

Graphentheorie

Eine anwendungsorientierte Einführung

von Prof. Dr. rer. nat. Peter Tittmann

mit 113 Bildern, zahlreichen Beispielen und 80 Aufgaben



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Inhaltsverzeichnis

1	Graphen	11
1.1	Definitionen	12
1.1.1	Knotengrade	13
1.1.2	Wege und Kreise	14
1.1.3	Zusammenhang	15
1.2	Operationen mit Graphen	16
1.2.1	Entfernen von Knoten und Kanten	16
1.2.2	Fusion und Kontraktion	16
1.2.3	Brücken und Artikulationen	18
1.2.4	Operationen mit Graphen	18
1.3	Spezielle Graphen	20
1.3.1	Der vollständige Graph	20
1.3.2	Weg und Kreis	21
1.3.3	Bäume	21
1.3.4	Bipartite Graphen	22
1.3.5	Reguläre Graphen	24
1.4	Isomorphe Graphen	24
1.4.1	Isomorphie	25
1.4.2	Gradfolgen	26
2	Graphen und Matrizen	29
2.1	Die Adjazenzmatrix eines Graphen	29
2.1.1	Potenzen der Adjazenzmatrix	30
2.1.2	Zerlegbare Matrizen	31
2.2	Die Inzidenzmatrix	32
2.2.1	Die Gradmatrix	32
2.3	Abstände in Graphen	33
2.3.1	Radius, Durchmesser und Zentrum	33
2.3.2	Die Abstandsmatrix	35
2.4	Gerüste	36
2.4.1	Die Anzahl der Gerüste	36
2.4.2	Die Admittanzmatrix und der Satz von Kirchhoff	38
3	Planare Graphen	42
3.1	Planare Einbettungen	42
3.1.1	Ebene Kurven und Einbettungen	42
3.1.2	Flächen eines planaren Graphen	44
3.1.3	Einbettungen auf der Kugel	44

3.1.4	Kreuzungszahl und Dicke	45
3.2	Die Eulersche Polyederformel	46
3.2.1	Polyeder	46
3.2.2	Die Polyederformel für zusammenhängende Graphen	47
3.2.3	Die Polyederformel für nicht zusammenhängende Graphen	49
3.3	Anwendungen der Polyederformel	49
3.3.1	Nichtplanare Graphen	49
3.3.2	Der Satz von Kuratowski	50
3.3.3	Maximale Kantenzahl planarer Graphen	52
3.3.4	Knotengrade in planaren Graphen	52
3.3.5	Platonische Körper	53
3.4	Der duale Graph	54
4	Unabhängige Knoten- und Kantenmengen	58
4.1	Unabhängige Knotenmengen	59
4.1.1	Die Unabhängigkeitszahl	59
4.1.2	Cliquen	62
4.1.3	Die Überdeckungszahl	62
4.2	Matchings	64
4.2.1	Alternierende Wege – der Satz von Berge	65
4.2.2	Der Satz von König	67
4.3	Der Kantengraph	68
4.4	Faktoren	69
5	Färbungen von Graphen	73
5.1	Grundlagen	73
5.1.1	Zulässige Färbungen	73
5.1.2	Die chromatische Zahl	74
5.1.3	Schranken für die chromatische Zahl	75
5.2	Färbungen von planaren Graphen	77
5.3	Das chromatische Polynom	79
5.3.1	Der vollständige Graph	79
5.3.2	Der Baum	80
5.3.3	Die Dekompositionsgleichung	80
5.3.4	Der Kreis	82
5.3.5	Chromatisches Polynom und chromatische Zahl	83
5.3.6	Partitionen der Knotenmenge	84
5.4	Eine Anwendung	85

6	Der Zusammenhang von Graphen	90
6.1	Der Knotenzusammenhang	90
6.1.1	Trennende Knotenmengen	90
6.1.2	Die Knotenzusammenhangszahl	91
6.1.3	Der Satz von Menger	92
6.2	Der Kantenzusammenhang	93
6.2.1	Schnittmengen	93
6.2.2	Schnitte	94
6.2.3	Die Kantenzusammenhangszahl	95
6.2.4	Knotenzusammenhang und Kantenzusammenhang	95
6.3	Trennende Knotenmengen	96
6.3.1	Anwendung zur Berechnung der Unabhängigkeitszahl	96
6.3.2	Ein Berechnungsbeispiel	97
6.3.3	Die Berechnung des chromatischen Polynoms	98
6.4	Partielle k -Bäume	100
6.4.1	k -Bäume	100
6.4.2	Partielle k -Bäume	101
6.4.3	Serien-Parallel-Graphen	102
7	Bäume	105
7.1	Eigenschaften von Bäumen	105
7.1.1	Die Anzahl der Bäume	106
7.1.2	Der Prüfercode und der Satz von Cayley	107
7.1.3	Isomorphieklassen von Bäumen	109
7.2	Wurzelbäume	109
7.2.1	Planare Bäume und Binärcodes	110
7.3	Binäre Bäume	112
7.3.1	Die Anzahl der binären Bäume	112
8	Kreise	116
8.1	Kreise in Graphen	116
8.1.1	Taille und Umfang	117
8.1.2	Basiskreise	117
8.2	Hamiltonkreise	119
8.2.1	Der Satz von Dirac	120
8.3	Eulerkreise	122
9	Gerichtete Graphen	126
9.1	Definitionen und Eigenschaften gerichteter Graphen	126
9.1.1	Wege und Erreichbarkeit	127

9.1.2	Zusammenhang und starker Zusammenhang	127
9.1.3	Orientierungen	128
9.1.4	Innen- und Außengrad	129
9.1.5	Quellen und Senken	130
9.2	Zyklen und Kozyklen	131
9.2.1	Zyklen	131
9.2.2	Vektorräume	131
9.2.3	Kozyklen	132
9.2.4	Zyklen- und Kozyklenräume	133
9.3	Turniere	137
9.4	Flüsse in Graphen	140
Lösungen		145
Literaturverzeichnis		157
Symbolverzeichnis		159
Sachwortverzeichnis		160