und $\mathcal{O}_F$ der Ring der ganzen Zahlen von F. Sei $\mathfrak{a}$ ein von Null verschiedenes Ideal von $\mathcal{O}_F$, dann ist der Index $(\mathcal{O}_F : \mathfrak{a})$ endlich.*

Beweis Vergleiche Neukirch [36] Satz (2.12) (Seite 16) ■

Wir nehmen nun ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \in Max(\mathcal{O}_F)$ geeignet, damit erhalten wir:

Proposition 71 *Wir betrachten die endliche Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{O}_F$. Dann gilt: Es gibt einen* ***endlichen*** *Körper F' und einen Ringhomomorphismus $\phi \in Hom(\mathcal{O}_F, F')$, so daß*

$$\textit{Für } x, y \in \mathcal{M} \textit{ mit } x \neq y \textit{ ist } \phi(x) \neq \phi(y)$$

Beweis Wegen Poposition 69 erhalten wir ein Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathcal{O}_F)$, so daß $x_1 - x_2 \notin \mathfrak{m}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ mit $x_1 \neq x_2$. Nun setzen wir $F' := \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$. Wegen Lemma 70 ist F' ein *endlicher* Körper. Die Restklassenabbildung $\phi : \mathcal{O}_F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}$ gibt uns den gewünschten Ringhomomorphismus. ■

Nun wenden wir wieder Lemma 64 an und erhalten:

Korollar 72 *Die affine Ebene* $\mathbf{AG}\,(2, F')$ *über dem* ***endlichen*** *Körper* F' *von Proposition 71 enthält einen zu* Π *isomorphen linearen Raum.* ■

Fassen wir die Ergebnisse nochmals zusammen, so erhalten wir den Beweis unseres Hauptresultats dieses Abschnittes:

Beweis *(von Satz 57)*

Wir nehmen unsere partielle Ebene Π. OBdA können wir annehmen, Π sei der lineare Raum, der durch eine endliche Punktmenge P in $\mathbf{PG}\,(2, K)$ gegeben ist. Dann sagt uns Proposition 65, daß im Falle $\mathrm{char}(K) \neq 0$ unsere Behauptung stimmt.

Im Falle $\mathrm{char}(K) = 0$ gibt uns Proposition 65 in Verbindung mit Korollar 72 die Gewißheit. ■

Kapitel 4

Translationsebenen

In den vorherigen Kapiteln haben wir Bedingungen untersucht, wann partielle Ebenen in desarguessche Ebenen einbettbar sind. Nun kann man sich überlegen, wie sich der Sachverhalt darstellt, wenn man die Klasse der zugelassenen Zielebenen etwas vergrößert. Die Frage, die hinter den Ausführungen des folgenden Abschnittes steht, lautet:

> Welche partiellen Ebenen sind in Translationsebenen einbettbar? Kann man Bedingungen angeben (etwa in Analogie zu einer verletzten Desarguesbedingung oder einer verletzten Pappusbedingung), die eine Einbettung in eine Translationsebene verbietet.

Das Ergebnis nehmen wir hier vorweg. Die Antwort gibt uns ein Satz von Kahlhoff [21]:

Satz 73 *Jede endliche partielle Ebene kann in eine abzählbare Translationsebene von beliebiger Charakteristik und Lenz-Klasse mindestens V eingebettet werden.*

Unser modifizierte Version dieses Satzes (ohne die Aussage über die Lenz-Klasse, dafür mit einer Dimensionsaussage) wird aus einem anderen Einbettungssatz folgen.

4.1 Existenz regulärer Einbettungen

Nachdem wir gesehen haben, daß sich die in Koordinatenebenen einbettbaren endlichen partiellen Ebenen leidlich gutartig verhalten, wollen wir schauen, wie sich partielle Ebenen verhalten, die sich in projektive Räume in der folgenden Form einbetten lassen: Wir wählen drei Zahlen d_P, d_L und d_E. Die

partielle Ebene soll in einen d_E- dimensionalen projektiven Raum eingebettet werden. Dabei sollen die Bilder der Punkte d_P- dimensionale Unterräume sein und die Bilder der Geraden sollen d_L- dimensionale Unterräume sein. Wir wollen etwas präziser sein:

Definition 74 *Sei $\Pi = (P, L, \in)$ eine partielle Ebene,(d_P, d_L, d_E) ein Tripel natürlicher Zahlen, so daß $d_P < d_L < d_E$ ist und K ein Körper. Eine Abbildung*

$$\varphi : P \cup L \longrightarrow \mathbf{PG}(d_E, K)^{(d_P)} \cup \mathbf{PG}(d_E, K)^{(d_L)}$$

für die

$$\varphi(P) \subseteq \mathbf{PG}(d_E, K)^{(d_P)} \text{ und } \varphi(L) \subseteq \mathbf{PG}(d_E, K)^{(d_L)}$$

und

$$\forall p \in P, g \in L : \; p \in g \Leftrightarrow \varphi(p) \subseteq \varphi(g)$$

*gilt, nennen wir eine $(d_P, d_L, d_E)-$ **Einbettung** von Π **über dem Körper** K.*

Bemerkung 75 *Man beachte, daß φ im allgemeinen keine Einbettung partieller Ebenen oder linearer Räume ist.*

Wir wollen noch etwas feinere Begriffe einführen:

Definition 76 *Sei φ eine $(d_P, d_L, d_E)-$ Einbettung von Π in den Raum $\mathbf{PG}(d_E, K)$.*

1. *Wir nennen φ eine **fastreguläre Einbettung**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

   (a) $d_P = 0$ *(die Bilder der Punkte von Π sind Punkte des projektiven Raumes).*

   (b) *Für alle verschiedenen $g_1, g_2 \in L$ ist*

   $$\varphi(g_1) \cap \varphi(g_2) \in \mathbf{PG}(d_E, K)^{(0)}$$

   also ein Punkt von $\mathbf{PG}(d_E, K)$.

2. *Wir nennen φ eine **reguläre Einbettung**, wenn φ fastregulär ist und darüberhinaus noch*

   $$d_E = 2d_L$$

   erfüllt.

Im Beweis des folgenden Satzes steckt die Hauptarbeit der folgenden Überlegungen

Satz 77 *Sei* $\Pi = (P, L)$ *eine endliche partielle Ebene, dann besitzt* Π *eine reguläre Einbettung über einem beliebigen lokalendlichen Körper* K.

Zuerst werden wir einige Hilfsresultate formulieren müssen:

Lemma 78 *Sei* $\Pi = (P, L)$ *eine endliche partielle Ebene, so daß:*

1. $\forall g_1, g_2 \in L\ \exists p \in P : p \in g_1 \cap g_2$
   (je zwei Geraden haben einen Punkt gemeinsam)
2. $\forall g_1, g_2 \in L : |g_1| = |g_2|$
   (je zwei Geraden inzidieren mit gleich vielen Punkte)

Dann besitzt Π *eine fastreguläre Einbettung über einem* beliebigen *endlichen oder unendlichen Körper* K.

Beweis Wir setzen $v := |P|$ und $\kappa := \max_{g \in L} |g|$. Nach Voraussetzung ist $\kappa := |g|$ für alle $g \in L$.

Zuerst bemerken wir, daß der Fall $v = \kappa$ (bzw. $|L| = 1$) trivial ist, weswegen wir uns auf $v > \kappa$ (bzw. $|L| > 1$) beschränken. Nun nehmen wir den projektiven Raum $\mathbf{PG}(v-1, K)$ und darin v unabhängige Punkte (eine Basis) $P^* \subseteq \mathbf{PG}(v-1, K)^{(0)}$ und eine Bijektion $\varphi : P \to P^*$. Wir wollen φ zu einer $(0, \kappa - 1, v - 1) -$ Einbettung ausdehnen, und zwar definieren wir für jedes $g \in L$:

$$\varphi(g) := \langle \varphi(p) \mid p \in g \rangle_{\mathbf{PG}(v-1,K)}$$

Wegen Voraussetzung 2 des Satzes ist $\varphi(g) \in \mathbf{PG}(v-1, K)^{(\kappa-1)}$, somit φ die gewünschte $(0, \kappa - 1, v - 1) -$ Einbettung. Wir wollen aber noch weiter zeigen, daß φ fastregulär ist (und haben damit unser Lemma bewiesen).

Offenbar ist nach Konstruktion $d_P = 0$. Wir müssen also noch zeigen, daß $|\varphi(g_1) \cap \varphi(g_2)| = 1$ ist für alle $g_1, g_2 \in L$ mit $g_1 \neq g_2$. Seien also zwei solche Geraden g_1 und g_2 gegeben. Wir schauen uns die Mengen der mit g_1 bzw. g_2 inzidenten Punkte an und setzen:

$$\begin{aligned} \{p \in g_1\} &= \{p_1, \ldots, p_\kappa\} \quad p_i \text{ paarweise verschieden} \\ \{p \in g_2\} &= \{p'_1, \ldots, p'_\kappa\} \quad p'_i \text{ paarweise verschieden} \end{aligned}$$

und können wegen Voraussetzung 1 $p_1 = p'_1$ annehmen. Damit hat die Menge $\mathcal{G} := \{p_1, \ldots, p_\kappa\} \cup \{p'_2, \ldots, p'_\kappa\}$ genau $2\kappa - 1$ Punkte und es gilt:

$$\langle \varphi(g_1), \varphi(g_2) \rangle = \langle \varphi(p) \mid p \in \mathcal{G} \rangle$$

also

$$\dim \langle \varphi(g_1), \varphi(g_2) \rangle = 2\kappa - 2$$

Da $\dim \varphi(g_1) = \dim \varphi(g_2) = \kappa - 1$, erhalten wir für den Schnitt:

$$\begin{aligned} \dim \varphi(g_1) \cap \varphi(g_2) &= \dim \langle \varphi(g_1), \varphi(g_2) \rangle - \dim \varphi(g_1) - \dim \varphi(g_2) \\ &= (2\kappa - 2) - (\kappa - 1) - (\kappa - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit ist $\varphi(g_1) \cap \varphi(g_2) \in \mathbf{PG}(v-1, K)^{(0)}$ ein Punkt und somit φ fastregulär wie behauptet. ■

Wir wollen unser Lemma jetzt zunächst auf alle partiellen Ebenen ausdehnen. Dies ist ein einfaches Korollar:

Korollar 79 *Sei* $\Pi = (P, L)$ *eine endliche partielle Ebene, dann besitzt* Π *eine fastreguläre Einbettung über einem* beliebigen *endlichen oder unendlichen Körper* K.

Beweis Wir betten Π in eine endliche partielle Ebene $\widetilde{\Pi}$ ein, die den Bedingungen des Lemmas 78 genügt. Die von Lemma 78 gelieferte fastreguläre Einbettung φ von $\widetilde{\Pi}$ gibt uns eine fastreguläre Einbettung von Π durch Restriktion auf Π.

Eine solche partielle Ebene $\widetilde{\Pi}$ ist aber schnell definiert: Zu je zwei Geraden erfinden wir einen neuen Punkt (den Schnittpunkt dieser Geraden) - führen also den ersten Schritt einer freien Erweiterung aus - und füllen anschließend alle Geraden mit sovielen Punkten auf, bis alle Geraden gleich viele Punkte besitzen. Man beachte, daß die Punkte unserer partiellen Ebenen nicht mit mehr als einer Geraden inzidieren müssen. ■

Es bleibt uns noch zu zeigen, daß wir aus dieser fastregulären Einbettung noch eine reguläre machen können. Zuerst einmal ist unsere konstruierte fastreguläre Einbettung im allgemeinen sicher *keine* reguläre Einbettung. Besitzt Π aus Lemma 78 nur einen Punkt, durch den drei Geraden gehen, dann gilt offenbar $v \geq 3\kappa - 2 > 2\kappa$, wenn $\kappa > 2$ ist (bei vier Geraden reicht schon $\kappa > 1$!). Wir müssen also noch die Dimension des Zielraumes drücken. Hier benützen wir die Methoden von Kapitel 1 zur Einbettung von $m-$ Einschränkungen projektiven Räumen in niederdimensionale. Beweisen wir also unseren Satz:

Beweis *(Satz 77)*

Zuerst nehmen wir einen unendlichen, aber lokalendlichen Körper K (die Charakteristik ist auch beliebig) unserer Wahl und einen endlichen Teilkörper K_0 (etwa den Primkörper).

Nun nehmen wir eine nach Korollar 79 existierende fastreguläre $(0, d, n)-$ Einbettung von Π in den projektiven Raum $\mathbf{PG}(n, K_0)$. Falls $n = 2d$ ist, sind wir fertig, denn die Einbettung von $\mathbf{PG}(n, K_0)$ in $\mathbf{PG}(n, K)$ (die von der Inklusion $K_0 \subseteq K$ herrührt) gibt uns dann die Behauptung.

Sei also $n > 2d$. Wir nehmen eine aufsteigende Kette $(K_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Teilkörpern von K :

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K$$

mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$[K_{i+1} : K_i] \geq 2d + 2$$

So eine Kette von Körpern gibt es in dem lokalendlichen Körper K ja stets. Für ein genügend großes $i > 0$ erhalten wir nach Satz 19 (Kapitel 1, Seite 38) eine isometrische Einbettung ($n' := 2d$):

$$\iota : 2d - \mathbf{PG}(n, K_0) \hookrightarrow 2d - \mathbf{PG}(n', K_i)$$

Wir wollen zeigen, daß die Verkettung $\phi := \iota \circ \varphi$ die gewünschte reguläre Einbettung liefert.

Für alle $U, U_1, U_2 \in \mathbf{PG}(n, K_0)$ gilt nun:

1. $\dim_{\mathbf{PG}(n,K_0)} U \leq 2d \Rightarrow \iota(U) = \langle \iota(p) \mid p \in U \rangle_{\mathbf{PG}(n',K_i)}$
2. $\dim_{\mathbf{PG}(n,K_0)} U \leq 2d \Rightarrow \dim_{\mathbf{PG}(n,K_0)} U = \dim_{\mathbf{PG}(n',K_i)} \iota(U)$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} p \in P \quad &\Rightarrow \dim \varphi(p) &&= 0 \\ &\Rightarrow \dim \phi(p) &&= \dim \iota(\varphi(p)) \overset{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g \in L \quad &\Rightarrow \dim \varphi(g) &&= d < 2d \\ &\Rightarrow \dim \phi(g) &&= \dim \iota(\varphi(g)) \overset{(2)}{=} d \end{aligned}$$

also ist ϕ eine $(0, d, n')-$ Einbettung. Um zu zeigen, daß sie fastregulär ist, müssen wir noch

$$|\phi(g_1) \cap \phi(g_2)| = 1 \quad \text{für } g_1 \neq g_2,\ g_i \in L \tag{4.1}$$

zeigen. Dazu wählen wir $g_1, g_2 \in L$ mit $g_1 \neq g_2$. Für $U_1 := \varphi(g_1)$ und $U_2 := \varphi(g_2)$ gelten die Dimensionsformeln:

$$\dim U_1 = \dim U_2 = d$$

$$\dim \langle U_1, U_2 \rangle = 2d$$

Wegen der oben erwähnten 1. Eigenschaft von ι ist $\langle \iota(U_1), \iota(U_2) \rangle = \iota(\langle U_1, U_2 \rangle)$ und somit

$$\dim \langle \iota(U_1), \iota(U_2) \rangle = \dim \iota(\langle U_1, U_2 \rangle) = 2d$$

Klar ist auch, daß $\dim \iota(U_1) = \dim \iota(U_2) = d$ ist. Damit erhält man in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \dim(\iota(U_1) \cap \iota(U_2)) &= \dim \langle \iota(U_1), \iota(U_2) \rangle - \dim \iota(U_1) - \dim \iota(U_2) \\ &= 2d - d - d \\ &= 0 \end{aligned}$$

und damit ist in der Tat $\dim(\phi(g_1) \cap \phi(g_2)) = 0$ also $|\phi(g_1) \cap \phi(g_2)| = 1$, was nach 4.1 noch zu zeigen war.

Damit haben wir also eine fastreguläre $(0, d, n')-$ Einbettung ϕ von Π in den projektiven Raum $\mathbf{PG}(n', K_i)$. Da K_i ein Teilkörper von K war, ergibt ϕ auch eine fastreguläre $(0, d, n')-$ Einbettung von Π in den Raum $\mathbf{PG}(n', K)$. Da nun aber $n' = 2d$ war, haben wir die gewünschte *reguläre* Einbettung gefunden. ■

Bemerkung 80 *Die Voraussetzung, daß K lokalendlich sein soll, ist nicht essentiell, sondern hier nur aus beweistechnischen Gründen mit aufgenommen. In der Tat genügt es, K in Abhängigkeit der partiellen Ebene Π genügend groß zu wählen.*

4.2 Eine neue Version des Satzes von Kalhoff

Um unsere Version des Satzes von Kahlhoff zu erhalten, benötigen wir nur noch das folgende

Lemma 81 *Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge d_0- dimensionaler Unterräume eines n_0- dimensionalen projektiven Raumes $\mathbf{PG}(n_0, K)$ ($|\mathcal{M}| \geq 2$). Die Elemente von $\mathcal{M}$ sollen paarweise disjunkt und K unendlich (ansonsten beliebig) sein.*

Nun nehmen wir einen $l-$ dimensionalen Unterraum U von $\mathbf{PG}(n_0, K)$, so daß alle Paare (U, V) mit $V \in \mathcal{M}$ disjunkt sind. Falls $l < d_0$ ist, gibt es einen d_0- dimensionalen Unterraum U^* von $\mathbf{PG}(n_0, K)$, so daß alle Paare (U^*, V) mit $V \in \mathcal{M}$ disjunkt sind und $U \subseteq U^*$ gilt..

Beweis Wir zeigen: In der Situation des Satzes gibt es einen $(l+1)-$ dimensionalen Unterraum U' gibt, so daß auch alle Paare (U', V) mit $V \in \mathcal{M}$ disjunkt sind. Induktiv folgt dann sofort die Behauptung (falls $d_0 = l+1$ sind wir fertig, ansonsten wenden wir die Überlegung auf $\mathcal{M}$, U' und $l' = l+1$ an). Der Fall $d_0 = 0$ ist nicht relevant (sonst wäre U die leere Menge).

Zuerst ist zu bemerken, daß folgende Ungleichung gilt

$$n_0 > 2d_0 \tag{4.2}$$

denn $\mathcal{M}$ enthielt mindestens zwei d_0- dimensionale Unterräume von $\mathbf{PG}(n_0, K)$, die disjunkt sind. Wir betrachten die Abbildung:

$$\gamma : \mathbf{PG}(n_0, K) \to \mathbf{PG}(n_0, K)/U \cong \mathbf{PG}(n_0 - l - 1, K)$$

Wir setzen $\mathcal{M}_0 := \gamma(\mathcal{M})$ und $m := n_0 - l - 1$, dann sind die Elemente von $\mathcal{M}_0$ d_0- dimensionale Unterräume von $\mathbf{PG}(m, K)$, die sich jetzt durchaus schneiden dürfen. Wegen 4.2 ist

$$\begin{aligned} m &= n_0 - l - 1 \\ &\geq d_0 + d_0 + 1 - l - 1 \\ &= d_0 + (d_0 - l) \\ &\geq d_0 + 1 \end{aligned}$$

, also sind die Elemente von $\mathcal{M}_0$ echte Unterräume von $\mathbf{PG}(m, K)$. Eine endliche Menge von echten Unterräumen kann den unendlichen Raum $\mathbf{PG}(m, K)$ nicht ausschöpfen, es gibt also einen Punkt $p_0 \in \mathbf{PG}(m, K)$, so daß $p_0 \notin V_0$ ist für alle $V_0 \in \mathcal{M}_0$. Sei $U' \supseteq U$ das volle Urbild von p_0 (also $U' := \gamma^{-1}(p_0)$), dann gilt also für alle $V \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} & \gamma(U') \cap \gamma(V) = \emptyset \\ \Rightarrow\ & U' \cap V \subseteq U \\ \Rightarrow\ & U' \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset \\ \Rightarrow\ & U' \cap V \end{aligned}$$

, und U' besitzt die gewünschten Eigenschaften. ■

Um die Konstruktion von Translationsebenen formulieren zu können, benötigen wir noch folgende Definition:

Definition 82 *Sei K ein Körper, $d_0 \in \mathbb{N}$ und $n_0 := 2d_0 + 1$. H sei ein n_0- dimensionaler projektiver Raum ($H \cong \mathbf{PG}(n_0, K)$)*

1. *Eine Teilmenge $\Sigma \subseteq H^{(d_0)}$ von d_0- dimensionalen Unterräumen von H heiße **partielles Spread**, wenn je zwei Elemente von Σ disjunkt (und damit wegen der Dimensionsbedingung komplementär) sind.*

2. *Ein partielles Spread Σ heiße* ***vollständiges Spread*** *oder einfach nur* ***Spread****, wenn zudem jeder Punkt $p \in H^{(0)}$ in einem (und damit in genau einem) Unterraum $S \in \Sigma$ liegt.*

Wir können mit Lemma 81 nun Angaben zu der Erweiterbarkeit von partiellen Spreads zu Spreads in einem projektiven Raum H über einem abzählbaren nicht-endlichen Körper machen:

Proposition 83 *Sei H ein $(2d_0+1)-$ dimensionaler projektiver Raum über einem abzählbar unendlichen Körper. Gegeben sei ferner ein endliches partielles Spread $\Sigma \subseteq H^{(d_0)}$, dann läßt sich Σ zu einem vollständigen Spread erweitern, das heißt, es gibt eine Menge $\widetilde{\Sigma}$ mit $\Sigma \subseteq \widetilde{\Sigma} \subseteq H^{(d_0)}$ und $\widetilde{\Sigma}$ ist ein vollständiges Spread.*

Beweis Mit K ist auch der projektive Raum H abzählbar. Wir zählen seine Punkte ab: $H = \{p_1, p_2, \ldots\}$ und definieren nun eine aufsteigende Folge von endlichen partiellen Spreads $(\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit $\Sigma =: \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \ldots$, so daß:

$$\text{Für alle } i \in \mathbb{N} \text{ ist } p_i \text{ in einem Unterraum } S \in \Sigma_i \text{ enthalten.} \tag{4.3}$$

Wir starten also mit $\Sigma_0 = \Sigma$. Nehmen wir an, wir hätten Σ_i für $i \leq j$ so konstruiert, daß alle p_i mit $i \leq j$ in einem Unterraum $S \in \Sigma_j$ enthalten.

Ist nun p_{j+1} in einem Unterraum $S \in \Sigma_j$ enthalten, können wir $\Sigma_{j+1} := \Sigma_j$ setzen. Sei also p_{j+1} in keinem der Unterräume $S \in \Sigma_j$ enthalten. Die Menge Σ_j ist endlich, und ihre Elemente sind paarweise disjunkte Unterräume der Dimension d_0 von H. p_{j+1} ist ein Unterraum der Dimension $l = 0$, und die Paare (p_{j+1}, S) mit $S \in \Sigma_j$ sind disjunkt. Wir können somit Lemma 81 auf $\mathcal{M} = \Sigma_j$ und $U = p_{j+1}$ anwenden und erhalten einen d_0- dimensionalen Unterraum U^* mit den Eigenschaften:

1. Die Paare (U^*, S) mit $S \in \Sigma_j$ sind paarweise disjunkt.

2. $p_{j+1} \in U^*$.

Somit stellt $\Sigma_{j+1} := \Sigma_j \cup \{U^*\}$ das gewünschte endliche partielle Spread dar.

Nun nehmen wir diese konstruierte Folge $(\Sigma_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und definieren $\widetilde{\Sigma} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} \Sigma_i$. Offenbar sind die Elemente von $\widetilde{\Sigma}$ paarweise disjunkte d_0- dimensionale Unterräume von H. Zu $p \in H^{(0)}$ gibt es offenbar ein $S \in \widetilde{\Sigma}$ mit $p \in S$, also ist $\widetilde{\Sigma}$ das gesuchte Spread, die Proposition bewiesen. ■

Bemerkung 84 *Hier ist die Bedingung der Abzählbarkeit von K nicht essentiell, im Gegensatz zu der Annahme der Unendlichkeit von K.*

Wie man aus Spreads Translationsebenen erzeugt geht auf André [2] beziehungsweise Bruck und Bose [7] zurück:

Proposition 85 *Sei $n = 2d$ und H eine Hyperebene des projektiven Raumes $\mathbf{PG}(n, K)$ über dem Körper K (somit ist $\dim H = 2(d-1)+1$). Sei ferner $\Sigma \subseteq H^{(d-1)}$ ein Spread von H. Wir definieren eine Inzidenzstruktur $\mathcal{A} := \mathcal{A}(\Sigma) := (A_P, A_L)$ wie folgt: „Punkte“ A_P sind die Punkte von $\mathbf{PG}(n, K) \setminus H$, „Geraden“ A_L sind die $d-$ dimensionalen Unterräume $U \in \mathbf{PG}(n, K)^{(d)}$, für die $U \cap H \in \Sigma$ ist. „Inzidenz“ sei die Inzidenz von $\mathbf{PG}(n, K)$.*

Für die so definierte Inzidenzstruktur gilt: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Sigma)$ ist eine affine Ebene mit transitiver Translationsgruppe. $\mathcal{A}$ wird koordinatisiert durch einen Quasikörper $\mathcal{Q}$. Der Kern von $\mathcal{A}$ ist der Körper K, und $\mathcal{Q}$ hat Dimension d über dem Körper K.

Beweis Vergleiche [7] ■

Wir kombinieren nun alle uns zur Verfügung stehenden Tatsachen und zeigen eine (in Bezug auf Dimensionsaussagen) leicht verbesserte Version des Kahlhoff'schen Satzes 73:

Satz 86 *Jede endliche partielle Ebene kann in eine Translationsebene über einem lokalendlichen abzählbaren Körper K beliebiger Charakteristik eingebettet werden, so daß der sie koordinatisierende Quasikörper endlichdimensional über K ist.*

Beweis Wir nehmen eine (nach Satz 77 existierende) reguläre $(0, d, n = 2d)-$ Einbettung ϕ unserer gegebenen partiellen Ebene $\Pi = (P, L)$ in $\mathbf{PG}(n, K)$ für einen lokalendlichen abzählbaren Körper K der gewünschten Charakteristik.

Wir betrachten die Menge aller Punkte:

$$\mathcal{M}_1 := \{\phi(p) \mid p \in P\}$$

und die Menge aller Schnittpunkte von Unterräumen der Einbettung:

$$\mathcal{M}_2 := \bigcup_{g_i \in L,\ g_1 \neq g_2} \phi(g_1) \cap \phi(g_2)$$

(Man beachte, daß aus der Regularität von ϕ folgt, daß $\phi(g_1) \cap \phi(g_2)$ nur aus einem Punkt besteht.) Nun vereinigen wir diese Mengen zu

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$$

Da P und L endlich sind, ist natürlich auch die Menge $\mathcal{M}$ eine endliche Punktmenge in dem unendlichen projektiven Raum $\mathbf{PG}(n, K)$. Wir können also eine Hyperebene

$$H \in \mathbf{PG}(n, K)^{(n-1)}$$

so wählen, daß

$$H \cap \mathcal{M} = \emptyset$$

ist. Für jedes $g \in L$ betrachten wir nun einen Unterraum

$$U_g := H \cap \phi(g)$$

Weil $\phi(g)$ mindestens einen Punkt $\phi(p)$ enthält, ist $\phi(g) \nsubseteq H$. Damit gilt $\dim U_g = \dim \phi(g) - 1 = d - 1$. Für verschiedene Geraden $g_1 \neq g_2$ gilt ferner

$$\begin{aligned} U_{g_1} \cap U_{g_2} &= H \cap \phi(g_1) \cap \phi(g_2) \\ &\subseteq H \cap \mathcal{M} = \emptyset \\ \Rightarrow \quad U_{g_1} \cap U_{g_2} &= \emptyset \end{aligned} \tag{4.4}$$

und somit sind die Unterräume U_{g_1} und U_{g_2} für $g_1 \neq g_2$ disjunkt. Nun bilden wir die Menge

$$\Sigma := \{U_g \mid g \in L\}$$

von $(d-1)-$ dimensionalen Unterräumen von H. Wegen 4.4 ist Σ sogar ein *partielles Spread* von H und es ist $|\Sigma| = |L|$.

Nun haben wir einen $n - 1 = 2d - 1 = (2(d-1)+1)-$ dimensionalen projektiven Raum H über einem abzählbar unendlichen Körper K und ein endliches partielles Spread $\Sigma \subseteq H^{(d-1)}$. Wenden wir Proposition 83 an, so erhalten wir ein *vollständiges Spread* $\widetilde{\Sigma}$ von H, das Σ enthält.

Wir betrachten die nach Proposition 85 konstruierte Translationsebene $\mathcal{A} = \mathcal{A}\left(\widetilde{\Sigma}\right)$. Diese besitzt die in jener Proposition geschilderten Eigenschaften. Falls wir nun noch zeigen, daß Π in diese Ebene eingebettet werden kann, sind wir fertig, denn die Aussagen über den koordinatisierenden Quasikörper folgen schon aus Proposition 85.

Aber die Unterräume $\phi(g)$ für $g \in L$ erfüllen ja gerade die Bedingungen

1. $\dim \phi(g) = d$
2. $\phi(g) \cap H \in \Sigma \subseteq \widetilde{\Sigma}$

und entsprechen daher „Geraden“ der affinen Ebene $\mathcal{A}$, ebenso wie natürlich die Punkte $\phi(p) \notin H$ für $p \in P$ sind und damit „Punkten“ von $\mathcal{A}$ entsprechen.

Somit induziert die Abbildung ϕ eine Abbildung ψ:

$$\psi : P \cup L \to \mathcal{A}_P \cup \mathcal{A}_L$$

nämlich

$$\psi(p) := \phi(p) \text{ und } \psi(g) := \phi(g),$$

so daß $\psi(P) \subseteq \psi(\mathcal{A}_P)$ und $\psi(L) \subseteq \psi(\mathcal{A}_L)$. Für jeden Punkt $p \in P$ und jede Gerade $g \in L$ gilt:

$$p \in g \Leftrightarrow \psi(p) \in \psi(g)$$

denn es galt ja bereits $p \in g \Leftrightarrow \phi(p) \in \phi(g)$, weil ϕ eine $(0, d, n)-$ Einbettung war (vergleiche Definition 74). Damit haben wir mit ψ unsere gewünschte Einbettung gefunden, die Behauptung folgt. ■

Mit diesem Satz kommt man der Lösung des allgemeinen Problems recht nahe, wie folgende Proposition zeigt:

Proposition 87 *Sei Π eine partielle Ebene. Diese lasse sich in eine Translationsebene θ einbetten, die durch den Quasikörper Q über dem Kern K koordinatisiert wird. Es gelte:*

1. *θ besitzt Lenzklasse mindestens V (i.e. Q ist distributiv).*
2. *Q ist endlichdimensional über K.*
3. *K ist lokalendlich.*

Dann läßt sich Π in eine endliche projektive Translationsebene einbetten.

Beweis Wir zeigen, daß der koordinatisierende Quasikörper Q lokal endlich ist. Für jede *endliche* Teilmenge $\mathcal{M}$ von Elementen von Q gibt es einen in Q enthaltenen *endlichen* Quasikörper $Q_{\mathcal{M}}$ (dessen Operationen „+“ und „$\circ$“ durch die entsprechenden Operationen in Q gegeben sind), so daß

$$\mathcal{M} \subseteq Q_{\mathcal{M}} \subseteq Q$$

Daraus folgt offenbar die Behauptung.

Nun nehmen wir zuerst eine Basis $\mathcal{B}$ von Q über K. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{B}$ endlich, sei etwa $n := |\mathcal{B}|$ und $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$. Wir definieren die Zahlen s_{ij}^k für $i, j, k = 1, \ldots, n$ - die *Strukturkonstanten* - durch:

$$b_i \circ b_j =: \sum_{k=1}^{n} s_{ij}^k b_k$$

Die Menge $\mathcal{M}_S := \left\{ s_{ij}^k \mid i, j, k = 1, \ldots, n \right\} \subseteq K$ ist ebenfalls endlich.

Betrachten wir zwei Elemente $x, y \in Q$ mit

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \end{aligned}$$

mit $x_i, y_i \in K$ für $i = 1, \ldots, n$. Da Q nach Voraussetzung sowohl links- wie auch rechtsdistributiv ist, erhalten wir für das Produkt $x \circ y \in Q$:

$$\begin{aligned} x \circ y &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, (b_i \circ b_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \sum_{k=1}^{n} s_{ij}^k b_k \\ &= \sum_{i,,j,k=1}^{n} x_i y_j s_{ij}^k b_k \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wir nehmen die 1_Q zu $\mathcal{M}$ hinzu und numerieren der Einfachheit halber die Elemente von $\mathcal{M} := \{1_Q = x^1, \ldots, x^m\}$ (mit $m := |\mathcal{M}|$). So erhalten wir Koordinatendarstellungen:

$$x^k =: \sum_{i=1}^{n} x_i^k b_i$$

Somit können wir die Menge der Zahlen definieren, die bei einer Darstellung der Elemente von $\mathcal{M}$ durch Basisvektoren auftreten:

$$\mathcal{M}_C := \left\{ x_i^k \,|\, i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m \right\} \subseteq K$$

Sei nun $K_{\mathcal{M}} \subseteq K$ ein *endlicher* Teilkörper von K, der die endlichen Mengen $\mathcal{M}_S$ und $\mathcal{M}_C$ enthält, und wir definieren die *endliche* Menge $Q_{\mathcal{M}} \subseteq Q$ durch

$$Q_{\mathcal{M}} := \left\{ x \in Q \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \ \wedge x_i \in K_{\mathcal{M}} \right\}$$

$Q_{\mathcal{M}}$ ist also gerade die Menge der Elemente von Q, deren Koordinaten in dem endlichen Körper $K_{\mathcal{M}}$ liegen. Offensichtlich ist $Q_{\mathcal{M}}$ abgeschlossen unter der Addition und wegen 4.5 auch unter der Quasikörpermultiplikation „$\circ$“, $Q_{\mathcal{M}}$ enthält die 1_Q.

Daß jede Gleichung

$$a \circ x = c$$

für $a, c \in Q_{\mathcal{M}}$ eine Lösung x in $Q_{\mathcal{M}}$ besitzt, folgt aus der $K_{\mathcal{M}}-$Linearität der Abbildung $x \mapsto a \circ x$ und der Tatsache, daß diese Abbildung als $K-$ lineare

Abbildung invertierbar war (dann ist diese Abbildung auch als $K_{\mathcal{M}}-$ lineare Abbildung invertierbar).

Somit ist $Q_{\mathcal{M}}$ ein endlicher Teilquasikörper von Q. Hat man nun ein Element $x^k \in \mathcal{M}$, dann gilt nach Wahl von $K_{\mathcal{M}}$ auch $x^k \in Q_{\mathcal{M}}$, also $\mathcal{M} \subseteq Q_{\mathcal{M}}$.

Da $\mathcal{M}$ endlich, aber ansonsten beliebig war, haben wir gezeigt, daß Q lokalendlich ist, was zu zeigen war. ■

Literaturverzeichnis

[1] **Aigner, M.** *"Combinatorial Theory"*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol **234**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979

[2] **André, J.** *"Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe"*, Math. Z. **60**, 156-186 (1954)

[3] **Batten, L.M. ; Beutelspacher, A.** *"The Theory of Finite Linear Spaces",* Cambridge University Press ,1993

[4] **Beutelspacher, A.** *"Embedding finite planar spaces in projective spaces"*, in: *Finite Geometries*, eds C.A. Baker und L.M. Batten; Marcel Dekker, New York

[5] **Bell, J.L. ; Slomson, A.B.** *"Models and Ultraproducts"*, North-Holland, Amsterdam, 1969

[6] **Birkhoff, G.** *"Lattice Theory ", 3rd Edition*, AMS Coll. Publ., Vol **XXV**, AMS, Providence, 1967

[7] **Bruck, R.H. ; Bose, R.C.** *"The Construction of Translation Planes from Projective Spaces"*, Journal of Algebra, **1**, 85-102 (1964)

[8] **Chang, C.C. ; Keisler, H.J.** *"Model Theory", 2nd Edition*, North-Holland, Amsterdam, 1977

[9] **Chein, O.; Pflugfelder, H.O.; Smith J.D.H.** *"Quasigroups and Loops, Theory and Application"*, Sigma Series in Pure Mathematics, Vol **8**, Heldermann-Verlag, Berlin, 1990

[10] **Buekenhout, F.** *"Handbook of Incidence Geometry"*, Elsevier Science, Amsterdam, 1995

[11] **Dembowski, P.** *"Freie und offene projektive Ebenen"*, Math. Zeitschr. **72**, 410-438 (1960)

[12] **Erdös, P.** *"Some of my Favorite Solved and Unsolved Problems in Graph Theory"*, Quaestiones Mathematicae **16**, 333-350 (1993)

[13] **Erdös, P.; Mullin; Sós; Stinson** *"Finite Linear Spaces and Projective Planes"*, Discrete Mathematics **47**, 49-62 (1983)

[14] **Faina, G.** *"Recent intrinsic characterizations of ovoids and elliptic quadrics in **PG**(3,**K**)"*, Annals of Discrete Mathematics **52**, 175-190, (1992)

[15] **Frank, R**. *"Projective Embedding of Certain Linear Spaces"*, J. Combin.Theory Ser. A **48**, 266-269 (1988)

[16] **Golumbig** *"Algorithmic graph theory and perfect graphs"* , Academic Press, New York, 1980.

[17] **Groetschel, M. ; Lovász, L. , Schrijver, A.** *"Polynomial algorithms for perfect graphs"*, Annals of Discrete Mathematics **21**, 325-356, (1984)

[18] **Hall, M.** *"Projective planes"*, Transact. Amer. Math. Soc. **54**, 229-277, (1943)

[19] **Hughes, D.R. ; Piper, F.C.** *"Projective Planes"*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York ,1973

[20] **Johnson, N. L.** *"Homomorphisms of Free Planes"*, Math. Z. **125**, 255-263 (1972)

[21] **Kalhoff, F**. *"On projective embeddings of partial planes and rank-three matroids"*, Discrete Mathematics **163**, 67-79 (1997)

[22] **Kantor, W. M.** *"Envelopes of Geometric Lattices"*, J. Combin.Theory Ser. A **18**, 12-26 (1975)

[23] **Kern, W.** *"On Finite Locally Projective Planar Spaces"*, J. Combin.Theory Ser. A **48**, 247-254 (1988)

[24] **Kövári, T. ; Sós, V.T. , Turán, P..** *"On a problem of Zarankiewicz"*, Colloq. Math. **3**, 50-57, (1954)

[25] **Kreuzer, A**. *"Zur Einbettung von Inzidenzräumen und angeordneten Räumen"*, Journal of Geometry, Vol. **35**, 133-151 (1989)

[26] **Kreuzer, A**. *"Projektive Einbettung nicht lokal projektiver Räume"*, Geometriae Dedicata **53**, 163-186 (1994)

[27] **Kreuzer, A**. *"Projective Embedding of [0, m]-Spaces"*, J. Combin.Theory Ser. A **70**, 66-81 (1995)

[28] **Lang, S.** *"Algebra", 3rd Edition*, Addison-Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1993

[29] **Liebeck, M.** *"The Classification of Finite Linear Spaces with Flag-transitive Automorphism Groups of Affine Type"*, J. Combin.Theory Ser. A **84**, 196-235 (1998)

[30] **Limbos, M**. *"Plongements de $PG(n,q)$ et $AG(n,q)$ dans $PG(m,q')$, $m < n$"*, C.R.Math.Rep.Acad.Sci. Canada, Vol **IV**, 65-68 (1982)

[31] **Lindström, B**. *"A Desarguesian theorem for algebraic combinatorial geometries"*, Combinatorica **5**, 237-239 (1985)

[32] **Lüneburg, H.** *"Translation Planes"*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York ,1980

[33] **Matsumura, H.** *"Commutative ring theory"*, Cambridge studies of advanced mathematics, Vol **8**, Cambridge University Press ,1986

[34] **Metsch, K**. *"Embedding Finite Planar Spaces into 3-Dimensional Projective Spaces"*, J. Combin.Theory Ser. A **51**, 161-168 (1989)

[35] **Metsch, K**. *"Linear Spaces with Few Lines"*, Lecture Notes in Mathematics, Vol **1490**, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[36] **Neukirch, J.** *"Algebraische Zahlentheorie"*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York ,1992

[37] **Ostrom, T.G. ; Sherk, F.A.** *"Finite projective planes with affine subplanes"*, Canad. Math. Bull. **7**, 549-560 (1964)

[38] **Percsy, N.** *"Locally embeddable geometries"*, Arch. Math., Vol. **37**, 184-192 (1981)

[39] **Pickert, G.** *"Projektive Ebenen", 2. Aufl.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol **80**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York ,1975

[40] **Roman, S.** *"A Problem of Zarankiewicz"*, J. Combin.Theory Ser. A **18**, 187-198 (1975)

[41] **Reiman, I.** *"Über ein Problem von K. Zarankiewicz"*, Acta Math.Acad. Sci. Hung. Vol. **IX**, 269-273 (1958).

[42] **Rigby, J.F.** *"Affine subplanes of finite projective planes"*, Canad. J. Math. **17**, 977-1014 (1965)

[43] **Salzmann, H. [et al.]** *"Compact Projective Planes"*, De Gruyter expositions in mathematics **21** , de Gruyter, Berlin New York ,1995

[44] **Teirlinck,L**. *"Combinatorial Properties of Planar Spaces and Embeddability"*, J. Combin.Theory Ser. A **43**, 291-302 (1986)

[45] **Thas, J.A.** *"Connection between the n-dimensional affine space $A_{n,q}$ and the curve C with equation $y = x^q$ of the affine plane A_{2,q^n}"*, Rend. Ist. di Matem.Univ. di Trieste Vol. **II**, Fasc. **II**, 146-151 (1970)

[46] **Wanner, T. ; Ziegler, G.M.** *"Supersolvable and Modularly Complemented Matroid Extensions"*, Europ. J. Combinatorics **12**, 341-360, (1991)

[47] **White, N.L.** *"Theory of Matroids"*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol **26**, Cambridge University Press ,1986

[48] **White, N.L.** *"Combinatorial Geometries"*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol **29**, Cambridge University Press ,1987

[49] **White, N.L.** *"Matroid Applications"*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol **40**, Cambridge University Press ,1992

[50] **de Witte, P**. *"Combinatorial Properties of Finite Linear Spaces"*, Bull.Soc.Math.Belg. **27**, 115-155 (1975)