

**Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität München
Lehrstuhl für Technische Elektrophysik**

Modellierung und Simulation elektromechanischer Instabilitäten bei Mikrobauteilen

Eva-Renate König

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. h.c. D. Schröder

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. G. Wachutka
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat., Dr. rer. nat. habil. P. Rentrop

Die Dissertation wurde am 26.01.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 14.07.2005 angenommen.

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die numerische Simulation elektromechanischer Instabilitäten bei Mikrobauteilen. Kernstück ist ein neuartiges Homotopieverfahren (Pfadverfolgungsverfahren) zur numerischen Simulation von Mikrostrukturen mit elektrostatischem Antrieb, das sowohl stabile als auch instabile Arbeitsbereiche behandeln kann, wie sie bei dieser Klasse von Mikrostrukturen stets auftreten.

Charakteristisch für Mikrosysteme ist die Koppelung unterschiedlicher physikalischer Energieformen. Bauteile mit elektromechanischer Koppelung besitzen elektrische und mechanische Komponenten, die sich in der Wirkungsweise gegenseitig beeinflussen. Geschieht die Koppelung dieser zwei Energieformen ausschließlich über den Gebietsrand der jeweiligen Domänen, so treten bei dem Bauteil stets instabile Arbeitsbereiche auf.

Die Arbeit gibt einen Überblick über die bei MEMS (Microelectromechanical Systems) typischerweise auftretenden Instabilitäten und diskutiert die Schwierigkeiten, die mit bestehenden Ansätzen bei der numerischen Simulation von Instabilitäten bei MEMS entstehen.

Das neu entwickelte Homotopieverfahren koppelt einen BEM-Solver (Rand-Element-Methode) für den elektrostatischen und einen FEM-Solver (Finite-Element-Methode) für den mechanischen Bereich als "Black Boxes" über ein iteratives Relaxationsschema, das durch Pfadverfolgung eines Parameters gesteuert wird. Dieser Parameter hat eine physikalische Entsprechung und ist im interessierenden Arbeitsbereich monoton. Reibung, fluidische Dämpfung und dynamische Effekte werden nicht berücksichtigt.

Dieses Verfahren ermöglicht die stabile, schnelle und genaue Simulation starrer und flexibler Mikrostrukturen im gesamten Arbeitsbereich, unabhängig davon, ob es sich um stabile oder instabile Arbeitspunkte handelt.

So kann beispielsweise der Kontakt starrer und flexibler Elektroden mit der Gegenelektrode mit dem im FEM-Solver vorhandenen Kontaktalgorithmus ohne Bereichsumschaltung behandelt werden.

Die entwickelte Pfadverfolgungsmethode kann einen einzigen Parameter verwenden, ist aber auch in der Lage, in jedem Schritt automatisch und konsistent zwischen mehreren Parametern umzuschalten, z.B. zwischen Bauteil-Ladung Q , Bauteil-Kapazität C , elektrostatischer Summenkraft F oder zwischen den Positionen ausgewählter Oberflächenpunkte. Damit ist es möglich, auch solche MEMS vollständig zu simulieren, deren Arbeitsbereich nicht durch einen einzigen monotonen Parameter charakterisiert werden kann.

Die Praxistauglichkeit des Verfahrens wurde durch 2D-Simulation realer Mikrostrukturen demonstriert.

Abstract

This work treats the numerical simulation of electromechanical instabilities in microstructures. It presents a novel method in homotopy (path following method) for numerical simulation of electrostatically driven microstructures. The resulting numerical algorithm is able to simulate instabilities, which are inherent to this class of microelectromechanical structures.

A characteristic feature of microsystems is the presence of several coupled physical domains. Electromechanically coupled microsystems are comprised of electrical and mechanical components which affect each other. If the domains overlap only in a common margin, instabilities will always occur.

This thesis classifies the possible instabilities occurring with MEMS and reveals the difficulties of existing numerical simulation approaches in calculating unstable working areas.

The novel homotopy algorithm couples in an iterative relaxation scheme a BEM solver (Boundary Element Method) for the electrostatic domain with a FEM solver (Finite Element Method) for the mechanical domain in a black box mode combined with a path following method which is controlled by a parameter. This parameter has a physical significance and is monotonous in the simulated working areas. Friction, fluidical and dynamical effects are not yet included in the new simulation approach.

Applying this new algorithm results in a stable, fast and exact simulation of rigid as well as flexible structures in the full range of operation, regardless of stable or unstable areas.

Also contact problems, which arise when the rigid or flexible electrode touches the counterelectrode, do not pose a discontinuity to the algorithm, since the contact is handled directly by the FEM solver.

The newly developed algorithm can be controlled either by a single chosen parameter, or by multiple parameters, where in each step the most adequate one is automatically chosen and consistently activated. Possible parameters are for example the charge Q , the capacity C , the electrostatic force F or the position of geometrical points on the moving structure. This enables the simulation of arbitrary MEMS, even if no single parameter exists, which is monotonous in the whole area of operation.

The capabilities of the new numerical approach are demonstrated by 2D simulations of real microstructures.

Danksagung

Nur durch die Unterstützung vieler Personen war es möglich, die vorliegende Arbeit zu erstellen.

Zuallererst möchte ich meinem Doktorvater, Prof. Dr. Gerhard Wachutka, für die Ermutigung und Förderung dieser Arbeit und für seine stete Bereitschaft zur fachlichen und persönlichen Unterstützung danken, sowie für die Schaffung von Industriekooperationen und der Möglichkeit, aktuelle Forschungsergebnisse vor internationalem Publikum zu präsentieren.

Herrn Prof. Dr. Rentrop danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit und für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Bei allen Kollegen und Mitarbeitern des Lehrstuhls möchte ich mich für die produktive und freundschaftliche Arbeitsatmosphäre bedanken. Besonderer Dank gilt meiner Kollegin Frau Dr. Gabriele Schrag für die Bestärkung, diese Arbeit zu Ende zu führen.

Mein Dank geht auch an die Ingenieursozietät Groth/Faiss, Pfullingen, die durch Bereitstellung des Quellcodes der FEM-Software TP2000 und ihre Unterstützung eine direkte Implementation der der Arbeit zugrundeliegenden Ideen in den Code ermöglichte.

Besonders möchte ich noch Herrn Dr. Uwe Feldmann für sehr konstruktive Vorschläge zum Thema dieser Arbeit danken.

Meinen Eltern danke ich für die Unterstützung in meiner Ausbildungszeit, die dadurch den Grundstein für diese Arbeit gelegt haben.

Der herzlichste Dank geht an meine Familie, besonders an meinen Mann und meine Mutter, die durch ständige tatkräftige Unterstützung mir den Rücken freigehalten haben, diese Arbeit zu Ende zu führen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	11
2	Gekoppelte Systeme in der Mikrosystemtechnik	15
2.1	Klassifizierung und Übersicht von Koppelungen	15
2.2	Thermodynamische Betrachtung von gekoppelten Effekten bei MEMS	18
3	Mathematische Methoden zur Simulation von Mikrosystemen	23
3.1	Mathematische Verfahren und ihre Koppelung zur Simulation von Mikrosystemen	23
3.1.1	Numerische Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen . .	26
3.1.2	Ansätze zur Lösung gekoppelter Probleme	29
3.2	Charakteristische Probleme bei der Simulation elektrostatisch angetriebener Bauelemente	33
3.2.1	Instabilitäten bei elektrostatisch betriebenen Mikrobauelementen . . .	34
3.2.2	Klassifizierung von Instabilitäten	38
3.3	Homotopieverfahren	42
3.3.1	Anwendung der Homotopie auf MEMS	47
4	Numerische Realisierung elektromechanischer Koppelungen bei Mikrobauelementen	51
4.1	Stand der Technik	51
4.2	Wahl der Verfahren zur numerischen Umsetzung des elektromechanisch gekoppelten Problems	53
4.3	Homotopieverfahren mit Ladungssteuerung	57
4.3.1	Integration des Algorithmus in bestehende Software-Tools	60
4.4	Multiparameter-Homotopie	62
4.4.1	Grenzen der ladungsgesteuerten Homotopie in der Anwendung	63
4.4.2	Alternative Homotopieparameter und ihre Eigenschaften	64
4.4.3	Verallgemeinerung des Algorithmus mit Ladungshomotopie	66
4.4.4	Der Algorithmus der Multiparameter-Homotopie	68
4.5	Ergänzende Algorithmen zur Multiparameter-Homotopie	71
4.5.1	Schrittweitensteuerung durch Berücksichtigung der Krümmung	72
4.5.2	Kontaktalgorithmus	74
5	Überblick über die simulierten Mikrobauelemente	77
5.1	Klassifizierung elektrostatischer Strukturen	77

5.1.1	Starre Strukturen	77
5.1.2	Flexible Strukturen	80
5.1.3	Mischformen aus starrer und flexibler Struktur	82
5.1.4	Varianten des elektrischen und mechanischen Aufbaus	83
5.1.5	Zusammenhang zwischen Bauteilklassen, Simulationsproblemen und Simulationsansätzen	85
5.2	Ausgewählte Demonstratoren	86
5.2.1	Der Mikrokippspiegel	86
5.2.2	Die Mikromembran	87
5.2.3	Das Relais mit Biegebalken	88
5.2.4	Das Wanderkeilrelais	89
6	Eigenschaften und Verhalten des Algorithmus	91
6.1	Ladungshomotopie	91
6.1.1	Iterative Koppelung ohne Integration eines Homotopieverfahrens	91
6.1.2	Spannungskennlinien für ausgewählte Bauteile	94
6.1.3	Konvergenzverhalten	97
6.1.4	Genauigkeit und Robustheit	101
6.2	Multiparameter-Homotopie	104
6.2.1	Motivation	104
6.2.2	Verhalten des Verfahrens	105
6.2.2.1	Schaltverhalten	105
6.2.2.2	Das Steuerverhalten einzelner Parameter	115
6.2.3	Eigenschaften des Verfahrens	117
6.2.3.1	Robustheit und Konvergenzverhalten	117
6.2.3.2	Einschwingverhalten	119
6.2.3.3	Vergleich der Iterationsanzahl bei unterschiedlichen Steuerungen	121
6.2.3.4	Genauigkeit mit verschiedenen Homotopieparametern	123
6.3	Algorithmische Varianten	126
6.3.1	Alternative Prädiktoren und ihr Konvergenzverhalten	126
6.3.2	Schrittweitensteuerungen	128
6.3.2.1	Schrittweitensteuerung über die Krümmung	128
6.3.2.2	Kontaktalgorithmus	130
6.4	Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse	132
7	Simulationsergebnisse	134
7.1	Kennlinien für ausgewählte Bauteile	134
7.1.1	Grundkennlinien für ausgewählte Bauteile	135
7.1.2	Energieverteilungen	142
7.1.3	Feldstärken	146
7.2	Nicht-monotone Ladungsverläufe	148
7.3	Unstetige Verhaltensänderungen am Biegebalkenrelais	153
7.4	Charakteristikenverschiebung am Wanderkeilrelais	156
7.5	Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse	159

8	Zusammenfassung und Ausblick	161
A	Leistungsumfang der verwendeten Simulationsumgebung	164
A.1	Übersicht über das Finite-Element-Programm TP2000	164
A.2	Übersicht über das Rand-Element-Programm BETTI	165
A.3	Pre- und Postprozessor FEMAP	166

Kapitel 1

Einleitung

Mikroelektromechanische Systeme (MEMS) finden sich in verschiedensten technischen Anwendungen und werden schon seit einigen Jahren mit Hilfe von Halbleitertechnologien in großen Stückzahlen hergestellt. Inzwischen gibt es eine Vielzahl von Mikrosensor- und Mikroaktortypen wie Beschleunigungssensoren, Lagesensoren, Drucksensoren, chemische Analyseeinheiten auf einem Chip als Sensoren und Pumpen, Piezosteller, Kippspiegel, Relais und Mikromotoren als Aktoren. Ihnen allen gemeinsam ist die Herstellung aus Silizium oder Quarz durch Halbleitertechnologien, geringe Abmessungen im Bereich von wenigen Mikrometern bis einigen Millimetern, im allgemeinen hohe Zuverlässigkeit und Robustheit und ein geringer Stückpreis aufgrund der lithografischen Massenfertigung.

Dem geringen Stückpreis stehen jedoch erhebliche Entwicklungskosten und, bei neuartigen Sensortypen, mehrjährige Entwicklungszeiten gegenüber, was nicht nur erhebliche finanzielle, sondern auch Marktrisiken nach sich zieht. Im Gegensatz zu den ausgereiften Entwurfsmethoden für integrierte Schaltungen ist die Entwicklung von MEMS noch wenig systematisiert und auf Versuche angewiesen, selbst bei Variationen eines vorhandenen Produkts.

Um den Entwicklungsprozeß zu beschleunigen und die Zahl der erforderlichen Prototypen zu reduzieren, sind, ebenso wie im "klassischen" Schaltungsentwurf, Computersimulationen unabdingbar. Dabei ist zu unterscheiden zwischen der Systemsimulation zur Optimierung des Zusammenspiels vieler Komponenten, der Bauelementesimulation auf Feldebene, die die Eigenschaften eines Bauelements aus seiner Geometrie und seinen Materialparametern unter Berücksichtigung ausgewählter physikalischer Effekte bestimmt, und der Prozeßsimulation, die die Herstellung eines Bauelements simuliert.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bauelementesimulation. In diesem Bereich stehen Simulationswerkzeuge zur Berechnung von elektrischen Feldern, von Wärmeströmungen, mechanischen Festigkeits- und Verformungszuständen und von Fluidströmungen bereits in hoher Qualität zur Verfügung und haben sich in vielen Gebieten bewährt.

Mikrosensoren und -Aktoren sind aber prinzipiell dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen mehrere Energieformen eng gekoppelt sind. In Mikrospiegeln wirken z. B. mechanische und elektrostatische Energie, Mikropumpen verkoppeln die mechanische, elektrische und fluidische Energiedomäne, bei piezoelektrischen Sensoren und Aktoren sind im selben Volumen mechanische und elektrische Energieformen zu berücksichtigen.

Simulatoren für MEMS müssen also gekoppelte Probleme lösen können.

Zur Lösung gekoppelter Probleme sind prinzipiell zwei Ansätze (und deren Mischformen) möglich, nämlich der simultane und der iterative Ansatz. Der simultane Ansatz stellt ein Modell des gesamten gekoppelten Mikrosystems auf und löst das entstehende Gleichungssystem als Ganzes. Der iterative Ansatz berechnet sequentiell, von einem anfänglichen Arbeitspunkt in jeder beteiligten Energiedomäne ausgehend, die Verhältnisse in jeder Domäne einzeln, wobei die aktuelle Näherung der Lösung aus der anderen Domäne festgehalten wird, bis die Arbeitspunkte der einzelnen Energiedomänen in einem konsistenten Gesamtzustand angelangt sind.

Der simultane Ansatz hat den Vorteil hoher Stabilität und kurzer Rechenzeiten, aber den Nachteil, hohen Programmieraufwand zu erfordern und sehr spezifisch zu sein, was bedeutet, daß für neue Arten der Koppelung oder neu hinzukommende Energiedomänen wieder neuer Programmieraufwand erforderlich ist. Der iterative Ansatz hat den Vorteil, auf bestehende Simulationswerkzeuge für einzelne Energiedomänen zurückgreifen zu können und wenig Programmieraufwand zu erfordern, aber den Nachteil, daß die Stabilität des Verfahrens nicht von vornherein gegeben ist.

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein Verfahren zur stabilen iterativen Koppelung von Simulatoren für die mechanische und elektrische Energiedomäne. Mit diesem Verfahren kann im gesamten Arbeitsbereich das Verhalten von starren und flexiblen MEMS berechnet werden, bei denen ein elektrostatischer Antrieb gegen mechanische Verformungskräfte oder Federn wirkt. Diese Klasse von MEMS wird als randgekoppelte MEMS bezeichnet, weil bei ihnen elektrische und mechanische Energiedomäne räumlich getrennt und über Oberflächenkräfte auf dem gemeinsamen beweglichen Rand gekoppelt sind.

Diese Klasse von MEMS ist in einem wesentlichen Teil des Arbeitsbereichs inhärent instabil; für sie existiert noch kein Simulationsverfahren, das den gesamten Arbeitsbereich abdecken kann. Zentraler Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung eines numerischen Verfahrens, das das Bauteilverhalten im gesamten Arbeitsbereich stabil, rasch und genau simulieren kann, unabhängig von vorhandenen Instabilitäten.

In elektrostatisch angetriebenen MEMS sind außerdem Anschlag- und Kontaktprobleme zu behandeln. Die bewegliche Elektrode des Bauteils kann starr sein und in der Endposition die Isolationsschicht der Gegenelektrode berühren, sie kann aber auch flexibel sein und sich während des Betriebs an die Isolationsschicht der Gegenelektrode anschmiegen. Das Verfahren muss in der Lage sein, auch diese Kontaktfälle korrekt zu behandeln.

Diese Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit dem Ingenieurbüro IGF Groth & Faiss, Pfullingen, deren FEM-Simulator in dieser Arbeit benutzt wurde.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert :

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Energieformen, die in MEMS zu berücksichtigen sind, und stellt die möglichen Koppelungen zwischen den jeweiligen Energieformen dar. Anschließend werden auf Grundlage der Thermodynamik die physikalischen Gleichungen sehr allgemein formuliert, die diese Energieformen und ihre Koppelungen beschreiben. In einem weiteren Schritt werden sie für den elektro-thermo-mechanischen Fall spezialisiert.

Kapitel 3 spezialisiert diese Formulierung noch weiter für den elektrostatisch-mechanischen Fall, der Gegenstand dieser Arbeit ist, und stellt Lösungsverfahren für die Differentialgleichungen in den einzelnen Energiebereichen und Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme vor. Anschließend werden die spezifischen Probleme der hier betrachteten MEMS, nämlich Instabilitäten und Kontakt, vorgestellt und analysiert. Es zeigt sich, daß diese Klasse nur mit sehr robusten numerischen Methoden erfolgreich zu behandeln ist. Daher bieten sich hier sogenannte Einbettungs- oder Homotopieverfahren an, bei denen die gesuchte Lösung als Grenzfall einer Folge von parametrisierten "Zwischenlösungen" berechnet wird.

Danach werden die erwähnten Homotopieverfahren zunächst allgemein vorgestellt und dann auf das vorliegende Problem angewendet.

In Kapitel 4 werden die neu entwickelten Algorithmen dargestellt. Dieses Kapitel stellt zunächst den Stand der Technik in bezug auf die Simulation der betrachteten MEMS-Klasse dar, begründet anschließend die Entscheidungen bei der Auswahl der Solver für das mechanische und elektrostatische Teilproblem und erläutert die Auswahl des Homotopieparameters "Ladung".

Dann wird der ladungsgesteuerte Homotopiealgorithmus detailliert dargestellt.

Darauf folgend wird eine Multiparameter-Homotopie eingeführt. Zunächst wird die Eignung weiterer Parameter für verschiedene Teile des Arbeitsbereichs gezeigt. Anschließend wird ein verallgemeinerter Algorithmus hergeleitet, der beliebige Homotopieparameter benutzen kann. Darauf aufsetzend wird die Multiparameter-Homotopie entwickelt, die automatisch und konsistent zwischen verschiedenen Parametern umschaltet, um eine gleichmäßig feine Diskretisierung der Lösung zu erreichen.

Im letzten Schritt werden noch zwei ergänzende Algorithmen dargestellt, um die sogenannte Snap-in-Spannung und die Release-Spannung effizient zu berechnen.

Kapitel 5 nimmt zunächst eine generelle Klassifizierung von Strukturen mit elektromechanischer Koppelung vor. Anschließend folgt ein detaillierter Überblick der Strukturen, die in dieser Arbeit genauer untersucht wurden.

Kapitel 6 stellt die beobachteten numerischen Eigenschaften des Algorithmus dar. Zunächst werden die algorithmischen Eigenschaften der ladungsgesteuerten Homotopie im Hinblick auf Konvergenzverhalten, Genauigkeit und Robustheit an ausgewählten Beispielen untersucht. Anschließend wird für die Multiparameter-Homotopie zusätzlich zu diesen Eigenschaften auch das Steuer- und Schaltverhalten der einzelnen Parameter untersucht. Die Untersuchung der ergänzenden Algorithmen und eine Zusammenfassung schließen das Kapitel ab.

In Kapitel 7 werden Simulationsergebnisse für die ausgewählten Beispiele präsentiert. Zunächst werden die Kennlinien für Ladung, Spannung und Kapazität und der Verlauf der geometrischen Formen gezeigt, anschließend Energieverteilungen und Oberflächenfeldstärken.

Im zweiten Teil des Kapitels werden Eigenschaften von Bauelementen behandelt, die mit den implementierten Verfahren erstmals gefunden werden konnten. Es wird untersucht, wie sich Formänderungen auf die Kennlinien von vorgekrümmten Relais auswirken. Dann wird gezeigt, daß die Ladung sich bei manchen Bauteilen nicht monoton verhält. Dies spiegelt sich auch in den Energieverläufen wieder, von denen manche ebenfalls nicht monoton sind.

Zusammenfassung und Ausblick in Kapitel 8 schließen die Arbeit ab.

Kapitel 2

Gekoppelte Systeme in der Mikrosystemtechnik

Mikrosysteme verkoppeln in ihrer Funktion in der Regel einen elektrischen und einen oder mehrere nicht-elektrische Energiebereiche, beispielsweise den mechanischen, thermischen oder fluidischen Energiebereich. Das Gesamtverhalten des Mikrosystems ergibt sich nicht nur aus den Eigenschaften der einzelnen Energiebereiche, sondern ganz wesentlich aus ihrer Koppelung. In der nachfolgend betrachteten Unterklasse der Mikrosysteme, den mikroelektromechanischen Systemen (MEMS), wirken elektrostatische Kräfte, mechanische Kräfte sowie piezoresistive und piezoelektrische Effekte, außerdem muß als parasitärer Einfluß die Temperatur betrachtet werden und die fluidische Dämpfung der mechanischen Komponente. Entsprechend zerfällt die Klasse der MEMS in piezoelektrische, piezoresistive und elektrostatische MEMS. Das Funktionsprinzip mikroelektromechanischer Systeme ergibt sich aus dem Wandlerprinzip, d.h. physikalische Größen eines Energiebereichs werden in die eines anderen umgewandelt.

Als Beispiel für piezoelektrische Sensoren und Aktoren können Ultraschallmikrofone und -sender angeführt werden, der piezoresistive Effekt wird in Drucksensoren verwendet, als elektrostatische Sensoren und Aktoren sind z.B. Neigungssensoren und Membranpumpen zu nennen.

Die Abbildung 2.1 zeigt exemplarisch die Koppelung zwischen den für MEMS wichtigsten physikalischen Energieformen.

2.1 Klassifizierung und Übersicht von Koppelungen

Für den Zweck dieser Arbeit kann der Begriff der Koppelung folgendermaßen gefaßt werden: Eine Koppelung liegt immer dann vor, wenn zwei (oder mehr) Energiebereiche eines technischen Systems nicht unabhängig voneinander sind, sondern eine Zustandsänderung in einem Bereich auch eine Zustandsänderung im anderen Bereich bewirkt. Die Energiebereiche können gleichartig sein (z.B. gekoppelte mechanische Systeme) oder verschiedenartig, etwa thermisch/mechanische oder mechanisch/elektrische Systeme.

Hier soll zunächst ein Überblick über die Kategorien gegeben werden, nach denen Koppelungen eingeteilt werden können. Anschließend werden innerhalb jeder Kategorie die möglichen Ausprägungen dargestellt und ihre Implikationen herausgearbeitet.

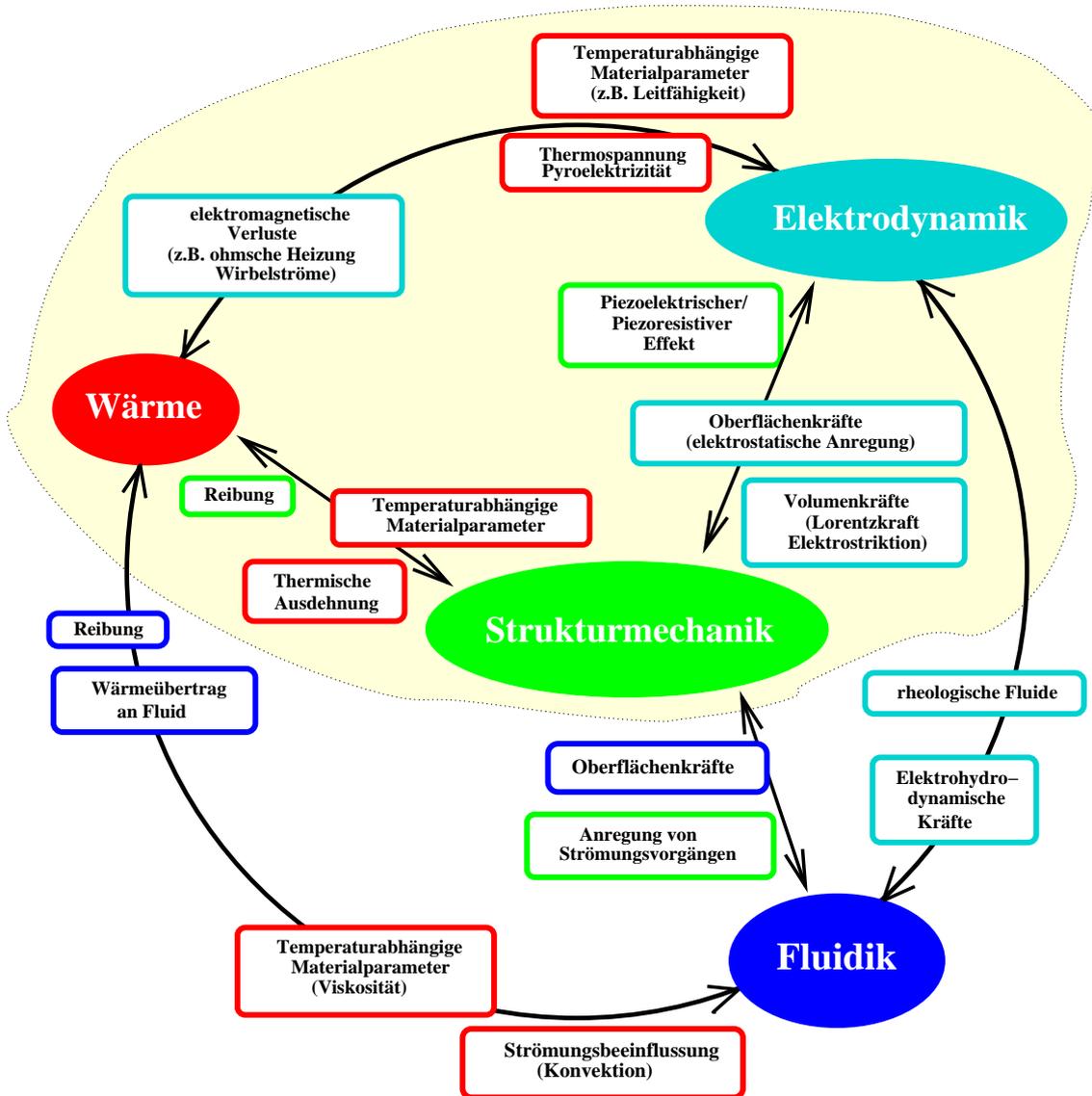


Abb. 2.1: Koppelungen zwischen den vier physikalischen Bereichen Elektrodynamik, Strukturmechanik, Wärme und Fluidik. Grau unterlegt sind diejenigen Bereiche, die in dieser Arbeit bzw. diesem Kapitel näher untersucht werden.

Kopplungen können über folgende Kategorien eingeteilt werden:

- nach der Wirkungsrichtung der Koppelung
- nach der räumlichen Erstreckung der Koppelung
- nach der Stärke der Koppelung.

Die Wirkungsrichtung der Koppelung kann einseitig (*unidirektional*) oder zweiseitig (*bidirektional*) sein.

Die folgende Skizze zeigt den allgemeineren zweiseitigen Fall.

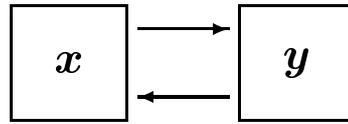


Abb. 2.2: Bidirektionale Koppelung zweier Energiebereiche.

Zwei Systeme, die durch die Zustandsvektoren x und y beschrieben werden, wirken gegenseitig aufeinander ein, das heißt, y wird von x beeinflusst und umgekehrt. Die Zustandsvektoren repräsentieren z.B. im mechanischen Fall die Verteilung der mechanischen Spannung, im elektrostatischen Fall die Verteilung der Ladungsdichte. Eine bidirektionale Kopplung liegt z.B. bei einem Widerstand aus temperaturabhängigem Material vor, dessen Temperatur sich bei Stromfluß ändert und über die Widerstandsänderung auf den Strom rückwirkt.

Eine einseitige Wirkungsrichtung ist ein Spezialfall der zweiseitigen Koppelung mit verschwindender Rückwirkung, der in der nachfolgenden Skizze dargestellt ist.

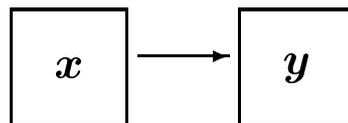


Abb. 2.3: Unidirektionale Koppelung zweier Energiebereiche.

Hier wirkt der Zustandsvektor y nicht auf den Zustandsvektor x zurück. Ein Beispiel für diesen Fall ist ein Widerstand aus Konstantan, dessen Temperatur sich bei Stromfluß ändert, aber wegen des konstanten Widerstands nicht auf den Strom rückwirkt.

Für die räumliche Erstreckung der Koppelung gibt es einerseits die Möglichkeit der Volumenkoppelung, bei der eine Koppelung der Zustandsvariablen in einem gemeinsamen, überlappenden Volumen stattfindet. Ein Beispiel dafür ist die Piezoelektrik, bei der sich die resultierende Polarisation im selben Volumen aufbaut, in der auch die ursächliche mechanische Verschiebung wirkt. Neben dieser direkten physikalischen Beziehung gibt es eine zweite Art der Volumenkoppelung, bei der einer bzw. mehrere Transportkoeffizienten ("Leitfähigkeiten") von den Zustandsvariablen abhängig ist. Beispielsweise kann sowohl der elektrische Widerstand als auch die piezoresistive Konstante eines Sensors von der Temperatur abhängen.

Neben der Volumenkoppelung ist eine zweite Form der räumliche Erstreckung möglich, die *Randkoppelung*, also eine Koppelung der physikalischen Energieformen über einen gemeinsamen Rand bzw. eine gemeinsame Oberfläche.

Die zwei wichtigsten Beispiele hierzu sind die Fluid-Struktur-Koppelung, z.B. die Wechselwirkung einer Ventilklappe mit einer bewegten Flüssigkeit, bei der sich die Klappenstellung und die Strömung durch Kraftwirkung gegenseitig beeinflussen, und die elektromechanische Koppelung, bei der z.B. ein ausgelenkter Biegebalken mit einem elektrostatischen Feld wechselwirkt, ebenfalls über Oberflächenkräfte.

Die Stärke der Koppelung bestimmt, welche Effekte in der Simulation zunächst weggelassen

werden können, um das System zu vereinfachen. Dabei ist in der Mikrosystemtechnik eine Besonderheit zu beachten: Da eine Längenabmessung im Quadrat weniger schnell klein wird als die gleiche Länge zur dritten Potenz, dominieren in der Mikrowelt die Oberflächenkräfte über die Volumenkräfte. Damit verhalten sich zum Beispiel elektrostatische Lasten oder Druckkräfte und Trägheitskräfte oder magnetische Lasten in ganz anderer Gewichtung zueinander als in der Makrowelt. Dies wirkt sich dann auch in den Koppelungen aus, oft können Volumeneffekte gegenüber Oberflächeneffekten vernachlässigt werden.

Die Koppelungen, die in einem System auftreten, können unerwünscht sein oder bewußt eingesetzt werden. Ein Beispiel für den bewußten Fall der Koppelung ist der Einsatz piezoelektrischer Baustoffe zur Konstruktion von Sensoren, die einen mechanischen Impuls in einen elektrischen umwandeln. Ein unerwünschter Koppel Effekt ist der sogenannte "cross talk", das Übersprechen von elektrischen Feldern, oder die bei fast allen Mikrobauteilen auftretende Temperaturabhängigkeit ihrer physikalischen Parameter.

Nach dieser Beschreibung und Klassifizierung gekoppelter Effekte bei MEMS soll eine Methodik aufgezeigt werden, Koppelungen in systematischer Weise darzustellen.

2.2 Thermodynamische Betrachtung von gekoppelten Effekten bei MEMS

Die irreversible Thermodynamik ermöglicht die phänomenologische Beschreibung physikalischer Effekte und Prozesse in Systemen. Daher ist die Methode der Thermodynamik auch sehr gut geeignet, Mikrosysteme zu beschreiben, die typischerweise die Koppelung verschiedener physikalischer Energieformen in sich vereinen [78, 79].

Im weiteren wird mit Hilfe des Kalküls der Thermodynamik für elektro-thermo-mechanische Systeme ein konsistentes Gleichungssystem hergeleitet.

Dafür werden im ersten Teilabschnitt reversible und irreversible Prozesse elektro-thermo-mechanischer Systeme dargestellt.

Auf der Grundlage allgemeiner physikalischer Gesetzmäßigkeiten wie dem Kräftegleichgewicht und der Energiebilanz eines Systems sowie dem Gaußschen Gesetz werden im zweiten Teilabschnitt die dynamischen Gleichungen aufgestellt.

Die Terme dieses Gleichungssystems werden im dritten Teilabschnitt mit den im ersten Abschnitt dargestellten extensiven und intensiven thermodynamischen Variablen und Zusammenhängen ausgedrückt.

Damit erhält man ein thermodynamisch fundiertes Gleichungssystem für elektro-thermo-mechanische Systeme, das als vollständige und konsistente Grundlage zur Ableitung spezieller Formulierungen dienen kann.

1. Betrachtet man ein thermodynamisches System, welches in kleine Volumenteile unterteilt sei, in denen jeweils thermisch lokales Gleichgewicht herrscht, dann kann jeder Zustand eines elektro-thermo-mechanischen Systems durch einen Zustandsvektor intensiver thermodynamischer Variablen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}, T) \quad \text{mit} \quad & \boldsymbol{\sigma}: \quad \text{mech. Spannungstensor} \\
& \mathbf{E}: \quad \text{quasistat. elektr. Feld} \\
& T: \quad \text{Temperatur}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

bzw. mit den dazu konjugierten extensiven Variablen

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} = (\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}, s) \quad \text{mit} \quad & \boldsymbol{\epsilon}: \quad \text{Verzerrungstensor} \\
& \mathbf{D}: \quad \text{dielekt. Verschiebungsvektor} \\
& s: \quad \text{Entropiedichte.}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Intensive und extensive Variablen hängen über materialspezifische Beziehungen der Gleichgewichtsprozesse zusammen: $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, vgl. [76]. Linearisiert man diesen Zusammenhang, ergibt sich für den Fall der elektro-thermo-mechanischen Systeme folgende Form der Zustandsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{e} & -\mathbf{t} \\ \mathbf{e}^T & \boldsymbol{\epsilon} & \mathbf{p} \\ \mathbf{t}^T & \mathbf{p}^T & \frac{c_p}{T} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \mathbf{E} \\ \Delta T \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Dabei sind die Parameter der Matrix wie folgt bezeichnet:

\mathbf{c}	Elastizitätsmodul	$[\frac{N}{m^2}]$
\mathbf{e}	piezoelektrisches Modul	$[\frac{N}{Vm}]$
\mathbf{t}	thermoelastische Spannungskoeffizienten	$[\frac{N}{m^2K}]$
$\boldsymbol{\epsilon}$	elektrische Permittivität	$[\frac{C}{Vm}]$
\mathbf{p}	pyroelektrische Koeffizienten	$[\frac{C}{m^2K}]$
c_p	spezifische Wärmekapazität	$[\frac{J}{m^3K}]$

Der Elastizitätsmodul $\mathbf{c} = \{c_{ijkl}\}$ gibt das Verhältnis zwischen der mechanischen Spannung und der relativen Längenänderung an (Verzerrungstensor). Der piezoelektrische Modul $\mathbf{e} = \{e_{ijk}\}$ bzw. die pyroelektrischen Koeffizienten $\mathbf{p} = \{p_i\}$ beschreiben die Polarisationsänderung eines Materials durch Verspannung bzw. Erwärmung. Durch die Polarisationsänderung wird eine Ladungsdichtenänderung hervorgerufen, die meßbar ist, bevor Neutralisation erfolgt. Die Umkehrung dieser Effekte ist möglich, der umgekehrte pyroelektrische Effekt heißt elektrokalendarischer Effekt. Die thermoelastischen Spannungskoeffizienten \mathbf{t} beschreiben den Zusammenhang zwischen mechanischer Spannungsänderung und dem Temperaturgradienten. Die elektrische Permittivität $\boldsymbol{\epsilon}$ stellt den Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und dem dielektrischen Verschiebungsvektor dar. Die spezifische Wärmekapazität c_p gibt das Verhältnis zwischen Temperaturänderung und Entropiedichte bei konstantem Druck an.

Neben den *reversiblen* Prozessen, die durch die Zustandsgleichungen (2.3) dargestellt werden, gibt es die *irreversiblen* Prozesse. Diese beschreiben dissipative Prozesse beim Massen-, Wärme- oder Ladungstransport. Das Kalkül der phänomenologischen irreversiblen Thermodynamik [55] formuliert folgendes pseudolineares Gleichungssystem:

$$\mathcal{I} = \mathcal{L}\mathcal{F} \quad (2.4)$$

wobei \mathcal{I} die Flußgrößen der extensiven Variablen und \mathcal{F} die dazu konjugierten treibenden Kräfte darstellt, während \mathcal{L} die Matrix der (material- und zustandsabhängigen) Transportkoeffizienten bezeichnet [55, 78]. Im Falle elektro-thermo-mechanischer Bauteile läßt sich die allgemeine Stromrelation (2.4) im Festkörper häufig auf das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung

$$\mathbf{j}_Q = -\kappa \nabla T \quad (2.5)$$

reduzieren. Hierbei ist \mathbf{j}_Q die Wärmestromdichte (=Flußgröße der Entropie), die vom Temperaturgradienten ∇T als treibende Kraft verursacht wird. Transportkoeffizient ist die spezifische Wärmeleitfähigkeit κ des betrachteten Materials.

2. Das System der dynamischen Gleichungen für die Beschreibung von Mikrobauelementen mit elektro-thermo-mechanischer Koppelung schreibt sich folgendermaßen:

1) Mechanische und elektrische Kräftebilanz

$$\varrho_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (2.6)$$

2) Gaußsches Gesetz

$$\nabla \mathbf{D} = \varrho_{el} \quad (2.7)$$

3) Energiebilanz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \mathbf{div} \mathbf{j}_u + P \quad (2.8)$$

In Gleichung (2.6) bedeuten ϱ_m die Massendichte, \mathbf{v} die mechanische Auslenkung, $\boldsymbol{\sigma}$ der mechanische Spannungstensor, $\boldsymbol{\tau}$ der Maxwellsche Spannungstensor und \mathbf{f} die äußeren Volumenkräfte.

Das Gaußgesetz (2.7) beinhaltet \mathbf{D} , die dielektrische Verschiebungsdichte, und die innere Ladungsverteilung ϱ_{el} .

In der Gleichung (2.8) ist u die innere Energiedichte, \mathbf{j}_u der Strom der inneren Energiedichte und P eine äußere Wärmequelle. In Festkörpern kann \mathbf{j}_u unter Vernachlässigung von Konvektionstermen durch die Wärmestromdichte \mathbf{j}_Q (vgl. (2.5)) ersetzt werden.

3. Genauer betrachtet werden müssen jetzt noch der Maxwell'sche Spannungstensor und die partielle Ableitung der inneren Energie u nach der Zeit. Beide Terme können mit Hilfe der extensiven und intensiven thermodynamischen Variablen des elektro-thermo-mechanischen Systems dargestellt werden.

Der Maxwell'sche Spannungstensor ergibt sich über die Beziehung $f_i = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ entweder aus der Kelvin Kraftdichte $\mathbf{F} = \varrho_f \mathbf{E} + \mathbf{P} \nabla \mathbf{E}$

oder aus der Helmholtz-Korteweg Kraftdichte $\mathbf{F} = \varrho_f \mathbf{E} - \frac{1}{2} |\mathbf{E}|^2 \nabla \varepsilon$.

ϱ_f bezeichnet die freien Ladungen, \mathbf{P} die Polarisationsdichte, \mathbf{E} das elektrische Feld und ε die elektrische Permittivität.

Es ergibt sich nach [50]:

$$\tau_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \varepsilon_0 E_k E_k^1 \quad (2.9)$$

Bei der Herleitung des Terms $\frac{\partial u}{\partial t}$ geht man folgendermaßen vor: Die Änderung der Zustandsvariablen ist über die Gibbs'sche Fundamentalgleichung [62] verknüpft:

$$du = T ds + \mathbf{E} d\mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.10)$$

Da dieser Zusammenhang für alle Zeiten und an jedem Ort gilt, lassen sich die Differentiale der Zustandsvariablen auf die Zeit beziehen.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \quad (2.11)$$

Setzt man jetzt

$$ds = \mathbf{t}^T d\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{p}^T d\mathbf{E} + \frac{c_p}{T} dT \quad (2.12)$$

$$d\mathbf{D} = \mathbf{e}^T d\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{E} + \mathbf{p} dT \quad (2.13)$$

aus den Zustandsgleichungen (2.3) in die Gleichung (2.10) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} du &= (c_p + \mathbf{E}\mathbf{p}) dT + (T\mathbf{p}^T + \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}) d\mathbf{E} + (\boldsymbol{\sigma} + T\mathbf{t}^T + \mathbf{E}\mathbf{e}^T) d\boldsymbol{\epsilon} \\ &= (c_p + \mathbf{E}\mathbf{p}) dT + (T\mathbf{p}^T + \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}) d\mathbf{E} + \mathbf{c}\boldsymbol{\epsilon} d\boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vollständig umgeformt ergibt sich für $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{E}\mathbf{p} \frac{\partial T}{\partial t} + T\mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{c}\boldsymbol{\epsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(T\mathbf{p}^T \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\epsilon} \right) \quad (2.16)$$

¹Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, δ_{ij} ist das Kroneckersymbol

Setzt man nun die hergeleiteten Beziehungen (2.5), (2.9), (2.16) in das Gleichungssystem (2.6)-(2.8) ein, dann erhält man die Gesamtform der dynamischen Gleichungen für elektro-thermo-mechanische Systeme:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = \mathbf{div} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{1}) + \mathbf{f} \quad (2.17)$$

$$\nabla \mathbf{D} = \rho_{el} \quad (2.18)$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \mathbf{div} (\kappa \nabla T) + P - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} + T \mathbf{p}^T \mathbf{E} \right) \quad (2.19)$$

In Gleichung (2.17) werden neben den elastomechanischen Kräften auch elektrische Volumenkräfte, wie zum Beispiel der piezoelektrische Effekt, berücksichtigt. Die Zeitableitung auf der rechten Seite von (2.19) berücksichtigt die Wärme aus Strukturdämpfung und dielektrischen Verlusten, die zusätzlich zur äußeren Wärmequelle P zur rechten Seite der Wärmebilanzgleichung (2.19) beitragen.

Kapitel 3

Mathematische Methoden zur Simulation von Mikrosystemen

3.1 Mathematische Verfahren und ihre Koppelung zur Simulation von Mikrosystemen

Im vorigen Abschnitt 2.2 wurden die vollständigen dynamischen Gleichungen (2.17)-(2.19) hergeleitet, die elektro-thermo-mechanische Effekte bei Mikrobauelementen konsistent beschreiben.

Die hier behandelte Problemklasse beschränkt sich auf

- den statischen Fall, ohne Zeitabhängigkeiten
- elektromechanische Koppelungen über den Rand, keine elektrischen Volumenkräfte, keine Raumladung
- Vernachlässigbare Rückwirkung der Temperatur auf das elektromechanische Verhalten (d.h. Temperatur kann als konstanter Parameter betrachtet werden, Gl. (2.19) entfällt)

Die so eingegrenzte Problemklasse umfasst bereits einen wesentlichen Teil der Fragestellungen, die im Zusammenhang mit MEMS auftreten, wie in Kapitel 6 gezeigt wird.

Die Gleichungen (2.17)-(2.19) des vorherigen Kapitels reduzieren sich damit auf:

$$\mathbf{div} \mathbf{D} = 0 \quad \text{in } \Omega_0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{div} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) = -\mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_1 \quad \Omega_0 \cap \Omega_1 = \Gamma_F \quad (3.2)$$

Die erste Gleichung ist das bekannte Gaußsche Gesetz mit der Raumladungsdichte $\rho_{el} = 0$, da der Zwischenraum zwischen den Elektroden als nicht leitfähig und raumladungsfrei angenommen wird.

Die zweite Gleichung beschreibt die Elastomechanik, wobei $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ den mechanischen Spannungstensor bezeichnet und \mathbf{f} die äußeren Volumenkräfte.

Ω_0 kennzeichnet das Gebiet der elektrischen Domäne, Ω_1 das der mechanischen Domäne (vgl. Bild 3.1).

Da elektrische Volumeneffekte nicht berücksichtigt werden, entfällt der Beitrag des Maxwell'schen Spannungstensors $\mathbf{div} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{1})$ in Gl. (2.17). Zudem reduziert sich die zweite Zeile der Zustandsgleichungen (2.3) auf $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$. Damit entkoppeln die Grundgleichungen (3.1) und (3.2) in ein rein elektrisches Teilproblem im Gebiet Ω_0 und ein rein mechanisches Teilproblem im Gebiet Ω_1 . Wir wollen annehmen, daß die Gebiete Ω_0 und Ω_1 sich nicht überlappen, sondern nur einen gemeinsamen Rand Γ_F besitzen. Die Koppelung zwischen elektrischem und mechanischem Teilproblem geschieht daher allein über Grenzflächenkräfte auf diesem gemeinsamen Rand Γ_F . Bei beweglichen bzw. deformierbaren Bauteilstrukturen ist dieser als Teil der Problemlösung selbstkonsistent zu bestimmen. Die Koppelung von (3.1) und (3.2) zeigt sich also allein in den Randbedingungen auf Γ_F . Das elektrische Teilproblem beinhaltet nur elektrostatische Felder, die sich über ein elektrostatisches Potential ψ darstellen lassen gemäß $\mathbf{E} = - \mathbf{grad} \psi$. Formuliert man (3.1) und (3.2) in den Basisvariablen ψ und \mathbf{u} zusammen mit den vollständigen Randbedingungen, so erhält man schließlich:

$$\left\{ \begin{array}{ll} - \mathbf{div} (\varepsilon \mathbf{grad} \psi) = 0 & \text{in } \Omega_0 \\ \psi = 0 & \text{auf } \Gamma_{00} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 & \text{auf } \Gamma_{01} \\ \psi = \psi_0 & \text{auf } \Gamma_F \end{array} \right. \quad \Gamma_{00} \cup \Gamma_{01} \cup \Gamma_F = \Gamma_0 \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} - \mathbf{div} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega_1 \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{auf } \Gamma_{10} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{auf } \Gamma_{11} \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{g})_i (u \frac{d}{|d|} - |d|) = 0 & \text{auf } \Gamma_F \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})_i \leq \mathbf{g}_i & \text{auf } \Gamma_F \\ \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|d|} \leq |d| & \text{auf } \Gamma_F \end{array} \right. \quad \Gamma_{10} \cup \Gamma_{11} \cup \Gamma_F = \Gamma_1 \quad (3.4)$$

Die elektrostatische Anziehung auf dem beweglichen Rand Γ_F

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

ist die tatsächliche Koppelbedingung. \mathbf{g} ist die wirkende Kraft bei der Berechnung des elastomechanischen Gleichungssystems (3.4), sie berechnet sich jedoch aus den elektrischen Feldvariablen. Zusätzlich zum Koppelterm (3.5) ist in den Randbedingungen ein Kontaktproblem formuliert. \mathbf{d} bezeichnet den Abstandsvektor zwischen unausgelenktem Bauteil und Gegenelektrode, im einfachsten Fall entspricht sie dem Abstand zweier nicht ausgelenkter Kondensatorplatten. Alle oben erwähnten Gebiete und Ränder sind in Abb.3.1 am einfachen Beispiel des zweifach eingespannten Biegebalkens veranschaulicht.

Wie im Gleichungssystem (3.3) zu sehen ist, werden in der Elektrostatik (mindestens) 2 verschiedene Potentiale vorgegeben; hier ψ_0 und 0 auf dem gemeinsamen Rand Γ_F und Γ_{00} (Dirichletrandbedingung). Auf dem Rand Γ_{01} , an den vom Außenraum leitfähiges Material

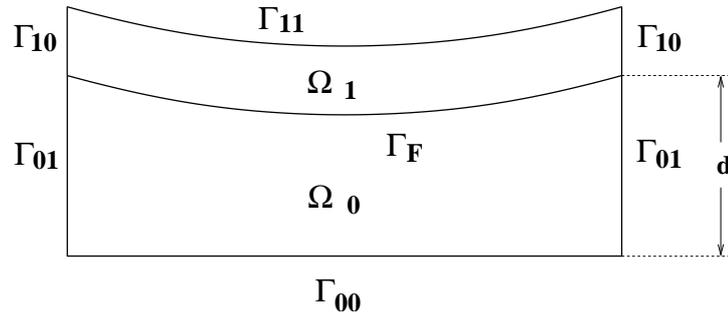


Abb. 3.1: Schnittbild eines elektrostatisk ausgelenkten Biegebalkens.

angrenzt, ist die Normalenableitung des Potentials Null (Neumannrandbedingung). Die Randabschnitte Γ_{00} , Γ_F und Γ_{01} ergeben vereint den gesamten Rand Γ_0 des elektrischen Gebiets Ω_0 .

Die Randbedingungen der elastomechanischen Gleichung (3.4) beschreiben

- a) eingespannte Ränder Γ_{10} ,
- b) normalspannungsfreie Ränder Γ_{11} ,
- c) und den beweglichen Rand Γ_F .

Die Randabschnitte Γ_{10} , Γ_{11} und Γ_F ergeben vereint den Rand Γ_1 des elastomechanischen Gebiets Ω_1 .

Auf dem beweglichen Rand Γ_F gilt die Restriktion $(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})_i \leq g_i$, d.h. die mechanische Kraftkomponente ist stets kleiner als die elektrische, und es gilt die Restriktion $\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} \leq |\mathbf{d}|$, was bedeutet, daß sich die bewegliche und die feste Elektrode nicht durchdringen können.

Auf dem beweglichen Rand Γ_F gilt außerdem die Bedingung $(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{g})_i (\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} - |\mathbf{d}|) = 0$. Sie bedeutet, daß sich entweder die ausgelenkte Struktur im Kräftegleichgewicht mit der angreifenden elektrostatisk Kraft \mathbf{g} befindet, dann gilt $(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{g})_i = 0$ für alle Vektorkomponenten, oder die ausgelenkte Struktur schlägt an die Gegenelektrode an, dann gilt $\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = |\mathbf{d}|$, d.h. die maximale Auslenkung \mathbf{d} wird erreicht.

Mathematisch gesprochen handelt es sich bei beiden Gleichungssystemen um elliptische partielle Differentialgleichungen. Man bezeichnet dieses gekoppelte Gleichungssystem (3.3) und (3.4) als Randwertaufgabe, da für den gesamten Rand Bedingungen vorgegeben sind, und genauer auch als freies Randwertproblem, da die Form des gemeinsamen Randes Γ_F Bestandteil der Problemlösung ist. Wegen der Einschränkung der Bewegung der Struktur, hier durch eine maximale Auslenkung \mathbf{d} , spricht man auch von einem Hindernisproblem.

Das Hindernisproblem ist bei der Simulation elektromechanisch betriebener Mikrobauteile eine zentrale Problematik, auf die im nächsten Kapitel 3.2 noch detaillierter eingegangen wird.

Zuerst soll jetzt erörtert werden, wie das vorgestellte Gleichungssystem (3.3) und (3.4) numerisch gelöst werden kann.

3.1.1 Numerische Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen

Numerische Verfahren, die zur Lösung elliptischer Randwertaufgaben eingesetzt werden, sind die finite Differenzenmethode (**FDM**), die Finite-Volumen-Methode (**FVM**), die Finite-Element-Methode (**FEM**) und die Rand-Element-Methode (**BEM**). Alle vier Verfahren diskretisieren das Gebiet Ω_0 bzw. Ω_1 der elektrischen und der mechanischen Domäne auf eine unterschiedliche Weise. Aus der jeweiligen Diskretisierung resultiert ein großes lineares bzw. nicht-lineares Gleichungssystem, abhängig von der Linearität der Randwertaufgabe, welches dann mit entsprechenden Gleichungslösern berechnet wird.

FDM : Die finiten Differenzenverfahren gehen von den Erhaltungsgleichungen in Differentialform aus, also von der Formulierung in den Gleichungen (3.3) und (3.4). Dies ist somit ein sehr direkter und einfacher Zugang, da keine weiteren Umformungen des Gleichungssystems notwendig sind. Die auftretenden partiellen Ableitungen werden durch Differenzenquotienten (oder auch finite Differenzen) ersetzt. Bei der Bildung der finiten Differenzen werden meist strukturierte Gitter verwendet, wie zum Beispiel die Diskretisierung auf einem quadratischen Netz. Die Diskretisierung der Gleichung für jeden Gitterpunkt führt zu einem algebraischen Gleichungssystem. Entsprechend der Feinheit der Diskretisierung ergibt sich ein sehr großes Gleichungssystem. Über die finiten Differenzen sind nur Nachbarpunkte miteinander verbunden, was sich in der Bandstruktur der Matrix wieder spiegelt.

Der Vorteil dieser Methode liegt in ihrer direkten und einfachen Anwendung und Programmierung für beliebige partielle Differentialgleichungen. Der Nachteil ist, daß unrealistische Forderungen an die Glätte der Lösungen gestellt werden. Dieses Verfahren wird oft bei einfachen Problemen eingesetzt, wo schnelle Ergebnisse gewünscht sind [17].

FVM : Die Finite-Volumen-Methode geht von den Erhaltungsgleichungen in der Integralform aus. Das Lösungsgebiet wird in eine endliche Anzahl von Kontrollvolumina unterteilt. Für jedes Kontrollvolumen wird das Erhaltungsprinzip angewandt, es wird die Bilanz der Flüsse und Quellen erstellt. Man spricht daher auch von einer Integralbilanzmethode [30]. Die Diskretisierung der Flüsse ergibt ein grosses algebraisches Gleichungssystem mit dünnbesetzter Matrix. Eine spezielle Bezeichnung dieser Methode ist die Box-Integrationsmethode. Hier wird bei der Diskretisierung eine Differenzenapproximation nach der Box-Technik angewendet. Eingehendere Erklärungen findet man in [41]. Die Finite-Volumen-Methode wird hauptsächlich dort eingesetzt, wo der Fluß eine sehr wichtige Größe darstellt. Da über den Fluß bilanziert wird, erreicht man mit diesem Verfahren eine hohe Genauigkeit für diese Größe. Hauptsächlich wird diese Methode eingesetzt, um Probleme aus der Fluidik zu lösen [65].

FEM & BEM :

Im Gegensatz zum finiten Differenzenverfahren verwenden die Finite-Element-Methode und die Rand-Element-Methode eine schwache Formulierung der Differentialgleichung. Eine schwache Formulierung einer Differentialgleichung ist ihre äquivalente Formulierung als Variationsgleichung mit gewissen Zusatzbedingungen [17]. Die Variationsgleichung kann man aus zwei unterschiedlichen Vorgehensweisen herleiten:

1. Wichtung und partielle Integration:

Man wichtet die Differentialgleichung, indem man alle Terme mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und danach über das betrachtete Gebiet integriert. Die physikalische Entsprechung dieses mathematischen Vorgehens ist der virtuelle Arbeitsansatz. In der Mechanik behandelt man virtuelle Verrückungen und in der Elektrostatik virtuelle Potentiale.

2. Herleitung aus einem Variationsproblem:

Durch die Lösung eines Variationsproblems, das als Dirichletsches Integral bezeichnet wird, erhält man die Variationsgleichung. Bekannte Grundprinzipien in Naturwissenschaft und Technik, wie zum Beispiel das Prinzip der minimalen Energie, werden häufig als Variationsprobleme formuliert.

Eine schwache Formulierung verlangt nicht die exakte Lösung der Differentialgleichung, sondern nur eine Lösung, die die Differentialgleichung im Mittel über dem betrachteten Gebiet erfüllt. Eine schwache Formulierung fordert demnach schwächere Differenzierbarkeitsbedingungen von der Lösungsfunktion, als bei der ursprünglichen Differentialgleichung gefordert wären. Damit werden auch Lösungen der Differentialgleichung zugelassen, die physikalisch sinnvoll sind, aber wegen mangelnder Glattheitseigenschaften sonst ausgeschlossen wären. Der Lösungsraum der stetig differenzierbaren Funktionen erweitert sich für die Lösungen aus Variationsgleichungen auf sogenannte Sobolevräume. Eine allgemeine Einführung in Sobolevräume findet man in [9], eine Darstellung der Variationsformulierung von Randwertaufgaben in [30].

BEM : Die Rand-Element-Methode wichtet die Differentialgleichung mit deren Fundamentallösung und man erhält damit eine schwache Formulierung. Durch die Wahl der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion ergibt sich bei der Integration eine Projektion auf den Rand, man erhält eine Randintegralgleichung. Der Rand des betrachteten Gebiets wird in eine endliche Anzahl von Elementen unterteilt. Setzt man die gegebenen Randbedingungen und Randansatzfunktionen der Elemente in die Randintegralgleichung ein, so erhält man ein voll besetztes algebraisches Gleichungssystem, dessen Lösung die unbekannt Randwerte sind.

FEM : Die Finite-Element-Methode unterteilt das gesamte Lösungsgebiet in eine endliche Anzahl finiter Elemente beliebiger Form. Die abhängige Variable wird über das ganze finite Element mit Hilfe von Basisfunktionen approximiert (z.B. Polynome). Diese Ansätze aus Basisfunktionen werden in die Differentialgleichung eingesetzt, woraus sich ein Residuum ergibt. Dieses Residuum wird minimiert, indem man fordert, daß das Integral über das mit den Basisfunktionen gewichtete Residuum gleich Null wird. Daraus resultiert ein algebraisches Gleichungssystem, dessen Matrix sehr groß, symmetrisch und dünn besetzt ist.

Eine detaillierte Einführung in die Rand-Element-Methode findet man in [18, 26] und in die Methode der finiten Elemente in [36, 17].

Bewertet man die vier aufgeführten numerischen Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen im Hinblick auf die Anwendung in der Elektrostatik und der Elastomechanik, dann können die ersten zwei Verfahren als weniger geeignet eingestuft werden. Die Finite-Element-Methode stellt eine sehr ausgereifte Technik dar und hat in vielen technischen Gebieten eine Anwendung gefunden. Die Rand-Element-Methode ist noch ein jüngerer Verfahren, dessen Anwendung vor allem in der Berechnung elektrischer und magnetischer Felder zu finden ist und das oft als Ergänzung zur Finite-Element-Methode eingesetzt wird, um z.B. Spannungskonzentrationen bei mechanischen Rissen zu berechnen [69].

FEM	BEM
Vernetzung des gesamten Gebietes	Lediglich Diskretisierung des Randes notwendig. Dadurch eine Reduktion des Problems um eine Dimension.
Die Lösung wird im gesamten Gebiet an festgelegten Knotenpunkten der Diskretisierung berechnet.	Die Lösung wird nur auf dem Rand berechnet. In Nachbereitung können Feldgrößen an beliebigen Punkten im Gebiet berechnet werden.
Gut geeignet zur Berechnung von inhomogenen Gebieten.	Nur zur Berechnung homogener Gebiete geeignet. Inhomogene Gebiete erfordern den Einsatz von besonderen Techniken, z.B. der Substrukturtechnik [26].
Unendliche Gebiete können nur approximiert werden.	Unendliche Gebiete werden mit Randelementen mit unendlichem Radius exakt modelliert.
Die Lösung erfüllt nur die schwache Formulierung der Differentialgleichung, d.h. eine geringere Genauigkeit der Lösung, feinere Diskretisierung als bei BEM erforderlich.	Höhere Genauigkeit der Lösung, da die Fundamentallösung der Differentialgleichung, die die linearen Feldgleichungen exakt erfüllen, als Wichtungsfunktion in die Rand-Element-Methode eingeht.
In der Standardformulierung müssen die ersten Ableitungen der Feldvariablen nachträglich berechnet werden.	Feldvariable sowie deren Ableitung werden direkt berechnet.

Tab. 3.1: Eigenschaften der Finite-Element-Methode und der Rand-Element-Methode.

Die Tabelle 3.1 gibt einen Überblick der Eigenschaften der Rand-Element-Methode und der Finite-Element-Methode.

Als wichtigste Eigenschaften sind hervorzuheben, daß sich die Rand-Element-Methode besonders zur Modellierung unendlicher Gebiete eignet, welche in der Elektrostatik normalerweise auftreten, und daß sie neben der Feldvariablen exakt auch deren Ableitung berechnet, was bei der Finite-Element-Methode normalerweise nicht der Fall ist. Ein wesentlicher Nachteil der Rand-Element-Methode besteht in der Einschränkung des Rechengebiets auf homogene Gebiete. Inhomogene Gebiete erfordern zusätzliche Techniken. In der Elektrostatik handelt

es sich bei dem betrachteten Gebiet allerdings fast immer um ein homogenes Gebiet. Aus diesen Gründen eignet sich die Rand-Element-Methode besonders gut für Berechnungen in der Elektrostatik.

Die Finite-Element-Methode benötigt zur Modellierung unendlicher Gebiete besondere Maßnahmen, da diese immer approximiert werden müssen. Inhomogene Gebiete mit Nichtlinearitäten im Material oder nichtlineares Strukturverhalten wie mechanischer Kontakt, mechanische Reibung und große Auslenkungen der mechanischen Struktur stellen jedoch überhaupt kein Problem dar. Da auf jeden Fall mechanischer Kontakt und große Auslenkungen in der Elastomechanik zu berücksichtigen sind, ist die Finite-Element-Methode ein geeignetes Verfahren hierfür.

3.1.2 Ansätze zur Lösung gekoppelter Probleme

Im folgenden werden die Möglichkeiten der numerischen Behandlung der Koppelung vorgestellt. Grundlegende Arbeiten dazu findet man bei Felippa und Park [25, 57, 58].

Die zwei prinzipiellen Vorgehensweisen zur Lösung gekoppelter Probleme sind der simultane und der iterative Ansatz. Daneben gibt es Mischformen dieser beiden Ansätze, wovon der pseudo-simultane und der semianalytische Ansatz im Bereich der elektromechanisch gekoppelten Probleme am häufigsten vorkommen.

Die verschiedenen Ansätze werden in Graphiken mit den entsprechenden Gleichungen und Koppelgrößen der Elektrostatik und Mechanik dargestellt. Dabei bezeichnen $\mathbf{H}_{M/E}$ die linearisierten Gleichungen der Mechanik/Elektrostatik, resultierend aus einer Diskretisierung mit einem der in Kapitel 3.1.1 vorgestellten Verfahren für den jeweiligen Arbeitspunkt. Φ bedeutet das Potential, \mathbf{u} die Auslenkung und \mathbf{g} die Randkoppelung gemäß des allgemeinen Gleichungssystems (3.3)-(3.5) für die elektromechanische Koppelung im stationären Fall.

Iterativer Ansatz :

Hier diskretisiert und berechnet man jedes Teilproblem separat. Die Koppelung der Teilprobleme geschieht durch die iterative Übergabe der Randwerte. Im Fall der elektromechanischen Koppelung sind dies das Potential Φ , aus dem sich die elektrostatische Kraft berechnet, die die mechanische Komponente auslenkt, und die Auslenkung \mathbf{u} , die eine neue Geometrie für die elektrostatische Berechnung vorgibt. Die iterative Übergabe der Randwerte läuft so lange, bis Konvergenz erreicht ist.

Dieses Verfahren verlangt wenig zusätzlichen Programmieraufwand, da auf bestehende Simulatoren für die einzelnen Probleme zurückgegriffen werden kann, die dann im iterativen Schema gekoppelt werden. Die Simulatoren können speziell passend zum Teilproblem gewählt werden. Neben diesen Vorteilen der Realisierung bestehen folgende Nachteile: Ist die Koppelung zwischen den Teilgebieten in beiden Richtungen sehr stark, kommt es zu Konvergenzproblemen [56]. Zudem kann beim iterativen Ansatz nur eine lineare oder schwach überlineare Konvergenzrate erreicht werden.

Die iterative Koppelung zur Berechnung elektromechanisch gekoppelter Bauteile findet wegen ihres sehr einfachen und direkten Zugangs sehr häufig Anwendung [27, 19] und ist

auch in mehreren kommerziell erhältlichen Programmen wie z.B. INTELLISENSE [37] realisiert.

$$\begin{array}{ccc}
 & u & \\
 & \curvearrowright & \\
 H_M(g(\Phi)) = u & & H_E(u) = \Phi \\
 & \curvearrowleft & \\
 & \Phi &
 \end{array} \tag{3.6}$$

Simultaner Ansatz :

Dieser Ansatz teilt das Gesamtproblem nicht in Einzelprobleme auf, sondern versucht es im Ganzen zu lösen. Dafür werden entweder die Teilprobleme einzeln diskretisiert und zu einem Gesamtsystem zusammengefügt, oder das beschreibende Gleichungssystem des Gesamtproblems wird in einem gemeinsamen mathematischen Modell diskretisiert, woraus sich das Gesamtsystem ergibt. Jetzt wird das Gesamtsystem des diskretisierten Gesamtgebiets simultan, das heißt auf einmal, gelöst. Bei beiden Vorgehensweisen entsteht in der Regel großer numerischer Aufwand beim Erstellen einer geeigneten Diskretisierung (z.B. Einsatz von nicht-konformen Gittern) und bei der Lösung des Gesamtgleichungssystems (z.B. Einsatz von Gebietszerlegungsmethoden [33]).

Der simultane Ansatz kann eine bessere Konvergenzrate als der iterative Ansatz liefern (z.B. quadratische Konvergenzrate bei Einsatz des Newton-Verfahrens) und weist auch wenig Konvergenzprobleme bei starker Koppelung auf, allerdings ist er im Gegensatz zum iterativen Vorgehen sehr aufwendig zu programmieren, da keine Standardsoftware verwendet werden kann.

Werden im Gegensatz zu Randkoppelungen Volumenkoppelungen betrachtet, bereitet der simultane Ansatz keinerlei Schwierigkeiten und ist z.B. beim piezoelektrischen Effekt oder der thermischen Ausdehnung in kommerziell erhältlichen Programmen realisiert [16].

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_E(u) \\ H_M(g(\Phi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Pseudo-simultaner Ansatz : Dieses Verfahren versucht die Vorteile des iterativen Ansatzes mit denen des simultanen Ansatzes zu verbinden. Auf das Gesamtgleichungssystem (3.7) wird das Newtonverfahren (3.8) angewandt. Die Jacobi-Matrix bzw. ihre Teilmatrizen werden durch Differenzenquotienten aus Einzelsimulationen jeweils für das mechanische und das elektrische Teilproblem genähert (3.9), die Lösung des Gesamtgleichungssystems wird in einem iterativen Verlauf erreicht. Man kann zur Lösung des Gesamtgleichungssystems also auf Einzelsimulatoren zurückgreifen und vermeidet den hohen Programmieraufwand des rein simultanen Ansatzes. Durch den grundsätzlichen simultanen Lösungsansatz existieren weniger Konvergenzprobleme bei starker Koppelung der Teilgebiete, allerdings muß man beachten, daß je Iterationsschritt nicht nur eine Einzelsimulatorenauswertung notwendig ist, sondern mehrere, was die geringere Iterationszahl beim pseudo-simultanen Ansatz gegenüber der höheren Iterationsanzahl des iterativen Ansatzes, durch höhere Rechenzeit je Iterationsschritt relativiert [15, 14, 61].

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{\partial H_E}{\partial u} \\ -\frac{\partial H_M}{\partial \Phi} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta \Phi \\ \Delta u \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Phi - H_E \\ u - H_M \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$\text{mit } \frac{\partial H_E}{\partial u} u_i = \frac{H_E(u + \alpha u_i) - H_E(u)}{\alpha} \quad \text{und } \frac{\partial H_M}{\partial \Phi} \text{ analog,} \quad (3.9)$$

und α ein geeignet gewählter Parameter,
und u_i der i-te Einheitsvektor.

Semianalytischer Ansatz : Hier wird versucht, eines der beiden Teilprobleme in seinem Verhalten durch einen analytischen Ausdruck zu beschreiben. Diesen setzt man in die beschreibende Gleichung des anderen Teilproblems ein. Damit ist nur noch ein Gleichungssystem zu lösen, weswegen dieser Ansatz sehr schnell Ergebnisse liefert. Dieses Verfahren ist nur sehr begrenzt einsetzbar, da meistens beim analytischen Teil Vereinfachungen notwendig sind. Die Genauigkeit des Ergebnisses ist entsprechend abhängig von den getroffenen Vereinfachungen. Grundsätzlich ist dieses Vorgehen nur für einfache Geometrien und Materialgesetze möglich.

Ein häufig realisierter semianalytischer Ansatz bei der Berechnung elektromechanisch gekoppelter Bauelemente ist die sogenannte "Plattenkondensatornäherung". Beide Elektroden werden in kleine Plattenkondensatoren unterteilt, für die man jeweils analytisch die Kraft berechnet [71]. Diese Näherung gilt überall dort, wo man annähernd eine parallele Annäherung der Elektroden annehmen kann, z.B. bei Membranen, deren Abmessungen um ein Vielfaches größer sind als ihre Auslenkung. In folgenden Formeln ist auch dieses Beispiel des semi-analytischen Ansatzes allgemein dargestellt:

$$H_M(g(\Phi)) = u \quad \text{wobei } g(\Phi) \text{ analytisch bestimmt wird.} \quad (3.10)$$

In diesem Kapitel wurde zuerst das allgemeine Gleichungssystem (3.3)-(3.5), zwei partielle Differentialgleichungen mit Randbedingungen, formuliert, welches alle Bauteile der Klasse der elektrostatisch auslenkbaren Mikrostrukturen beschreibt. Das vorgestellte Gleichungssystem beschreibt zwei gekoppelte Randwertprobleme, die numerisch mittels unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden gelöst werden können, nämlich mit dem finiten Differenzenverfahren, der Finite-Volumen-Methode, der Finite-Element-Methode und der Rand-Element-Methode. Als günstige Einzellöser der zwei Differentialgleichungen ergeben sich die Finite-Element-Methode und die Rand-Element-Methode.

Unabhängig von der Wahl des Diskretisierungsverfahrens kann die Koppelung, die im Gleichungssystem auftritt, unterschiedlich behandelt werden:

Im simultanen Ansatz wird das diskretisierte System in ein einziges Gleichungssystem zusammengefasst und direkt gelöst. Im iterativen Ansatz wird im Gegensatz dazu jede Gleichung separat diskretisiert. Die beiden Gleichungen werden gemeinsam in einem iterativem Prozeß gelöst,

bei dem jeweils die Lösung einer Gleichung an die andere übergeben wird, bis Konvergenz eintritt.

Mischformen sind der pseudo-simultane Ansatz und der semianalytische Ansatz, vgl. S. 30.

Alle bisher vorgestellten Ansätze zur Lösung gekoppelter Probleme erweisen sich jedoch bei der Simulation der charakteristischen Kennlinien elektromechanisch gekoppelter Bauelemente als unzureichend.

Warum die bisher vorgestellten Methoden bei der Simulation elektromechanisch gekoppelter Effekte nur begrenzt einsetzbar sind, welches die speziell auftretenden Probleme bei elektromechanischer Koppelung sind, und mit welchen mathematischen Verfahren neue Simulationstechniken erstellt werden können, mit denen sämtliche Probleme beherrscht werden, die bei elektromechanischer Koppelung auftreten, ist Thema der folgenden Kapitel.

3.2 Charakteristische Probleme bei der Simulation elektrostatisch angetriebener Bauelemente

Fast alle elektromechanisch gekoppelten Mikrobauteile, wie zum Beispiel Mikrospiegel, Kammantriebe und Mikrorelais (vgl. Kap. 5), weisen eine ihnen inhärente **Instabilität** auf. Dieses instabile Verhalten wird offensichtlich durch den sogenannten **Snap-down**-Effekt.

Aufgrund der Nichtlinearität des Koppelterms (3.5) der elastomechanischen und der elektrostatischen Gleichung dominieren ab einer bestimmten an das Bauelement angelegten Spannung, der sogenannten **Snap-in**-Spannung, die elektrostatischen Kräfte die elastomechanischen Kräfte und die Struktur "schnappt" an die Gegenelektrode. Dieser Snap-down-Effekt ist als Konsequenz der gegensinnig wirkenden elastomechanischen Kraft und der elektrostatischen Kraft, die keine lineare Ortsabhängigkeit hat, allen elektrostatisch ausgelenkten Bauteilen inhärent.

Durch die Berührung zwischen flexibler und (isolierter) fester Elektrode entsteht ein **Kontakt**problem der mechanischen Struktur, auch Hindernisproblem genannt (vgl. S. 25). Dieses gehört ebenso wie der Snap-down zu den charakteristischen Eigenschaften elektrostatisch betriebener Bauelemente und wird auch oft bewußt für den Betrieb des Bauteils eingesetzt (vgl. z.B. das Mikrorelais in Abb. 5.25). Das Kontaktproblem stellt im Gegensatz zum Snap-down-Problem, das aus der Koppelung der mechanischen und elektrischen Energieformen erwächst, ein auf die Mechanik begrenztes Problem dar und wird abhängig vom eingesetzten mechanischen Solver mit unterschiedlichen Kontaktalgorithmen gelöst [87, 32].

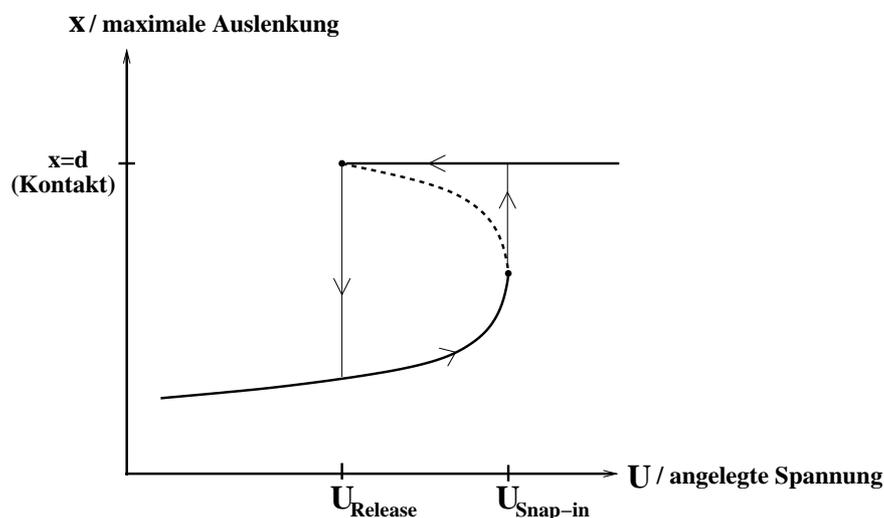


Abb. 3.2: Darstellung des Hysterese-Effekts bei Betrieb eines elektrostatisch angetriebenen Bauelements. Die gestrichelte Linie gibt den instabilen Teil der Kennlinie an, die mit bisherigen Verfahren nicht berechnet werden kann.

Die Existenz eines Kontaktes beim Betrieb von elektrostatisch auslenkbaren Mikrobauelementen ist die Voraussetzung für das Auftreten des sogenannten **Hysterese**verhaltens. Hat ein Bauteil nach Überschreitung der Snap-in-Spannung Kontakt, so löst sich die flexible Elektrode erst

wieder aus dem Kontakt, wenn die angelegte Spannung wesentlich unter die Snap-in-Spannung gesenkt wird. Die Spannung, bei der sich die flexible Elektrode wieder aus dem Kontakt löst, wird als **Release-Spannung** bezeichnet.

Abbildung 3.2, in der die Auslenkung der beweglichen Elektrode über der Spannung am Bauteil angetragen ist, zeigt dieses Phänomen. Bei Spannungen oberhalb der Snap-in-Spannung befindet sich die Elektrode in Kontaktposition, bei Spannungen unter der Release-Spannung löst sich die Elektrode vom Kontakt.

Das Entstehen dieses Hysterese-Verhaltens in der Spannungs-Auslenkungs-Kennlinie ist durch die Existenz instabiler Punkte auf der Kennlinie des elektromechanisch gekoppelten Bauteils begründet. Kann man diese instabilen Punkte zusätzlich berechnen, so läßt sich die Hysterese-Kurve stetig ergänzen. (Vgl. gestrichelte Linie in Abbildung 3.2).

Die Probleme in der Simulation ergeben sich nun daraus, daß alle bis jetzt dargestellten numerischen Verfahren wie zum Beispiel der iterative oder der simultane Ansatz (vgl. S. 29 f.) nur stabile Gleichgewichtspunkte berechnen können. Für die Berechnung instabiler Bereiche eines elektromechanisch gekoppelten Bauteils müssen andere Methoden herangezogen werden.

Daher werden in den nächsten Abschnitten zuerst Instabilitäten exemplarisch an einem Mikrobauelement dargestellt, und danach werden alle Formen eventuell auftretender Instabilitäten mathematisch analysiert und klassifiziert.

Im folgenden Kapitel 3.3 wird dann ein mathematisches Verfahren vorgestellt, das auch instabile Gleichgewichtslösungen berechnen kann, und zum Schluß wird die Anwendung dieses Verfahrens an elektromechanisch gekoppelten Mikrobauelementen demonstriert.

3.2.1 Instabilitäten bei elektrostatisch betriebenen Mikrobauelementen

Hervorgerufen werden die Instabilitäten bei den elektrostatisch betriebenen Bauelementen durch den nichtlinearen Koppelterm (3.5) des beschreibenden Gleichungssystems. Zur Untersuchung der prinzipiell auftretenden Instabilitäten bei MEMS wird ein idealisiertes Membranmodell betrachtet. Das Modell besitzt die Grundfunktionalität eines elektrostatisch betriebenen Mikrobauelements mit dem charakteristischen Koppelterm der elektrostatischen Anziehung auf den Rand.

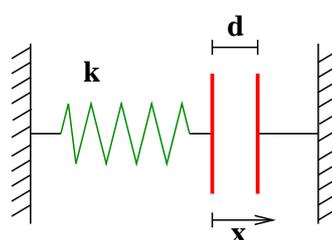


Abb. 3.3: Idealisiertes Ersatzmodell einer elektrostatisch ausgelenkten Membran.

Das Modell besteht aus einem parallelen Plattenkondensator, dessen eine Platte fest und dessen andere beweglich in x -Richtung an einer Feder mit der Federkonstante k aufgehängt ist. Die Fläche des Kondensators ist A , der Abstand zwischen den Kondensatorplatten ohne angelegte elektrische Spannung ist d , und ε bezeichnet die Permittivität.

Legt man an den Kondensator eine Spannung U an, wird die stationäre Auslenkung $x(U)$ durch folgende implizite Gleichung bestimmt

$$F(U, x) = \frac{1}{2} \frac{U^2 A \epsilon}{(d - x)^2} - kx = 0. \quad (3.11)$$

$F(U, x)$ beschreibt das Gleichgewicht der mechanischen und elektrischen Kraft. Im Diagramm Abb. 3.4 sind sowohl elektrostatische Kräfte als auch elastomechanische Kräfte in Abhängigkeit von der Auslenkung x der beweglichen Elektrode aufgetragen und das Kräftegleichgewicht jeweils in den markierten Gleichgewichtspunkten dargestellt.

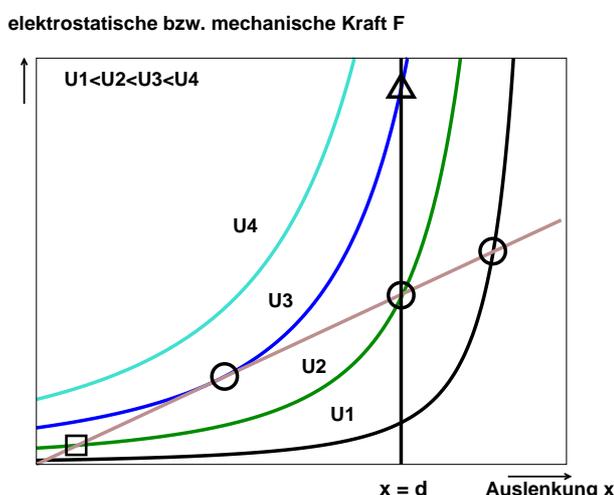


Abb. 3.4: Für das idealisierte Membranmodell sind die mechanischen und elektrischen Kräfte über der Auslenkung ange tragen. Der Kurvenparameter ist die angelegte Spannung. Die Kreise bezeichnen instabile, die Quadrate stabile Gleichgewichtspunkte. Das Dreieck bei $x = d$ gibt die Auslenkung an, wo die isolierte Kondensatorplatte die Gegenelektrode berührt.

Die elektrischen Kraftkurven bilden eine Kurvenschar von Hyperbeln, deren Scharparameter die jeweils angelegte Spannung U ist. Die mechanische Kraftkurve wird durch eine Gerade durch den Ursprung dargestellt. An den Schnittpunkten der elektrischen und mechanischen Kraftkurven herrscht Kräftegleichgewicht. Die mechanische Kraftkurve schneidet die elektrische Kraftkurve entweder zweimal, einmal oder keinmal. Existieren zwei Schnittpunkte, so ist der jeweilig linke Schnittpunkt (in der Figur als Quadrat markiert) ein stabiler Gleichgewichtspunkt, während der rechte Schnittpunkt (in der Figur als Kreis markiert) einen instabilen Gleichgewichtszustand beschreibt. Wird die angelegte Spannung erhöht, bewegt sich die Hyperbel der elektrischen Kraft nach oben und verschiebt den Schnittpunkt des stabilen Kräftegleichgewichts nach rechts. Der Schnittpunkt des instabilen Kräftegleichgewichts bewegt sich entsprechend nach links. Erhöht man die Spannung weiter, fallen stabiler und instabiler Schnittpunkt in einen Punkt zusammen, das Kräftegleichgewicht wird instabil und der Snap-Point ist erreicht. Liegt die angelegte Spannung oberhalb der Snap-Point Spannung, schlägt die bewegliche Elektrode auf die isolierte Gegenelektrode (Dreieck), deren Position durch die senkrechte Linie gekennzeichnet ist. Das ist der erste Teil der in Abb. 3.2 skizzierten Hysterese, das heißt, der Spannungsverlauf bis zum Kontakt.

Wird jetzt die Spannung wieder erniedrigt, wandert das Dreieck entlang der Kontaktlinie auf den Spannungshyperbeln nach unten, bis sich ein Gleichgewichtspunkt der mechanischen Kraftlinie mit der elektrischen Kraftlinie genau auf der Kontaktlinie findet. Dieser ist ein instabiler

Gleichgewichtspunkt und das System stellt sich sofort auf den zur gleichen Spannungskurve gehörigen stabilen Gleichgewichtspunkt ein. Das heißt, daß die Kontaktlösung in einem geometrischen Sprung resultiert. Diese Erniedrigung der Spannung von der Kontaktposition bis zum Lösen des Kontakts wird durch den zweiten Teil der in Abb. 3.2 skizzierten Hyperbel beschrieben, das heißt durch den Rückweg vom Kontakt zur Kontaktlösung.

Man kann zeigen, daß bei dem idealisierten Membranmodell der Snap-Point immer auftritt. Setzt man die elektrische der mechanischen Kraft gleich (vgl. Gl. (3.11)) und verlangt zusätzlich, daß die Ortsableitungen der elektrischen und mechanischen Kraft auch gleich sind (vgl. Nenner in Gl. (3.13)), kann man die Spannung U substituieren und erhält die Auslenkung

$$x = \frac{d}{3} \quad (3.12)$$

für das Auftreten des Snap-Points. Man beachte, daß diese Auslenkung unabhängig von der Spannung und Federsteifigkeit ist. Daher kann der Snap-Point auch nicht vermieden werden, wenn diese Auslenkung erreicht ist.

Um die Trajektorie $x(U)$ genauer zu untersuchen, differenziert man die Gleichung (3.11) nach U und erhält so:

$$\frac{dx}{dU} = \frac{-\frac{\partial F(U,x)}{\partial U}}{\frac{\partial F(U,x)}{\partial x}} = \frac{-\frac{UA\epsilon}{(d-x)^2}}{\frac{U^2 A\epsilon}{(d-x)^3} - k} \quad (3.13)$$

Dies ist die sogenannte Davidenko-Gleichung [22], die für $x(U)$ eine Differentialgleichung aufstellt. Da der Zähler für $U \neq 0$ immer ungleich Null ist, führt das zu folgender Fallunterscheidung:

- (a) $\frac{\partial F(U,x)}{\partial x} \neq 0$: Die Kurve kann in einer Umgebung von U eindeutig fortgesetzt werden.
- (b) $\frac{\partial F(U,x)}{\partial x} = 0$: die Tangente ist nicht definiert, denn sie verläuft senkrecht, die Kurve kann nicht eindeutig fortgesetzt werden.

Der Fall (b) charakterisiert den Snap-Point, in dem das Kräftegleichgewicht instabil wird. Zur Veranschaulichung des Snap-Points ist in Abb. 3.5 die Trajektorie $x(U)$ skizziert.

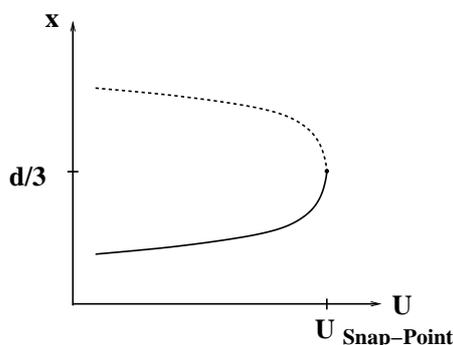


Abb. 3.5: Trajektorie $x(U) : U^2 = \frac{2k}{A\epsilon}x(d-x)^2$.

Die Trajektorie ist stabil bis zum Snap-Point, in dem, wie oben gezeigt, eine senkrechte Tangente auftritt. Nach Auftreten des Snap-Points gibt es keine stabilen Punkte mehr, was

durch eine gestrichelte Trajektorie verdeutlicht wird. Im ganzen folgenden Kapitel werden instabile Trajektorien gestrichelt dargestellt. Diesen an- und absteigenden Verlauf der Spannung mit zunehmender Auslenkung kann man auch aus den Schnittpunkten der mechanischen und elektrischen Kraft entlang der mechanischen Kraftlinie aus Abb. 3.4 entnehmen.

Neben der direkt am Membranmodell illustrierten Instabilität, die von der nichtlinearen Auslenkungsabhängigkeit der elektrostatischen Kraft hervorgerufen wird und daher bei jedem elektromechanischen Bauteil auftritt, können durch erweiterte Randbedingungen zusätzliche Instabilitäten auftreten. Zwei häufiger auftretende Fälle sollen als Beispiel dienen:

Der erste Fall sind Vorspannungen in der mechanisch deformierbaren Elektrode der Struktur, die zu bistabilen Zuständen in der Struktur führen. Im Fall einer Membran wäre das zum Beispiel eine zusätzliche Kraft, die parallel zur Oberfläche auf die eingespannte Membran wirkt. Dadurch entstehen innere Spannungen in der Struktur, die ab einer kritischen Kraft F zu dem sogenannten "buckling" führen (Eulersche Knicklast). Das heißt, die Membran hat im unausgelenkten Zustand einen instabilen Gleichgewichtspunkt und besitzt in der Wölbung nach oben bzw. nach unten zwei stabile Gleichgewichtspunkte.

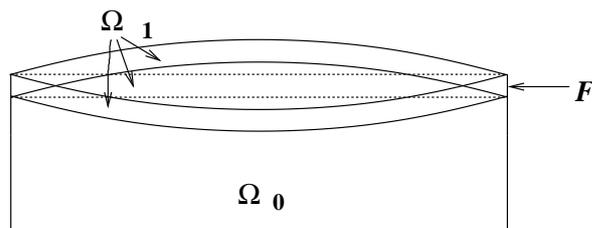


Abb. 3.6: Stabile und instabile Biegeformen (durchgezogene bzw. gestrichelte Linien) einer eingespannten Membran im Fall des "buckling".

Im zweiten Fall, in dem die Randbedingungen des elektrostatischen Gleichungssystems erweitert werden, weist das Bauelement mehr als zwei Elektroden auf, deren elektrische Potentiale voneinander unabhängig sind. Abhängig von der Reihenfolge der Zuschaltung der Spannungen an den Elektroden können sich verschiedene Trajektorien $x(U_1, U_2)$ ergeben, die dann zu unterschiedlichen Gleichgewichtspunkten führen können. Dieser Fall tritt zum Beispiel bei der Regelung einer zwischen Elektroden "schwebenden Platte" auf [34].

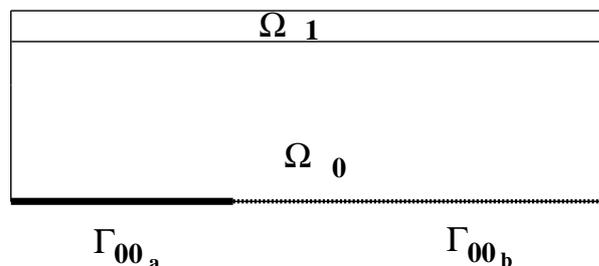


Abb. 3.7: Gegenelektrode einer eingespannten Membran mit zwei unterschiedlichen Spannungen auf Rand Γ_{00_a} und Γ_{00_b} .

3.2.2 Klassifizierung von Instabilitäten

Im vorigen Kapitel wurde das elektromechanisch gekoppelte Gleichungssystem des idealisierten Membranmodells als $F(U, x) = 0$ formuliert und auf seine Instabilitäten untersucht. In dieser Darstellung ist die elektrische Spannung U , der Parameter, der den Zustand des Systems kontrolliert, ein explizites Argument der Funktion F .

Im allgemeinen Fall kann nach der Diskretisierung des Gleichungssystems der elektromechanischen Koppelung (z.B. mit Rand- und finiten Elementen) folgendes algebraische Gleichungssystem formuliert werden:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.14)$$

\mathbf{f} beschreibt das zu untersuchende Gesamtsystem. \mathbf{y} , die abhängige Variable, ist ein n -dimensionaler Vektor. λ heißt Kontroll- bzw. Designparameter oder Bifurkationsparameter. Er ist die unabhängige Variable. Bezogen auf das im vorherigen Kapitel entwickelte Beispiel der idealisierten Membran, bedeutet \mathbf{y} die Auslenkung x der beweglichen Elektrode und λ die angelegte Spannung U .

Die Funktion \mathbf{f} soll stetig von \mathbf{y} und λ abhängen und hinreichend oft differenzierbar sein, damit sie als Grundlage für die folgenden mathematischen Definitionen von Instabilitäten dienen kann. Diese Bedingung an die Funktion \mathbf{f} ist in fast jedem praxisrelevanten Fall erfüllt [74].

Der Kontrollparameter λ hat meistens eine wichtige physikalische Bedeutung und bestimmt das Systemverhalten. Das heißt, daß mit Änderung seines Werts z.B. ein Wechsel in der Stabilität des Systems stattfinden kann. Den Anwender interessiert daher meist das Systemverhalten in Abhängigkeit dieses Parameters. Im Falle des Beispiels der idealisierten Membran wäre das die Auslenkung x der beweglichen Elektrode in Abhängigkeit von der angelegten Spannung U . Erreicht die angelegte Spannung die Snap-in-Spannung, wechselt das stabile Systemverhalten in ein instabiles Systemverhalten.

Eine Lösung $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ der Gleichung (3.14) heißt allgemein **Verzweigungspunkt**, wenn sich die Anzahl der Lösungen beim Übergang von λ nach λ_0 ändert. Ein Diagramm aus Lösungspunkten (\mathbf{y}, λ) heißt Verzweigungs- oder Bifurkationsdiagramm.

Eine wesentliche Voraussetzung für das Auftreten von Instabilitäten ist die Nichtlinearität von \mathbf{f} und deren Parameterabhängigkeit von λ . Beides ist im Fall der elektromechanischen Koppelung erfüllt.

Hauptsächlich gibt es zwei Typen von Verzweigungspunkten bzw. instabilen Punkten:

Umkehrpunkte teilen parabelförmige Lösungsäste in einen stabilen und in einen instabilen Ast (Abb. 3.8) oder auch in zwei instabile Lösungsäste (Abb. 3.9). Umkehrpunkte sind immer dann gegeben, wenn im physikalischen Zusammenhang das schon erwähnte "snapping" auftritt (vgl. Abb. 3.5).

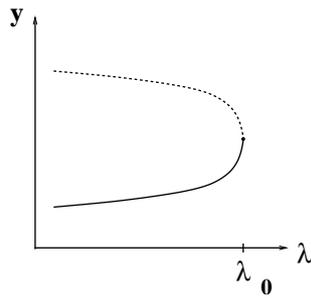


Abb. 3.8: Umkehrpunkt Typ a bei $\lambda = \lambda_0$.

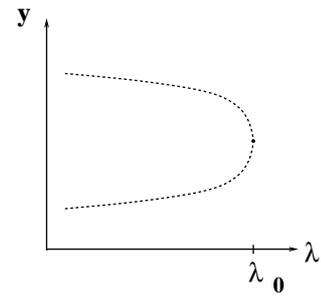


Abb. 3.9: Umkehrpunkt Typ b bei $\lambda = \lambda_0$.

Bifurkationspunkte (hier nur einfach und stationär) treten an der Kreuzung zweier Lösungsäste auf. Dies können sich kreuzende Graphen ohne Umkehrpunkt sein, die idealisiert als Geraden dargestellt werden, oder ein Schnitt zwischen einem Graphen mit Umkehrpunkt, idealisiert als Parabel dargestellt, mit einem Graphen ohne Umkehrpunkt, idealisiert als Gerade dargestellt, welcher auch "Pitchfork-Bifurkation" genannt wird (Abb. 3.10). Im Fall der bistabilen Membran zum Beispiel, wie in Abb. 3.6, treten mehrere Lösungsäste und ein Bifurkationspunkt auf.

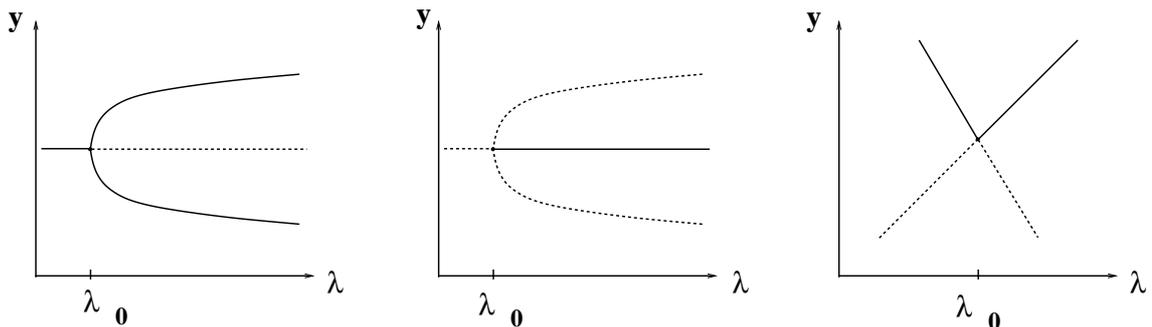


Abb. 3.10: Pitchfork-Bifurkationen bei $\lambda = \lambda_0$ bzw. Bifurkationspunkte an kreuzenden Geraden.

Der Vollständigkeit halber seien noch drei weitere Typen instabiler Punkte aufgeführt, die im Zusammenhang mit MEMS aber erst für Spezialfälle wie zum Beispiel bei Anlegen multipler elektrischer Spannungen (vgl. S. 37) interessant werden: **Hysteresepunkte** (Abb. 3.11a), **multiple Bifurkationen** (Abb. 3.11b) und **isolierte Punkte** (Abb. 3.11c).

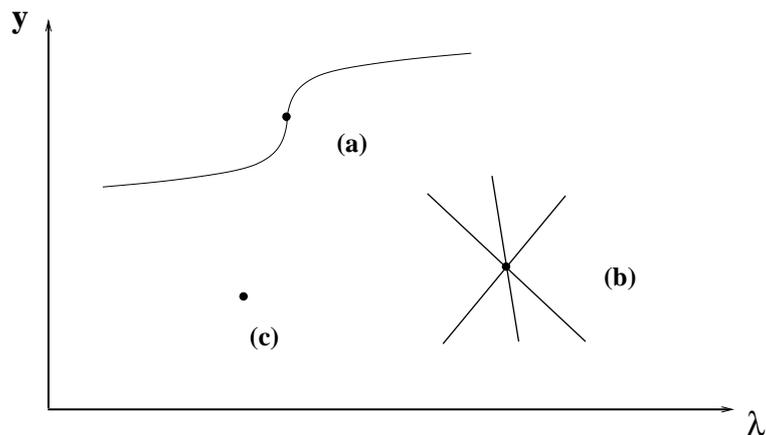


Abb. 3.11: (a) Hysteresepunkt, (b) multiple Bifurkationen und (c) isolierter Punkt.

Nach der graphischen Illustration der verschiedenen Typen von Verzweigungspunkten folgt nun eine formale mathematische Definition von Umkehrpunkten und Bifurkationspunkten.

(2.4.1) Definition $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ ist ein **Umkehrpunkt** der stationären Lösungen der Gleichung (3.14), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(\mathbf{y}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$
2. $\text{Rang } f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \lambda_0) = n - 1$
3. $f_{\lambda}(\mathbf{y}_0, \lambda_0) \notin \text{Bild } f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$, das heißt, $\text{Rang}(f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \lambda_0) | f_{\lambda}(\mathbf{y}_0, \lambda_0)) = n$
4. Es existiert eine Parametrisierung $\mathbf{y}(\sigma)$, $\lambda(\sigma)$ mit $\mathbf{y}(\sigma_0) = \mathbf{y}_0$, $\lambda(\sigma_0) = \lambda_0$,
und $\frac{d^2\lambda(\sigma_0)}{d\sigma^2} \neq 0$

Punkte 1, 2 und 3 gewährleisten, daß die Tangente im Punkt $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ im $(n + 1)$ -dimensionalen (\mathbf{y}, λ) -Raum senkrecht auf der λ -Achse steht. Punkt 4 enthält die Umkehrreigenschaft der Kurve.

(2.4.2) Definition $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ ist ein **einfacher stationärer Bifurkationspunkt** der Gleichung (3.14), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(\mathbf{y}_0, \lambda_0) = \mathbf{0}$
2. $\text{Rang } f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \lambda_0) = n - 1$
3. $f_{\lambda}(\mathbf{y}_0, \lambda_0) \in \text{Bild } f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$
4. Genau zwei stationäre Lösungs Zweige schneiden sich in $(\mathbf{y}_0, \lambda_0)$ mit unterschiedlichen Tangenten.

Der Punkt 1 und 2 der Definition des einfachen stationären Bifurkationspunktes entsprechen den ersten zwei Punkten in der Definition eines Umkehrpunktes, d.h. f_y ist singularär im kritischen Punkt (y_0, λ_0) . Welcher Art der kritische Punkt (y_0, λ_0) sein wird, entscheidet vor allem die Bedingung 3, in der sich die zwei Definitionen nicht mehr gleichen. Diese sagt aus, daß die zusammengesetzte Matrix $(f_y|f_\lambda)$ im Falle eines Umkehrpunktes wieder Höchststrang n haben muß, bei einem Bifurkationspunkt bleibt die Matrix $(f_y|f_\lambda)$ singularär. Die Singularität der Matrix impliziert, daß sie einen mindestens eindimensionalen Lösungsraum besitzt, was sich in den zwei Lösungskurven ausdrückt, die sich im kritischen Punkt kreuzen. Daß diese Lösungskurven nicht zusammenfallen, gewährleistet der Punkt 4 der Definition.

Den charakteristischen Unterschied der zwei Definitionen in Bedingung 3 kann auch noch mit Hilfe der folgenden Darstellung geometrisch anschaulich deuten:

Beschreibt man die erweiterte Matrix $(f_y|f_\lambda)$ als $n + 1$ Spaltenvektoren $(z^1|z^2|\dots|z^n|z^{n+1})$, so ist es möglich, folgende Aussage zu formulieren: Findet man ein z^k , so daß nach dessen Entfernung aus der Matrix $(f_y|f_\lambda)$ eine Matrix mit Vollrang entsteht, so handelt es sich um einen Umkehrpunkt. Deshalb kann der Lösungsast bei einem Umkehrpunkt auch eindeutig wegen des impliziten Funktionentheorems fortgesetzt werden, d.h. eine implizit definierte Funktion kann explizit aufgelöst werden. Für einen Bifurkationspunkt findet man kein solches k , bei der die um die Spalte z^k reduzierte Matrix Höchststrang besitzt.

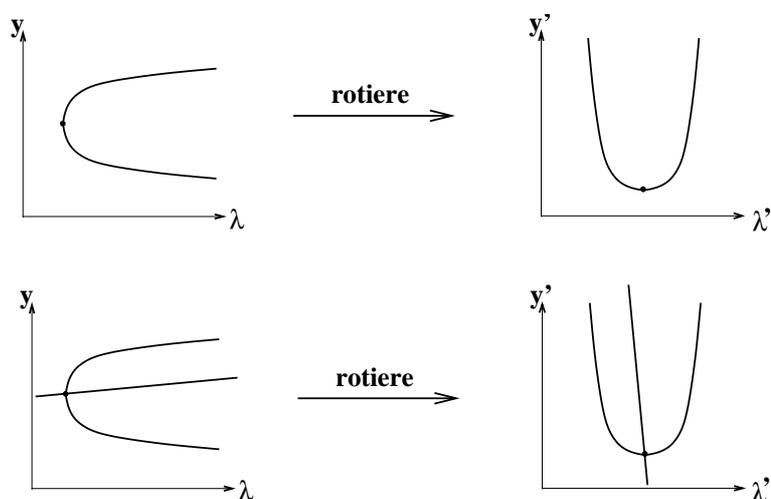


Abb. 3.12: Rotation einer Trajektorie mit Umkehrpunkt durch Umsortieren der Variablen, und die gleiche Rotation einer Trajektorie mit Bifurkation.

Dieses Entfernen einer Spalte hat auch eine geometrische Bedeutung. Durch Rotation kann aus einem Lösungsast mit Umkehrpunkt eine eindeutige Funktion werden. Bei einer Bifurkation ist dies nicht möglich. Veranschaulicht ist das in Abb. 3.12. Bezieht man sich auf das im vorigen Kapitel beschriebene idealisierte Membranmodell, so bedeutet die Spaltenvertauschung der Matrix, daß die Auslenkung x und die Spannung U ihre Rollen tauschen. Man sucht also nicht mehr zu einer vorgegebenen Spannung die zugehörige Auslenkung der beweglichen Membranplatte, sondern gibt die Auslenkung der Platte vor und berechnet die dazugehörige Spannung.

3.3 Homotopieverfahren

Eine sehr robuste und weit einsetzbare Klasse numerischer Verfahren zur Lösung parameterabhängiger nichtlinearer Gleichungssysteme sind **Homotopiemethoden**. Einen systematischen und umfassenden Überblick über diese Methode findet man in [12]. Als inkrementelle Fortsetzungsverfahren werden Homotopieverfahren bereits seit langem im Ingenieurbereich zur Lösung nichtlinearer Systeme eingesetzt wie zum Beispiel im Bauingenieurwesen [28], bei Strömungsproblemen [64], bei chemischen Reaktionen [42] oder bei Verbrennungsproblemen [46].

Zuerst soll der Grundgedanke skizziert werden, der dem Verfahren der Homotopie zugrunde liegt.

Der Begriff der Homotopie bedeutet eine stetige Abbildung eines Intervalls $[0,1]$ in einen Funktionenraum, das heißt, die Homotopie $\rho(\lambda)$ führt die Funktion $g = \rho(0)$ stetig in die Funktion $f = \rho(1)$ über, wenn λ von 0 auf 1 monoton erhöht wird. Man sagt, f und g sind homotop. Homotopieabbildungen sind ein grundlegendes Werkzeug in der Topologie und geben die Möglichkeit, Äquivalenzklassen auf Funktionen zu definieren [29].

Die Homotopie der Topologie bildet die mathematische Grundlage für die in der Numerik angewandte Homotopiemethode:

Problem Finde die Lösung des nicht-linearen gekoppelten Gleichungssystems $\mathbf{g}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{0}$,
 $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Methode Bette das ursprüngliche Problem in die Funktionenfamilie $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0}$,
 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein, wobei gilt $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ und $\mathbf{f}(\cdot, \lambda^*) = \mathbf{g}(\cdot)$.
 $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda_0) = \mathbf{0}$ hat bei $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\lambda_0)$ eine leicht zu berechnende Lösung.

Lösung Durch schrittweise Erhöhung des Parameters λ von λ_0 auf λ^* und die schrittweise Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\lambda), \lambda) = \mathbf{0}$ erhält man die gewünschte Lösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}(\lambda^*)$.

Äquivalente Bezeichnungen der Homotopiemethode sind Fortsetzungsmethode (man setzt den Parameter λ fort), Pfadverfolgungsmethode (man verfolgt den Pfad (\mathbf{y}, λ) in Abhängigkeit von λ) oder Einbettungsverfahren (Problem wird in Abhängigkeit von λ dargestellt, also in eine Funktion \mathbf{f} eingebettet, und durch Veränderung von λ berechnet).

Um einen Homotopiealgorithmus zu konstruieren, benötigt man eine Einbettung des Problems in eine parameterabhängige Funktionenfamilie $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0}$.

Die Einbettung kann schon natürlich vorhanden sein, falls das Problem bereits eine parameterabhängige Darstellung besitzt: $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ mit $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}, \lambda)$. Eine natürliche Einbettung hat die Eigenschaft, daß bei der Variation des Parameters λ alle dazu gelösten Gleichungssysteme tatsächliche reale Zustände beschreiben. Zudem hat der Parameter λ selber natürlich auch eine physikalische Bedeutung im Problem.

Dazu entgegengesetzt gibt es Einbettungen mit einem sogenannten "künstlichen" Parameter. Dieser wird zusätzlich eingeführt und hat keinerlei physikalische Bedeutung für das Problem. Wird der künstliche Parameter λ variiert, so ist nur die Lösung des Gleichungssystems zum Endwert des Parameters $\lambda = \lambda^*$ von realer Bedeutung für das Problem. Eine künstliche Einbettung kann so konstruiert werden, daß bis zum Erreichen der Endlösung zu $\lambda = \lambda^*$ keine kritischen Punkte berechnet werden müssen. Bei einer natürlichen Einbettung können diese als physikalische Zustände natürlich auftreten und die Parametrisierung muß problemangepaßt gewählt werden. Eine wichtige Anwendung der künstlichen Einbettung ist das Konstruieren einer Homotopie zur Berechnung isolierter Punkte, vgl. S. 39 und [83]. Eine einfache, oft verwendete Formulierung [80, 12] für eine Einbettung mit einem künstlichen Parameter λ ist zum Beispiel $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \lambda \mathbf{g}(\mathbf{y}) + (1 - \lambda) \mathbf{h}(\mathbf{y})$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$. $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ ist das zu lösende Problem und $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ ist das einfache Startproblem der Homotopie.

Die Homotopie $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0}$ beschreibt beim Übergang zur schrittweisen Berechnung, bei dem das Intervall $\lambda \in [0, 1]$ in eine monotone Folge von λ_j mit Schrittindex j übergeht, die implizite Kurve $(\mathbf{y}_j, \lambda_j)$. Die Pfadverfolgung dieser Kurve beschreibt der Homotopiealgorithmus. Dieser wird charakterisiert durch

- (a) Parameterwahl / Parametrisierung mit λ
- (b) Prädiktor: $(\mathbf{y}_j, \lambda_j) \longrightarrow (\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}, \tilde{\lambda}_{j+1})$
- (c) Korrektor: $(\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}, \tilde{\lambda}_{j+1}) \longrightarrow (\mathbf{y}_{j+1}, \lambda_{j+1})$
- (d) Schrittweitenkontrolle von $\Delta\lambda$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß es neben den oben dargestellten P-C-Methoden (Prädiktor- Korrektor-Methoden) auch noch sogenannte P-L-Methoden ("Piecewise Linear Method") gibt [13], denen das Prinzip zugrunde liegt, daß versucht wird anstelle der exakten Kurve $(\mathbf{y}_j, \lambda_j)$ stückweise lineare Kurvenstücke exakt zu verfolgen. Eine Anwendung findet die P-L-Methode dort, wo das zu lösende Problem ein unstetiges Verhalten besitzt.

(a) Parameterwahl

Eng mit der Einbettung verknüpft ist die Parametrisierung des Gleichungssystems.

Betrachten wir das allgemeine Modellproblem (3.14) aus Kapitel 3.2.2, das auch das Problem der elektromechanischen Koppelung repräsentiert, kann eine allgemeine **Parametrisierung** durch einen Parameter γ wie folgt formuliert werden: $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\gamma)$ und $\lambda = \lambda(\gamma)$. Damit hat das Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0}$ n Gleichungen für $n + 1$ Unbekannte. Wird die Parametrisierung durch die zusätzliche skalare Gleichung

$$p(\mathbf{y}, \lambda, \gamma) = 0$$

festgelegt, dann kommt man zu folgendem erweiterten System

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}, \gamma) := \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) \\ p(\mathbf{y}, \lambda, \gamma) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

mit $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}, \lambda)$, welches aus $n + 1$ Gleichungen und $n + 1$ Unbekannten besteht.

Die einfachste Parametrisierung ist $\gamma = \lambda$, wobei die zusätzliche Gleichung dann $p(\mathbf{y}, \lambda) = \lambda - \lambda_{j+1}$ heißt. λ_{j+1} ist der im $j + 1$ -ten Schritt vorgegebene Parameterwert für λ .

Dies entspricht im Fall des idealisierten Membranmodells einer Wahl von $\lambda = U$. Dabei sieht man sofort, welche Schwierigkeiten bei dieser Wahl auftreten. Existieren kritische Punkte auf dem zu verfolgenden Pfad, schlägt die Parametrisierung fehl.

Wählt man als Parametrisierung die Bogenlänge $\gamma = s$ der Lösungstrajektorie, so bilden Umkehrpunkte kein Problem mehr, da man sich tangential zur Kurve bewegt. Dadurch entsteht ein global konvergentes und sehr zuverlässiges Verfahren [81], allerdings muß zusätzlich in jedem Schritt das Differentialgleichungssystem gelöst werden, das die Bogenlänge beschreibt:

$$0 = \mathbf{f} \mathbf{y} \frac{d\mathbf{y}}{ds} + \mathbf{f} \lambda \frac{d\lambda}{ds} \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dy_n}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 1 \quad (3.17)$$

Für die Gleichung $p(\mathbf{y}, \lambda, \gamma) = 0$ des erweiterten Systems (3.15) ergibt sich dann aus Gleichung (3.17) durch Multiplikation mit $(ds)^2$ für den j -ten Schritt:

$$p(\mathbf{y}, \lambda, s) = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i(s_j))^2 + (\lambda - \lambda(s_j))^2 - (s - s_j)^2 \quad (3.18)$$

$(\mathbf{y}(s_j), \lambda(s_j))$ bezeichnet die Lösung aus dem vorherigen Schritt des Fortsetzungsverfahrens.

Eine Variante des Verfahrens, die Parametrisierung mit der Pseudobogenlänge, versucht den numerischen Aufwand zu verkleinern, indem nur noch lokale Bogenlängen betrachtet werden. Diese stellen bei geeigneter Auswahl gute Schätzwerte für die tatsächliche Bogenlänge dar [13].

Von lokaler Parametrisierung spricht man, wenn eine beliebige Komponente y_i des Vektors \mathbf{y} , ($i = 1, \dots, n$), inklusive $y_{n+1} = \lambda$ gewählt wird: $p(\mathbf{y}, \eta) := y_k - \eta$, mit $1 \leq k \leq n + 1$ und einem passenden Wert für η . Ein geeignetes k kann man mit Hilfe der Prädiktoren finden, indem man zum Beispiel die Komponente y_k wählt, deren zugehörige prädizierte Tangentensteigung bzw. Sekantensteigung maximalen Betrag besitzt. η richtet sich im wesentlichen nach der aktuellen Schrittweite der Komponente k : $\eta = y_{j_k} + (y_{j_k} - y_{(j-1)_k})\xi$, mit ξ einstellbare Größe.

Ein Nachteil dieser Parametrisierung besteht darin, daß bei sehr plötzlichem Eintreten von kritischen Punkten die Parametrisierung nicht schnell genug reagiert und bei der Fortsetzung fehlschlägt. Abhilfe kann geschaffen werden, wenn zusätzlich neben der gemäß dem

Auswahlalgorithmus günstigsten Wahl für den nächsten Parameter auch der zweitgünstigste Parameter mit berücksichtigt wird [74].

(b) Prädiktorwahl

Prädiktoren können auf zwei Wegen gefunden werden. Die erste Klasse leitet sich aus der Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = \mathbf{0}$ und ihren Ableitungen ab. Prädizierte Lösungen dieser Klasse erhält man zum Beispiel aus der Integration der Davidenko-Gleichung

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\lambda} = -(\mathbf{f}_y)^{-1} \mathbf{f}_\lambda \quad , \quad (3.19)$$

bzw. deren Umformulierung mit der Bogenlänge s oder einem anderen geeigneten Parameter. Die Umformulierung ist nötig, falls Singularitäten auftreten.

Ein weiterer wichtiger Prädiktor dieser ersten Klasse ist der Tangentenprädiktor. Die Tangente \mathbf{z} berechnet sich aus:

$$(\mathbf{f}_y | \mathbf{f}_\lambda) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

Für die Eindeutigkeit von \mathbf{z} ist noch eine normierende Gleichung notwendig: $\mathbf{c}^T \mathbf{z} = 1$ mit $\mathbf{c}^T = [c_1, \dots, c_{n+1}]$. Der Prädiktor formuliert sich dann folgendermaßen:

$$(\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}, \tilde{\lambda}_{j+1}) := (\mathbf{y}_j, \lambda_j) + \sigma_j \mathbf{z} \quad (3.21)$$

σ_j ist eine passend gewählte Schrittweite.

Die zweite Klasse der Prädiktoren stützt sich auf die polynomiale Extrapolation der Lösungen (\mathbf{y}, λ) der Gleichung $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) = 0$.

Als einfachsten Prädiktor verwendet man das Polynom 0-ter Ordnung, d.h. man verwendet einfach den vorherigen Lösungswert als Prädiktor:

$$(\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}, \tilde{\lambda}_{j+1}) := (\mathbf{y}_j, \lambda_j) \quad (3.22)$$

Ein Polynom erster Ordnung wäre die Sekante

$$(\tilde{\mathbf{y}}_{j+1}, \tilde{\lambda}_{j+1}) := (\mathbf{y}_j, \lambda_j) + \sigma_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1}, \lambda_j - \lambda_{j-1}) \quad (3.23)$$

Die Praxis zeigt, daß Prädiktoren niedriger Ordnung meistens denen höherer Ordnung vorzuziehen sind, da sie robuster und viel weniger rechenzeitintensiv sind. Sekanten- und Tangentenprädiktoren haben den gleichen Diskretisierungsfehler, daher wird die Wahl auf den Prädiktor fallen, der auf schon bestehende Funktionsauswertungen im Rechenlauf zurückgreifen kann [74].

(c) Korrektorwahl

Bei den **Korrektoren** greift man auf die üblichen Algorithmen zurück, die als Löser für das gekoppelte Gleichungssystem eingesetzt werden, wie zum Beispiel das Newton-Verfahren oder iterative Gleichungslöser. Zusätzlich kann der Korrektor noch so parametrisiert werden, daß die Korrektur senkrecht zur Tangente z der Lösungskurve verläuft [35, 52], um die Anzahl der Korrektorschritte zu minimieren. Dies ist aufwendig, aber in der Nähe von Umkehrpunkten unumgänglich, um dort Konvergenz zu erreichen.

(d) Schrittweitenkontrolle

Schrittweitenkontrolle wird eingesetzt, um ineffektive Schritte bei einer Pfadverfolgung herauszufiltern und damit eine robuste Abtastung bei möglichst großen Schrittweiten zu erreichen. Die Schrittweitenkontrolle orientiert sich an der dem Algorithmus zugrundeliegenden Parametrisierung, dem Prädiktor und Korrektor.

Für die **Schrittweitenkontrolle** können unterschiedliche Vorgehensweisen angegeben werden:

- Eine erste Vorgehensweise besteht darin, die Schrittweite so zu steuern, daß die Zahl der Iterationen pro Lösungspunkt möglichst konstant ist. Es hat sich gezeigt, daß mit dieser Vorgehensweise der Rechenaufwand für die Gesamtlösung, also die Gesamtheit aller Lösungspunkte, minimal wird, weil eine Balance zwischen möglichst großen Schritten (wenigen Lösungspunkten) und wenigen Iterationen pro Lösungspunkt erreicht wird. Abhängig vom Typ des Korrektors und der vorgegebenen Fehlertoleranz existieren Erfahrungswerte für die optimale Anzahl N_{opt} von durchzuführenden Korrektoriterationen, um ein Ergebnis innerhalb der Fehlertoleranz zu erhalten.

Der folgende Ansatz [73] steuert die Schrittweite so, daß die Iterationsanzahl N_{opt} im Mittel erreicht wird.

$$\eta := y_k^j + (y_k^j - y_k^{j-1})N_{opt}/N_j \quad (3.24)$$

N_j ist dabei die Anzahl von Korrektoriterationen im vorangegangenen Schritt, y_k ist der aktuell ausgewählte Parameter, dessen Schrittweite bestimmt wird, und η der neue Vorschlag für den Parameter y_k .

- Benützt man ein Korrektorverfahren mit bekannter Fehlerfunktion (z.B. Newton), kann mit Hilfe dieser die neue Schrittweite extrapoliert werden.
- Man kann die relative Änderung zwischen Norm des Prädiktors und Norm des Lösungsvektors beobachten und sie zum Beispiel auf $\delta = 0,1$ beschränken, um kritische Lösungsbereiche sehr genau abzurastern.

Zusammenfassend kann man sagen, daß es möglich ist, sehr verschiedene Homotopieverfahren zu entwickeln, da es vielfältige Kombinationsmöglichkeiten für Prädiktor, Korrektor, Parametrisierung und Schrittweitenkontrolle gibt. Keine Fortsetzungsmethode kann ausschließlich

empfohlen werden. Die Methode muß an die Problemklasse angepaßt werden, um optimal zu arbeiten. Allgemein kann man noch bemerken, daß einfachere Ansätze für Prädiktor, Korrektor, Parametrisierung und Schrittweitenkontrolle oft schneller und zuverlässiger arbeiten [74].

3.3.1 Anwendung der Homotopie auf MEMS

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie das theoretische Wissen über Instabilitäten und über den Aufbau eines Homotopiealgorithmus aus den vorherigen Kapiteln auf die Berechnung physikalischer Probleme angewendet wird, insbesondere auf das Problem der elektromechanischen Koppelung.

Als Beispiel eines elektromechanisch gekoppelten Bauteils soll wieder das idealisierte Membranmodell aus Kap. 3.2.1 dienen.

In Kap. 3.2.1 wurde schon gezeigt, daß bei allen elektromechanisch gekoppelten Bauteilen der sogenannte Snap-Point auftritt, an dem das elektrostatisch auslenkbare Bauteil bei Anlegen einer Spannung oberhalb der Snap-in-Spannung sein stabiles Verhalten verliert. Es wurde behauptet, daß es sich dabei um einen Umkehrpunkt auf der (U, x) -Trajektorie handelt. Anhand der Definition 2.4.1 aus Kap. 3.2.2 soll diese Behauptung überprüft werden.

Die Auslenkung $x(U)$ des Membranmodells ist implizit durch die Gleichung (sh. Gl. (3.11))

$$F(U, x) = \frac{1}{2} \frac{U^2 A \varepsilon}{(d-x)^2} - kx = 0. \quad (3.25)$$

gegeben. F bildet \mathbb{R}^2 auf \mathbb{R}^1 ab.

Die ersten drei Bedingungen der Definition sind offensichtlich erfüllt:

1. $F(U_0, x_0) = 0$ gilt für jeden Gleichgewichtspunkt.
2. $Rg F_x(U_0, x_0) = 0$ gilt falls $\frac{U_0^2 A \varepsilon}{(d-x_0)^3} - k = 0$
3. $Rg(F_x(U_0, x_0) | F_U(U_0, x_0)) = 1$, da $\frac{U_0 A \varepsilon}{(d-x)^2} \neq 0$

Die vierte Bedingung, die zeigt, daß eine Parametrisierung $x(\sigma)$ und $U(\sigma)$ mit der Eigenschaft $\frac{d^2 U}{d\sigma^2} \neq 0$ existiert, ist die eigentliche Umkehrreigenschaft der Kurve. Solche Parametrisierungen sollen für das idealisierte Membranmodell im folgenden hergeleitet werden.

Da elektromechanisch gekoppelte Bauelemente viele dem Problem inhärente Größen besitzen wie zum Beispiel die Kapazität des Systems, bietet sich eine Parametrisierung mit diesen Parametern an. Dieser Parameter muß geeignet sein, d.h. er muß ohne Schwierigkeiten fortsetzbar sein. Umkehrpunkte und Bifurkationspunkte sollten bei der Fortsetzung nicht auftreten. Mit einer so geeigneten Parametrisierung ist eine natürliche Einbettung des Problems gefunden und ein Homotopiealgorithmus kann auf das Problem angewandt werden.

Beim idealisierten Membranmodell wäre entsprechend gefordert, daß $\frac{dx}{d\sigma}$ existiert, bzw. $\frac{\partial F(x, \sigma)}{\partial x} \neq 0$, denn das beschreibt einen eindeutigen Zusammenhang zwischen σ und x .

Die einfachste Möglichkeit ist hier eine lokale Parametrisierung, statt (x, U) betrachtet man (U, x) , d.h. der Parameter $\sigma = U$ wird in $\sigma = x$ vertauscht. Damit erhält man für die

Davidenko-Gleichung (3.13) statt $\frac{dx}{dU}$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\frac{U^2 A \epsilon}{(d-x)^3} - k}{-\frac{U A \epsilon}{(d-x)^2}} \quad (3.26)$$

Diese Ableitung ist für $U \neq 0$ und $x > d$ überall existent. Der Kontaktfall $x = d$ tritt in realen Bauteilen nicht auf, weil die nicht-bewegliche Elektrode stets mit einer Isolationsschicht versehen ist.

Im folgenden sind in Gleichungsform (3.15) die Parametrisierung für $\sigma = Q$ angegeben, wobei Q die Gesamtladung auf der bewegten Kondensatorplatte darstellt.

$$\begin{pmatrix} F(x(Q), U(Q)) \\ U \cdot C(x) - Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{U^2 A \epsilon}{(d-x)^2} - kx \\ U \cdot \frac{\epsilon A}{d-x} - Q \end{pmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

Bildet man bei dieser Parametrisierung die zweite Ableitung $\frac{d^2 U}{dQ^2}$, so erhält man $\frac{-6Q}{2kA^2\epsilon^2} \neq 0$ für $Q \neq 0$. Damit ist der Punkt 4 der Def. 2.4.1 gezeigt und der Umkehrpunkt auf der Trajektorie ist tatsächlich ein Umkehrpunkt im Sinne der Definition 2.4.1.

Die Ladung ist nicht die einzige denkbare Parametrisierung für das elektromechanisch gekoppelte Problem. Tabelle 3.2 gibt einen Überblick über mögliche Homotopieparameter für das idealisierte Membranmodell und ihre Fortsetzbarkeit. Die gleichen prinzipiellen Zusammenhänge für die Fortsetzbarkeit dieser Parameter (quadratisch, linear usw.), erhält man auch für reale Bauteile wie zum Beispiel die Mikromembran (vgl. Kap. 6.2).

Homotopieparameter σ	$x(\sigma)$	$\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}$	
Q	$x(Q) = \frac{Q^2}{2kA\epsilon}$	$\frac{Q}{kA\epsilon}$	
C	$x(C) = d - \frac{\epsilon A}{C}$	$\frac{\epsilon A}{C^2}$	existiert für $C \neq 0$
F_{el}	$x(F_{el}) = \frac{F_{el}}{k}$	$\frac{1}{k}$	
E_{mech}	$x(E_{mech}) = \sqrt{\frac{2E_{mech}}{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{2kE_{mech}}}$	existiert für $E_{mech} \neq 0$

Tab. 3.2: Übersicht möglicher Parametrisierungen der Auslenkung x für das idealisierte Membranmodell. Es bedeuten Q die Gesamtladung auf dem Bauelement, C die Gesamtkapazität, F_{el} die gesamte elektrostatische Kraft und E_{mech} die elastomechanische Energie.

In folgendem Algorithmus (3.3.1) ist ein einfaches Prädiktor-Korrektor Verfahren dargestellt. Man startet von einer bekannten Lösung zu einem Parameterwert σ_0 . Der Prädiktor erhöht schrittweise den Homotopieparameter σ_k , und der Korrektor berechnet die Lösung zum neuen Homotopieparameter σ_{k+1} . Eine Schrittweitensteuerung bestimmt ein neues Inkrement für σ .

Wie für das idealisierte Membranmodell gezeigt wurde, kann eine geeignete Parametrisierung des elektromechanisch gekoppelten Problems dadurch gefunden werden, daß man physikalisches Wissen in die Auswahl geeigneter Parameter einfließen läßt, die aus der Menge der dem Problem inhärenten Parameter stammen. Damit erhält man eine natürliche Einbettung des Problems, alle Berechnungen auf dem Homotopiepfad entsprechen tatsächlichen physikalischen

(3.3.1) Algorithmus (Einfaches Prädiktor-Korrektor Verfahren)

ZU LÖSEN $F(\mathbf{Y}, \sigma) := \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}, \lambda) \\ p(\mathbf{y}, \lambda, \sigma) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{mit } \mathbf{Y} = (\mathbf{y}, \lambda)$			
START $(\mathbf{Y}_0, \sigma_0) \quad \text{mit } F(\mathbf{Y}_0, \sigma_0) = \mathbf{0}$			
BERECHNE $k = 0, 1, 2, \dots$ <table border="1" data-bbox="555 808 1235 1303"><tr><td>PRÄDIKTOR $(\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = (\mathbf{Y}_k, \sigma_k + \Delta h_k)$</td></tr><tr><td>KORREKTOR Bestimme \mathbf{Y}_{k+1} aus $F(\mathbf{Y}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = \mathbf{0}$ $(\mathbf{Y}_{k+1}, \sigma_{k+1}) = (\mathbf{Y}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1})$</td></tr><tr><td>SCHRITTWEITENANPASSUNG $\Delta h_{k+1} \geq 0$</td></tr></table>	PRÄDIKTOR $(\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = (\mathbf{Y}_k, \sigma_k + \Delta h_k)$	KORREKTOR Bestimme \mathbf{Y}_{k+1} aus $F(\mathbf{Y}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = \mathbf{0}$ $(\mathbf{Y}_{k+1}, \sigma_{k+1}) = (\mathbf{Y}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1})$	SCHRITTWEITENANPASSUNG $\Delta h_{k+1} \geq 0$
PRÄDIKTOR $(\tilde{\mathbf{Y}}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = (\mathbf{Y}_k, \sigma_k + \Delta h_k)$			
KORREKTOR Bestimme \mathbf{Y}_{k+1} aus $F(\mathbf{Y}, \tilde{\sigma}_{k+1}) = \mathbf{0}$ $(\mathbf{Y}_{k+1}, \sigma_{k+1}) = (\mathbf{Y}_{k+1}, \tilde{\sigma}_{k+1})$			
SCHRITTWEITENANPASSUNG $\Delta h_{k+1} \geq 0$			
AUSGABE Trajektorie (\mathbf{Y}_k, σ_k) für $k = 0, 1, 2, \dots$			

Zuständen. Statt einer Bogenlängenparametrisierung der Lösungskurve, die sehr häufig bei Trajektorien mit Umkehrpunkten eingesetzt wird, wird also hier eine lokale Parametrisierung verwendet, bei der im Verlauf des Homotopiealgorithmus keine Umkehrpunkte auftreten. Wie später gezeigt wird, verwendet der Algorithmus der Multiparameter-Homotopie (sh. Kap. 4.4), der für elektromechanisch gekoppelte Bauteile hier entwickelt wurde, einen ganzen Satz geeigneter lokaler Parametrisierungen, zwischen denen dynamisch im Rechenlauf immer der am besten geeignete ausgewählt wird.

Je nach der verwendeten Schrittweitensteuerung wird mit konstantem Δh weitergeschaltet oder Δh wird in Abhängigkeit von der Krümmung der Kennlinie reduziert, um stark gekrümmte Kennlinienteile feiner abtasten zu können (vgl. Kap. 4.3 – Kap. 4.5).

Der Korrektor, der in Algorithmus (3.3.1) gezeigt ist, besteht intern nochmals aus einem (inneren) Prädiktor und einem (inneren) Korrektor, vgl. Kap. 4.3 und 4.4. Innerer Prädiktor und

innerer Korrektor bilden gemeinsam einen iterativen Gauß-Seidel-artigen Relaxationsalgorithmus, in den ein nichtlineares Sekantenverfahren integriert ist.

Das folgende Kapitel erklärt im Detail die im vorigen Absatz neu verwendeten Begriffe im Zusammenhang mit der Entwicklung des Homotopiealgorithmus zur Berechnung elektromechanisch gekoppelter Probleme bei Mikrobauteilen.

Kapitel 4

Numerische Realisierung elektromechanischer Koppelungen bei Mikrobauelementen

Bevor die in dieser Arbeit eingesetzten Verfahren und Methoden zur Berechnung elektromechanisch gekoppelter Phänomene bei Mikrobauelementen genauer erläutert und beschrieben werden, soll der aktuelle Stand der Technik dargestellt werden. Einerseits wird ein Überblick über wichtige Programme und Simulationsumgebungen gegeben, die derzeit zur Simulation der elektromechanischen Koppelung bei Mikrobauteilen eingesetzt werden können. Andererseits werden mathematische Programmpakete vorgestellt, die die Berechnung nichtlinearer Gleichungssysteme mit multiplen Lösungen mit Hilfe von Homotopiemethoden leisten.

4.1 Stand der Technik

Im ingenieurtechnischen Bereich werden Finite-Element-Programme schon jahrzehntelang zur Berechnung von strukturmechanischen Problemen und Wärmeleitungsproblemen eingesetzt. Diese Programme wurden dann auch im Bereich mechatronischer Mikrobauteile angewendet, wenngleich sie zunächst nicht auf die speziellen Anforderungen der Mikrowelt zugeschnitten waren, wie zum Beispiel die angepaßte Vernetzung der Bauteilstrukturen bei großen Aspektverhältnissen. Zu erwähnen sind hier Programmsysteme wie ABAQUS [8], ANSYS [16], ADINA [10], ALGOR [11], MARC [53] und NASTRAN [54].

Den speziellen Anforderungen der Bauteile der Mikrosystemwelt entsprechend wurden in den letzten Jahren, parallel zum Entstehen dieser Arbeit, mehrere Programme zur Simulation von mikrostrukturierten Systemen entwickelt. Beispiele von zur Zeit kommerziell verfügbaren Programmen sind CoventorWare [21], INTELLISENSE [37], MEMSCAP [51], CAPA [44], SESES [72] und CFD-ACE+MEMS [20]. Ebenso wurde auch ANSYS [16] in den letzten Jahren durch spezielle Module und Elemente für die Anwendung in der Mikrosystemtechnik erweitert, z.B. [82].

Elektromechanische Probleme, die über den Rand gekoppelt sind, lassen sich mit den klassischen Finite-Element-Programmen nicht gekoppelt lösen, sondern müssen als Einzelanalysen der beiden physikalischen Bereiche gelöst und anschließend dann vom Anwender für eine Gesamtanalyse iterativ gekoppelt werden.

Bei den Simulationsumgebungen, die auf die Mikrosystemwelt zugeschnitten sind, gibt es einige Programme, die dem Benutzer eine iterative Koppelung zwischen Finite-Element-Simulator als Löser der Strukturmechanik und Rand-Element- bzw. Finite-Element-Simulator als Löser der Elektrostatik bereitstellen [43, 37, 21, 72]. Mittlererweile bietet das FEM-Programm ANSYS auch die Möglichkeit, die elektromechanische Koppelung über den Rand sehr effizient mittels speziell entwickelter Transducerelemente zu modellieren [16, 82]. Diesen liegen allerdings semianalytische Ansätze wie z.B. die differentielle Plattenkondensatornäherung zugrunde, so daß sie nur auf sehr spezielle Problemklassen angewendet werden können.

Auch mit diesen erweiterten und stark verbesserten Möglichkeiten für die Simulation elektromechanisch-gekoppelter Probleme über den Rand hat der Benutzer nur die Möglichkeit, Charakteristiken dieser Bauteile im **stabilen** Arbeitsbereich zu berechnen. Aufgrund der in Kap. 3.2 dargestellten Situation ist allerdings gerade für Bauteile, die elektromechanische Koppelung aufweisen, die Kenntnis des exakten Betriebsbereiches am wichtigsten, in dem der stabile in einen instabilen Zustand wechselt und umgekehrt. Das aber kann mit diesen Programmen nicht exakt simuliert werden. Der rein instabile Arbeitsbereich kann sogar überhaupt nicht simuliert werden.

Auf mathematischer Seite existieren schon seit längerem Programmpakete, die sich auf die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme spezialisiert haben und Algorithmen bereitstellen, um deren stabile und instabile Lösungsäste zu berechnen. Beispiele sind HOMPAC [81], CONTIN (früher PITCON) [63] und ALCON [23]. Sie arbeiten alle auf der Grundlage der Homotopiemethode, die im Kap. 3.3 vorgestellt wurde.

Alle drei Programmpakete verlangen die Bereitstellung der Systemgleichungen, teilweise auch deren Ableitungen, d.h. die Jacobimatrix, die aber bei der Verwendung kommerzieller Solver (Black-Box-Ansatz) in der Regel nicht zugänglich sind oder, im Fall der Jacobimatrix, mit hohem numerischem Aufwand durch finite Differenzen erzeugt werden müssen.

Die Systemgleichungen müssen außerdem bestimmte Formkriterien erfüllen, z.B. dicht oder dünn besetzte Matrizen. Diese Kriterien sind nicht ohne weiteres erfüllbar, wenn die verschiedenen Energiedomänen mit unterschiedlichen Verfahren diskretisiert wurden. Nur über einen simultanen Lösungsansatz (vgl. S. 30) mit einheitlicher mathematischer Modellierung und Diskretisierung für alle physikalischen Domänen kann man diese Voraussetzung erfüllen.

Überhaupt keine Rücksicht wird in diesen Verfahren auf die physikalische Bedeutung der Variablen genommen. Das Homotopieverfahren wird rein mathematisch angewendet und verliert damit seine physikalische Interpretierbarkeit. Das bedeutet beispielsweise, daß der Code HOMPAC sogenannte künstliche Homotopieparameter verwendet (vgl. S. 43) und mit deren Hilfe eine Folge von nicht-physikalischen Zuständen berechnet, um schließlich zum physikalischen Endzustand des Systems zu gelangen. Existiert aber wie bei der elektromechanischen Koppelung über den Rand ein natürlicher Homotopieparameter, nämlich die Spannung, so wünscht man sich entlang der tatsächlichen Charakteristik zu rechnen. Genau diesem wird jedoch in der Homotopiemethode mit künstlichem Homotopieparameter nicht Rechnung getragen. Darüber hinaus können durch diese Art der Parametrisierung zusätzliche künstliche,

d.h. nicht-physikalische Lösungen auftreten [47]. Die Programmpakete ALCON und CONTIN wählen im Gegensatz zu HOMPACK zur Parametrisierung dem Problem inhärente Homotopieparameter aus, allerdings nach rein mathematischen Gesichtspunkten, nicht gemäß den physikalischen und technischen Anforderungen und demnach nicht problemangepaßt. Hauptsächlich wegen der nötigen Bereitstellung geeigneter Systemmatrizen, aber auch wegen einer optimalen Parameterwahl, sind diese rein mathematischen Algorithmen nur sehr eingeschränkt auf das physikalische Problem der elektromechanischen Koppelung über den Rand einsetzbar.

Es ist daher festzustellen, daß weder im ingenieurtechnischen Bereich noch im rein mathematischen Bereich Simulationsumgebungen existieren, die in der Lage sind, adäquat und ohne sehr großen vorbereitenden Programmieraufwand das instabile Verhalten elektrostatisch ausgelenkter Mikrobauelemente zu simulieren.

Daher wurde in dieser Arbeit ein Homotopieverfahren mit einem iterativen Ansatz kombiniert, um das Problem der Instabilitäten bei elektrostatisch ausgelenkten Mikrobauteilen umfassend und physikalisch interpretierbar zu charakterisieren und zu lösen. Das hierzu entwickelte Verfahren wird in den folgenden Kapiteln 4.2-4.5 beschrieben.

4.2 Wahl der Verfahren zur numerischen Umsetzung des elektromechanisch gekoppelten Problems

Ein typisches Beispiel eines elektrostatisch ausgelenkten Bauteils stellt der Mikrospiegel [39] dar, anhand dessen alle Anforderungen, die Mikrobauteile mit dem Funktionsprinzip der elektrostatischen Auslenkung besitzen, auf einfache Weise exemplarisch erläutert werden können. Die Abbildung 4.1 zeigt dazu den Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Kippspiegels.

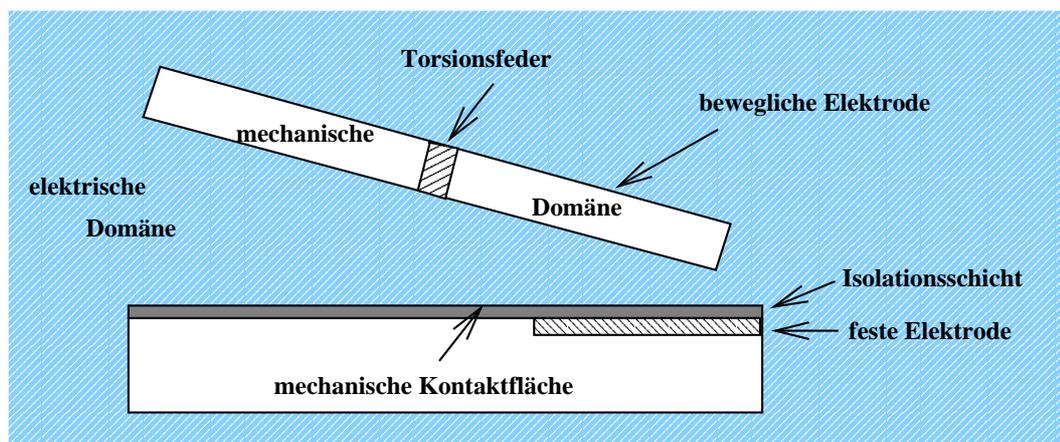


Abb. 4.1: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Kippspiegels. Die verschiedenen physikalischen Simulationsgebiete sind unterschiedlich grau unterlegt.

An zwei Torsionsfedern ist eine Spiegelplatte drehbar aufgehängt. Diese Anordnung ist das zu simulierende strukturmechanische Gebiet. Zwischen der Spiegelplatte und einer Elektrode auf der Bodenplatte wird eine Spannung angelegt. Die jeweiligen Oberflächen sowie der gesamte dazwischen- und umliegende Bereich stellen das elektrostatische Gebiet dar. Durch die angelegte Spannung greifen an der Oberfläche der beweglichen Platte elektrostatische Kräfte an, die diese dann aus ihrer Ruhelage auslenken. Man hat also zwei unterschiedliche physikalische Energiebereiche, die nur auf dem Rand ihrer Gebiete überlappen. In unserem Beispiel ist das die Oberfläche der Spiegelplatte.

Wie schon in Kapitel 3.1 besprochen, eignen sich zur Simulation strukturmechanischer Probleme Finite-Element-Programme, da sie sich auf diesem Anwendungsgebiet schon seit Jahrzehnten bewährt haben und hier auch dementsprechend ausgereift und umfangreich sind.

Welche Anforderungen an den Finite-Element-Solver gestellt werden, kann am Beispiel des Kippspiegels einfach gezeigt werden. Bei angelegter Spannung dreht sich der Spiegel, bis er maximal die Isolationsschicht der Gegenelektrode erreicht. Diese Auslenkung ist so groß, daß das Simulationsprogramm auf jeden Fall die auftretenden Nichtlinearitäten beherrschen muß. Berührt der Kippspiegel die Isolationsschicht der Gegenelektrode, so befindet sich die bewegliche Spiegelplatte im mechanischen Kontakt mit der Anschlagfläche. Dieses hier auftretende Kontaktproblem stellt für ein ausgereiftes Finite-Element-Programm in der Regel keine Schwierigkeit dar. Die Benützung eines kommerziellen Finite-Element-Programms zur Simulation des strukturmechanischen Problems erweist sich also als sehr vorteilhaft. Da die Eingriffsmöglichkeiten in den Rechenlauf bei kommerziellen Programmen allerdings sehr eingeschränkt sind, ist es günstig dieses Programm dann als Black-Box-Solver zu verwenden.

Merkmale	BE-Methode	FE-Methode
Unendlich große elektrische Domäne	Lediglich Diskretisierung der Ränder bzw. der Randfläche notwendig. Unendliche Gebiete werden exakt modelliert.	Vernetzung des gesamten Raumes notwendig, Abschluß mit sogenannten Unendlichkeitselementen. Unendlichkeitsgebiete können nur approximiert werden.
Starke geometrische Verformung der elektrischen Domäne	keinerlei Problem	Starke Deformation des Diskretisierungsgitters, eventuell Neuvernetzung notwendig.
Möglichst exakte Kenntnis der Feldvariable (Spannung) und deren Ableitung (Fluß) auf dem Koppelrand	Feldvariable sowie deren Ableitung werden direkt berechnet.	In der Standardformulierung müssen die ersten Ableitungen der Feldvariablen nachträglich berechnet werden.

Tab. 4.1: Übersicht der Anforderungen zur Berechnung des elektrostatischen Gebiets in elektromechanisch gekoppelten Problemen und ihre Umsetzung in der BE-Methode und der FE-Methode.

Für das elektrostatische Problem stehen im wesentlichen zwei Methoden zur Auswahl, die Finite-Element-Methode (FE-Methode) und die Rand-Element-Methode (BE-Methode). Die Finite-Volumen-Methode und das finite Differenzenverfahren wurden schon in Kap. 3.1 für das Problem der elektrostatisch deformierbaren Körper als weniger geeignet eingestuft. Die Tabelle 4.1 enthält die Anforderungen für die Berechnung des elektrostatischen Teils in elektromechanisch gekoppelten Problemen und ihre jeweilige Umsetzung durch die BE- und FE-Methode.

Aus der Übersicht der Anforderungen läßt sich direkt entnehmen, daß das elektrostatische Problem wesentlich einfacher mit der BE-Methode bewältigt werden kann und daher dieser Methode der Vorzug gegeben werden sollte. Die Wahl, ob FE-Methode oder BE-Methode vorteilhafter für die Berechnung des elektrostatischen Feldes ist, hängt aber auch noch von der mathematischen Behandlung der Koppelung der zwei physikalischen Energiedomänen ab. Daher müssen Vor- und Nachteile der in Frage kommenden Koppelalgorithmen in die Entscheidung einbezogen werden.

Von den in Kap. 3.1 vorgestellten Methoden der Koppelung sollen jetzt vor allem der iterative und der simultane Ansatz gegeneinander abgewägt werden, da es sich bei den anderen zwei Methoden um Mischformen der hier betrachteten handelt.

Iterativer Ansatz	Simultaner Ansatz
geringer Programmieraufwand (Übergabe der jeweiligen Koppelgrößen mit eventueller Interpolation auf unterschiedliche Gitterdiskretisierungen).	hoher Programmieraufwand (Gemeinsame Diskretisierung in ein Gesamtmodell und deren Gleichungslösung).
Simulatoren können für jede einzelne Energieform problemangepaßt gewählt werden.	Simulatoren können nur bedingt problemangepaßt gewählt werden.
Konvergenzrate linear bzw. schwach überlinear	quadratische Konvergenzrate möglich
Nur bei wechselseitig starker Koppelung treten Konvergenzschwierigkeiten auf.	Auch bei wechselseitig starker Koppelung der physikalischen Gebiete meist konvergent.

Tab. 4.2: Merkmale des simultanen und iterativen Ansatzes zur Lösung gekoppelter Probleme über den Rand.

Vergleicht man die jeweiligen Vor- und Nachteile in der Gegenüberstellung in Tabelle 4.2, so fällt sofort auf, daß der iterative Ansatz wesentlich weniger Schwierigkeiten bei der Realisierung in sich birgt. Allerdings ist dabei der Nachteil der Divergenz bei sehr starker bidirektionaler Koppelung eine wesentliche Einschränkung. Starke Koppelung bedeutet, daß bei kleinen Veränderungen der einen Koppelgröße starke Veränderungen der anderen Koppelgröße auftreten.

Bei den hier behandelten elektrostatisch ausgelenkten Bauteilen tritt eine starke Koppelung nur in einer Richtung auf, nämlich bei der Übergabe der Auslenkungen des mechanischen Teilproblems an das elektrische Teilproblem, weil hier kleine Auslenkungsänderungen große Änderungen der elektrischen Kräfte bewirken.

Die zweite Koppelung, nämlich die Übergabe der elektrostatischen Kräfte aus dem elektrischen an das mechanische Teilproblem, ist keine starke Koppelung, weil sich die Auslenkungen mehr oder weniger linear mit den Kräften ändern, da im wesentlichen Federkonstanten wirksam sind.

Favorisiert man allerdings den simultanen Ansatz, dann wäre eine gemeinsame Diskretisierung der zwei Gebiete für die Struktur des zu lösenden Gleichungssystems zu bevorzugen. Damit würde die FE-Methode für die Elektrostatik zur Anwendung kommen.

Für das hier zu behandelnde Problem ist der iterative Ansatz geeignet, weil keine beidseitige starke Koppelung vorliegt. Er wird in der vorliegenden Arbeit weiterverfolgt. Damit können die Simulatoren problemangepaßt gewählt werden, in unserem Fall also die BE-Methode für die Elektrostatik und die FE-Methode für die Strukturmechanik. Der iterative Ansatz ist gleichzeitig eine sogenannte Black-Box-Methode, das heißt, der Anwender hat den Vorteil, keine Kenntnis des Innenlebens der Simulatoren besitzen zu müssen, sondern benötigt nur Kenntnis über die einzugebenden und auszugebenden Größen. Durch diese Eigenschaft können ohne großen Mehraufwand Simulatoren ausgetauscht werden.

Das Hauptproblem, das bei elektrostatisch ausgelenkten Bauteilen auftreten kann, wurde bis jetzt noch nicht berücksichtigt, nämlich die durch die Nichtlinearität der elektrostatischen Kräfte hervorgerufene Instabilität.

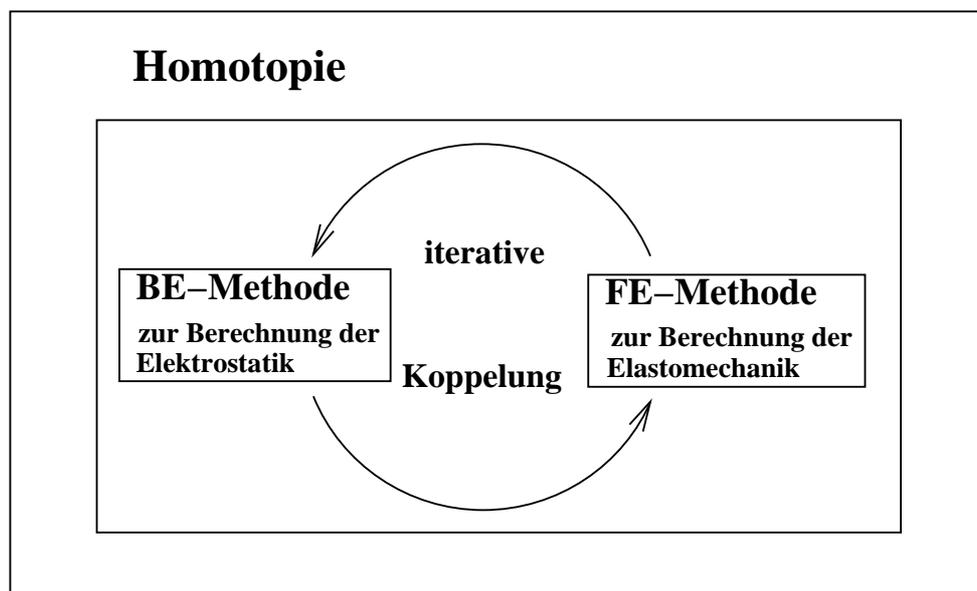


Abb. 4.2: Ausgewählte Verfahren zur Berechnung des elektromechanisch gekoppelten Problems.

Im Kapitel 3.3 wurden Homotopiemethoden eingeführt, um unter anderem instabile Bereiche nicht-linearer Gleichungssysteme berechnen zu können. Für das idealisierte Membranmodell wurden theoretisch dazu unterschiedliche Parametrisierungen untersucht (vgl. S. 48) und ein sehr allgemeiner Algorithmus zur Berechnung instabiler Zustände bei MEMS vorgestellt (vgl. Abb. 3.3.1). Gelingt es, diesen Homotopiealgorithmus in den iterativen Ansatz zu integrieren oder ihn mit ihm zu verbinden, können instabile Zustände sowie auch sonstige kritische Punkte

ohne numerische Probleme und mit sehr geringem Programmieraufwand berechnet werden. Durch die Möglichkeit, in der Homotopie unterschiedliche Steuerparameter zu wählen, ist man nicht mehr gezwungen, eine spannungsgesteuerte Berechnung durchzuführen, die zu den bekannten Konvergenzproblemen (vgl. Kap. 6.1.1) führt, sondern kann einen globalen oder mehrere lokale Parameter wählen, die gute Konvergenz bewirken.

Das Diagramm 4.2 zeigt die aufgrund der oben angestellten Abwägungen gewählten Verfahren zur numerischen Berechnung des elektromechanisch gekoppelten Problems.

Die numerische Umsetzung der getroffenen Wahl in einen leistungsfähigen Algorithmus wird in den kommenden Kapiteln dargestellt.

4.3 Homotopieverfahren mit Ladungssteuerung

Verwendet man Homotopieverfahren, muß zuerst eine vorteilhafte Einbettung gefunden werden (vgl. S. 42). Diese sollte im Fall der elektrostatischen Koppelung durch einen natürlichen Parameter erfolgen, um die physikalische Interpretierbarkeit zu erhalten. Die erste Parametrisierung, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurde, war die Ladung Q auf der beweglichen Elektrode (vgl. Gl. (3.27) für die idealisierte Membran). Statt der üblichen Vorgabe der Spannung wurde die Ladung vorgegeben und daraus der Gleichgewichtspunkt berechnet.

Die Wahl genau dieser Parametrisierung hat folgenden Grund:

Bei dieser Parametrisierung erhält man zwischen Ladung Q und Auslenkung bzw. Bauteildeformation Geo eine streng monotone Funktion (Q, Geo) im Gegensatz zur Funktion (U, Geo) , so daß immer ein eindeutiger Gleichgewichtspunkt berechnet werden kann. Dies wird am Beispiel des Mikrospiegels aus Kap. 4.2 deutlich. Abb. 4.3 zeigt die Kurvenverläufe für (U, Geo) und (Q, Geo) . Auf der x -Achse ist die angelegte Spannung beziehungsweise die Ladung auf der beweglichen Elektrode angetragen, auf der y -Achse die Auslenkung der Spiegelplatte. Es zeigt sich im Gegensatz zur Spannung U für die Ladung Q die eindeutige Kurve (Q, Geo) , die den gesamten Arbeitsbereich eindeutig parametrisiert.

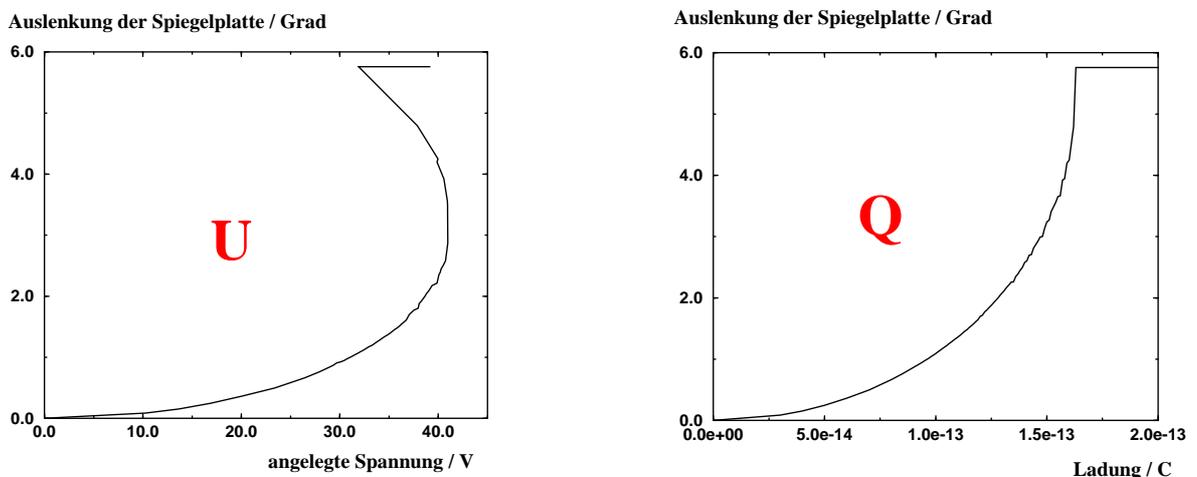


Abb. 4.3: Vergleich einer instabilen(links) und einer stabilen(rechts) Parametrisierung beim Mikrokippspiegel.

Zusätzlich gilt bei konstanter Bauteilgeometrie noch ein Zusammenhang, mit dem der ladungs-gesteuerte Homotopiealgorithmus sehr einfach formuliert werden kann:

$$F_{el} \sim Q^2 \sim U^2 \quad (4.1)$$

$$\text{bzw. } F_{el} = Q^2 \cdot k_1^2(x) = U^2 \cdot k_2^2(x) \quad (4.2)$$

mit den Proportionalitätsfaktoren $k_1(x)$ und $k_2(x)$, die von der Auslenkung x des Bauteils abhängen und für die gilt:

$$k_1(x) = \frac{1}{2C^2(x)} \cdot \frac{dC(x)}{dx} \quad \text{wegen} \quad F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{1}{2}Q^2 \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) \quad (4.3)$$

$$k_2(x) = C(x) \quad (4.4)$$

mit der auslenkungsabhängigen Bauteilkapazität $C(x)$.

Durch die Abhängigkeit der Proportionalitätsfaktoren von der Auslenkung erklärt sich der scheinbare Widerspruch zwischen Gl. (4.1) und Abb. 4.3, die keinen linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Ladung zeigt, da in jedem Arbeitspunkt andere Proportionalitätsfaktoren gelten.

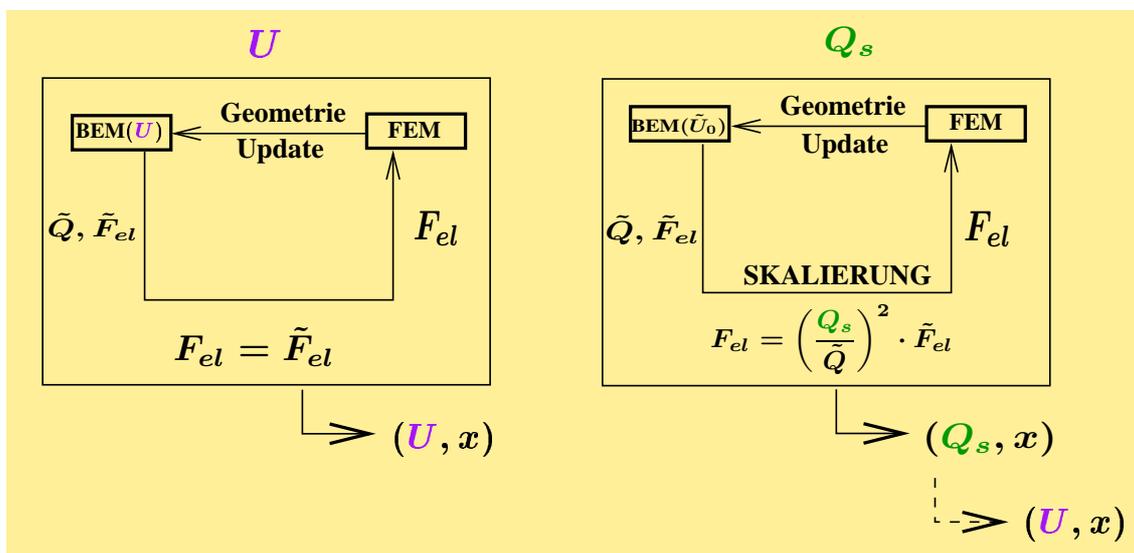


Abb. 4.4: Gegenüberstellung der iterativen BEM-FEM-Koppelung, links ohne, rechts mit Integration der Homotopiemethode.

In Abbildung 4.4 ist links die übliche iterative Koppelung mit der Vorgabe der Spannung U und rechts der Algorithmus mit der Vorgabe der Soll-Ladung Q_s dargestellt. Im neuen Algorithmus (rechts) behält man das Grundprinzip des iterativen Aufbaus mit Kraft- und Geometrieübergabe bei, allerdings gibt es zwei wesentliche Änderungen: Die BE-Methode (BEM) berechnet die elektrostatischen Kräfte immer zu einer Einheitsspannung \tilde{U}_0 (beliebig vorgegeben). Dadurch ergibt sich zunächst eine Ladung \tilde{Q} und eine Kraftverteilung \tilde{F}_{el} auf dem Bauteil, die nur

von der Einheitsspannung \tilde{U}_0 und der aktuellen Bauteilgeometrie abhängen. Der Bezug zur Ladungsvorgabe Q_s wird dadurch hergestellt, daß mit Hilfe der Proportionalitätsbeziehung (4.1) die Kraftverteilung \tilde{F}_{el} von der Ladung \tilde{Q} auf die gewünschte Ladung Q_s skaliert wird. Dann übernimmt die FE-Methode (FEM) die skalierte Kraftverteilung F_{el} als Eingangsgröße und berechnet eine neue Bauteilgeometrie. Ist im iterativen Prozeß Konvergenz erreicht, kann man wegen der Proportionalitätsbeziehung (4.1) aus der Charakteristik (Q_s, Geo) sofort (U, Geo) herleiten.

Die Proportionalitätsbeziehung (4.1) wird im Algorithmus zweimal an entscheidenden Stellen eingesetzt: Erstens zur Kraftskalierung und zweitens zur Berechnung der interessierenden Lösungskurve (U, Geo) , die ja nicht mehr wie bei der iterativen Koppelung mit Spannungsvorgabe ein direktes Ergebnis ist.

Der exakte Ablauf des Algorithmus mit innerer und äußerer Schleife ist im Detail in Abbildung 4.5 skizziert.

Die innere Schleife dient zur Berechnung des Gleichgewichtspunktes und ist der Teil des Algorithmus, der bereits in Abb. 4.4 skizziert wurde.

Das Wertepaar (Geo_{0s}, Q_s) bezeichnet die Startgeometrie Geo_{0s} und die gewünschte Ladung Q_s , die nicht in BEM, sondern erst bei der Kraftskalierung verwendet wird. \tilde{U}_0 ist die beliebig vorgegebene, aber immer gleichbleibende Spannung, mit der die BE-Methode (BEM) das zugehörige elektrostatische Feld und insbesondere die elektrische Kraftverteilung \tilde{F}_{el_n} und die Gesamtladung \tilde{Q}_n berechnet. Nach der Konvergenzprüfung, die erst im zweiten Durchlauf beginnt, und bei der die Ladung der aktuellen Iteration \tilde{Q}_n mit der Ladung der vorherigen Iteration \tilde{Q}_{n-1} verglichen und gegen eine vorgegebene Abbruchgenauigkeit geprüft wird, führt man die Kraftskalierung durch und erhält die Kraftverteilung F_{el_n} . Diese ist die neue Kraftverteilung, zu der die FE-Methode (FEM) eine neue Geometrie Geo_n berechnet. Im neuen Iterationslauf startet BEM jetzt mit $(\tilde{U}_0, Geo_n, Q_s)$. Ist Konsistenz erreicht, d.h. ist die Konvergenzprüfung erfolgreich ausgefallen, berechnet man mit Hilfe der Proportionalitätsbeziehung (4.1) die der Ladung Q_s korrespondierende Spannung U_s und erhält den Lösungsvektor (Q_s, U_s, Geo_s) . In der äußeren Schleife, der Homotopieschleife, wird Q_s um ein Inkrement ΔQ erhöht und der modifizierte iterative BEM-FEM-Ablauf startet erneut.

Dieser Homotopiealgorithmus mit Ladungssteuerung (Q -Homotopie) zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Durchgehende Simulation des Bauteilverhaltens im stabilen und instabilen Bereich.
- Für flexible (z.B. Mikromembran) wie für starre (z.B. Mikrokippspiegel) Strukturen gleichermaßen geeignet. Ein starrer Körper besitzt nur einige wenige Freiheitsgrade während eine flexible Struktur unendlich viele Freiheitsgrade besitzt.
- Der Fall des mechanischen Kontakts ist für jedes Bauteil berechenbar (vgl. z.B. Simulationen zu Membran in Kap. 6.1). Eingeschränkt berechenbar ist der exakte Erstkontakt (vgl. Kap. 4.5). Erstkontakt bedeutet, es herrscht zwar mechanischer Kontakt, aber noch keine Kontaktkraft zwischen den Kontaktflächen.

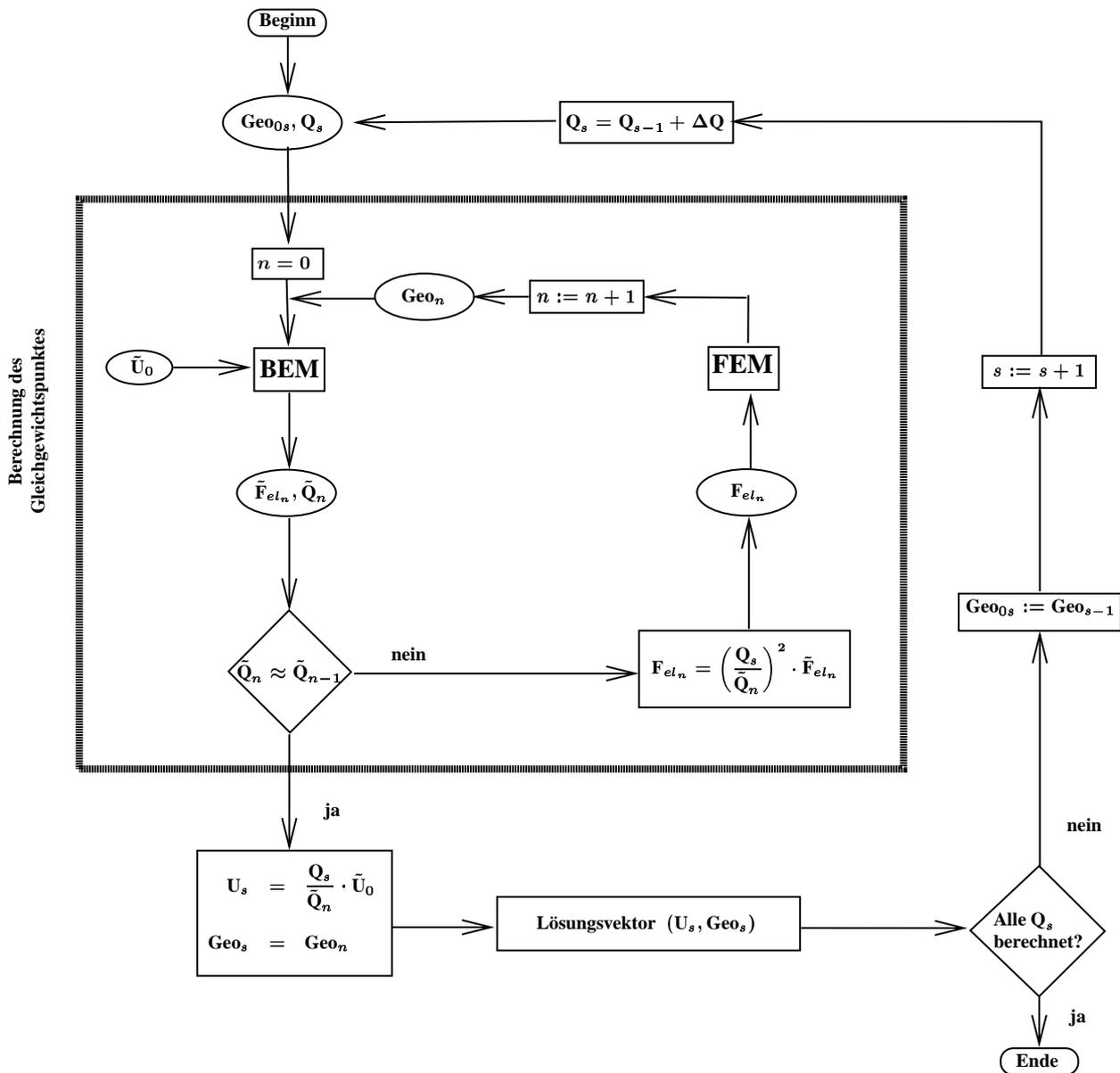


Abb. 4.5: Algorithmus der Ladungshomotopie.

4.3.1 Integration des Algorithmus in bestehende Software-Tools

Einer der Vorteile des hier entwickelten Homotopieverfahrens besteht darin, daß existierende, bewährte Solver für den elektrischen bzw. mechanischen Bereich genutzt werden können. Das Homotopieverfahren wird als Aufsatz auf die bestehenden Solver implementiert. Hier soll gezeigt werden, wie der Homotopiealgorithmus und die Solver zu einem Gesamtsimulator integriert werden. Als FE-Solver wurde das Programm TP2000 [32] und als BE-Solver das Programm BETTI [45] verwendet. Als Prä- und Postprozessor wurde FEMAP [24] verwendet. Zur genaueren Beschreibung des Leistungsumfanges der jeweiligen Solver sei auf den Anhang A verwiesen.

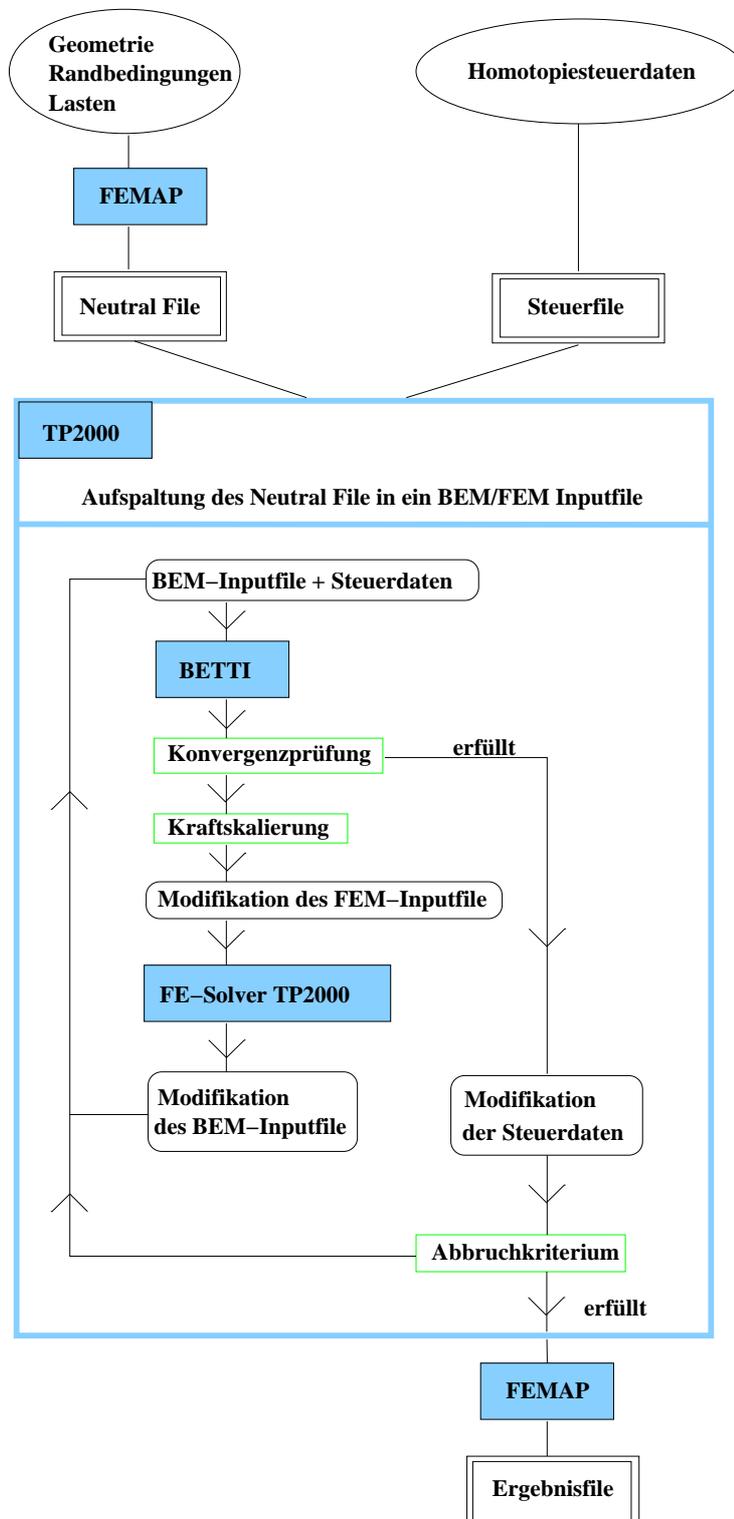


Abb. 4.6: Realisierung der BEM-FEM-Koppelung mit Ladungshomotopie mit den Software-Programmen TP2000, BETTI und FEMAP.

Soll ein Bauteil in der zusammengestellten Entwicklungsumgebung simuliert werden, so müssen zuerst zwei Eingabedateien erstellt werden. Ein sogenanntes "Neutral File", ein vom Präprozessor FEMAP erzeugtes File, und ein "Steuerfile".

Das Neutral File enthält die Geometrie des gesamten Modells (elektrisches und mechanisches Simulationsgebiet), d.h. Knoten, Elemente, Elementtypen und Materialeigenschaften der Elemente, seine Randbedingungen, z.B. die mechanische Einspannung, und Lasten wie zum Beispiel mechanische Kräfte oder Temperatur/Flußbedingungen als umgedeutete Randbedingungen für die BE-Methode. Zusätzlich werden die Knoten des elektrischen Gebiets und des mechanischen Gebiets jeweils in eine Gruppe zusammengefaßt, um die Weiterverarbeitung in ein BEM-Inputfile und ein FEM-Inputfile zu ermöglichen.

In das Steuerfile werden die Homotopiedaten eingetragen, speziell bei der Q -Homotopie, die beliebig vorgegebene Spannung \hat{U}_0 , die Start- und Endwerte der Ladungsvorgabe Q_s und Q_{End} und das Ladungsinkrement ΔQ .

Die iterative BEM-FEM-Koppelung wurde komplett in das Programm TP2000 integriert. Das war nicht prinzipiell erforderlich, aber softwaretechnisch günstig. Als ersten Programmschritt innerhalb von TP2000 wird das Neutral File in zwei Dateien aufgespalten, nämlich jeweils ein Eingabefile für den BE-Solver und den FE-Solver. Jetzt beginnt der iterativ gekoppelte BEM-FEM-Lauf. Das BEM-Inputfile und das Steuerfile werden an den BE-Solver BETTI übergeben. Nach der BE-Berechnung geschieht die Konvergenzprüfung. Fällt diese negativ aus, werden die aus BETTI berechneten Kräfte skaliert, das FEM-Inputfile mit den neuen Kräften modifiziert und dieses dann an den FE-Solver übergeben. Dort wird die Geometrie berechnet. Das BEM-Inputfile wird entsprechend der Ergebnisse des FE-Solvers mit der neuen Geometrie modifiziert und mit den Steuerdaten wieder an das Programm BETTI übergeben. Diese Schleife wird so lange durchlaufen, bis die Konvergenzprüfung positiv ausfällt. Jetzt werden die Steuerdaten modifiziert, d.h. der Kontrollparameter der Homotopie wird um das Inkrement erhöht und danach geprüft, ob dieser neu festgelegte Kontrollparameter noch innerhalb des vom Anwender spezifizierten Intervalls liegt. Ist dies der Fall, so ist das Abbruchkriterium noch nicht erfüllt und eine neue BEM-FEM-Schleife startet mit einem modifizierten Steuerfile. Sind alle Kontrollparameter durchlaufen, d.h. ist Q_{End} erreicht, so ist das Abbruchkriterium erfüllt und FEMAP gibt ein Ergebnisfile aus, das die Ergebnisse der jeweiligen Iterationsläufe mit dem Pre- und Postprozessor FEMAP visualisieren kann.

4.4 Multiparameter-Homotopie

In sehr vielen Betriebsbereichen der elektromechanisch gekoppelten Bereichen arbeitet der Algorithmus der ladungskontrollierten Homotopiemethode sehr gut (vgl. Simulationsergebnisse Kap. 6.1), das heißt, die Stabilität und Genauigkeit genügen allen Ansprüchen. Allerdings gibt es Bereiche, die die Homotopie mit Ladungssteuerung nur ungenügend genau auflöst, d.h. die simulierten Ergebnispunkte der Charakteristik des Bauteils haben einen sehr großen Abstand, wie im folgenden Unterkapitel erklärt wird. Aus diesem Grund wurde der Algorithmus "Homotopie mit Ladungssteuerung" verallgemeinert, so daß mit beliebig genauer Auflösung alle Arbeitsbereiche des Bauteils durch adäquate Wahl eines anderen Homotopieparameters dargestellt werden können.

4.4.1 Grenzen der ladungsgesteuerten Homotopie in der Anwendung

Betrachtet man noch einmal die Auslenkung des Kippspiegels über der vorgegebenen Ladung (vgl. Abb. 4.3, rechter Graph), so fällt auf, daß kurz vor dem Kontakt, wo sich die Auslenkung des Kippspiegels nicht mehr vergrößert, die Steigung der Kurve sehr groß wird. Ein ähnliches Verhalten der Ladung findet man bei Anwendung der Ladungshomotopie qualitativ bei allen elektromechanisch betriebenen Bauteilen kurz bevor das Bauteil die Gegenelektrode berührt.

Dies ist auch für die in Abb. 4.7 dargestellte elektrostatisch ausgelenkte Membran der Fall.

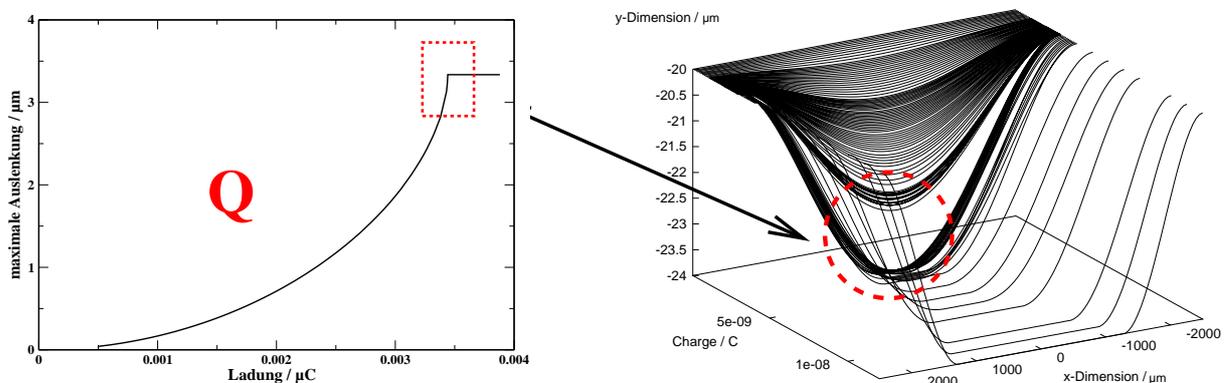


Abb. 4.7: Maximale Auslenkung (links) bzw. Form einer elektrostatisch ausgelenkten Membran in Abhängigkeit von der Ladung auf dem Bauelement. Im gestrichelt bezeichneten Bereich kann die Verformung der Membran bei Q -Steuerung nicht mehr ausreichend aufgelöst werden.

Die Kurve der maximalen Auslenkung in Abhängigkeit von der Gesamtladung, die mit ladungsgesteuerter Homotopie berechnet wurde, zeigt kurz vor dem Anschlag an die Gegenelektrode einen senkrechten Verlauf, der in Abb. 4.7 (links) durch ein gestricheltes Rechteck gekennzeichnet ist. In diesem markierten Bereich ist die Auslenkung immer sehr empfindlich gegenüber Ladungsänderungen, d.h. eine kleine Ladungsänderung bewirkt eine sehr große Änderung der Auslenkung. Das kann so weit gehen, daß das Inkrement ΔQ der Ladungssteuerung kleiner als die mögliche Maschinengenauigkeit wird und so die Form der Membran im Bereich kurz vor dem Erreichen des ersten Kontaktes nicht mehr ausreichend aufgelöst werden kann. Neben dem Fall eines senkrechten Kurvenverlaufs vor dem Release-Point tritt bei manchen Bauteilen sogar ein leicht rückläufiger Verlauf der Ladung auf (vgl. Kap. 7.2). Dieses nicht-monotone Verhalten der Ladung kann bewirken, daß die ladungsgesteuerte Homotopie kleinere Betriebsbereiche vor dem Release-Point mancher Bauteile prinzipiell nicht simulieren kann. Dies ist zum Beispiel auch der Fall bei der hier gezeigten Membran. Im rechten Bild der Abb. 4.7 ist die Membranform über der Ladung aufgetragen. Der gestrichelte Kreis markiert den Bereich, der mit Q -Steuerung nicht berechnet werden kann.

4.4.2 Alternative Homotopieparameter und ihre Eigenschaften

Im Kapitel 3.3.1 wurden bereits unterschiedliche Parametrisierungen analytisch am Beispiel der idealisierten Membran untersucht. Vergleicht man diese analytischen Ausdrücke mit Simulationen an verschiedenen elektrostatisch ausgelenkten Bauteilen, so erhält man qualitativ gleiches Verhalten bei der jeweiligen Parametrisierung (vgl. Kap. 6.2). Eine rückläufige Ladung wurde in den vereinfachten Fällen der analytischen Behandlung jedoch nicht gefunden.

Untersucht wurden in dieser Arbeit die Parametrisierung mit Q , der Gesamtladung auf dem Bauteil, die Parametrisierung mit der elektromechanischen Gesamtkraft F , der elastomechanischen Energie W , der Kapazität C des Bauteils und mit der Auslenkung x eines ausgewählten Punktes G auf dem beweglichen Teil des Bautelements (sh. Tabelle 4.3).

Symbol	Beschreibung	Bemerkung
Q	Gesamtladung auf dem Bauteil	Es gilt die Proportionalitätsbeziehung (4.1).
F	Elektrostatische Gesamtkraft	Es gilt die Proportionalitätsbeziehung (4.1).
W	Elastomechanische Energie	Es muß über den Homotopiepfad integriert werden.
C	Kapazität des Bauteils	Integrale Größe der Geometrie.
x	Geometrische Position eines ausgewählten Punktes G	Mehrere Punkte können bei flexiblen Strukturen ausgewählt werden.

Tab. 4.3: Übersicht der in dieser Arbeit verwendeten Homotopieparameter.

In der Abbildung 4.8 sind die typischen Kurvenverläufe zu sehen, die sich ergeben, wenn man die Auslenkung des Bauteils über dem Steuerparameter anträgt. In allen Kurvenverläufen ist der Snap-Point markiert, an dem die Kurve bei Spannungssteuerung in einen instabilen Bereich übergeht. Man sieht, daß alle vorgeschlagenen Homotopieparameter einen eindeutigen Zusammenhang mit der Auslenkung haben im Gegensatz zur elektrischen Spannung, daher können im Prinzip alle Größen als Steuerparameter verwendet werden, um die Auslenkung von der Nullage über den Snap-Point bis zum Kontakt zu bestimmen.

Wie schon im vorherigen Abschnitt aufgezeigt, gibt es kritische Bereiche bei der Verwendung der jeweiligen Kontrollparameter. Diese sind in Abb. 4.8 durch gestrichelte Kreise und Rechtecke gekennzeichnet.

Dabei bedeuten die Bereiche der gestrichelten Rechtecke, daß die Änderung der Auslenkung sehr stark von der Änderung des Kontrollparameters abhängt, also hohe Empfindlichkeit. Das findet man bei dem Parameter W bei geringen Auslenkungen aus der Nullage und bei dem Parameter Q kurz vor dem Kontakt. Anzumerken ist, daß zwischen den Parametern F und Q die Proportionalität $F \sim Q^2$ gilt und man daher beim Parameter F abgeschwächt das gleiche Verhalten wie bei Q kurz vor dem Kontakt erhält. Bei manchen Bauteilen ist deswegen auch F kurz vor dem Kontakt keine günstige Parameterwahl (vgl. Bild 6.46 in Kap. 6.2). Zusätzlich wurde wie schon erwähnt im kritischen Bereich bei Q ein rückläufiges Verhalten beobachtet, in selteneren Fällen auch bei F .

Die gestrichelten Kreise bedeuten, daß die Kurve dieses Kontrollparameters nur bedingt über den Kontakt hinaus fortgesetzt werden kann. Wählt man die Kapazität C oder die geometrische Auslenkung x als Homotopieparameter, so kann dieser Parameter bei Eintreten von Kontakt

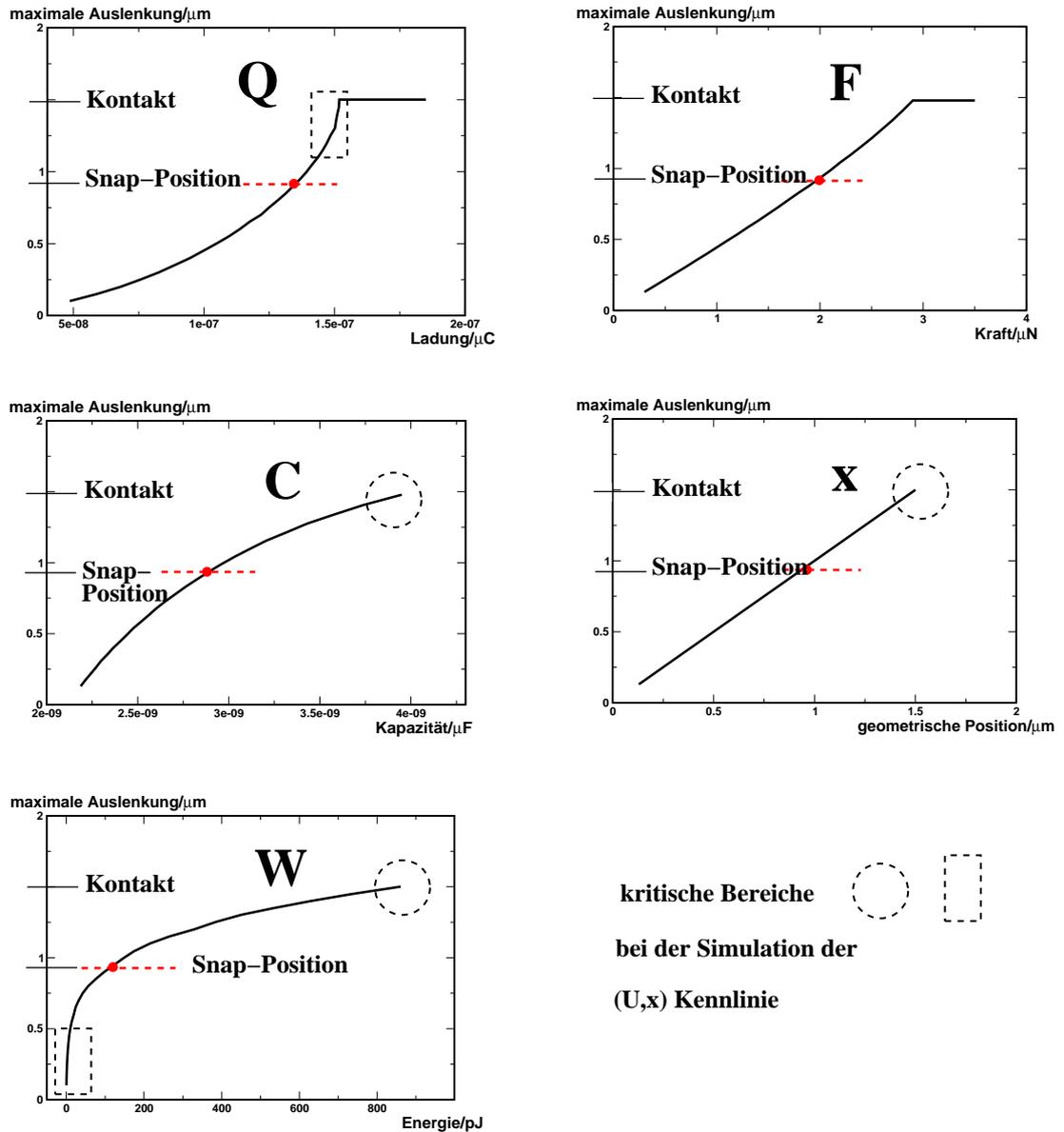


Abb. 4.8: Qualitative Kurvenverläufe bei Angabe der maximalen Auslenkung eines Bauteils über verschiedene Homotopieparameter. Der Kontakt ist gleichzeitig die Release-Position.

nicht mehr weiterverwendet werden, da bei starren Körpern keine weitere Änderung der Auslenkung wie auch der Kapazität erfolgt. Bei flexiblen Strukturen, wie z.B. Membranen, wird die Änderung der Kapazität sehr klein nachdem Kontakt eingesetzt hat. Die Änderung der Auslenkung ist Null für alle Punkte, die sich schon im Kontakt befinden. Im Fall der x -Parametrisierung kann der aktuell ausgewählte Punkt auf einen alternativen Punkt umgeschaltet werden, der noch keinen Kontakt hat. Die elastomechanische Energie W berechnet sich im Falle von Kontakt aus der Auslenkung und den elektrostatischen Kräften, daher gilt hier im Kontaktfall dasselbe, wie bei der Verwendung der Kapazität C bzw. der geometrischen Auslenkung x als Homotopieparameter.

Wie bereits in Tabelle 4.3 in der Bemerkung aufgeführt, gilt die Proportionalitätsbeziehung (4.1) nur für die Ladung Q und die elektrostatische Kraft F . Das heißt, daß der im vorherigen Kapitel 4.3 vorgestellte Algorithmus, der auf der Skalierung der elektrischen Kraft basiert, auf die neu vorgeschlagenen Homotopieparameter zunächst nicht übertragbar ist.

4.4.3 Verallgemeinerung des Algorithmus mit Ladungshomotopie

Da die Proportionalitätsbeziehung (4.1) nicht bei den Parametern C , x und W gilt, kann im Gegensatz zur Q -gesteuerten Iteration weder die Kraftskalierung (vgl. Abb.(4.4)) angewendet noch die Charakteristik (U, x) extrahiert werden. Ein beliebig gewählter Homotopieparameter besitzt im allgemeinen nicht den einfachen analytischen Zusammenhang mit der Spannung U oder mit der elektrostatischen Kraft F .

In Abbildung 4.9 ist nach ähnlichem Schema wie in Bild 4.4 die Grundidee der inneren Iteration des verallgemeinerten Algorithmus dargestellt. Das iterative Koppelschema zwischen BEM

und FEM bleibt erhalten. BEM berechnet genau wie in der Q -Homotopie die elektrostatischen Kräfte zu einer beliebig angelegten Spannung \tilde{U}_0 . Ebenso wie im Algorithmus der Q -Homotopie erfolgt jetzt eine Skalierung der von BEM berechneten Kräfte. Diese Skalierung ist jetzt allerdings zweistufig. Man führt zuerst einen Korrektorschritt **K** durch, der die aus BEM berechneten Kräfte F_{el} mittels einer Minimierung an die FEM-Eingabekräfte der vorigen Iteration angleicht. Wesentlich ist, daß man aus dieser Minimierung die dem aktuellen Homotopieparameter korrespondierende Spannung erhält, die aus dem Homotopieparameter nicht hergeleitet werden kann. Diese Spannung kann nicht anstelle von U_0 bei der BEM-Simulation

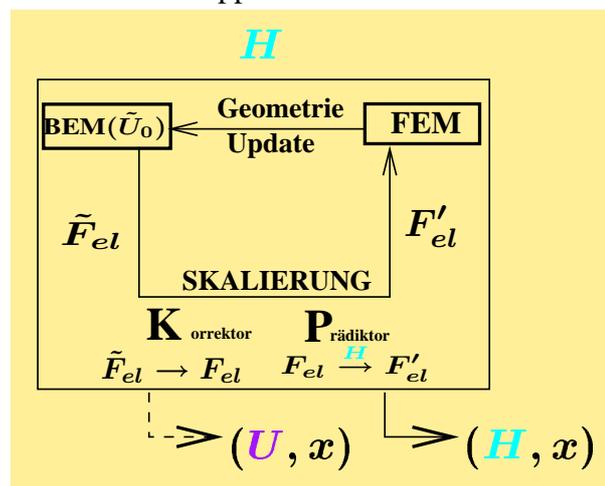


Abb. 4.9: Schematischer Aufbau der iterativen BEM-FEM-Koppelung mit Integration der Homotopiemethode mit beliebigen Homotopieparametern.

verwendet werden, weil sie erst aus dem BEM-Output berechnet wird. In einem zweiten Prädiktorschritt **P** wird die vorskalierte Kraft F_{el} entsprechend dem gewünschten Homotopieparameter H skaliert. Nach dieser "Doppelskalierung" berechnet der FE-Solver zu den Kräften F'_{el} eine neue Geometrie, die dann an den BE-Solver übergeben wird und der Iterationsablauf startet wieder von vorne.

Nach dem prinzipiellen Aufbau der inneren Iteration des verallgemeinerten Homotopiealgorithmus folgt jetzt der detaillierte Algorithmus der inneren Iteration des verallgemeinerten Homotopiealgorithmus (vgl. Abb. 4.10).

Die innere Iteration des Algorithmus ist im Vergleich zur Ladungshomotopie durch den Korrektorterm **K**, durch die Minimierungsvorschrift und den Prädiktor **P** verändert worden. Der übrige Ablauf ist wie bei der Q -Homotopie: BEM berechnet zur Startgeometrie $Geo_{0,s}$ und beliebig gewählter, jedoch fester Spannung \tilde{U}_0 die elektrostatischen Kräfte \tilde{F}_{el} . Nach dem Kor-

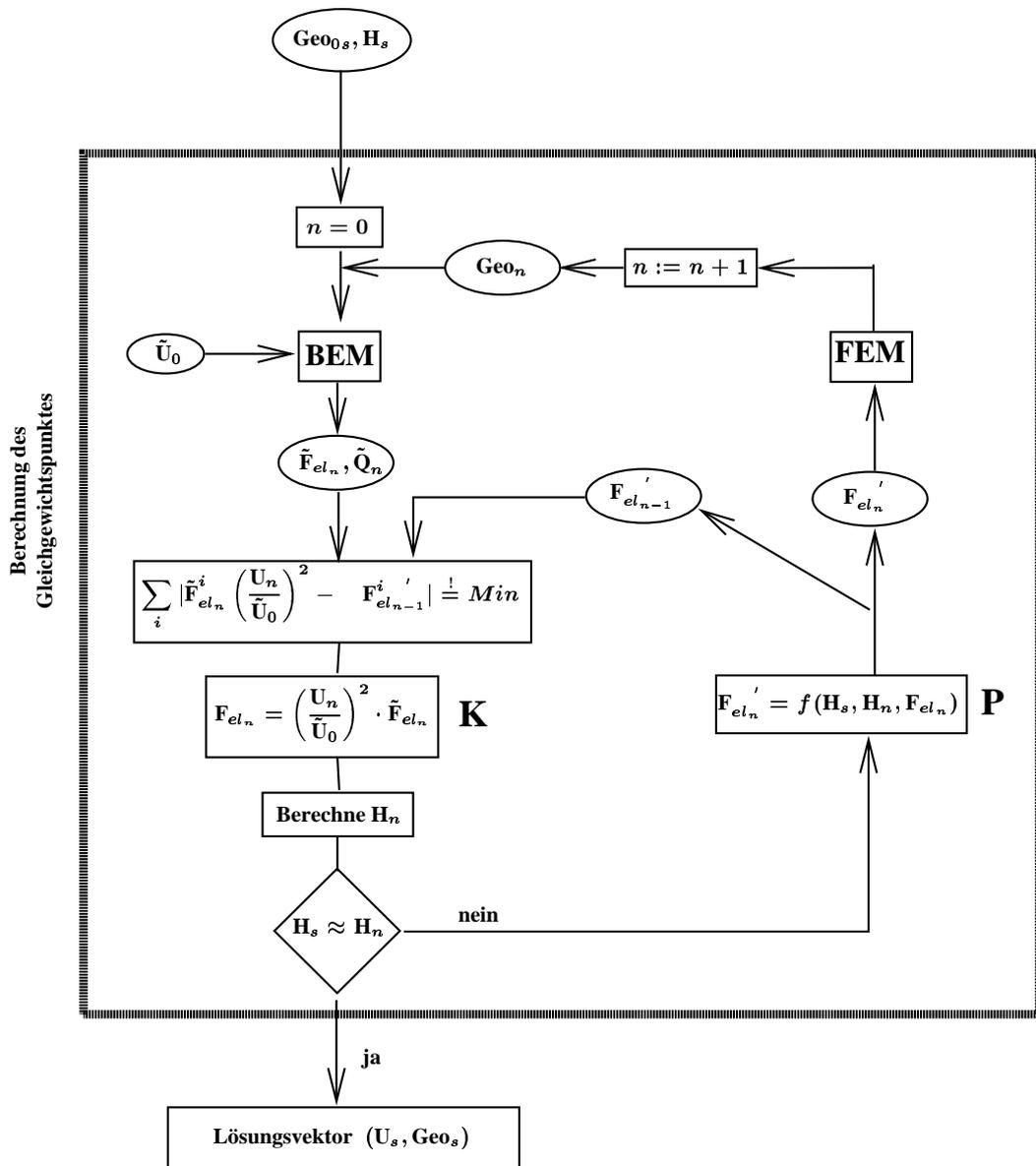


Abb. 4.10: Verallgemeinerte Homotopie - Innere Schleife.

rektorschritt wird die Konvergenz anhand der Differenz des aktuellen Homotopiewerts H_n zum vorgegebenen Homotopiewert H_s überprüft. Nach dem Prädiktorschritt erfolgt mit den prädi-zierten Kräften F'_{el} die FE-Berechnung, welche eine neue Startgeometrie für BEM liefert.

In der Minimierungsvorschrift findet man wieder die Relation zwischen F und U : $F \sim U^2$. Wurde die Geometrie von einem Iterationslauf zum nächsten nicht stark verändert, so ist der Proportionalitätsfaktor zwischen \tilde{F}_{el_n} und \tilde{U}_0^2 annähernd der selbe wie zwischen $F'_{el_{n-1}}$ und U_n^2 . Dies ist im Falle eines Homotopielaufes, der schrittweise vom wenig ausgelenkten Zustand in einen stark ausgelenkten Zustand rechnet, immer erfüllt. Insbesondere gilt das natürlich kurz vor der Konvergenz der inneren Iteration. Daraus kann man sofort die Minimierungsbedingung

herleiten:

$$\sum_i |\tilde{F}_{el_n}^i \left(\frac{U_n}{\tilde{U}_0} \right)^2 - F_{el_{n-1}}^i| \stackrel{!}{=} Min \quad (4.5)$$

Mit dem erhaltenen Quotienten $\left(\frac{U_n}{\tilde{U}_0}\right)^2$ können jetzt die Kräfte \tilde{F}_{el_n} aus der Berechnung mit BEM in die Kräfte F_{el_n} korrigiert werden. Ebenso wird aus genau diesem Quotienten die tatsächlich anliegende Spannung U_n berechnet. Nach der Korrektur werden die Kräfte mittels einer Prädiktorfunktion $f(H_s, H_n, F_{el_n})$ skaliert.

Die Konvergenz der inneren Schleife wird wesentlich vom Prädiktor im Algorithmus bestimmt, das heißt von der Wahl der Funktion $f(H_s, H_n, F_{el_n})$. Als eine robuste und effiziente Prädiktorfunktion hat sich der lokale Sekantenprädiktor erwiesen, der bevorzugt verwendet wurde: $f(H_s, H_n, F_{el_n}) = F_{el_n} + (F_{el_n} - F_{el_{n-1}}) \cdot \frac{H_s - H_n}{H_n - H_{n-1}}$.

Durch diese Wahl des Prädiktors wird in den iterativen Prozess ein Sekantenverfahren integriert. In Kapitel 6.2.3 auf Seite 126 wird auf alternative Prädiktoren und ihr Konvergenzverhalten eingegangen.

Es steht also jetzt ein Algorithmus zur Verfügung, der einen beliebigen Homotopieparameter verwenden kann, vorausgesetzt er ist ein sinnvoller Steuerparameter für den ausgewählten Betriebsbereich des elektromechanisch gekoppelten Bauteils. Ein sinnvoller Parameter zeichnet sich durch einen eindeutigen Zusammenhang zwischen Parameter und Auslenkung aus und ermöglicht eine hohe Auflösung im ausgewählten Betriebsbereich.

Der Homotopiealgorithmus mit Wahl eines beliebigen Parameters (verallgemeinerte Homotopie) übernimmt die Eigenschaften der Q -Homotopie (S. 59) und zeichnet sich durch folgende zusätzliche Eigenschaften aus:

- Wahl eines beliebigen Parameters zur Steuerung der Homotopie. Nicht mehr Bindung an den Homotopieparameter Ladung oder in Erweiterung die Kraft.
- Beliebig feine Auflösung durch Wahl eines geeigneten Steuerparameters in jedem ausgewählten Betriebsbereich des elektromechanisch gekoppelten Bauteils.
- Beherrschung des Erstkontaktes bei Kontaktberechnungen durch die x -Homotopie (vgl. dazu Kap. 4.5).

4.4.4 Der Algorithmus der Multiparameter-Homotopie

Der im vorherigen Abschnitt entwickelte verallgemeinerte Homotopiealgorithmus (Abb. 4.10) ermöglicht jetzt den nächsten Schritt, nämlich den zur Multiparameter-Homotopie. Hier sollen mehrere Homotopieparameter zur Steuerung verwendet werden, und zwar immer derjenige, der in dem aktuell berechneten Lösungsast der am besten geeignete ist.

Das Prinzip besteht darin, daß im Hintergrund parallel zum aktuell ausgewählten Homotopieparameter zusätzlich Lösungen für weitere mögliche Homotopieparameter am aktuellen Arbeitspunkt berechnet werden. Nach gewissen vorgegebenen Kriterien wird nun der am besten

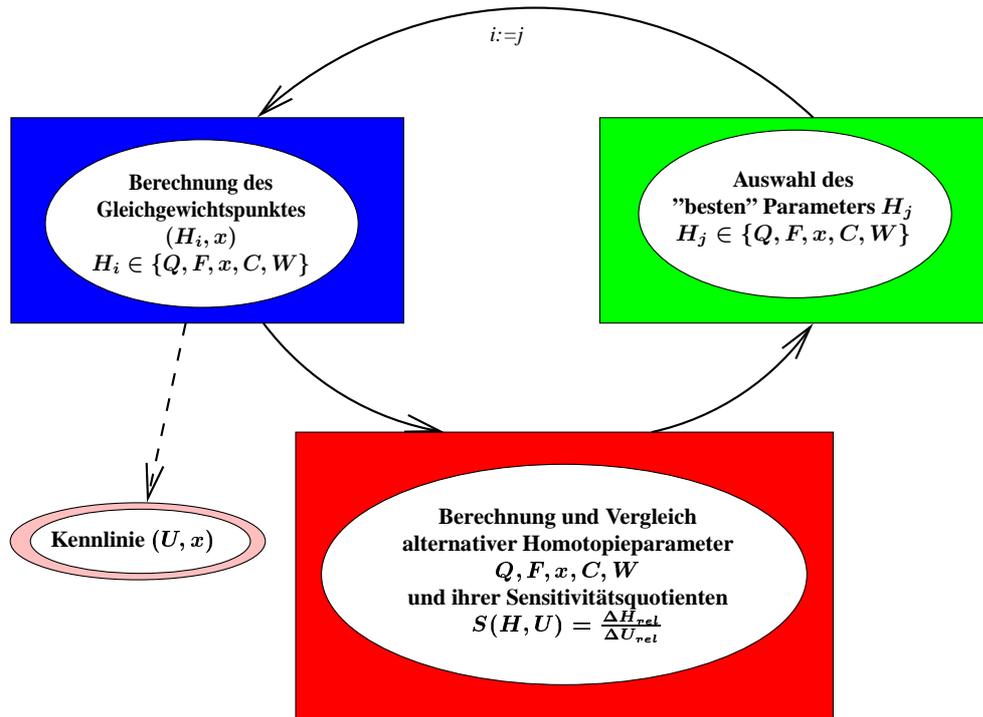


Abb. 4.11: Multiparameter-Homotopie – Äußere Schleife.

geeignete Parameter ausgewählt und die Simulation wird so gesteuert, daß im gesamten Arbeitsbereich des Bauteils immer derjenige Homotopieparameter wirksam ist, der lokal die beste Auflösung ermöglicht. Der am besten geeignete Parameter wird mit Hilfe eines sogenannten Sensitivitätsquotienten S bestimmt (vgl. Abb. 4.11). Dieser berechnet sich aus dem Quotienten der relativen Änderung des Homotopieparameters zur letzten Iteration der äußeren Schleife ΔH_{rel} und der relativen Änderung der Spannung ΔU_{rel} :

$$S = \frac{\Delta H_{rel}}{\Delta U_{rel}} \quad (4.6)$$

mit

$$\Delta H_{rel} = \frac{H_s - H_{s-1}}{H_s}$$

$$\Delta U_{rel} = \frac{U_s - U_{s-1}}{U_s}$$

Der Rechen- und Entscheidungsablauf nach Abb. 4.11 skizziert das oben beschriebene Grundschema der Multiparameter-Homotopie. Der Sensitivitätsquotient 4.6 wird für alle potentiellen Homotopieparameter berechnet. Ist der Wert eines Quotienten sehr nahe am Wert 1, so gilt der entsprechende Homotopieparameter als eine gute Wahl. Der Sensitivitätsquotient besitzt genau dann den Wert 1, wenn der Grad der Änderung bei der Spannung genauso groß ist wie der bei dem Homotopieparameter. Das garantiert wiederum eine optimale Abtaststrategie, also keine "unnötigen" Ergebnis-Zwischenpunkte.

Anders ausgedrückt, wird die Abtaststrategie der Spannung durch die von außen vorgegebene Diskretisierung der Homotopieparameter kontrollierbar, weil der aktive Sensitivitätsquotient durch

das Verfahren in der Nähe von 1 gehalten wird. Die Diskretisierung des Homotopieparameters anstelle der Spannung bewirkt außerdem, daß die Kennlinie an den starken Krümmungen um die Snap-in-Positionen mit feineren Spannungsinkrementen abgetastet wird, was ebenfalls ein erwünschter Effekt ist.

Zusätzlich indiziert der Sensitivitätsquotient die kritischen Bereiche, da er dort stärker anwächst, vgl. z.B. Abb. 6.38.

So ist es nicht notwendig, eine Vorauswahl des Homotopieparameters für die Simulation zu treffen, da während des Rechenlaufs automatisch der am besten geeignete Parameter ausgewählt wird.

Der Gesamtalgorithmus der Multiparameter-Homotopie ist in Abb. 4.12 dargestellt. Die große Umrahmung links enthält die innere Iteration, die zur konsistenten Lösung für einen vorgegebenen Homotopieparameter führt und bereits anhand der Abb. 4.10 erläutert wurde. Die äußere Schleife wählt den geeigneten Homotopieparameter entsprechend dem Wert des Sensitivitätsquotienten und erhöht den ausgewählten Homotopieparameter.

Der Auswahlalgorithmus der die Wahl des neuen Homotopieparameters steuert, ist in Abb. 4.12 nur schematisch als Black Box symbolisiert und wird als Teilalgorithmus in Abb. 4.13 gesondert dargestellt.

In diesem Algorithmus wird zuallererst überprüft, ob der Sensitivitätsquotient des aktuellen Homotopieparameters innerhalb eines vorgegebenen Toleranzintervalls liegt. Ist dem so, wird als nächstes überprüft, ob die Summe dieses Homotopieparameters mit seinem Inkrement, $H_s + \Delta H$, noch im physikalisch sinnvollen Bereich liegt. (Bei der geometrischen Auslenkung zum Beispiel darf der ausgewählte Punkt keinen Kontakt mit der Gegenelektrode haben oder rückläufig sein.) Ist eine dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt, so wird ein anderer Homotopieparameter als aktive Steuervariable ausgewählt, nämlich der, dessen Sensitivitätsquotient am nächsten bei 1 liegt, falls dieser nicht schon durch die vorige Bedingung als nicht mehr möglicher Homotopieparameter ausgeklammert wurde. Der neu ausgewählte oder eventuell auch beibehaltene Homotopieparameter H_s wird nun um sein Inkrement ΔH erhöht (sh. Abb. 4.12), anschließend wird ein neuer Gleichgewichtspunkt für den veränderten Homotopieparameter berechnet.

Der Homotopiealgorithmus mit automatischer Parameterumschaltung (Multiparameter-Homotopie) übernimmt die Eigenschaften der Q -Homotopie (S. 59) und der verallgemeinerten Homotopie (S. 68) und zeichnet sich durch folgende zusätzliche Eigenschaften aus:

- Stabile numerische Simulation im gesamten Arbeitsbereich, sogar dann, wenn es keinen Parameter gibt, der im gesamten Arbeitsbereich monotonen Verhalten zeigt. In diesem Fall führt das Umschalten zwischen lokal monotonen Parametern dazu, daß aneinandergrenzende, lokal stabile Homotopiegebiete zu einem Gesamtarbeitsbereich verbunden werden.
- Das Umschalten zwischen den Parametern erfolgt glatt, da in jedem Schritt die Ergebnisse für alle Parameter vorgehalten werden.
- Beliebig feine Auflösung im gesamten Arbeitsbereich, da automatisch ein geeigneter Parameter gewählt wird.

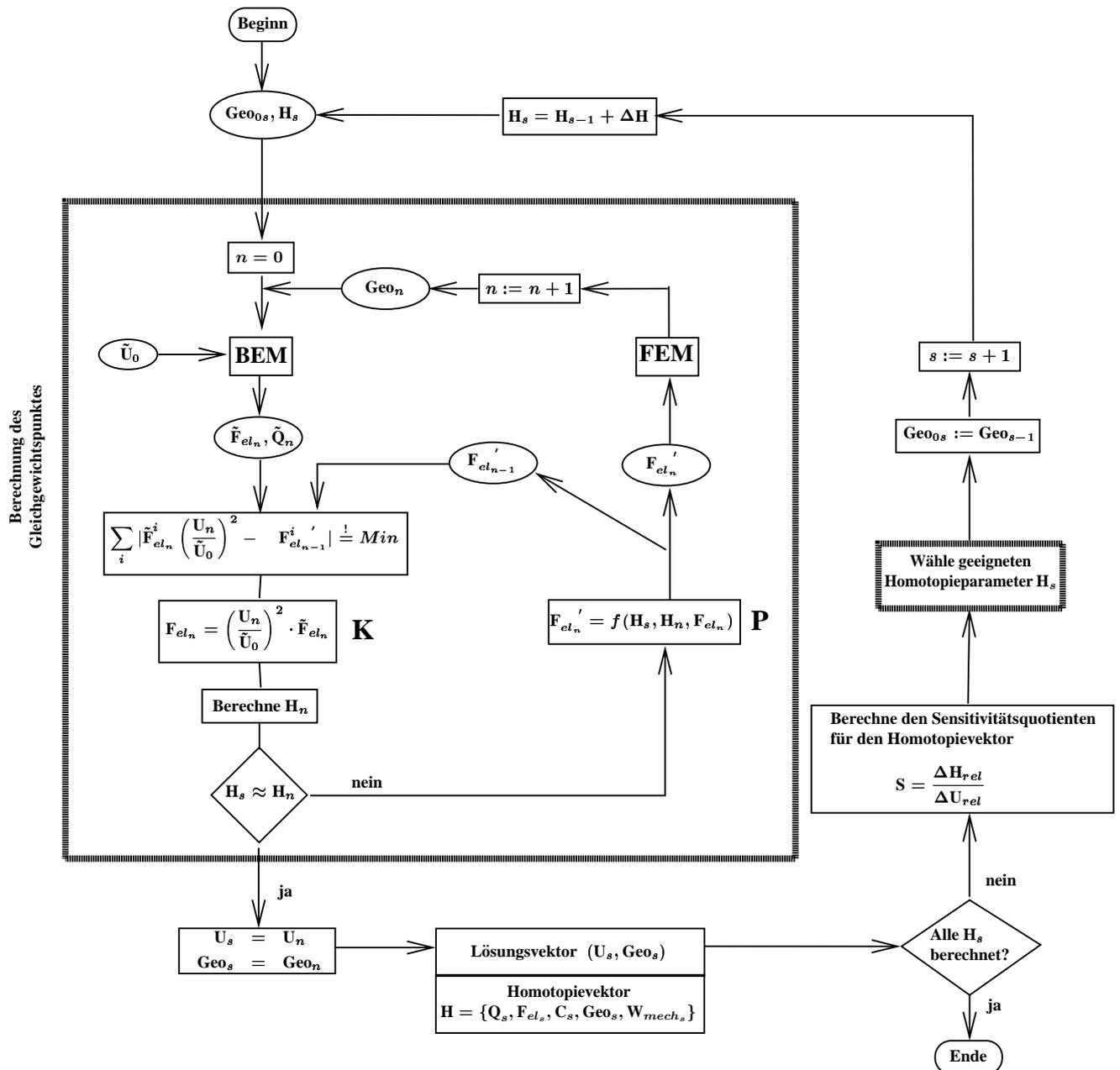


Abb. 4.12: Multiparameter-Homotopie - Gesamtalgorithmus.

4.5 Ergänzende Algorithmen zur Multiparameter-Homotopie

Zu den im vorigen Kapitel dargestellten Algorithmen wurden noch einige zusätzliche Algorithmen entwickelt. Sie können bei Bedarf zum Hauptalgorithmus zugeschaltet werden. Diese ergänzenden Algorithmen steuern hauptsächlich die Schrittweite der Homotopieparameter in der äußeren Schleife der Homotopiealgorithmen. Unterschiedliche Aspekte können bei der Si-

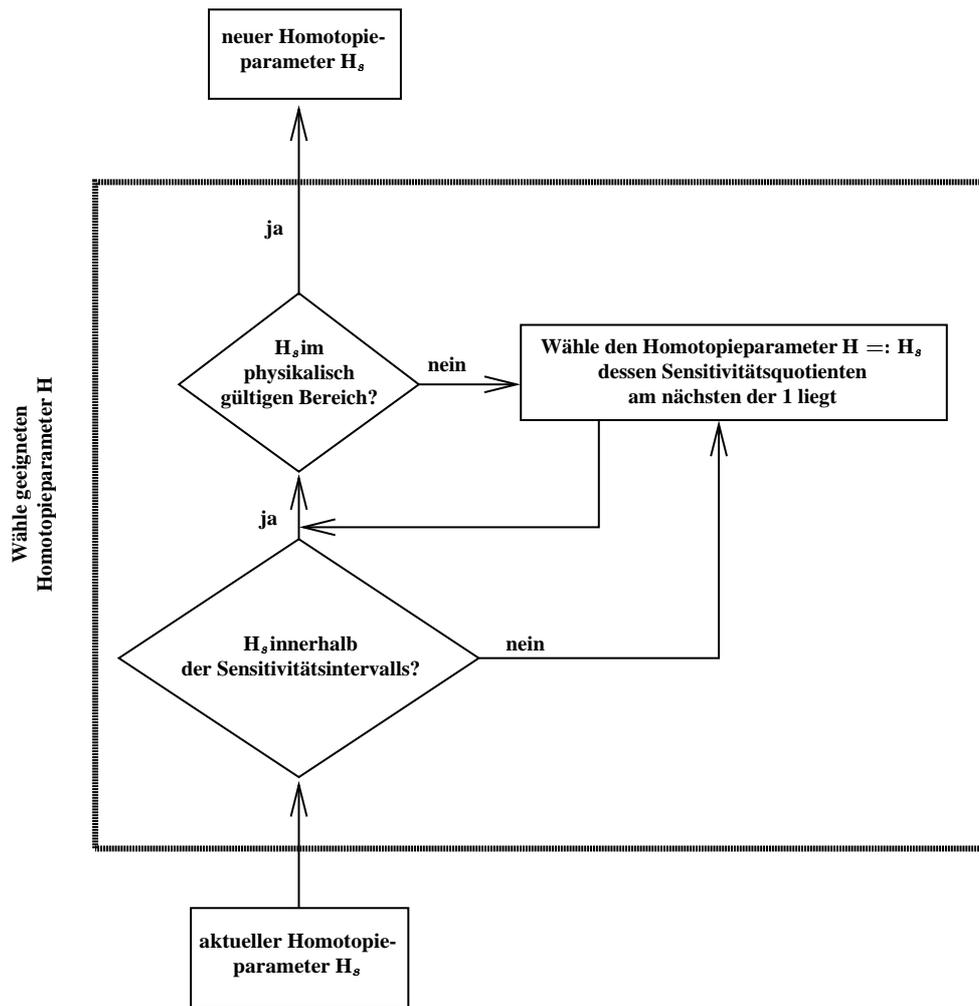


Abb. 4.13: Multiparameter-Homotopie - Auswahlalgorithmus für Homotopieparameter.

mulation der Kennlinien von Bauelementen mit elektromechanischer Koppelung wichtig sein:

- Optimierung der Anzahl der zu berechnenden Homotopiepunkte, was im allgemeinen dann erreicht wird, wenn stark veränderliche Bereiche feiner abgetastet werden und wenig veränderliche Betriebsbereiche sehr grob abgetastet werden.
- Eine sehr hohe Auflösung des Snap-Points oder Release-Points.

4.5.1 Schrittweitensteuerung durch Berücksichtigung der Krümmung

Diese Schrittweitensteuerung hat die Optimierung der Anzahl der Homotopieschritte zum Ziel. Sie berechnet die Krümmung einer Kennlinie und schätzt anhand der Krümmung ab, wie fein diskretisiert werden soll. Je größer die Krümmung, desto kleiner wird die Schrittweite für den

Homotopieparameter gewählt und umgekehrt. Dieser Algorithmus ist vor allem dort sinnvoll anwendbar, wo die Kennlinie einen oder mehrere Umkehrpunkte aufweist.

Der Algorithmus berechnet für jeden potentiellen Parameter H zur Kennlinie (U, H) die relative Krümmung mit Hilfe dividierter Differenzen:

$$\text{BEND_H}_{s+1} = \frac{(U_s)^2}{H_s} \cdot \frac{\frac{H_{s+1}-H_s}{U_{s+1}-U_s} - \frac{H_s-H_{s-1}}{U_s-U_{s-1}}}{U_{s+1} - U_{s-1}}$$

Dabei ist H_{s+1} der aktuelle Homotopiewert und H_s und H_{s-1} die zwei zurückliegenden Werte, die Spannungswerte U_{s+1} , U_s und U_{s-1} analog. Der Quotient $\frac{(U_s)^2}{H_s}$ macht aus der absoluten Krümmung eine relative, um die Steuerung allgemein anwendbar zu machen.

Als zweites Kriterium wird die relative Krümmungsänderung verwendet:

$$\text{DBEND_H}_{s+1} = \left| \frac{|\text{BEND_H}_{s+1}| - |\text{BEND_H}_s|}{\text{BEND_H}_{s+1}} \right|$$

In Abbildung 4.14 ist graphisch der logische Ablauf der Schrittweitensteuerung skizziert.

Die prinzipielle Wirkung dieser Schrittweitensteuerung ist in Abbildung 4.15 am Beispiel einer (U, x) -Kennlinie eines elektromechanisch gekoppelten Bauteils dargestellt. Deutlich erkennbar sind die dicht liegenden Abtastpunkte im Bereich starker Krümmung und die weitauseinander gezogenen Abtastpunkte in wenig gekrümmten Bereichen. Die Kennlinie setzt sich bei flexiblen Bauteilen auch nach dem Anschlag nach oben fort, wenn die aufgetragene Position x nicht zu dem Punkt gehört, der zuerst anschlägt.

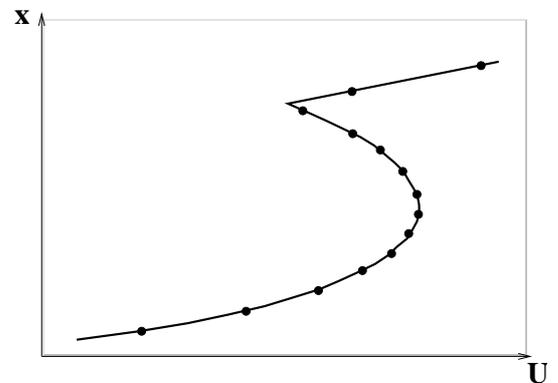


Abb. 4.15: Abtastung einer typischen (U, x) -Kennlinie eines elektromechanisch gekoppelten Bauteils mit der Schrittweitensteuerung der Krümmung.

Die Vorteile und Anwendungsbereiche dieser Schrittweitensteuerung sind:

- Effektive Abtastung der Kennlinie im nicht-angeschlagenen Zustand des Bauteils mit möglichst wenigen Homotopiepunkten und gleichzeitiger optimaler Auflösung der Kennlinie.
- Exakte Berechnung von Umkehrpunkten auf der Kennlinie, insbesondere des Snap-Points.

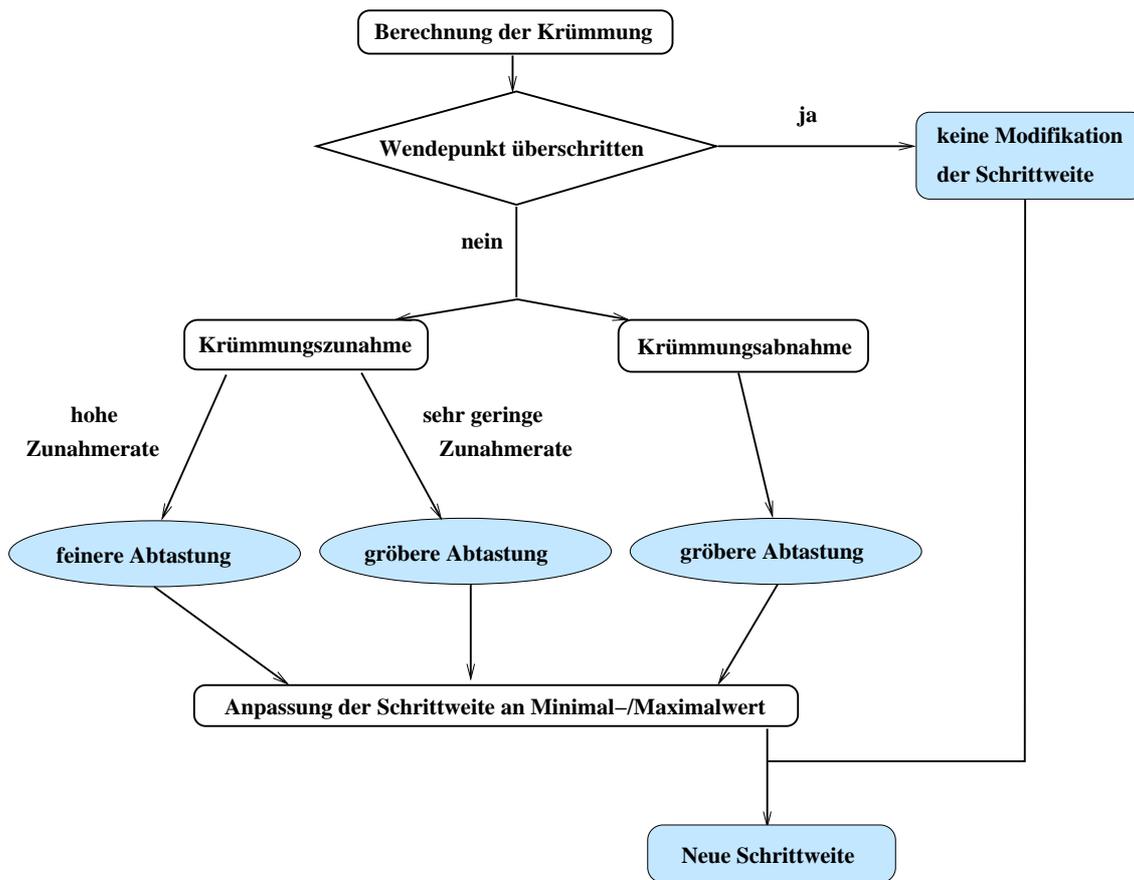


Abb. 4.14: Ablaufdiagramm der Schrittweitensteuerung mit Hilfe der Krümmung.

- Berechnung der Kennlinie im reinen "Vorwärtsmodus", das heißt, es ist auch für die exakte Berechnung des Snap-Points keine Umkehr der Bewegungsrichtung auf der Kurve notwendig, was zur Stabilität des Verfahrens beiträgt.
- Der Algorithmus ist erweiterbar auf die genaue Bestimmung des Release-Points. Im Falle des Kontakts ändert sich das Vorzeichen der Krümmung. Wird dieser Vorzeichenwechsel detektiert, so kann mit einem Intervallschachtelungsalgorithmus, der ein iteratives Vor- und Zurückspringen impliziert, der genaue Release-Point gefunden werden.

4.5.2 Kontaktalgorithmus

Diese Schrittweitensteuerung wird eingesetzt, um die Kennlinie eines elektromechanisch betriebenen Bauteils bei Erstkontakt exakt zu bestimmen. Bei Erstkontakt berühren sich flexible und feste Elektrode gerade, die auftretende Kontaktkraft ist Null. Dieser Punkt der Kennlinie ist der sogenannte Release-Point mit zugehöriger Release-Spannung.

Um den Release-Point exakt zu berechnen, kann man mit der x -Homotopie genau in diesen Punkt hineinsteuern. Bei der Wahl eines anderen Homotopieparameters weiß man a priori nicht, welchen Wert er im Release-Point annehmen wird.

Allerdings birgt die x -Steuerung in den Kontaktpunkt eine Schwierigkeit in sich. Konvergenz wird zu einer vorgegebenen Auslenkung x durch das in Abb. 4.10 beschriebene Prädiktor-Korrektor-Schema erreicht.

Das Konvergenzschema beruht auf der Annahme, daß in der Umgebung einer Position x_0 eine glatte Kraftfunktion $F(x)$ existiert. Ist die Position x_0 genau der Kontaktpunkt, so existiert die eindeutige Kraft-Ort-Beziehung nur für $x \leq x_0$, aber nicht für $x \geq x_0$. In Abbildung 4.16 sind Lösungspunkte einer x -Homotopie mit beschränkten und unbeschränkten Umgebungen gezeigt. Gibt man nun exakt die gewünschte Kontaktposition vor, so kann es passieren, daß die zugehörige Spannung überschätzt wird. Dies tritt immer dann ein, wenn der Prädiktor die Kraft F_{el}'' im letzten Iterationsschritt überschätzt hat und Kontakt eingetreten ist.

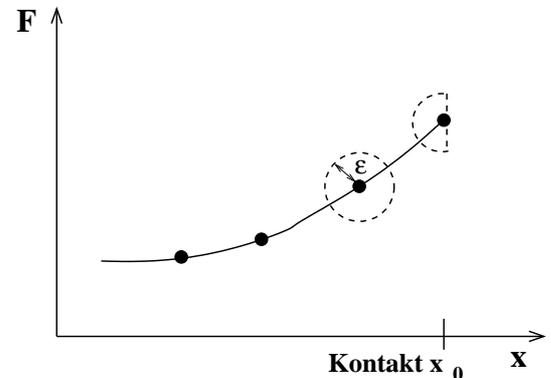


Abb. 4.16: Unbeschränkte und halbseitige Umgebungen der Ergebnispunkte mit und ohne Kontaktbedingung.

Die gewünschte Position ist damit erreicht, und das Iterationsschema ist beendet.

Die Kontaktkräfte sind allerdings jetzt ungleich Null und die entsprechende Spannung ist höher, als es im exakten Release-Point (mit Kontaktkraft gleich Null) der Fall wäre.

Der vorgeschlagene Kontaktalgorithmus überwindet diese Schwierigkeit, indem er eine strenge einseitige Annäherung an den Kontaktpunkt erzwingt.

Mit Hilfe eines Fangradius FANGR wird überprüft, ob sich ein ausgewählter Punkt $G1$ in der Nähe des Kontaktes befindet. Ist dem so, dann schaltet die Multiparameter-Homotopie in die x -Steuerung mit ausgewählten Geometriepunkt $G1$ um. Mit Hilfe von Zwischenpunkten $G1_n$, deren Lage einer geometrischen Reihe entspricht, geschieht eine Annäherung an den Kontaktpunkt. Ist der Kontaktpunkt erreicht, kann mit $G1$ nicht mehr weitergearbeitet werden. Dieser Punkt wird aus der Menge der anwendbaren Homotopieparameter entfernt, die Berechnung (der Kontaktkennlinie) wird mit einem anderen Homotopieparameter fortgesetzt.

Der Faktor F der geometrischen Reihe kann innerhalb des in Abb. 4.17 vorgeschlagenen Intervalls größer oder kleiner gewählt werden. Der Faktor muß jedoch an die Abbruchgenauigkeit des Iterationsschemas angepaßt werden, eine sehr hohe Abbruchgenauigkeit erlaubt größere Werte für den Faktor F und eine kleine Abbruchgenauigkeit erfordert niedrigere Werte für F .

Die Wirkung dieses Kontaktalgorithmus auf die Schrittweite wird in Abbildung 6.69 Kap. 6.3.2 deutlich.

Zusammengefaßt kann man zu diesem Algorithmus bemerken:

- Überspringen des exakten Release-Points durch eine ungünstige Abtaste des aktuellen Homotopieparameters wird vermieden.
- Exakte Bestimmung der Release-Point Spannung durch die Steuerung des Parameters x in den Release-Point.

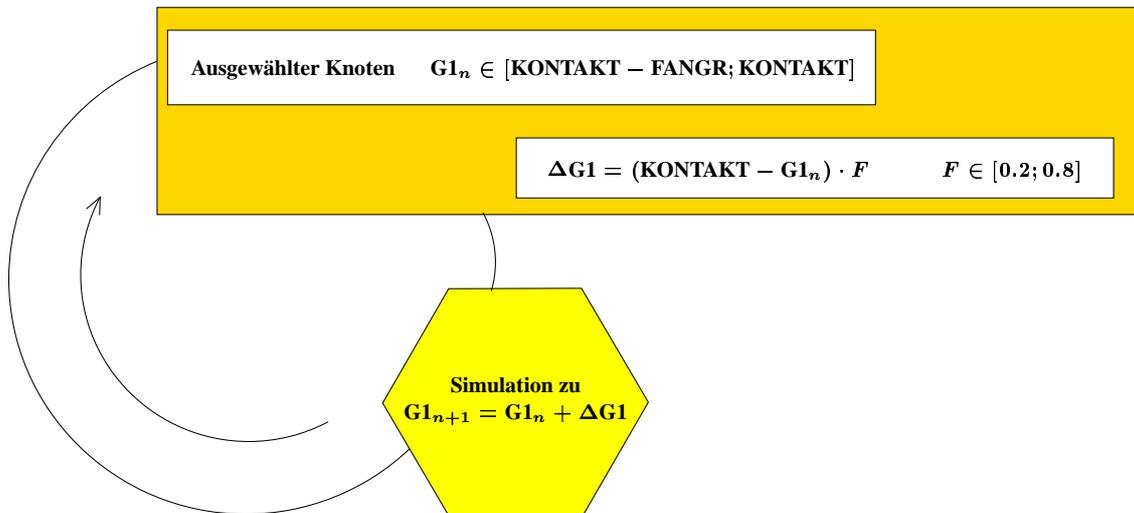


Abb. 4.17: Ablaufdiagramm des Kontaktalgorithmus.

- Algorithmus arbeitet im "Vorwärtsmodus". Es ist kein Vor- und Zurückspringen notwendig, um den exakten Release-Point zu "treffen".
- Eine Schätzung des Punktes wo Kontakt auftreten wird (bzw. des Gebiets), ist allerdings notwendig zum Ansatz des Kontaktalgorithmus. Diese Schätzung kann aus der Kenntnis der Bauteil-Geometrie abgeleitet werden.

Kapitel 5

Überblick über die simulierten Mikrobauelemente

Dieses Kapitel dient zuerst einer generellen Klassifizierung simulierter Strukturen mit elektromechanischer Koppelung. Des weiteren folgt ein detaillierter Überblick der Strukturen, die in dieser Arbeit genauer untersucht wurden.

5.1 Klassifizierung elektrostatischer Strukturen

Ganz allgemein besteht jedes elektromechanisch gekoppelte Bauteil aus elektrischen und mechanischen Komponenten. Die elektrischen Komponenten sind die Elektroden, die auf mechanischen Komponenten des Bauteils angebracht sind, und der dazwischen befindliche Feldraum. Mindestens eine der Elektroden ist mechanisch beweglich. Wird zwischen den Elektroden eine Spannung angelegt, resultieren Kräfte auf die mechanischen Komponenten, die eine Geometrieänderung der beweglichen Elektrode bewirken. Ausgehend von der Art dieser Geometrieänderung können elektromechanische Bauteile in starre und flexible Strukturen eingeteilt werden:

5.1.1 Starre Strukturen

Dies sind Strukturen, die sich durch wenige Freiheitsgrade in der beweglichen Elektrode auszeichnen. Die Grundstruktur ist typischerweise ein an Federn aufgehängter, nicht deformierbarer starrer Körper, der die bewegliche Elektrode darstellt. Diese kann die Form einer Platte haben oder eine geometrisch kompliziertere Form, wie zum Beispiel eine Fingerstruktur [75].

Die Abbildungen 5.1, 5.2, 5.4, 5.5 und 5.7 zeigen einige reale Beispiele für diese Klasse der starren Strukturen, deren Funktionsprinzip im folgenden kurz erläutert wird.

- Die Kippspiegel in Abb. 5.1 und 5.2 bestehen aus einer starren Platte, die in einigen Mikrometern Abstand parallel zum Substrat angeordnet ist.

Eine Prinzipskizze ist in Abb. 5.3 gegeben. Die Spiegelplatte wird an zwei gegenüberliegenden Kantenmitten durch Siliziumbänder gehalten, die als Torsionsfedern wirken. Das

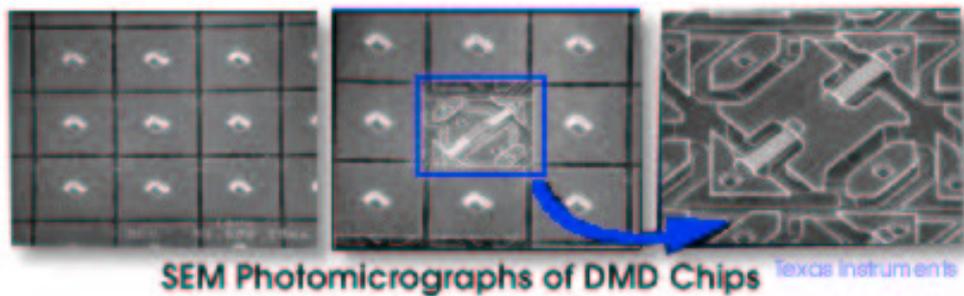


Abb. 5.1: Mikrospiegelarray aus [4]. Fläche eines Einzelspiegels $16 \times 16 \mu\text{m}^2$, das Array besteht aus 2948×1152 Einzelspiegeln.

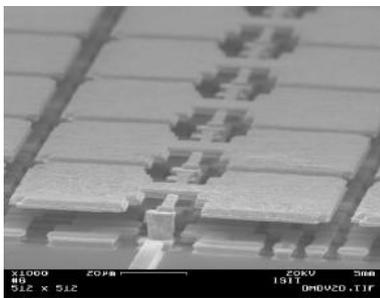


Abb. 5.2: Mikrospiegel aus [5]. Spiegelgröße $100\mu\text{m} \times 100\mu\text{m}$; Kippwinkel $\pm 10^\circ$.

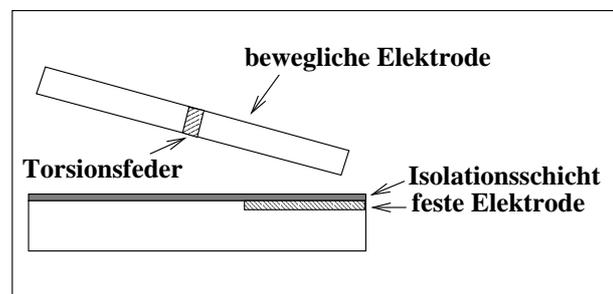


Abb. 5.3: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Kippspiegels. Die Torsionsfedern sind durch die schraffierte Rechtecke im Spiegelquerschnitt angedeutet.

Substrat trägt unterhalb einer Spiegelhälfte eine Elektrode, mit deren Hilfe der Spiegel elektrostatisch ausgelenkt wird. Für eine Bewegung in beide Richtungen können auch zwei Elektroden angebracht sein. Wegen der kleinen Bauform sind Eigenfrequenzen von einigen kHz erreichbar. Solche Spiegel werden als Arrays z.B. in Kopierern, Scannern und Kameras eingesetzt, als Einzelspiegel in Schaltern für optische Übertragungsnetze und in Barcode-Scannern.

- Fingerstrukturen wie in Abb. 5.5 werden sowohl als Aktoren (Weg- und Kraftsteller) als auch als lineare kapazitive Sensoren eingesetzt.

Die Fingerstrukturen in Abb. 5.4 und 5.5 (Prinzipskizze Abb. 5.6) bestehen aus einem festen und einem beweglichen Kamm. Der bewegliche Kamm bewegt sich parallel zur Substratoberfläche, meist in Längsrichtung der Zinken, und wird in der Regel durch federnde Siliziumstäbe gehalten. In manchen Sensoren wird eine Bewegung quer zur Ausrichtung der Zinken verwendet, um die Empfindlichkeit zu erhöhen. Oft werden bei Aktoren zwei gegeneinander arbeitende Kammantriebe eingesetzt, um eine Bewegung in beiden Richtungen zu ermöglichen. Kammantriebe werden z.B. als Schalter zum Abschneiden oder Takten eines Laserstrahls eingesetzt, sie dienen in Beschleunigungssensoren und Gyroskopen als Sensoren und können in positionskompensierten Beschleunigungssensoren auch als kombinierter Sensor und Aktor eingesetzt werden.

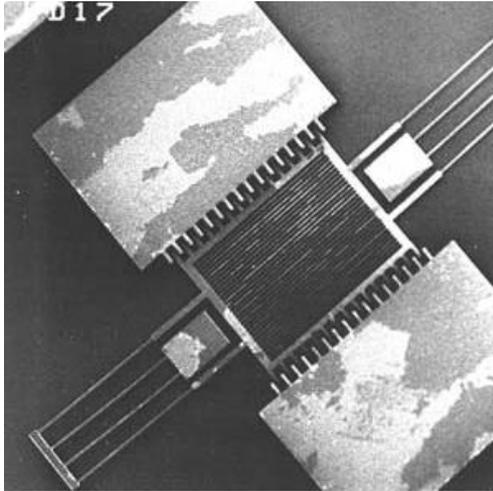


Abb. 5.4: Typische laterale Resonanzstruktur aus [2]. Diagonale der beweglichen Masse ca. $100\ \mu\text{m}$.

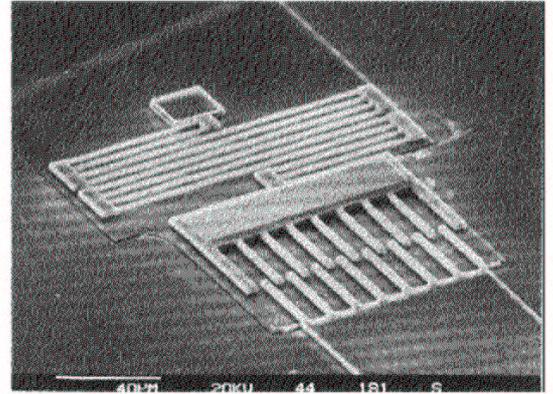


Abb. 5.5: Kammantrieb aus [38]. Im Vordergrund der Kammantrieb, im Hintergrund eine aus 5 Doppelbalkenelementen zusammengesetzte Feder ca. $130 \times 60\ \mu\text{m}^2$.

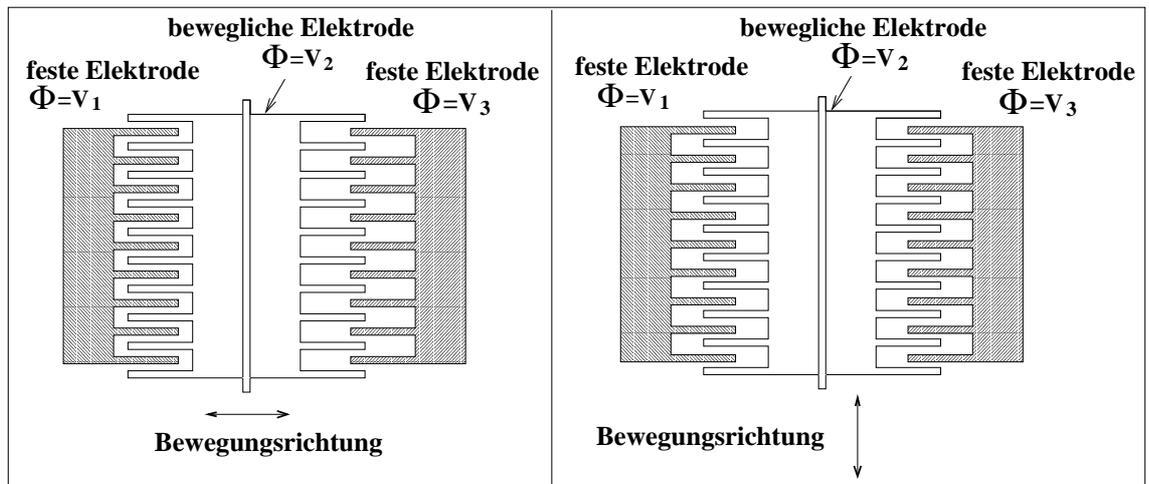


Abb. 5.6: Prinzipskizzen von Kammstrukturen in lateraler bzw. longitudinaler Bewegungsrichtungen.

- Die Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen das Feder-Masse-System eines Neigungssensors. Eine Siliziummasse ist an zwei Silizium-Biegefedern aufgehängt. Abhängig von der Lage des Sensors zur Richtung der Schwerkraft wird die Masse aus ihrer Ruhelage ausgelenkt.

Die Auslenkung der Masse aus der Ruhelage wird kapazitiv zwischen der ausgelenkten Masse und der (nicht abgebildeten) Deckel- und Bodenplatte bestimmt. Da die resultierenden Kräfte und Auslenkungen relativ klein sind, ist die Wechselspannung, mit der die Kapazität ausgelesen wird, nicht mehr vernachlässigbar, sondern wirkt auf das Verhalten des Sensors zurück [48, 7].

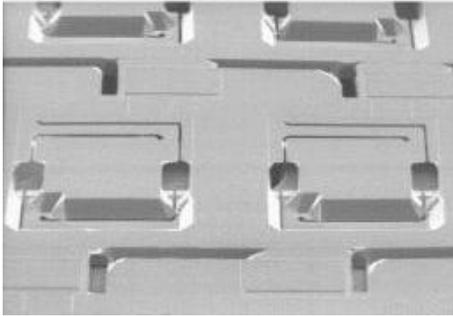


Abb. 5.7: Neigungssensor hergestellt von [1]. Volumen der beweglichen Masse $2600 \times 2600 \times 390 \mu\text{m}^3$.

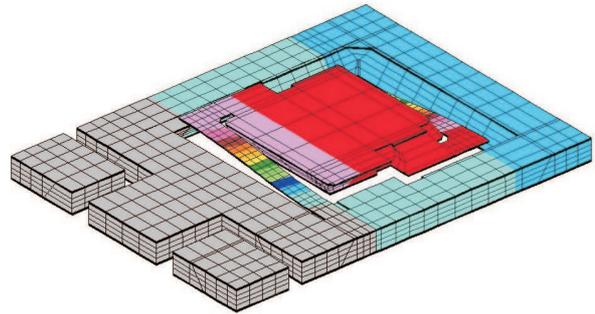


Abb. 5.8: 3D-Vernetzung des Neigungssensors, FEM-Simulationsmodell. Die Federn befinden sich links und rechts von der dunkel gefärbten beweglichen Masse.

Zur Simulation von starren Strukturen, die oben beispielhaft gezeigt wurden, ist anzumerken, daß analytische Berechnungen (abhängig von der Komplexität der geometrischen Anordnung) noch möglich sind, da die starren Strukturen wenige Freiheitsgrade besitzen.

Berechnungen mit bestehenden Einzel-Simulationsprogrammen können eingesetzt werden, wenn es gelingt, separate Simulationen des mechanischen und elektrischen Teils durchzuführen, die vom selben Parameter bestimmt werden, zum Beispiel von der Auslenkung.

Im Beispiel des Kippspiegels kann für jede Auslenkung mit Hilfe eines FEM-Simulators die dazugehörige Kraft berechnet werden. Mit Hilfe eines BEM-Simulators kann die erforderliche Spannung berechnet werden, die bei der gegebenen Auslenkung diese Kraft ergibt. Durch Kombination der Ergebnisse kann damit der Zusammenhang zwischen Spannung und Auslenkung in diesem Fall (ein Freiheitsgrad) bestimmt werden.

Oft kann das mechanische Verhalten durch eine einfache Feder beschrieben werden, in diesem Fall genügt eine BEM-Simulation.

Die separate Berechnung des elektrischen und mechanischen Verhaltens und ihre anschließende Kombination ist prinzipiell auch dann noch möglich, wenn das Bauteil mehr als einen, aber endlich viele Freiheitsgrade aufweist. Der Parameterraum, den die Freiheitsgrade aufspannen, muß im elektrischen und mechanischen Energiebereich an geeigneten Diskretisierungspunkten abgetastet werden. Diese Ergebnisse werden anschließend, ausgehend von der Ruhelage, durch eine Pfadverfolgungsmethode kombiniert. Wenn mehr als ein Freiheitsgrad vorliegt, liegt der Nachteil des Verfahrens jedoch darin, daß sehr viele Lösungspunkte berechnet werden, die nicht zur Gesamtlösung gehören, was einen unnötig erhöhten Rechenaufwand bedeutet.

Strukturen mit einem oder wenigen Freiheitsgraden können leicht durch Makromodelle charakterisiert und zu großen Systemen zusammengesetzt werden [77].

5.1.2 Flexible Strukturen

Dies sind Strukturen, die unendlich viele Freiheitsgrade der mechanischen Bewegung besitzen. Praktisch alle realisierten Bauteile dieser Klasse lassen sich auf zwei Grundstrukturen zurückführen, nämlich auf die Membran und den Balken, vgl. die Prinzipskizzen in Abb. 5.10

und 5.12. Diese Grundstrukturen sind nochmals nach der Art ihrer Einspannung zu unterscheiden. Beim Balken ist ein- und zweiseitige Einspannung möglich, die Membran kann in einen rechteckigen oder runden Rahmen eingespannt sein.

Die Abbildungen 5.9 und 5.11 zeigen beispielhaft zwei flexible Strukturen.

- Ein Membranantrieb gemäß der Prinzipskizze in Abb. 5.10 besteht aus einer flexiblen Siliziummembran, die in geringem Abstand zu einer Gegenelektrode in einen rechteckigen Rahmen gespannt ist.

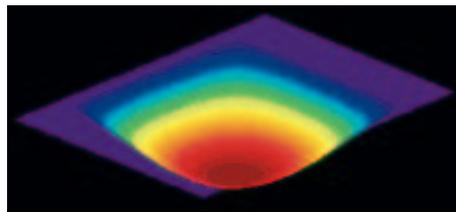


Abb. 5.9: Simulation einer ausgelenkten Membran.

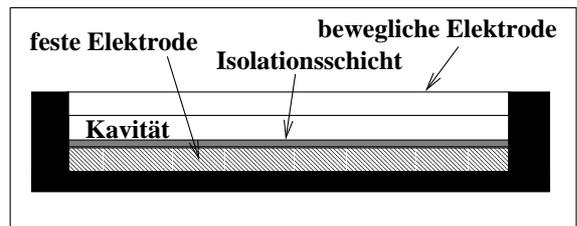


Abb. 5.10: 2D-Schnitt einer Mikromembran.

Die gesamte Substratfläche unter der Membran bildet die Gegenelektrode. Typischerweise ist die Dicke von Spalt und Membran klein gegenüber der waagrechten Ausdehnung des Bauteils, das Längen/Dickenverhältnis liegt bei ca 100:1. Im Gegensatz zu starren Strukturen tritt hier ein weiterer Effekt auf, nämlich das Anschmiegen der Membran an die Gegenelektrode nach dem Kontakt. Abb. 5.9 zeigt überhöht die Form einer ausgelenkten Membran.

Membranen spielen eine wichtige Rolle in Drucksensoren, wo sie kapazitiv ausgelesen werden [70], und in Mikropumpen [85], wo sie elektrostatisch betätigt werden. Von Interesse sind dort die Rückwirkung der Auslesespannung auf den Sensor, Snap-in- und Release-Spannung und der Energieverbrauch eines Pumpzyklus.

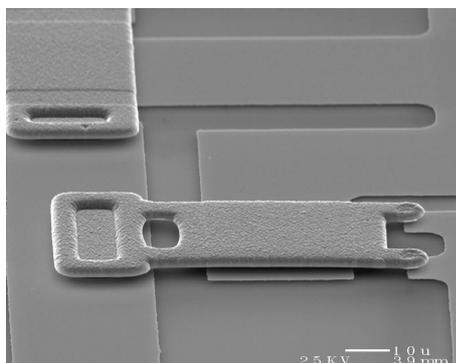


Abb. 5.11: Mikrorelais aus [3], freie Balkenlänge ca. 50 µm.

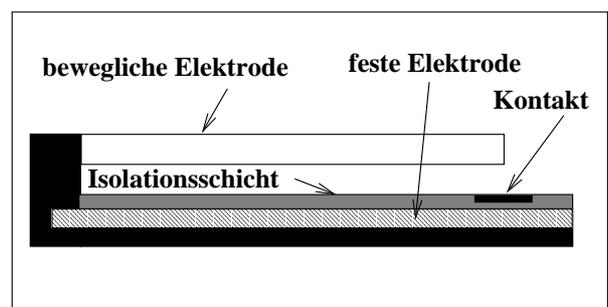


Abb. 5.12: 2D-Schnitt eines einseitig eingespannten Balkens.

- Das Relais in Abb. 5.11 (Prinzipskizze Abb. 5.12) besteht aus einem einseitig eingespannten Balken in geringem Abstand parallel zur Substratoberfläche. Den größten Teil der Substratfläche unter dem Balken nimmt eine Elektrode ein, die bei angelegter Spannung das Relais betätigt. Die Kontaktelektrode befindet sich unter der Spitze des Relais. Im Gegensatz zu starren Strukturen bestimmt die Verformung des Relaisbalkens das elektrische Feld. Neben dem Kontakt zwischen Relaisspitze und Kontaktelektrode kann auch eine Durchbiegung des Relais auf die Gegenelektrode auftreten. Derartige Relais werden als Schalter in Hochfrequenzanwendungen eingesetzt und dort, wo die Schaltzeiten mechanischer Relais nicht ausreichen.

Zur Simulation flexibler Strukturen, die oben beispielhaft gezeigt wurden, ist anzumerken, daß analytische Berechnungen nur noch unter Annahme starker Vereinfachungen möglich sind. Das Kontaktverhalten ist nicht analytisch berechenbar. Auf Grund der hohen Zahl von Freiheitsgraden ist eine gekoppelte Simulation der elektrischen und mechanischen Energiebereichs erforderlich, die wiederum wegen der bereits beschriebenen Instabilitäten spezielle Verfahren wie Homotopiemethoden erfordert.

5.1.3 Mischformen aus starrer und flexibler Struktur

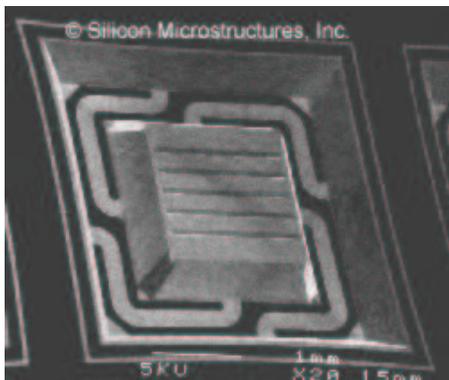


Abb. 5.13: Seismische Masse an 4 Federn aufgehängt aus [6]. Diagonale der beweglichen Masse ca. 2 mm.

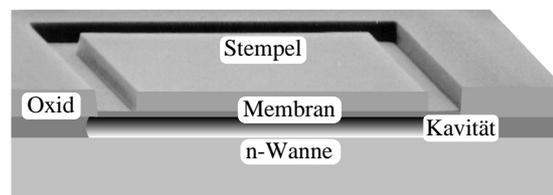


Abb. 5.14: Schnitt durch einen mikromechanischen Drucksensor [70]. Grundfläche $56 \times 56 \mu\text{m}^2$, Stempel $40 \times 40 \mu\text{m}^2$.

Mischformen zwischen starren und flexiblen Strukturen entstehen, wenn der elektrische Feldbeitrag der Feder Elemente nicht mehr vernachlässigbar ist. Diese Mischformen können in erster Näherung noch als starre Strukturen behandelt werden. Für genaue Untersuchungen ist aber die Simulation als flexible Struktur unumgänglich.

Ein Beispiel für den fließenden Übergang zwischen flexiblen und starren Strukturen bilden so genannte Membranen mit Stempel (Abbildung 5.14).

Je nach Größe des Stempels kann das Bauteil als Feder-Masse-System oder als flexibles System modelliert werden.

Bei einem zweiten Beispiel, einer seismischen Masse, die an 4 Federn aufgehängt ist (vgl. Abb. 5.13), spielt neben der Größe der Federn auch eine Rolle, ob und wie weit sich die seismische Masse aus der Ebene der Federn erhebt.

5.1.4 Varianten des elektrischen und mechanischen Aufbaus

Bei den Aufbauvarianten werden Varianten der Kontaktgeometrie und der mechanischen Elektrodenvorspannung sowie die elektrische Mehrelektrodenbeschaltung berücksichtigt.

In der Kontaktgeometrie sind ebene und gestufte Kontaktflächen zu unterscheiden sowie Kontaktflächen, die mit Stempeln versehen sind. Diese Varianten sind in den Abb. 5.15 bis 5.17 dargestellt.

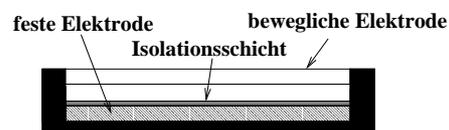


Abb. 5.15: Ebene Kontaktfläche.

Die ebene Kontaktfläche in Abb. 5.15 tritt meist in Mikromembranpumpen und Drucksensoren auf. Bei Wanderkeilrelais ist sie sogar eine funktionale Voraussetzung.

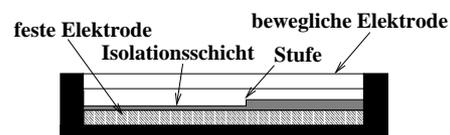


Abb. 5.16: Gestufte Kontaktfläche.

Eine gestufte Kontaktfläche tritt z. B. in Relais (vgl. Abb. 5.25) auf, wenn der elektrische Kontaktpunkt erhöht ist. Sie bewirkt in der Regel einen zweistufigen Snap-down-Effekt.

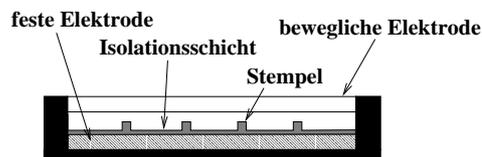


Abb. 5.17: Kontaktfläche mit Stempeln.

Gelegentlich werden wie in Abb. 5.17 kleine Stempel auf der Kontaktfläche vorgesehen, um ein "Sticking" der Struktur im Herstellungsprozeß zu verhindern [67]. In derartigen Anordnungen kann es zu mehrfach gestuften Snap-down-Effekten kommen.

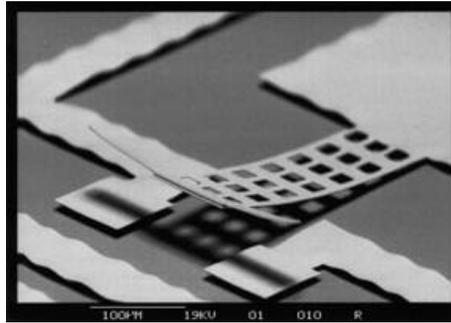


Abb. 5.18: Mikrorelais mit elektrostatischer Anziehung [66]; Balkenlänge 200 μm , Balkenbreite 50 μm .

Manche Bauteile weisen eine mechanische Vorspannung der beweglichen Elektrode auf, vgl. Abb. 5.18. Im Herstellungsprozeß entstehen in der Bauteiloberfläche oft innere Spannungen, die eine einseitige mechanische Vorkrümmung, z.B. eines Relaisbalkens, bewirken. Diese Vorkrümmung ermöglicht ein Abrollen der flexiblen auf der festen Elektrode. Derartige Relais werden auch als Wanderkeilrelais [68] bezeichnet.

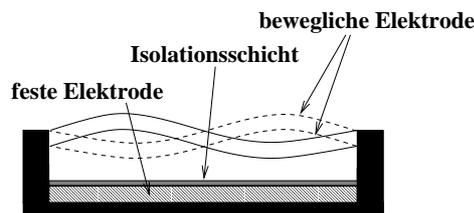


Abb. 5.19: Membran im bistabilen Modus.

Neben der einseitigen Vorspannung kann auch, wie in Abb. 5.19, eine zweiseitige mechanische Vorspannung auftreten, zum Beispiel dann, wenn ein Balken unter Längsdruck eingespannt ist. In diesem Fall kann ein bistabiles Verhalten entstehen, die Ausbuchtungen nach oben und unten können ihre Plätze vertauschen.

Neben diesen mechanischen Varianten treten auch Varianten im elektrischen Antriebsteil auf. Zu erwähnen ist hier die Mehrelektrodenbeschaltung, bei der die Beschaltung des Bauteils von zwei auf mehrere Elektroden erweitert wird. Damit kann auch die Funktionalität des Bauteils erweitert werden. Denkbare Anwendungen sind hier zweidimensional schwenkbare Kippspiegel, elektrostatische Schrittmotoren (linear und rotatorisch), Pumpkammern mit Wanderfeld, Lageregelungseinrichtungen [34], lagekompensierte Beschleunigungsmesser für mehrere Freiheitsgrade und aktive Resonanzdämpfer. Die Behandlung derartiger Mehrelektrodenprobleme kann auf das hier beschriebene Homotopieverfahren aufbauen, geht aber über den Rahmen dieser Arbeit hinaus (sh. Ausblick in Kap. 8).

5.1.5 Zusammenhang zwischen Bauteilklassen, Simulationsproblemen und Simulationsansätzen

Die Probleme, die bei der Simulation von MEMS auftreten, wurden bereits in Kap. 4.2 erläutert. Tabelle 5.1 zeigt die Relevanz dieser Probleme in den eben gefundenen Klassen und jeweils ein bzw. zwei konkretete Bauteile als Vertreter dieser Klasse.

Klasse	starr	starr	Mischform	flexibel	flexibel
	Kippspiegel	Fingerstruktur	Beschleunigungssensor	Membran	Relais
Große Verformung des Gebiets	xx	x	x	xxx	xxx
Kontaktproblem	x	x	x	xxx	xxx
elektrisches unendliches Gebiet	x	x	x	0	xxx
Snap-Point	x	x	x	xxx	xxx
Release-Point	x	0	0	xxx	xxx

Tab. 5.1: Relevanz der Probleme, die bei MEMS Bauteilen auftreten.

Große Verformungen des Gebiets treten beim Beschleunigungssensor nicht auf, da er sich nur wenig bewegt. Die Bewegung der Fingerstruktur ist deutlich größer, ist aber wegen der konstanten Kapazitätsänderung pro Längeneinheit kein Problem. Das elektrostatische Feldgebiet des Kippspiegels verformt sich sehr deutlich, im Fall der FEM-Vernetzung wäre hier mehrfache Neuvernetzung erforderlich. Am relevantesten ist die Verformung des Gebiets bei Membran und Relais, da dort ein Flächenkontakt der Elektroden entsteht, der im Fall der FEM-Vernetzung des elektrostatischen Gebiets viele finite Elemente zu Nullelementen reduzieren würde.

Kontaktprobleme treten bei allen genannten Strukturen auf. Starre Strukturen und Mischformen zeigen in der Regel Punkt- bzw. Linienkontakt, der z.B. durch Beendigung der Simulation relativ einfach zu behandeln ist. Flexible Strukturen schmiegen sich an die Gegenelektrode an, die Simulation muss über den ersten Kontakt hinaus weiterrechnen, was die Fähigkeit zur Kontaktbehandlung im FEM-Solver erfordert.

Elektrisch unendliche Gebiete treten in fast allen elektromechanisch gekoppelten Bauteilen auf, mit Ausnahme der Membran, deren geschlossenes elektrisches Gebiet als Innenraumproblem behandelt wird. Die Relevanz des offenen Gebiets bemißt sich nach dem Feld- und Kraftbeitrag des Randes, der beim vorgekrümmten Relais sehr groß, bei den anderen Strukturen aber nur gering ist.

Snap-Point und Release-Point treten bei allen Strukturen auf. Ihre genaue Berechnung ist jedoch bei Membran und Relais von besonderer Relevanz, um zum Beispiel den sicheren Arbeitsbereich eines Drucksensors oder die Spannung zu bestimmen, bei der ein Relais sicher geschlossen ist.

Aus dieser Einführung und der Tabelle 5.1 geht hervor, daß bei flexiblen Strukturen die Effekte elektromechanisch gekoppelter Bauteile stärker und in umfangreicherem Maße auftreten. Sie sind weniger erfaßbar durch analytische Ansätze und weisen eine höhere Komplexität in der

Struktur auf. Daher wurde das Gewicht bei den detailliert simulierten Strukturen auf die Klasse der flexiblen Strukturen gelegt.

Für die Simulationsansätze folgt daraus, daß die Simulation starrer Strukturen mit wenigen Freiheitsgraden im Prinzip durch getrennte "Makromodellierung" der elektrischen und mechanischen Gebiete erfolgen kann, vgl. Seite 80, deren Ergebnisse nachträglich kombiniert werden, wobei die Makromodelle mit Hilfe der jeweiligen Simulatoren für das elektrische und mechanische Gebiet gewonnen werden.

Die detaillierte Simulation von flexiblen Strukturen ist dagegen (vgl. Seite 82) nur durch den Ansatz einer Koppelung zwischen Simulatoren für das elektrische und mechanische Gebiet möglich.

5.2 Ausgewählte Demonstratoren

Aus der Klasse der starren Strukturen wurde ein Mikrokippspiegel simuliert, aus der Klasse der flexiblen Strukturen eine Mikromembran und unterschiedliche einseitig eingespannte Balkenstrukturen, als Punktkontaktrelais und Wanderkeilrelais.

Auf Grund der zur Verfügung stehenden Simulatoren wurden alle Simulationen zweidimensional (2D) ausgeführt.

5.2.1 Der Mikrokippspiegel

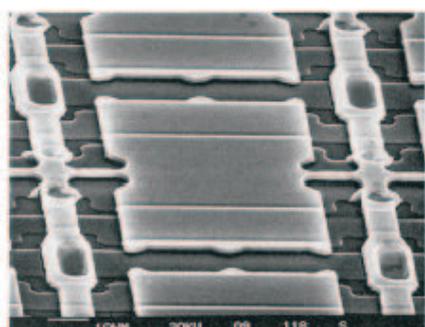


Abb. 5.20: Mikrospiegel aus [39, 60], Kantenlänge der quadratischen Spiegelfläche $30\mu\text{m}$.

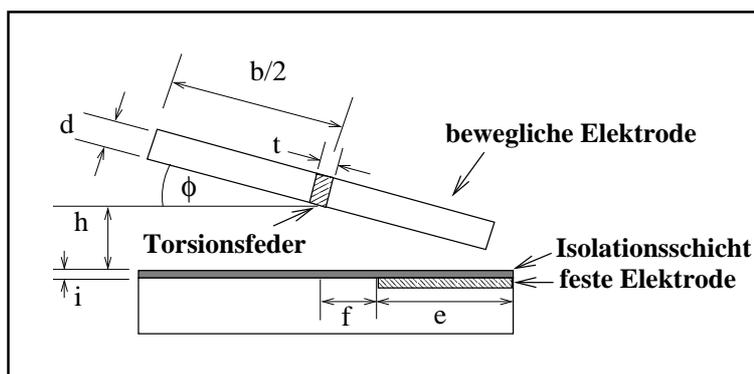


Abb. 5.21: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Kippspiegels. Die Torsionsfedern sind durch die schraffierten Rechtecke im Querschnitt des Spiegels angedeutet.

Die Abmessungen des hier simulierten Kippspiegels orientieren sich an der Veröffentlichung von Jäcklin et al. [39, 60]. Wie Abb. 5.21 zeigt, befindet sich die rechteckige Spiegelplatte des Simulationsmodells in einem Abstand von $h = 1,5\ \mu\text{m}$ vom Substrat und ist $d = 2\ \mu\text{m}$ dick. Sie mißt längs der Kippachse $30\ \mu\text{m}$ und quer zur Kippachse $b = 30\ \mu\text{m}$. Jede Torsionsfeder

ist $15 \mu\text{m}$ lang, $d = 2 \mu\text{m}$ dick und $t = 0,4 \mu\text{m}$ breit. Die Isolationsschicht, auf der der Spiegel anschlägt, ist $i = 0,5 \mu\text{m}$ dick.

Die Elektrode liegt unter der Isolationsschicht, ihre Innenkante liegt $f = 4,4 \mu\text{m}$ von der Symmetrieachse der Anordnung entfernt, sie ist $e = 15,6 \mu\text{m}$ breit und mißt längs der Kippachse $30 \mu\text{m}$.

Die Torsionsfedern wurden als Polysilizium mit einem E-Modul von $E = 1,62 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, einem Schubmodul von $G = 0,66 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und einer Poissonzahl $\mu = 0,2$ modelliert und in ein FEM-Drehfederelement umgerechnet. Das 2D-Modell hat eine Tiefe von $b = 30 \mu\text{m}$.

Aufgrund der z-Ausrichtung der Torsionsfedern im Koordinatensystem des Modells zum x-y-Schnitt der Spiegelplatte, ist dieses Modell kein reines 2D-Modell, sondern man kann es als ein Pseudo 3D-Modell bezeichnen.

5.2.2 Die Mikromembran

Bei dieser elektrostatisch ausgelenkten Membran wurden die Abmessungen der Antriebseinheit der elektrostatisch angetriebenen Mikromembranpumpe von Zengerle [86, 85] übernommen.

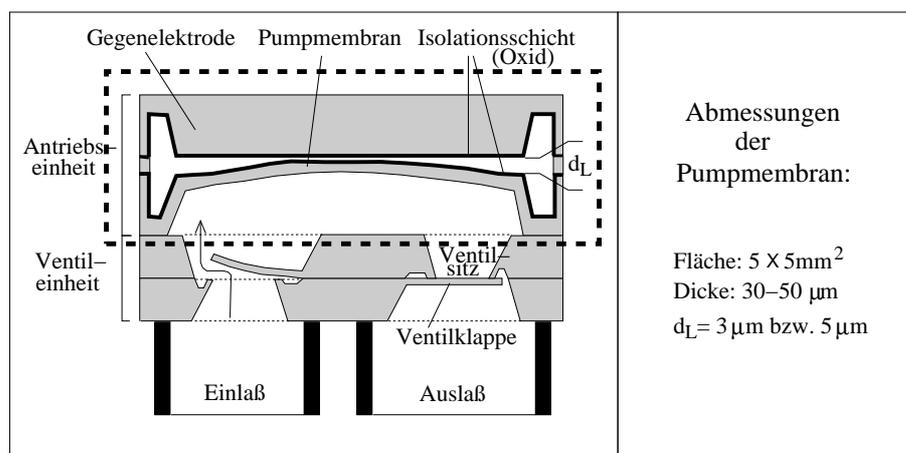


Abb. 5.22: Skizze einer elektrostatisch angetriebenen Mikromembranpumpe nach [86, 85]. Gestrichelt umrahmt ist die elektrostatisch auslenkbare Membran. Membranfläche $5 \times 5 \text{ mm}^2$.

Die simulierte Membran befindet sich in der Ruhelage $h = 4 \mu\text{m}$ über der Isolationsschicht. Sie ist $b = 5000 \mu\text{m}$ breit, $5000 \mu\text{m}$ tief und $d = 40 \mu\text{m}$ dick. Da alle Rechnungen zweidimensional durchgeführt wurden, ist sie nur an zwei Kanten eingespannt. Die Gegenelektrode nimmt den ganzen Raum unter der Membran ein und liegt unter der Isolationsschicht, die $i = 1 \mu\text{m}$ dick ist. Die Membran wurde als Polysilizium mit einem E-Modul von $E = 1,62 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, einem Schubmodul von $G = 0,66 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und einer Poissonzahl $\mu = 0,2$ modelliert. Das 2D-Modell hat eine Tiefe von $b = 30 \mu\text{m}$.

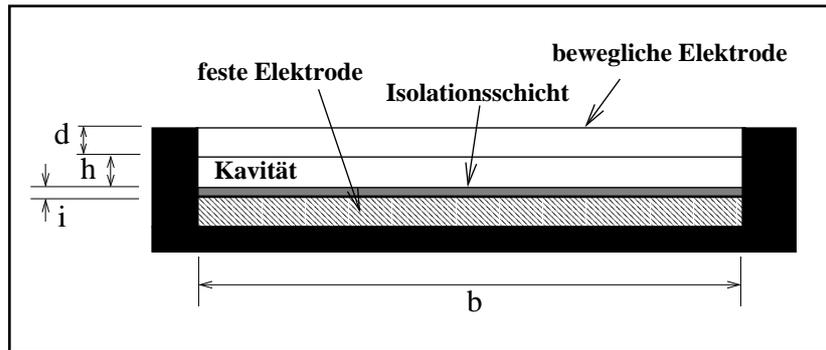


Abb. 5.23: Querschnitt einer elektrostatisch auslenkbaren Membran.

5.2.3 Das Relais mit Biegebalken

Die Simulationsmodelle orientieren sich an einem von Schiele et al.[66] entwickelten Relais , vgl. Abb 5.24 und 5.25.

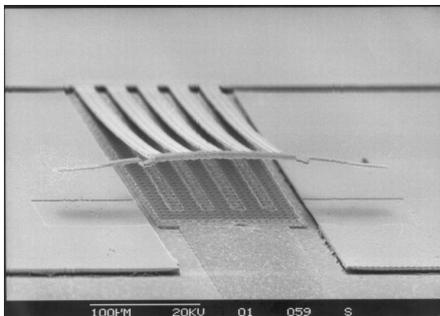


Abb. 5.24: Mikrorelais mit elektrostatischer Anziehung [66], Balkenlänge 200 μm .

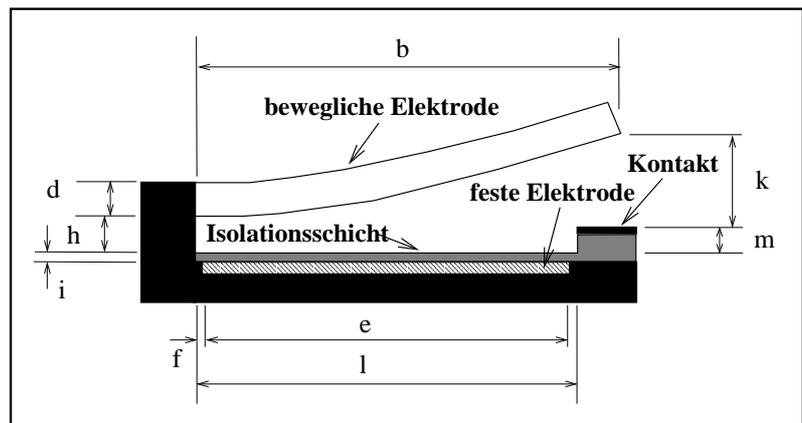


Abb. 5.25: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Biegebalkenrelais.

Das Biegebalkenrelais in Abb. 5.25 hat in der Simulation eine Breite von $b = 200 \mu\text{m}$, der obere Relaiskontakt befindet sich $k = 5,68 \mu\text{m}$ über der unteren Kontaktauflage. Der Relaisbalken ist $d = 2 \mu\text{m}$ dick und befindet sich an der Einspannung $h = 2,5 \mu\text{m}$ über der Isolationsschicht, die eine Dicke von $i = 0,5 \mu\text{m}$ hat. Die Kontaktauflage erhebt sich $m = 1 \mu\text{m}$ über die Isolationsschicht. Der Abstand zwischen Einspannung und Kontaktauflage beträgt $l = 192 \mu\text{m}$, die Elektrode ist $e = 184 \mu\text{m}$ lang, ihre linke Kante ist $f = 6 \mu\text{m}$ von der Einspannung entfernt.

Der Balken des vorgekrümmten Relais besteht aus mehreren Schichten, die mit einem resultierende E-Modul von $E = 1,62 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und einer Poissonzahl $\mu = 0,4$ modelliert wurden. Das 2D-Modell hat eine Tiefe von $b = 100 \mu\text{m}$.

5.2.4 Das Wanderkeilrelais

Die Geometrien dieser Wanderkeilrelais orientieren sich an der Arbeit von Schimkat [68]. Neben dem im Anschluß beschriebenen Wanderkeilrelais (Abb. 5.26) wurde ein herkömmliches Relais mit vergleichbaren Abmessungen (Abb. 5.27) simuliert, das im folgenden als Balken bezeichnet wird.

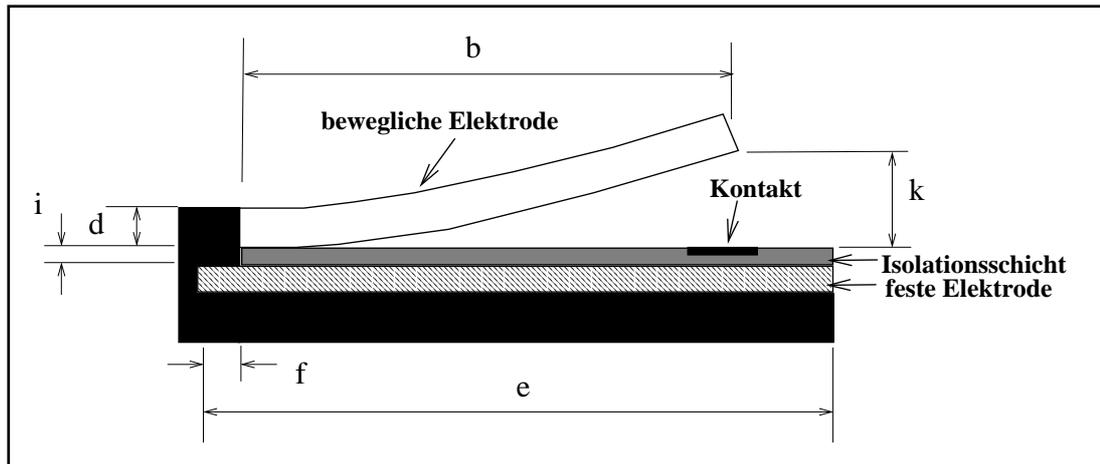


Abb. 5.26: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren vorgekrümmten Wanderkeilrelais.

Das Wanderkeilrelais in Abb. 5.26 wird mit einer Breite von $b = 100 \mu\text{m}$ simuliert. Der untere Relaiskontakt liegt in der Substratebene, die Höhe des oberen Kontakts über der Substratebene beträgt $k = 4,05 \mu\text{m}$. Der Relaisbalken ist $d = 1 \mu\text{m}$ dick und liegt an der Einspannung auf der Isolationsschicht auf, die eine Dicke von $i = 1 \mu\text{m}$ hat. Die Elektrode ist $e = 140 \mu\text{m}$ lang, ihre linke Kante ragt $f = 20 \mu\text{m}$ in die Einspannung hinein.

Das Wanderkeilrelais wurde als Polysilizium mit einem E-Modul von $E = 1,62 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, einem Schubmodul von $G = 0,66 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und einer Poissonzahl $\mu = 0,2$ modelliert. Das 2D-Modell hat eine Tiefe von $b = 30 \mu\text{m}$.

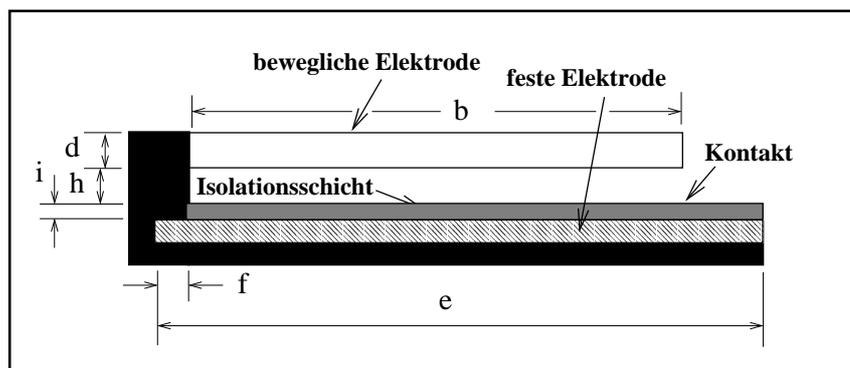


Abb. 5.27: Querschnitt eines elektrostatisch auslenkbaren Balkens.

Der Balken in Abb. 5.27 wird mit einer Breite von $b = 100 \mu\text{m}$ simuliert. Der Relaisbalken ist $d = 1 \mu\text{m}$ dick und befindet sich $h = 5 \mu\text{m}$ über der Isolationsschicht, die eine Dicke von $i = 1$

μm hat. Die Elektrode ist wie beim Wanderkeilrelais $e = 140 \mu\text{m}$ lang, ihre linke Kante ragt wie dort $f = 20 \mu\text{m}$ in die Einspannung hinein.

Der Balken wurde als Polysilizium mit einem E-Modul von $E = 1,62 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, einem Schubmodul von $G = 0,66 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ und einer Poissonzahl $\mu = 0,2$ modelliert. Das 2D-Modell hat eine Tiefe von $b = 30 \mu\text{m}$.

Kapitel 6

Eigenschaften und Verhalten des Algorithmus

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 4 entwickelten Algorithmen bei der Simulation von Bauelementen mit elektromechanischer Koppelung validiert und ihr Verhalten untersucht.

Der Aufbau des Kapitels orientiert sich an der Entwicklung der Algorithmen in Kapitel 4. Zuerst wird eine Auswahl von Simulationsergebnissen ohne Anwendung der Homotopiemethode gezeigt, anschließend einige Ergebnisse der Q -Homotopie, und zum Schluß solche mit Multiparameter-Homotopie. Anhand der Simulationsergebnisse werden die Aussagen über Möglichkeiten und Grenzen aus Kapitel 4 belegt und algorithmische Eigenschaften wie zum Beispiel Konvergenzverhalten, Genauigkeit und Robustheit untersucht.

Das Kapitel endet mit einer Zusammenfassung und Gesamtwertung der Ergebnisse.

6.1 Ladungshomotopie

6.1.1 Iterative Koppelung ohne Integration eines Homotopieverfahrens

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse der Simulationen mit einfacher iterativer Koppelung präsentiert, die mit der Spannung U gesteuert werden. Damit werden die Grenzen dieses einfachen Verfahrens gezeigt und die Einführung des Homotopieverfahrens motiviert.

Mit U -Steuerung wurden jeweils ein starres und ein flexibles Bauteil simuliert, nämlich der Mikrokippspiegel (vgl. S.86) und die Mikromembran (vgl. S.87).

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 ist die (U, x) -Kennlinie für diese zwei Bauteile dargestellt. Die maximale Auslenkung des Bauteils ist über der anliegenden Spannung angetragen und wird jeweils durch den Punkt $G1$ auf dem beweglichen Teil des Bauteils repräsentiert. Der Punkt $G1$ liegt beim Mikrokippspiegel genau auf der Spiegelspitze, die sich der Gegenelektrode nähert, und bei der Mikromembran in der Mitte der Membran (vgl. Abb. 6.34). Für alle Simulationen der Kapitel 6 und 7 gilt die Konvention, daß $G1$ immer den sensitivsten Punkt eines Bauteils bezeichnet.

Qualitativ unterscheidet sich für die beiden Bauteile der Verlauf der (U, x) -Kennlinie nicht. Beide verhalten sich wie in Abschnitt 3.2 theoretisch beschrieben, vgl. Bild 3.2.

Bei Erreichen der ersten linksdrehenden Faltungspunkts (Snap-in-Position, senkrechte Tangente) wird das elektrisch-mechanische Gleichgewicht instabil, die bewegliche Elektrode "schnappt" in den nächsten stabilen Zustand. Im Fall des Kippspiegels ist das der Anschlag an der Isolation der Gegenelektrode, im Fall der Membran das Anschmiegen an die Gegenelektrode bis zum Kräftegleichgewicht. Diese Bewegung ist durch eine gestrichelte Linie mit Pfeilmarkierung nach oben gekennzeichnet.

Verringert man nach dem Anschlag die Spannung wieder, wird der stabile Teil der waagrechten Kontaktlinie bis zum rechtsdrehenden Faltungspunkt (Release-Position, senkrechte Tangente oder Knick wegen Kontaktablösung) durchlaufen. Die nachfolgende "Schnappbewegung" entlang der gestrichelten Linie mit Pfeilmarkierung nach unten endet im nächsten stabilen Punkt zwischen Ruhelage und Snap-in-Position.

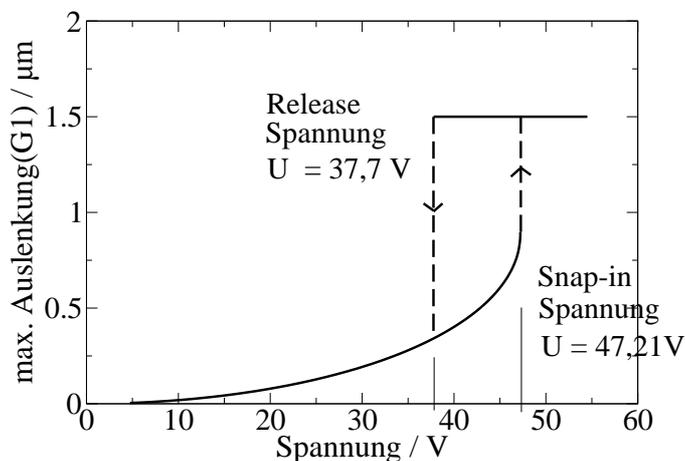


Abb. 6.1: (U, x) -Kennlinie des Kippspiegels aus einer Simulation mit Spannungsvorgabe.

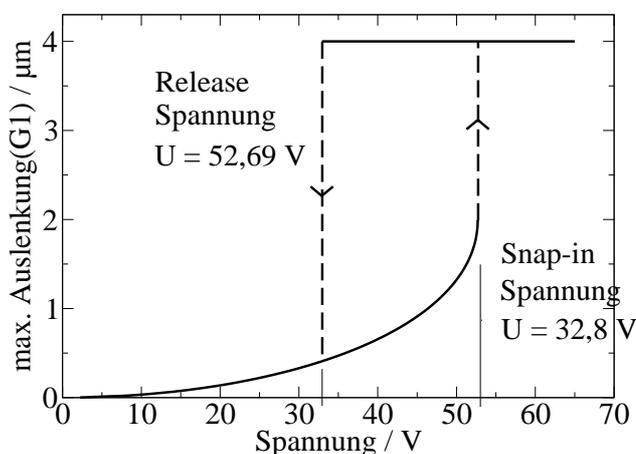


Abb. 6.2: (U, x) -Kennlinie der Mikromembran aus einer Simulation mit Spannungsvorgabe.

In den folgenden Abbildungen 6.3 und 6.4 sind für beide Bauteile die simulierten Kraftkurven dargestellt, die für das idealisierte Membranmodell bereits in Kap. 3.2.1 (Abb. 3.4) analytisch berechnet wurden. Qualitativ sind die Kraftkurven der flexiblen und der starren Struktur identisch mit den theoretisch hergeleiteten. Die elektrischen Kraftlinien sind hyperbelförmig, die mechanische Kraftlinie ist fast linear (die Krümmung der mechanischen Kraftlinie wird durch eine optische Täuschung hervorgerufen).

Die vier Abbildungen 6.5, 6.6, 6.7 und 6.8 zeigen deutlich die Grenzen der iterativen Kopplung ohne Integration eines Homotopieverfahrens. In den Abbildungen sind die Iterationsverläufe bzw. Iterationsanzahlen für unterschiedliche Spannungen angetragen, die sich immer mehr der Snap-in-Spannung annähern. Man beobachtet einen starken Zuwachs der benötigten Iterationen bei Spannungen in der Nähe der Snap-in-Spannung. Hier kann man erkennen, daß das flexible Bauteil bis zur Konvergenz noch mehr Iterationen benötigt als das starre Bauteil. Die Berechnungen zeigen die benötigten Iterationsanzahlen bei einer vorgegebenen Genauig-

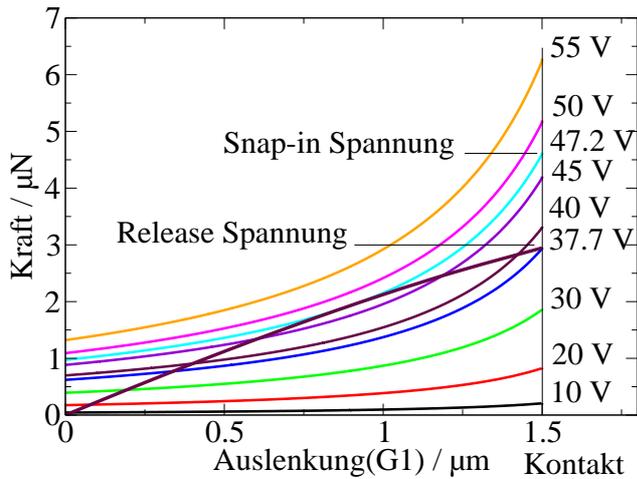


Abb. 6.3: Elektrische und mechanische Kraftkennlinien beim Kippspiegel.

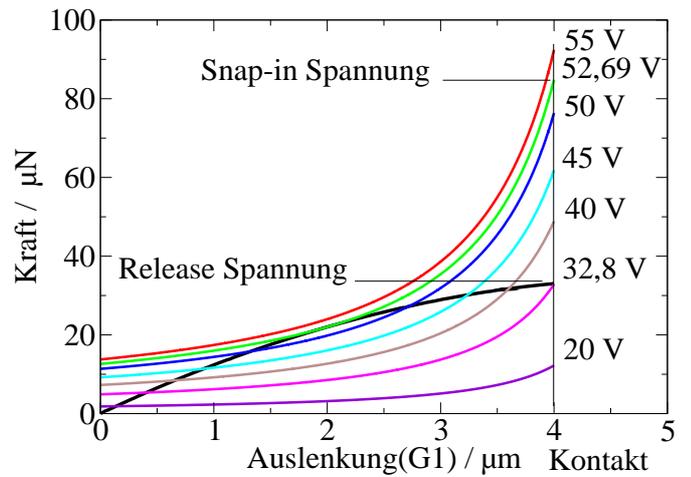


Abb. 6.4: Elektrische und mechanische Kraftkennlinien bei der Mikromembran.

keit von $1 \cdot 10^{-3}$. Wird eine Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-4}$ gefordert, steigert sich die Gesamtiterationsanzahl in der Nähe der Snap-in-Spannung auf die zwei- bzw. dreifache Anzahl. Dabei ist zu beachten, daß diese Genauigkeitsschranke nur den relativen Unterschied von zwei aufeinanderfolgenden Geometriepositionen bewertet. Wegen der sehr langsamen Konvergenz des Verfahrens am Snap-Point bleibt bei einem Abbruch mit einem relativen Fehlerkriterium von $1 \cdot 10^{-3}$ ein großer absoluter Fehler. Für den Kippspiegel wurde im Vergleich zu Verfahren mit Homotopie, deren Fehler als absoluter Wert angegeben werden kann, ein Fehler von 1% ermittelt, also eine Größenordnung mehr als die vorgegebene Genauigkeit.

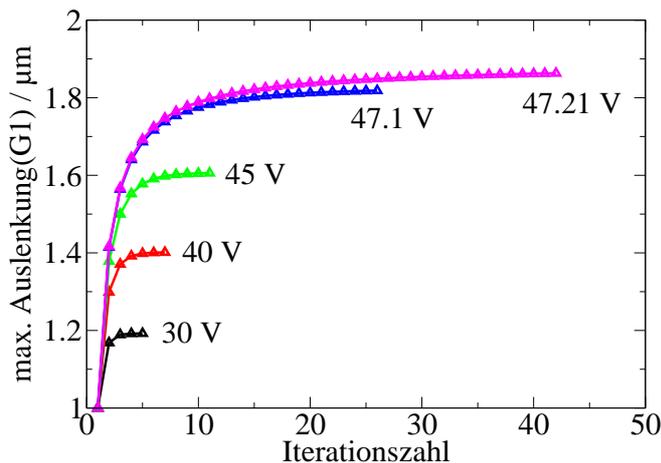


Abb. 6.5: Iterationsverläufe beim Mikrokippspiegel in Abhängigkeit von der Spannung.

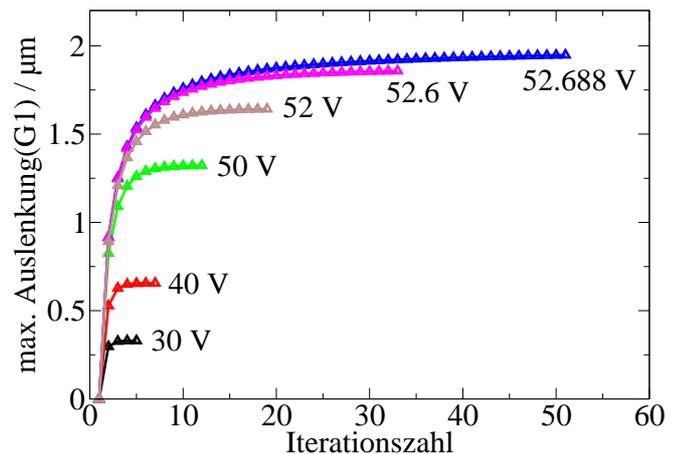


Abb. 6.6: Iterationsverläufe bei der Mikromembran in Abhängigkeit von der Spannung.

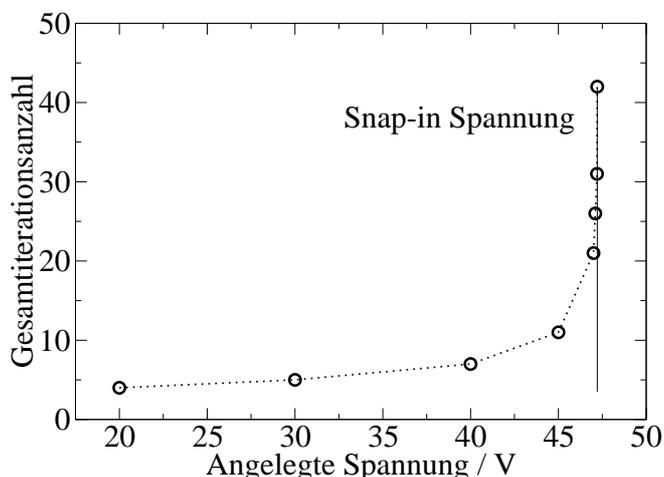


Abb. 6.7: Iterationszahl bis zur Konvergenz beim Mikrokippspiegel für Spannungen, die immer näher an der Snap-in-Spannung liegen.

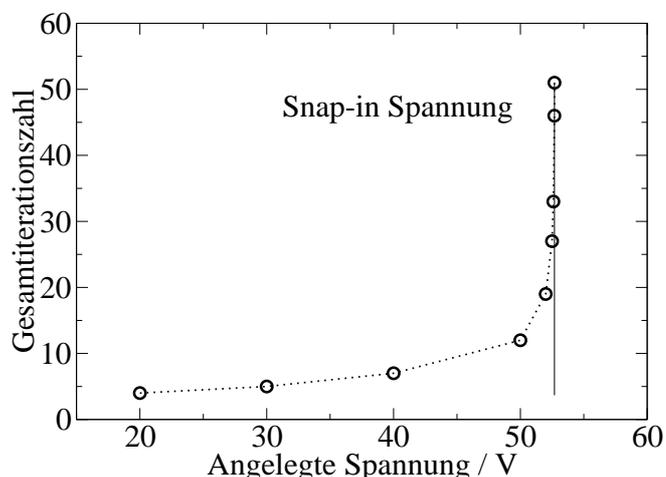


Abb. 6.8: Iterationszahl bis zur Konvergenz bei der Mikromembran für Spannungen, die immer näher an der Snap-in-Spannung liegen.

6.1.2 Spannungskennlinien für ausgewählte Bauteile

Die nachfolgenden Kennlinien wurden mit ladungsgesteuerter Homotopie berechnet. Gezeigt wird der Zusammenhang zwischen Spannung und Auslenkung für die starren und flexiblen Bauteile, die bereits in Kapitel 5.2 beschrieben wurden. Diese Kennlinien enthalten auch die instabilen Bereiche mit rückläufiger Spannung, die bei der Simulation mit Ladungshomotopie keine Schwierigkeit mehr darstellen.

In den Simulationen dieses Kapitels und denen der kommenden Kapitel wurde eine relative Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-3}$ vorgegeben, die auch schon bei der U -Steuerung verwendet wurde. Die Abbildungen 6.9 und 6.10 zeigen die um den instabilen Ast ergänzten Kennlinien der Mikromembran und des Mikrokippspiegels, in Anlehnung an die Hysteresebilder 6.1 und 6.2 des vorherigen Kapitels. Man erkennt den linksdrehenden Faltungspunkt der Kennlinie an der Snap-in-Position (SP) und die Release-Position (RP) bei Erreichen des Kontakts. Der Knick an der Release-Position wird durch das Auftreten von zusätzlichen Kontaktkräften bewirkt.

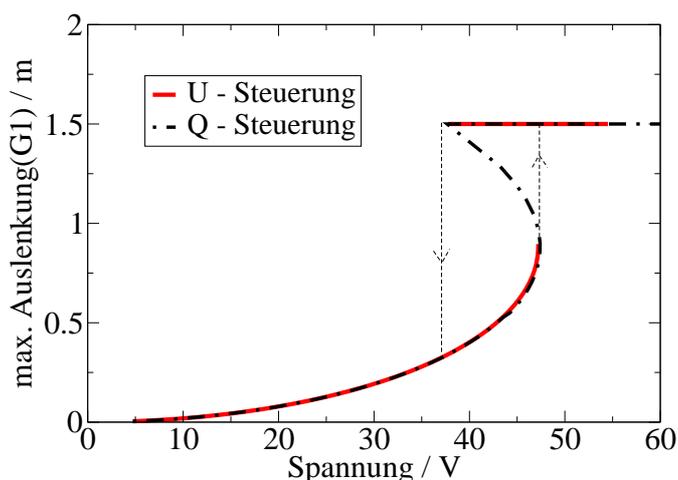


Abb. 6.9: (U, x) -Kennlinie des Kippspiegels aus einer Simulation mit Ladungsvorgabe.

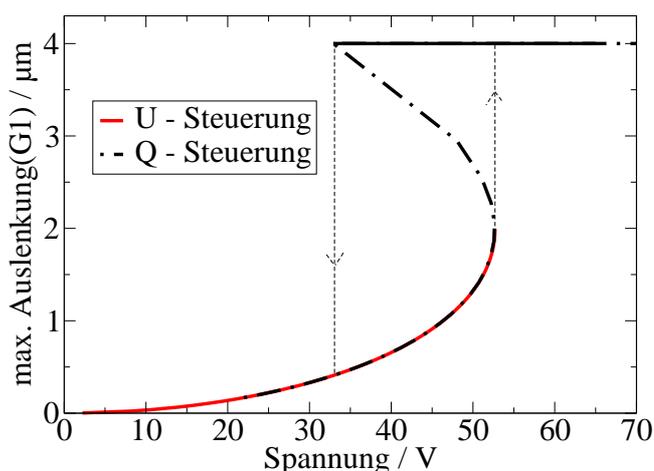


Abb. 6.10: (U, x) -Kennlinie der Mikromembran aus einer Simulation mit Ladungsvorgabe.

Die folgenden vier Abbildungen 6.11 bis 6.14 zeigen die (U, x) -Kennlinien der Bauteile, die zur Validierung des Algorithmus herangezogen wurden, nämlich die Mikromembran (vgl. Abb. 5.23), der Balken (vgl. Abb. 5.27), das Biegebalkenrelais (vgl. Abb. 5.25) und das Wanderkeilrelais (vgl. Abb. 5.26).

Diese Auswahl der vier Bauteile eignet sich besonders zur Darstellung des Verhaltens des Algorithmus, weil sie alle wesentlichen Probleme der Simulation enthalten, nämlich eine unendliche Anzahl von mechanischen Freiheitsgraden, das Kontaktproblem und die inhärente Instabilität.

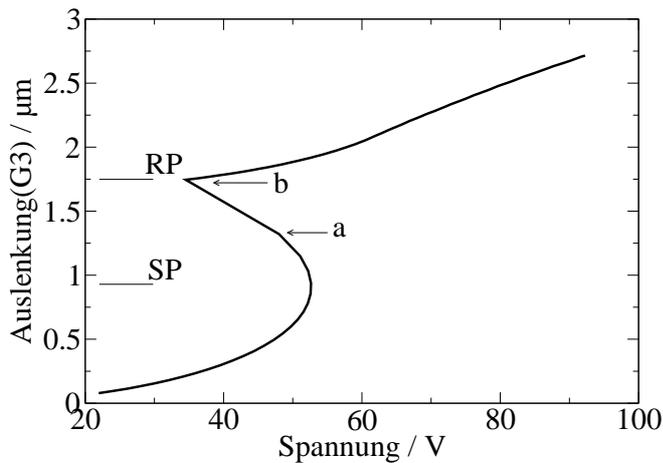


Abb. 6.11: (U, x) -Kennlinie der Mikromembran.

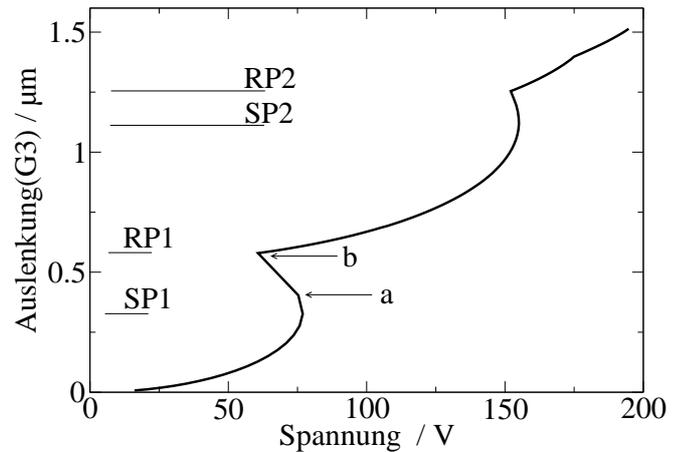


Abb. 6.12: (U, x) -Kennlinie des Balkens.

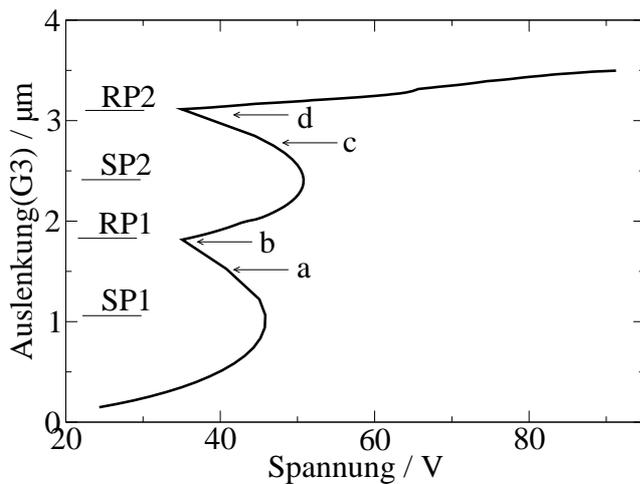


Abb. 6.13: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais.

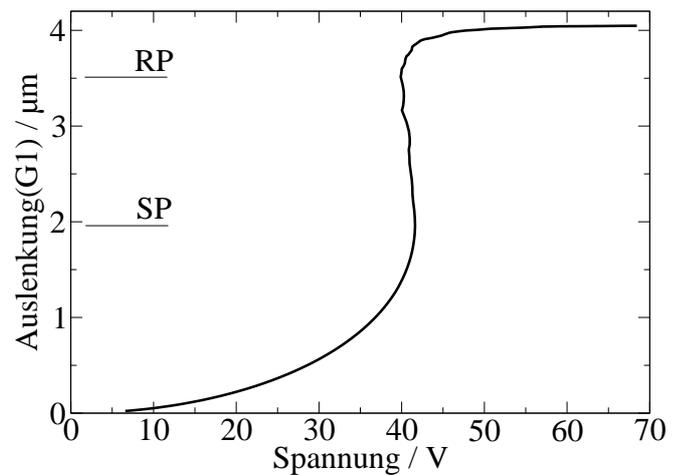


Abb. 6.14: (U, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais.

Alle vier Bilder zeigen stabile und instabile Arbeitsbereiche. Balken und Biegebalken weisen sogar jeweils zwei instabile Arbeitsbereiche auf. In allen Bildern ist eine Zunahme der x -Auslenkung auch nach dem Anschlag zu beobachten, weil der beobachtete Punkt nicht mit dem Punkt des Erstkontakts zusammenfällt. Die Beobachtungspunkte wurden so gewählt, daß die weitere Auslenkung nach dem Erstkontakt der beweglichen Elektrode mit der Gegenelektrode, also das Anschmiegen der beweglichen Elektrode an die Gegenelektrode, gut darstellbar ist. Die Membran-Kennlinie ist hier (Abb. 6.11) im Gegensatz zur vorigen Abb. 6.10 über der x -Auslenkung des Punkts $G3$ statt $G1$ dargestellt.

Generell gilt, daß sich $G3$ bei diesen und allen anderen simulierten Bauteilen an einer weniger geometrisch sensitiven Stelle befindet als $G1$. Die Lage der Punkte $G1$ bzw. $G3$ ist den Abb. 6.34, 6.37, 6.40 und 6.43 zu entnehmen.

Die Snap-in-Position ist in den (U, x) -Kennlinien mit SP, die Release-Position mit RP bezeichnet. Mit a und b (bzw. c und d) sind die Grenzen der Bereiche bezeichnet, in denen die ladungsgesteuerte Homotopie wegen des Phänomens der nicht-monotonen Ladung (vgl. Kap. 7.2) keine Simulationspunkte berechnen kann.

Beim Balken erkennt man in der (U, x) -Kennlinie eine zweite Snap-in- und Release-Position (SP2 / RP2), die einer instabilen Anschmiegephase des Balkens an die Gegenelektrode entspricht. Das Phänomen der nicht-monotonen Ladung tritt bei diesem Bauteil nur an der ersten Release-Position auf, nicht aber an der zweiten, weil dort ein Abrollverhalten vorliegt (vgl. Kap. 7.2).

Die (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais besitzt, ebenso wie der Balken, eine zweite Snap-in- und Release-Position. Diese beiden instabilen Bereiche sind dem Anschlag der Relaisspitze auf die Kontakterhöhung und dem Durchbiegen der Balkenmitte auf die Gegenelektrode zuzuordnen. Das Phänomen der nicht-monotonen Ladung tritt bei diesem Bauteil an beiden Release-Positionen auf, da an beiden ein Schnappverhalten und kein Abrollverhalten vorliegt. Eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhalts findet sich in Kap 7.2.

Beim Wanderkeilrelais tritt im Verlauf des Anschmiegevorgangs ein Snap-in- und ein Release-Punkt auf, das heißt ein Teil des Abrollvorgangs findet im instabilen Bereich statt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Q -Steuerung im gesamten Simulationsbereich eine gute Darstellung des gesamten Bauteilverhaltens ergibt. Das Problem der groben Abtastung vor manchen Release-Points tritt nie um den Snap-Point auf, hier kann die Abtastung, wenn gewünscht, sehr fein gewählt werden. Soll der Bereich vor dem Release-Point genauer abgetastet werden, so muß bei Bauteilen, die kein Abrollverhalten aufweisen, die Multiparameter-Homotopie eingesetzt werden.

6.1.3 Konvergenzverhalten

Das Konvergenzverhalten der ladungsgesteuerten Homotopie wurde exemplarisch am Biegebalkenrelais (vgl. S.95) und am Wanderkeilrelais (vgl. S.95) untersucht.

Von Interesse war die Frage, ob die Konvergenzgeschwindigkeit im gesamten Arbeitsbereich gleichmäßig hoch ist, und ob der Iterationsverlauf oszilliert oder sich asymptotisch verhält. Zur Darstellung der Konvergenzgeschwindigkeit wurde an den beiden gewählten Bauteilen die Iterationsanzahl pro Lösungspunkt über der Auslenkung eines Oberflächenpunktes aufgetragen, der einen Parameter für das Durchlaufen des Arbeitsbereichs darstellt. Weiterhin wurden die Iterationsverläufe aufeinander folgender Lösungspunkte abgebildet, um oszillierendes bzw. asymptotisches Verhalten bei der Annäherung an einen Lösungspunkt zu erkennen. Weil zwischen den beteiligten FEM- und BEM- Solvern die Größen und Verformung und Kraft ausgetauscht werden, wurden zusätzlich die Zusammenhänge zwischen Verformung und Kraft während des Iterationsverlaufs dargestellt, um etwaige Oszillationen in der Zwischengröße "Kraft" erkennen zu können.

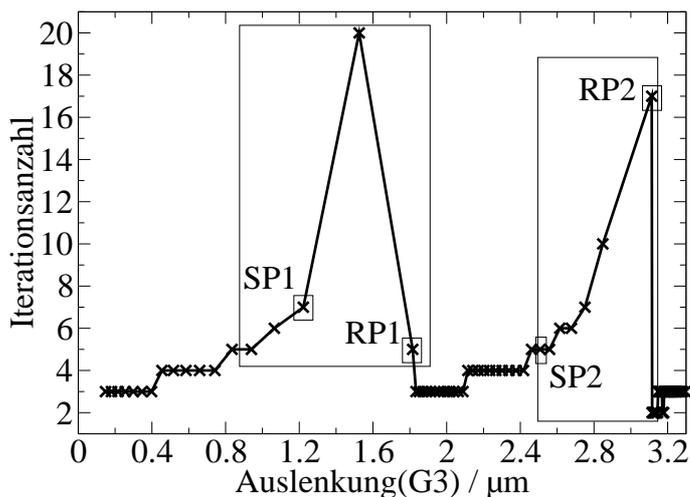


Abb. 6.15: Notwendige Iterationsanzahl zum Erreichen des Gleichgewichtspunktes über der Auslenkung im Punkt $G3$ für das Biegebalkenrelais.

In Abbildung 6.15 ist die Iterationsanzahl über der Auslenkung des Punktes $G3$ am Biegebalkenrelais angetragen. Die Snap-in-Positionen 1/2 sowie die Release-Positionen 1/2 sind eingerahmt. Man beobachtet keine erhöhte Iterationsanzahl für die Simulation der Snap-in-Position, allerdings danach ein starkes Anwachsen der Iterationsanzahl bis zur Release-Position. Dies korrespondiert mit den leicht rückläufigen (Q, x) -Kennlinienverläufen vor den Release-Positionen 1 und 2 (vgl. Abb. 7.16 und 7.37). Das Erreichen des Gleichgewichtspunktes anhand der Änderung der Ladung ist in diesem Bereich schwieriger und die Konvergenz daher langsamer.

Für die Bereiche SP1-RP1 und SP2-RP2 ist der Konvergenzverlauf, also die Werte der Zwischenlösungen und der konvergierten Lösung, für die Auslenkung im Punkt $G3$ und die elektrostatische Kraft in den Abbildungen 6.16-6.19 dargestellt. Sowohl die Auslenkung als auch die Kraft zeigen beim Biegebalkenrelais asymptotisches Verhalten des Konvergenzverlaufs.

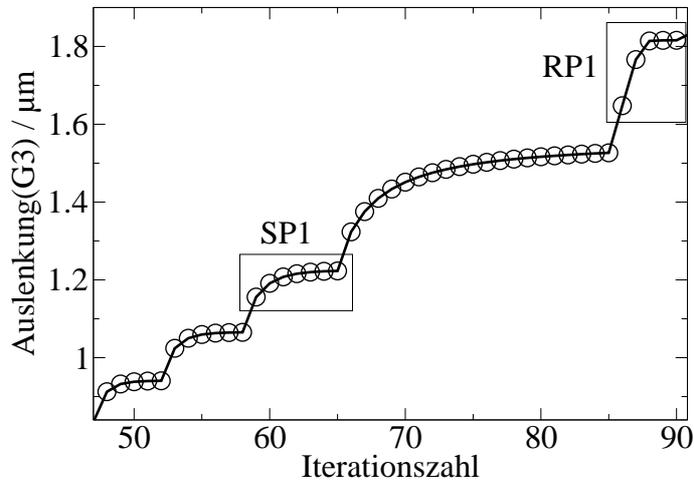


Abb. 6.16: Ausschnitt 1 (SP1/RP1): Auslenkung(G3) über Iterationszahl für das Biegebalkenrelais.

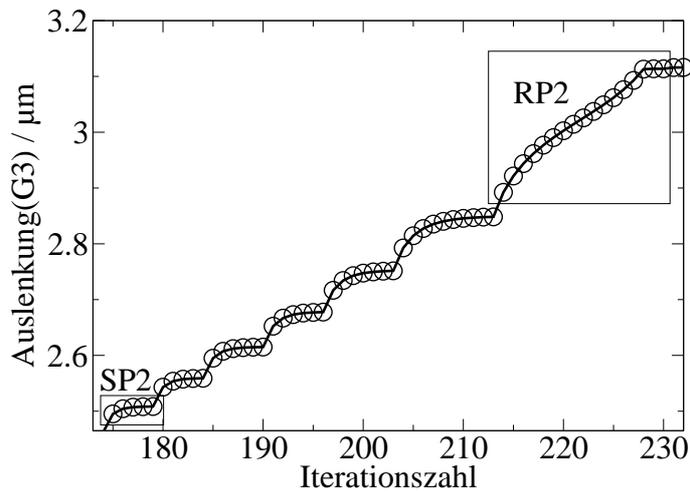


Abb. 6.17: Ausschnitt 2 (SP2/RP2): Auslenkung(G3) über Iterationszahl für das Biegebalkenrelais.

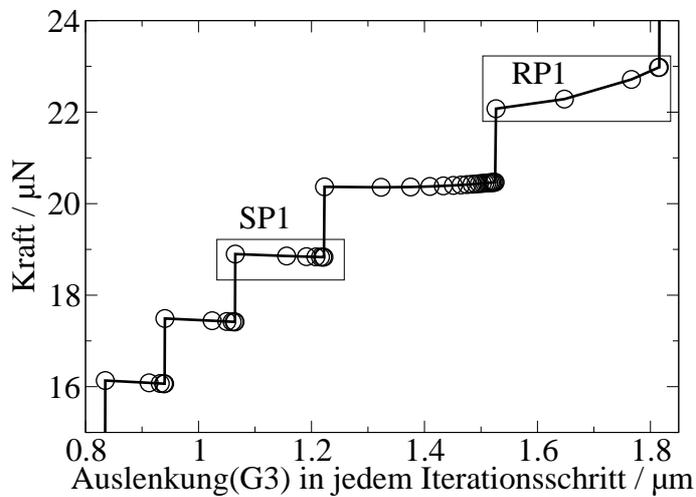


Abb. 6.18: Ausschnitt 1: Einzeliterationsauslenkung mit zugehöriger elektrostatischer Kraft für das Biegebalkenrelais.

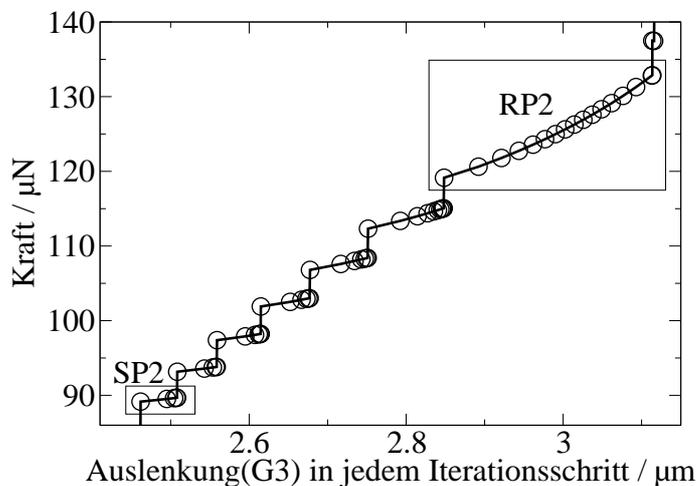


Abb. 6.19: Ausschnitt 2: Einzeliterationsauslenkung mit zugehöriger elektrostatischer Kraft für das Biegebalkenrelais.

Das Wanderkeilrelais besitzt im gesamten Betriebsbereich eine streng monoton wachsende (Q, x) -Kennlinie ohne senkrechte Anteile (sh. Abb. 7.20). Daher nimmt die Iterationsanzahl (sh. Abb. 6.20) auch an keinem Simulationspunkt so stark zu wie die Iterationsanzahl beim Biegebalkenrelais vor den RP1 und 2 (vgl. Abb. 6.15).

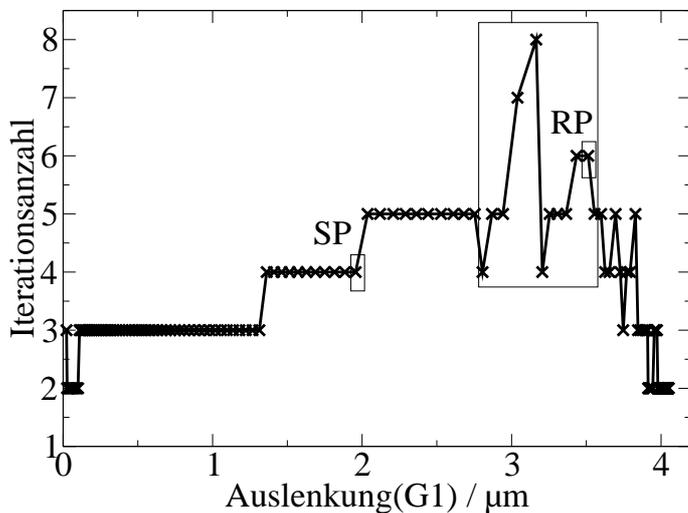


Abb. 6.20: Iterationsanzahl über Auslenkung(G1) für das Wanderkeilrelais.

Der Einzeliterationsverlauf ist genauso asymptotisch ruhig und gleichmäßig wie der des Biegebalkenrelais. Auch bei höheren Iterationsanzahlen wird der Einzeliterationsverlauf nicht unruhig.

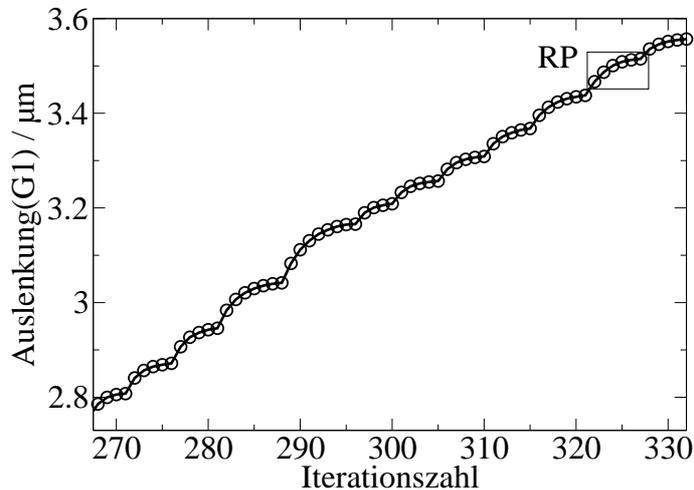


Abb. 6.21: Ausschnitt: Auslenkung über Iterationszahl für das Wanderkeilrelais.

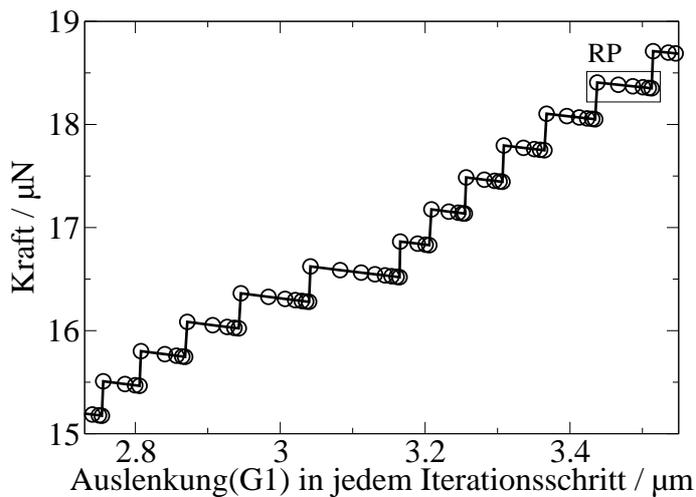


Abb. 6.22: Ausschnitt: Einzeliterationsauslenkung mit zugehöriger elektrostatischer Kraft für das Wanderkeilrelais.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Verhalten der beiden dargestellten Bauteile beispielhaft für das Verhalten aller untersuchten Bauteile ist.

Der Konvergenzverlauf ist generell asymptotisch und führt meist in wenigen Schritten zur Lösung. Auffallend viele Iterationen treten nur dort auf, wo die (Q, x) -Kennlinie sehr steil bzw. rückläufig ist. Dies ist bei ladungsgesteuerter Homotopie in der Regel vor der Release-Position der Fall. Die Snap-in-Position macht sich weder im Konvergenzverlauf noch in der Iterationsanzahl bemerkbar.

6.1.4 Genauigkeit und Robustheit

Um die Robustheit des Algorithmus zu untersuchen, wurden die (U, x) -Kennlinien des Biegebalkenrelais für zwei unterschiedliche Schrittweitemvorgaben der Ladung verglichen, nämlich für $\Delta Q_{fein} = 0,1\mu C$ und $\Delta Q_{grob} = 0,2\mu C$ (Abb. 6.23). Die gröbere Abstufung lieferte die exakt gleichen Simulationsergebnisse an den Simulationenpunkten wie die feine Abstufung, der maximale relative Fehler lag bei $\frac{\Delta U}{U} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ bzw. $\frac{\Delta x}{x} = 0,9 \cdot 10^{-3}$.

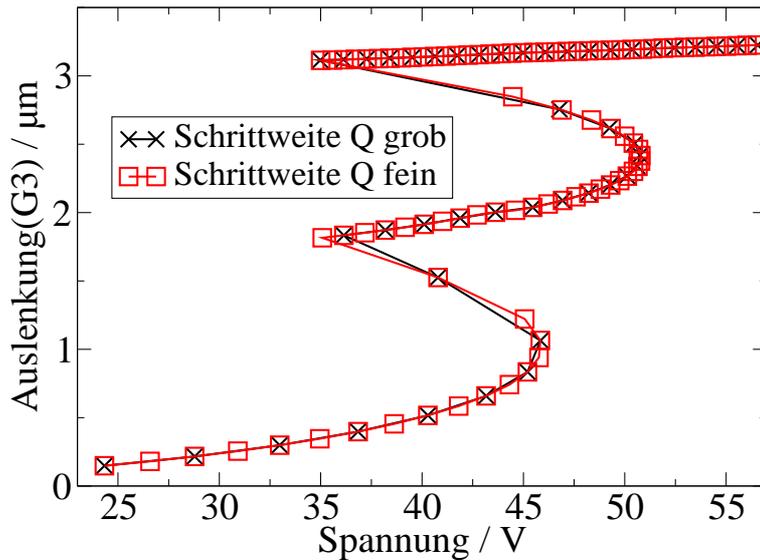


Abb. 6.23: (U, x) -Kennlinie für eine grobe und feine Ladungsdiskretisierung beim Biegebalkenrelais.

Erstaunlicherweise spiegelt sich die gröbere Diskretisierung nicht in der Iterationsanzahl wieder, sondern der geometrischen Auslenkung entsprechend ergeben sich bei den unterschiedlichen Schrittweiten fast identische Iterationsanzahlen, wie Abbildung 6.24 zeigt.

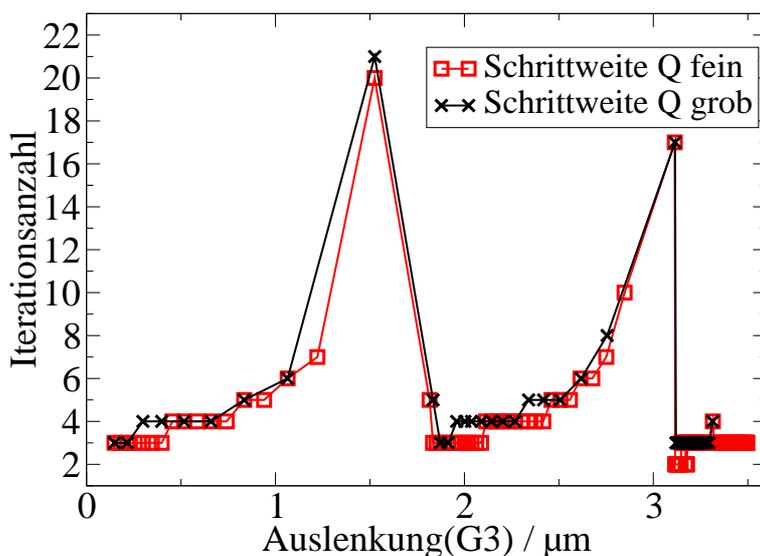


Abb. 6.24: Iterationsanzahl mit grober und feiner Schrittweite beim Biegebalkenrelais.

Dies zeigt deutlich die Robustheit des Verfahrens.

Zur Untersuchung des Konvergenzradius des Verfahrens wurde das Biegebalkenrelais mit Anfangsladungen simuliert, die Arbeitspunkten im Innern des Arbeitsbereichs entsprechen. Das weicht von der sonst verwendeten Vorgehensweise ab, bei der die Ladung von der Ruhelage aus in kleinen Schritten gesteigert wird. Abbildungen 6.25-6.28 zeigen die angesprungenen Arbeitspunkte P1, P4 und P7 und die zusätzlich berechneten Folgepunkte.

Für einen wenig ausgelenkten Zustand wurde eine Ladung entsprechend dem Punkt P1 auf der (U, x) -Kennlinie (Abb. 6.25) vorgegeben. In Punkt 4 startete der Algorithmus im stark ausgelenkten Zustand (nach RP1) und in Punkt 7 in einem bereits sehr stark ausgelenkten Zustand (nach RP2).

Die Einzeliterationsverläufe in den Abb. 6.26-6.28 zeigen keine Störung im Einzeliterationsverlauf und auch keine wesentliche Erhöhung der benötigten Iterationszahl für die ersten Simulationspunkte.

Ebenso liegen alle Simulationspunkte aus den Berechnungen mit Start bei Punkt P4 bzw. P7 exakt auf der (U, x) -Kennlinie der Simulation, bei der die Ladung von der Ruhelage aus in kleinen Schritten gesteigert wurde.

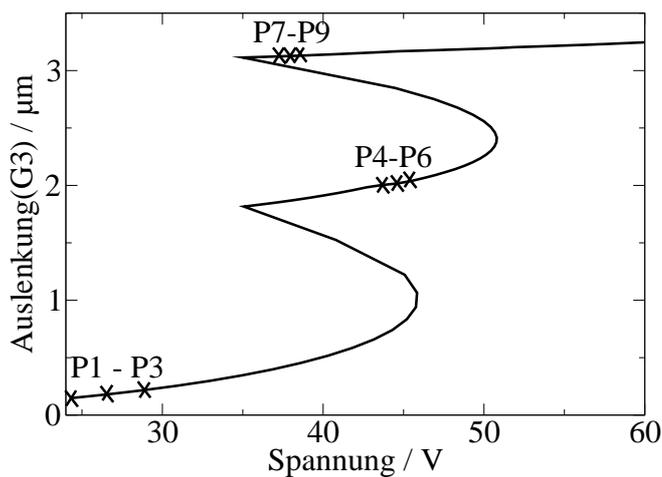


Abb. 6.25: (U, x) -Kennlinie mit markierten Anfangspunkten der Simulation (Biegebalkenrelais).

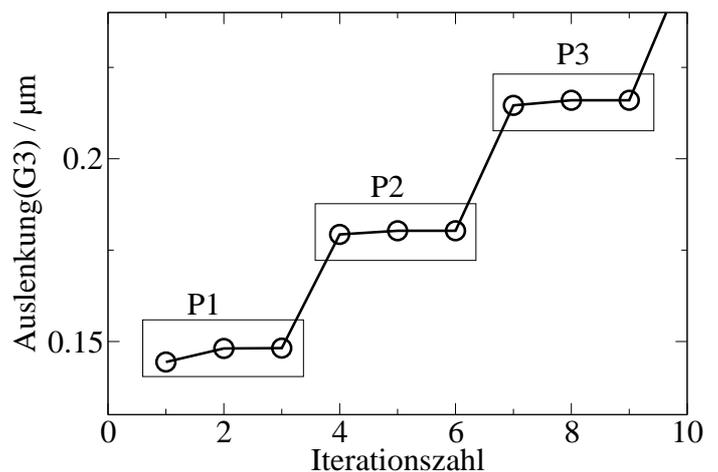


Abb. 6.26: Einschwingvorgang mit Simulationsbeginn bei P1.

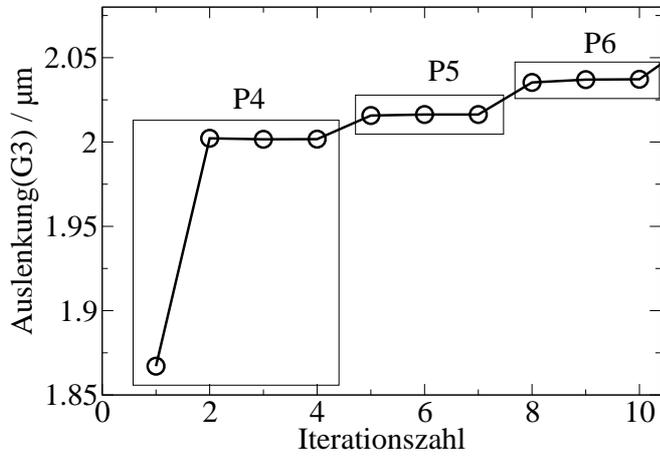


Abb. 6.27: Einschwingvorgang mit Simulationsbeginn bei P4.

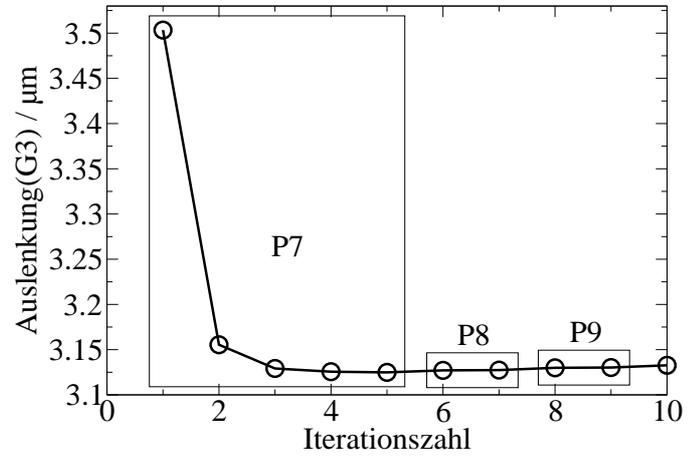


Abb. 6.28: Einschwingvorgang mit Simulationsbeginn bei P7.

Zum Konvergenzverhalten kann man abschließend sagen, daß die Q -Steuerung elektromechanische Bauteile genau und zuverlässig im gesamten Betriebsbereich simulieren kann, der Algorithmus weist ein ruhiges und zuverlässiges Konvergenzverhalten auf und besitzt einen Konvergenzradius, der den ganzen Arbeitsbereich elektromechanischer Bauteile ohne Einschränkung abdeckt, was globale Konvergenz des Algorithmus im Arbeitsbereich bedeutet.

6.2 Multiparameter-Homotopie

6.2.1 Motivation

Die wesentliche Motivation für die Entwicklung eines erweiterten Homotopieverfahrens, das durch andere Parameter als Q steuerbar ist, ist die Diskretisierungslücke, die bei der Q -Steuerung vor der Release-Position bei wichtigen Typen elektromechanisch gekoppelter Bauteile, wie z.B. der Mikromembran, auftritt und bereits in Kapitel 4.4.1 diskutiert wurde.

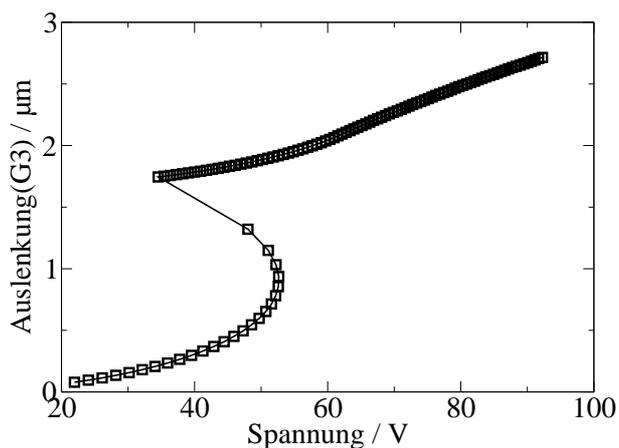


Abb. 6.29: (U, x) -Kennlinie der Membran aus Q -Steuerung.

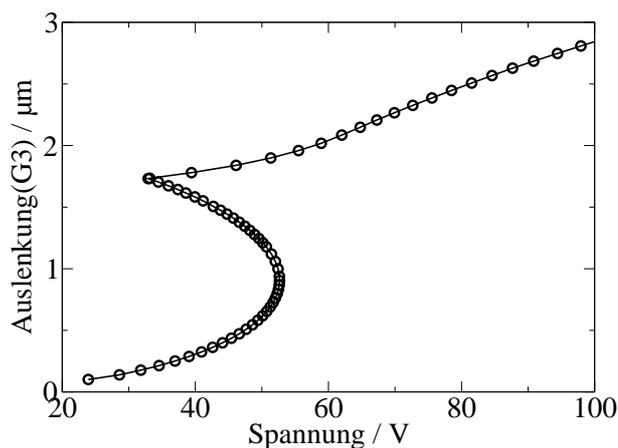


Abb. 6.30: (U, x) -Kennlinie der Membran aus Multiparameter-Steuerung.

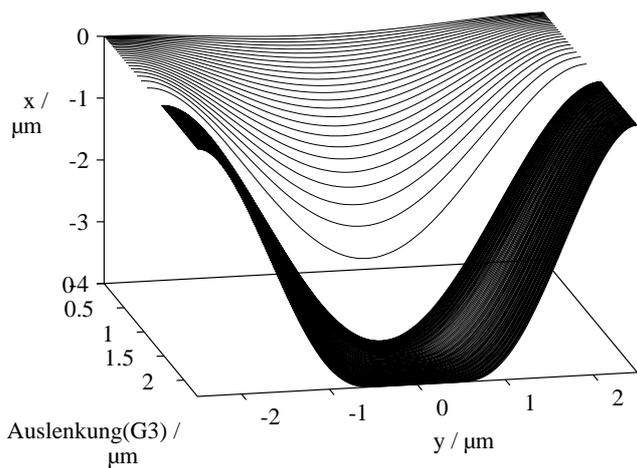


Abb. 6.31: Verformung der Mikromembran über der Auslenkung aus einer Simulation mit Q -Steuerung.

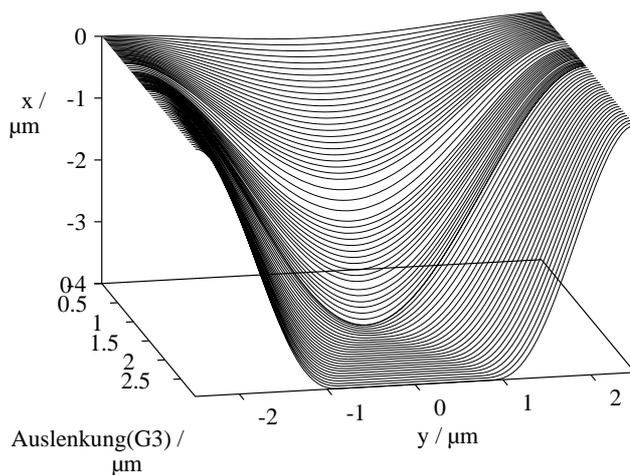


Abb. 6.32: Verformung der Mikromembran über der Auslenkung aus einer Simulation mit Multiparameter-Steuerung.

In den Abbildungen 6.29 und 6.30 ist die (U, x) -Kennlinie der Mikromembran bei Simulation mit Q -Steuerung und Multiparameter-Steuerung gezeigt. Die Quadrate bzw. Kreise bezeichnen in den Kennlinien jeweils die berechneten Simulationspunkte. Man erkennt die sehr gleichmäßige Abtastrate in der Multiparameter-Steuerung vor allem vor der Release-Position. Zum Vergleich sind in den Abbildungen 6.31 und 6.32 die Verformungsbilder über der Auslenkung für Q -Steuerung und Multiparameter-Steuerung dargestellt. Die große Lücke im Verformungsbild der Q -Steuerung verschwindet im Verformungsbild der Multiparameter-Steuerung.

Die folgenden Abschnitte dieses Kapitels sind den Eigenschaften der Multiparameter-Homotopie gewidmet. Zuerst wird im Detail demonstriert, wie der Algorithmus arbeitet, d.h. wie er im Verlauf der Homotopie zwischen den einzelnen Parametern umschaltet. Danach wird an Steuerungen, die nur einen einzigen Parameter zulassen, das prinzipielle Steuerverhalten der einzelnen Parameter verglichen. Der der Multiparameter-Homotopie zugrunde liegende Algorithmus wird auf Robustheit, Konvergenz und Genauigkeit untersucht.

6.2.2 Verhalten des Verfahrens

6.2.2.1 Schaltverhalten

Die Umschaltung zwischen den einzelnen Parametern im Verlauf der Homotopie wird an vier Beispiel-Bauteilen gezeigt, nämlich an der Mikromembran (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.11), am Balken (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.12), am Biegebalkenrelais (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.13) und am Wanderkeilrelais (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.14). Die ersten beiden Beispiele wurden mit einer Multiparameter-Homotopie berechnet, bei der drei unterschiedliche geometrische Positionen $G1$, $G2$ und $G3$ als Steuerparameter ausgewählt werden konnten, deren Lage den Verformungsbildern der Mikromembran (Abb. 6.34) und des Balkens (Abb. 6.37) zu entnehmen sind. Bei der Simulation von Biegebalkenrelais und Wanderkeilrelais wurden neben $G1$, $G2$ und $G3$ (Lage sh. Abb. 6.40 und 6.43) auch die Ladung Q , die elektrostatische Kraft F und die Kapazität C als Steuerparameter zugelassen.

Abbildung 6.33 zeigt die (U, x) -Kennlinie der Membran mit Angabe der Simulationspunkte und der Bereiche, die von den einzelnen Parametern gesteuert wurden. Entsprechend ist der Sensitivitätsquotient der drei möglichen Parameter über der Auslenkung in Abbildung 6.35 angetragen, in der man das Schaltverhalten sehr gut verfolgen kann. Zur Orientierung sind zusätzlich die Snap-in- und Release-Position am oberen Rand und die Bereiche der steuernden Parameter am unteren Rand angegeben. In der Simulation wurde für den Betrag des Sensitivitätsquotienten ein Intervall von $[0.2, 7]$ erlaubt. Liegt der Sensitivitätsquotient außerhalb dieses Intervalls, so wird der Parameter ausgewählt, der dem Wert 1 am nächsten ist.

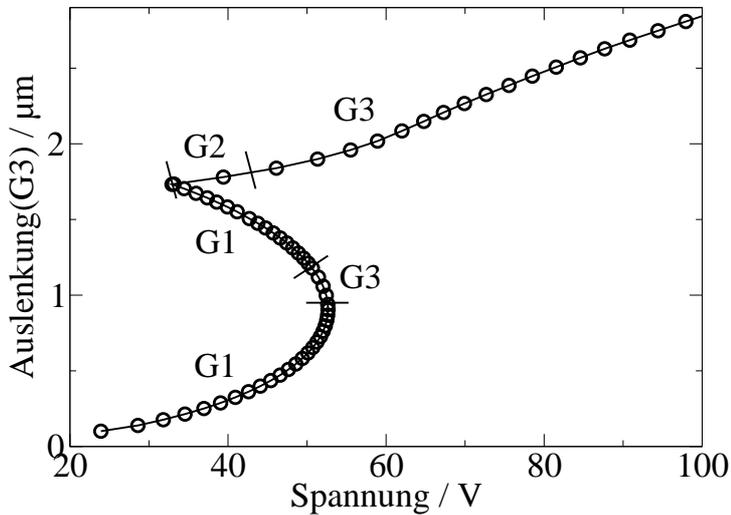


Abb. 6.33: (U, x) -Kennlinie der Membran aus Multiparameter-Steuerung mit Angabe der aktiven Parameter.

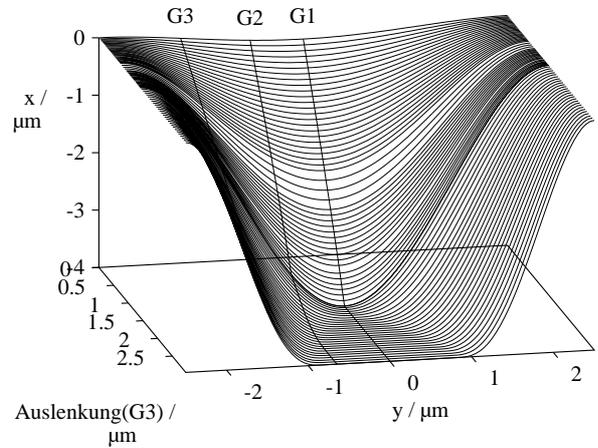


Abb. 6.34: Verformung der Mikromembran über der Auslenkung mit Angabe des Verlaufs der Positionen $G1$, $G2$ und $G3$.

Als erstes kann man der (U, x) -Kennlinie entnehmen, daß es zwei Hauptschaltbereiche gibt, wo die Steuerparameter wechseln, nämlich der Bereich um die Snap-in-Position und der Bereich um die Release-Position. Als nächstes kann man in der Graphik der Sensitivitätsquotienten über der Auslenkung beobachten, daß an der Snap-in-Position ein Vorzeichenwechsel des Sensitivitätsquotienten stattfindet.

Nicht nur bei der Membran, sondern bei jedem Bauteil gilt, daß bei jeder Spannungsumkehr, d.h. bei jeder Snap-in- und Release-Position, der Sensitivitätsquotient sein Vorzeichen wechselt. So kann man sofort an einer Vorzeichenänderung im Sensitivitätsquotienten erkennen, ob eine Spannungsumkehr stattgefunden hat. Zur Schaltung ist allerdings nur der absolute Wert des Sensitivitätsquotienten notwendig.

An der Snap-in-Position wächst der Sensitivitätsquotient bei allen Parametern sehr stark an, da wegen der senkrechten Tangente der (U, x) -Kennlinie sehr kleine Spannungsänderungen im Nenner des Sensitivitätsquotienten auftreten. An den Release-Positionen treten nur Vorzeichenwechsel des Sensitivitätsquotienten auf, aber keine stark anwachsenden Werte.

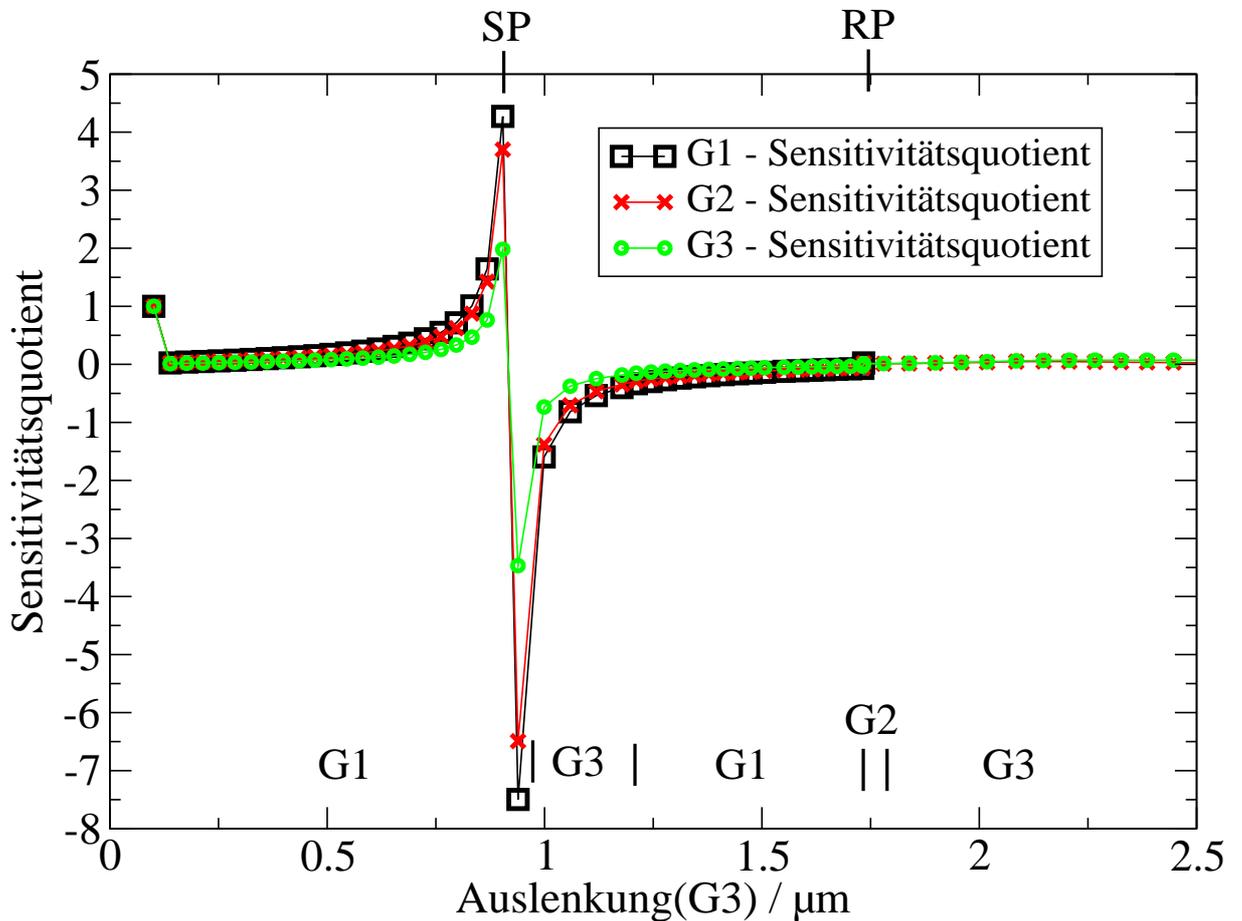


Abb. 6.35: Verlauf der Sensitivitätsquotienten für $G1$, $G2$ und $G3$ über der Auslenkung für eine Multiparameter-Simulation der Mikromembran.

Der Parameter $G1$, der genau in der Mitte der Membran gewählt wurde, ist der sensitivste. Er ändert sich bei einer Formänderung am meisten und zeigt entsprechend auch den größten betragsmäßigen Sensitivitätsquotienten. Je weiter die Parameter am Rand der Membran liegen, desto geringer ist ihre Sensitivität. Aus dieser Beobachtung kann die Parameterschaltung sehr leicht verstanden werden. Mit Parameter $G1$ startet die Simulation. An der Snap-in-Position, wo der Sensitivitätsquotient stark anwächst, wird in den wesentlich weniger sensitiven Parameter $G3$ umgeschaltet. Dieser nimmt allerdings sehr schnell ab, fällt aus dem erlaubten Sensitivitätsintervall, und als geeignetster Parameter wird wieder $G1$ gewählt. Ist die Release-Position erreicht, kann mit $G1$ nicht mehr weitergeschaltet werden, da die Membran an der Stelle $G1$ Kontakt mit der Gegenelektrode hat. Nach einem kurzen Wechsel in $G2$ steuert der Parameter $G3$ das Anschmiegen der Membran, so lange, bis auch $G3$ auf die Gegenelektrode trifft.

Der Balken ist das zweite Beispiel für eine Simulation mit Multiparameter-Homotopie. In Abbildung 6.36 ist wieder die (U, x) -Kennlinie mit Angabe der Simulationspunkte und der Schaltbereiche der drei möglichen Steuerparameter $G1$, $G2$ und $G3$ dargestellt. $G1$ ist wieder der sensitivste Parameter, er befindet sich an der Balkenspitze. Für $G2$ und $G3$ nimmt die Sensitivität ab, da sie näher zur Einspannung am Balkenende liegen (Abb. 6.37). Im Verlauf der Sensitivitätsquotienten (Abb. 6.38) zeigen sich wie bei der Membran an den beiden Snap-in-Positionen zwei große Sprünge. Parameterwechsel finden im Bereich der SP1/2 und der RP1/2 statt.

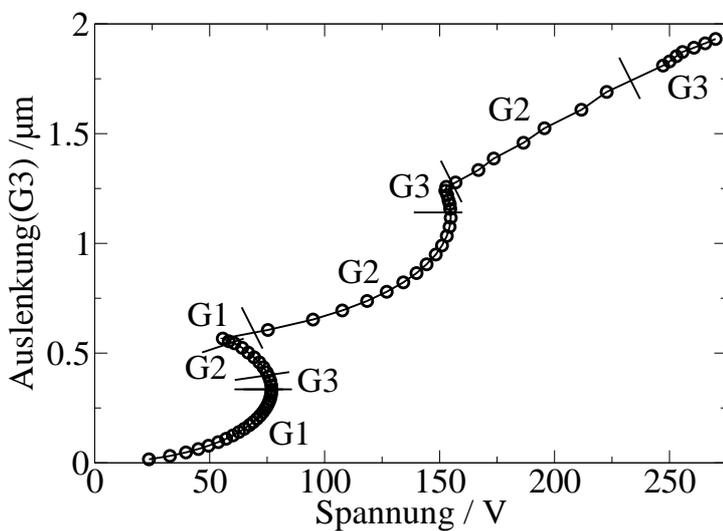


Abb. 6.36: (U, x) -Kennlinie des Balkens aus Multiparameter-Steuerung mit Angabe der aktiven Parameter.

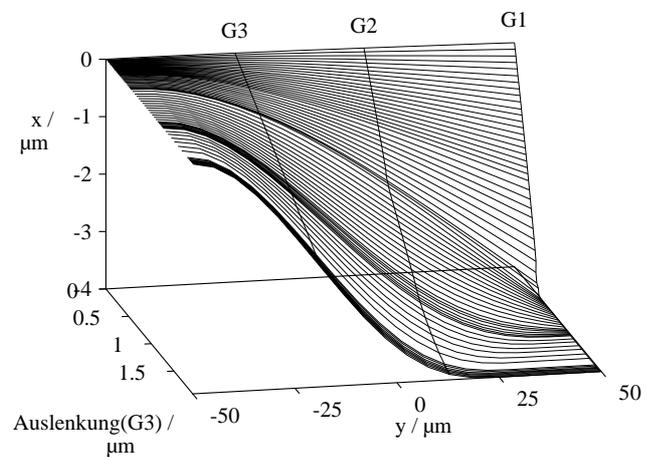


Abb. 6.37: Verformung des Balkens über der Auslenkung mit Angabe des Verlaufs der Positionen $G1$, $G2$ und $G3$.

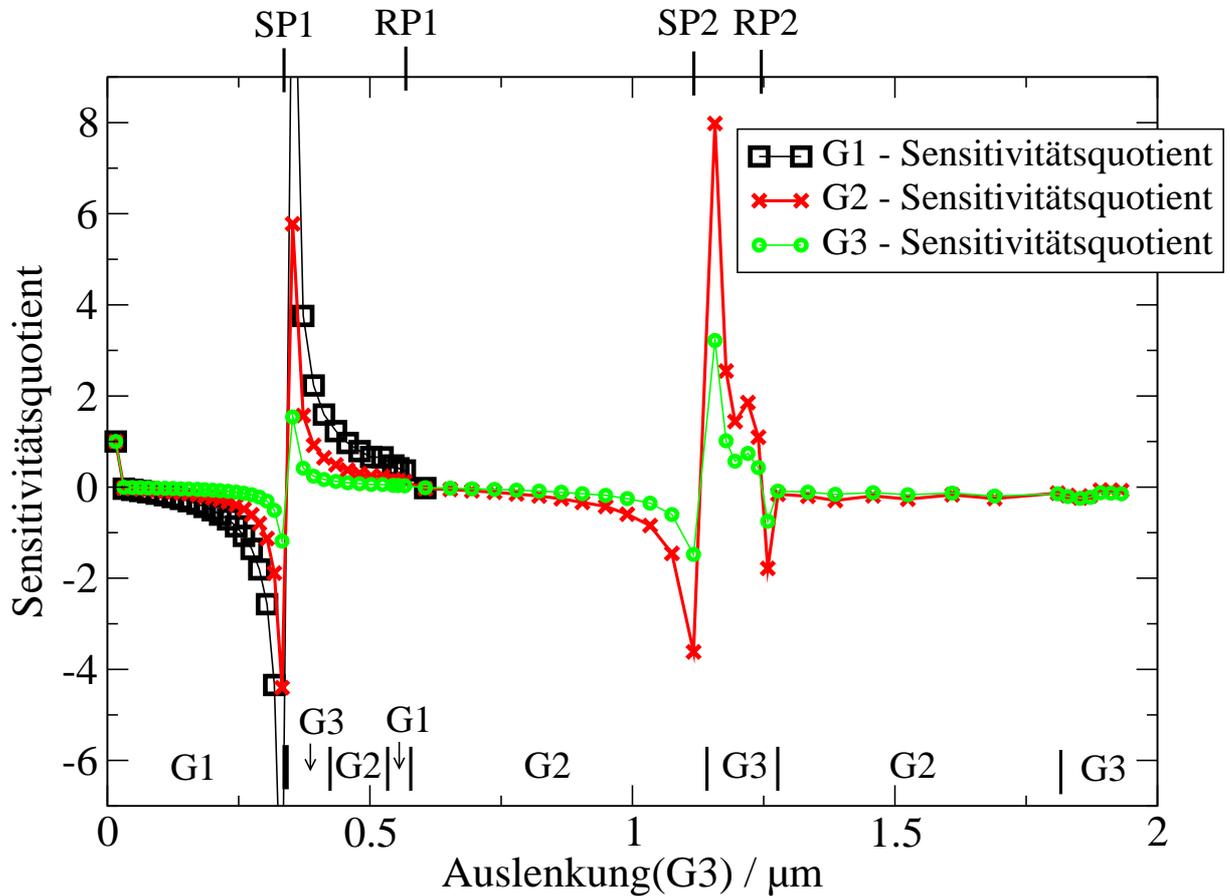


Abb. 6.38: Verlauf der Sensitivitätsquotienten für $G1$, $G2$ und $G3$ über der Auslenkung für eine Multiparameter-Simulation des Balkens.

Die Schaltung beginnt wieder mit dem Parameter $G1$, der ähnlich wie im vorigen Beispiel an der Snap-in-Position in den am wenigsten sensitiven Parameter $G3$ umschaltet. Dieser wird wieder sehr schnell klein und es findet diesmal ein Wechsel in $G2$ statt. Sobald $G2$ auch zu klein wird und aus dem erlaubten Sensitivitätsintervall herausfällt, hat nur noch $G1$ einen akzeptablen Wert. Bei Erreichen der Release-Position 1 muß $G1$ die Steuerung abgeben, da dieser Punkt Kontakt erreicht hat. Die weitere Steuerung findet nur noch zwischen $G2$ und $G3$ statt. Der Parameter $G2$ zeigt jetzt das sensitivste Verhalten, nachdem $G1$ nicht mehr zur Auswahl steht.

Die nächsten beiden Beispiele, das Biegebalkenrelais (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.13) und das Wanderkeilrelais (vgl. Q -Steuerung Abb. 6.14), wurden mit einer Multiparameter-Homotopie berechnet, bei der aus 6 verschiedenen Steuerparametern ausgewählt werden konnte:

- Die drei Geometriepositionen $G1$, $G2$ und $G3$, deren Ort aus den Verformungsbildern 6.40 und 6.43 entnommen werden kann und die so auf dem Bauteil ausgewählt wurden, daß die Sensitivität von $G1$ nach $G3$ abnimmt.
- Die Kapazität C der Anordnung.
- Die Gesamtladung Q auf dem beweglichen Teil des Bauelements.
- Die elektrostatische Kraft F .

Dabei ist zu bemerken, daß Q und F den Algorithmus der Q -Steuerung verwenden und die anderen Parameter mit dem verallgemeinerten Algorithmus arbeiten.

In Abb. 6.39 ist die (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais aus einer Simulation mit der Multiparameter-Homotopie dargestellt. Die Kreise markieren die Simulationspunkte, die Striche kennzeichnen eine Parameterumschaltung.

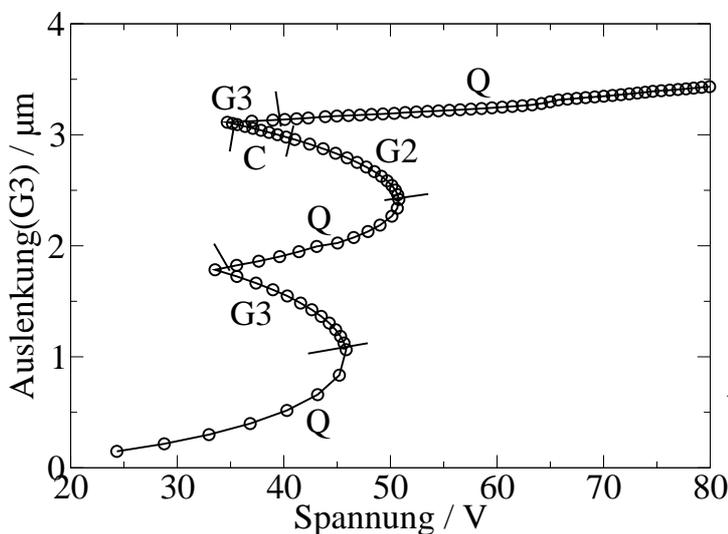


Abb. 6.39: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais aus Multiparameter-Steuerung mit Angabe der aktiven Parameter.

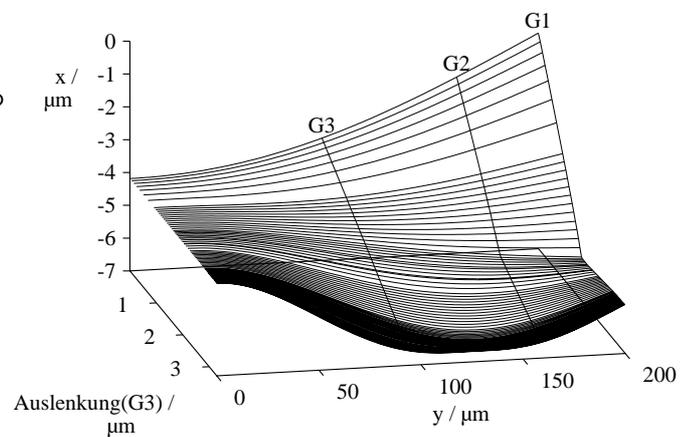


Abb. 6.40: Verformung des Biegebalkenrelais über der Auslenkung mit Angabe des Verlaufs der Positionen $G1$, $G2$ und $G3$.

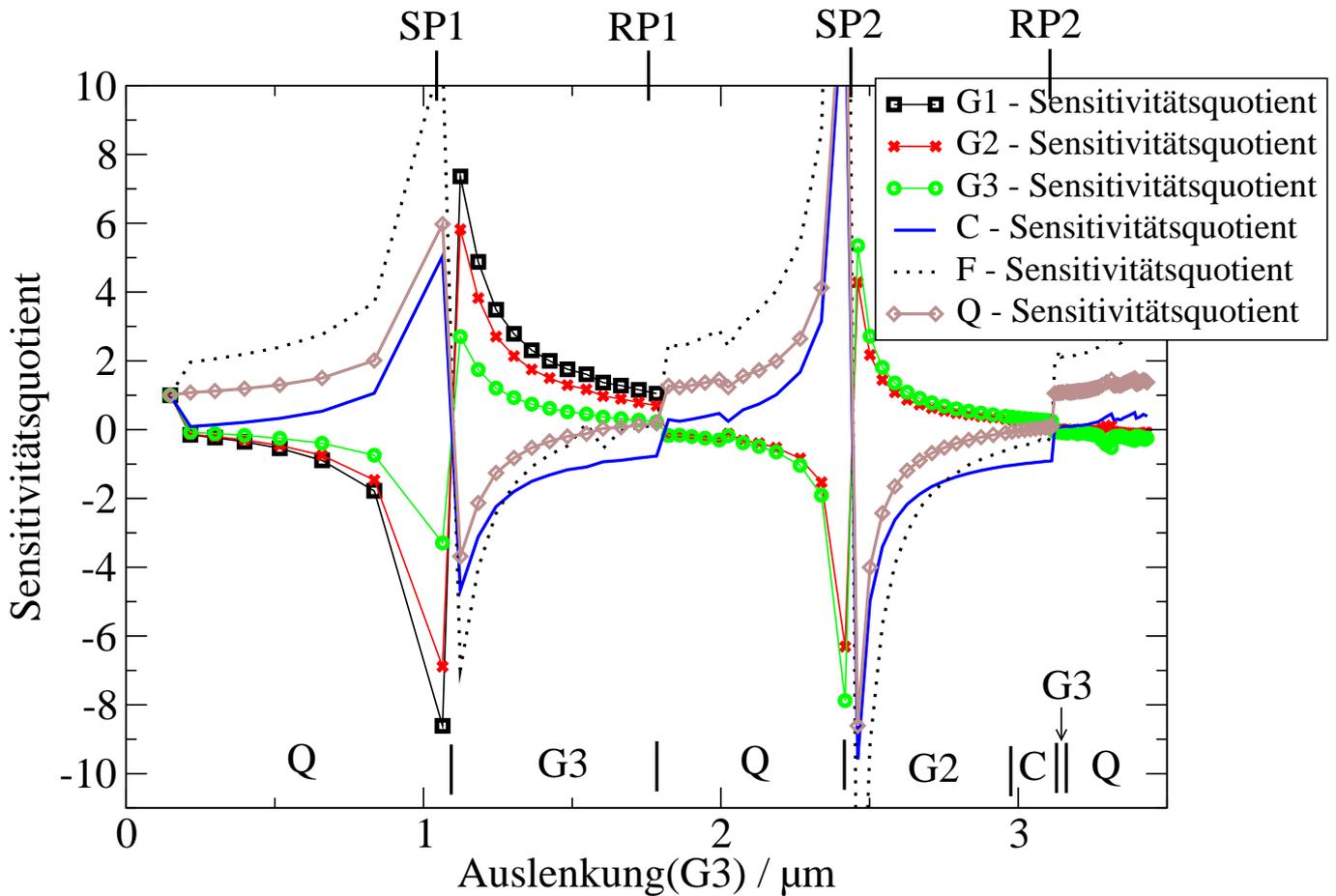


Abb. 6.41: Verlauf der Sensitivitätsquotienten für $G1$, $G2$, $G3$, Q , F und C über der Auslenkung für eine Multiparameter-Simulation des Biegebalkenrelais.

In Abbildung 6.41 sind die Sensitivitätsquotienten der sechs möglichen Steuerparameter über der Auslenkung angetragen. Dabei fällt auf, daß die Geometrieparameter $G1$, $G2$ und $G3$ mit einem negativen Sensitivitätsquotienten beginnen, weil sich das Relais in negativer y -Richtung bewegt. Die übrigen drei Parameter beginnen mit einem positiven Sensitivitätsquotienten. Das eigentliche Vorzeichen ist nicht relevant, da zur Umschaltung nur der Betrag des Sensitivitätsquotienten verwendet wird. Relevant ist nur ein Vorzeichenwechsel, er kennzeichnet, wie bereits erwähnt, die Snap-in- und Release-Positionen. Hauptschaltbereiche für den Algorithmus sind wieder die Snap-in-Positionen und Release-Positionen, da dort der Sensitivitätsquotient entweder sehr groß oder sehr klein wird.

Die Simulation wurde mit dem Parameter Q begonnen. Das erlaubte Intervall für den Sensitivitätsquotienten war diesmal $[0.3, 5]$. An der Snap-in-Position 1 wird in $G3$ umgeschaltet und an der Release-Position 1 wieder zurück in Q .

Vergleicht man den Verlauf der Sensitivitätsquotienten, so wird ersichtlich, daß alle Sensitivitätsquotienten mit dem Wert 1 beginnen. Dies ist klar, da der erste Schritt in der Simulation noch keine Rückwärtsinformation bietet. Danach springen alle Sensitivitätsquotienten der Geometrie und der Kapazität auf einen Wert nahe Null, aus dem sie langsam bis kurz vor Erreichen der SP1 betragsmäßig auf den Wert 1 ansteigen. Der Sensitivitätsquotient der elektrostatischen Kraft F springt sofort auf den Wert 2, steigt bis zur SP an und hat fast überall die höchste Sensitivität. Nur der Parameter Q behält den optimalen Wert 1 und hat bis kurz vor der SP1 die optimale Diskretisierung des Arbeitsbereiches, ebenso wie nach den RP1 und 2.

Nach der RP1 vertauschen sich die Sensitivitätsverhältnisse von $G2$ und $G3$, Q wird der aktive Parameter, bis an der SP2 wieder in $G2$ umgeschaltet wird. Zu beachten ist, daß der Parameter $G1$ nur bis zur RP1 verwendet werden kann, bis dahin aber nie ein optimaler Parameter an den Schaltpunkten war und so nie verwendet wurde. Das gleiche gilt für den Parameter F , der nie als Steuerparameter gewählt wurde. Vergleicht man die Sensitivitätsquotienten von Q und F , so stellt man einen ähnlichen qualitativen Verlauf fest. Fast überall, wo Q ein guter Steuerparameter ist, gilt das auch für F . Da der Sensitivitätsquotient für Q aber grundsätzlich näher am optimalen Wert 1 liegt als der Sensitivitätsquotient für F , fällt in der Steuerung an Schaltpunkten wie RP1 und RP2 die Wahl immer auf Q .

Nach der sehr detaillierten Diskussion des Verlaufs der Sensitivitätsquotienten der 6 Steuerparameter $G1$, $G2$, $G3$, C , Q und F kann das für alle Bauteile typische Schaltverhalten wie folgt zusammengefaßt werden:

$$Q(F) \xrightarrow{SP} G(C) \xrightarrow{RP} Q \quad (6.1)$$

Die Ladung Q (am Anfang einer Simulation alternativ die Kraft F) tastet am günstigsten bis zur SP ab, danach wird ein Geometrieparameter gewählt (zu beachten ist, daß die Kapazität einen integralen Geometrieparameter darstellt). Bei Erreichen der RP schaltet die Simulation wieder zurück auf Q als optimalen Parameter.

Die drei vorherigen Beispiele zeigen mit der Multiparameter-Homotopie eine durchweg bessere Abtastung als mit der Q -Homotopie. Dies ist nicht der Fall beim nachfolgenden letzten Beispiel, dem Wanderkeilrelais, das bereits bei der Q -Steuerung eine optimale Abtastung zeigt. Daher ist die Anwendung einer Multiparameter-Steuerung für dieses Beispiel nicht notwendig. Sie soll an dieser Stelle trotzdem gezeigt werden, da im Gegensatz zu allen vorherigen Beispielen keine ausgeprägten SP und RP beim Wanderkeilrelais existieren und sich ein qualitativ anderes Bild für den Verlauf der Sensitivitätsquotienten ergibt. Die bisher gezogenen Schlüsse und Ergebnisse lassen sich aber auch auf diese Simulation genau übertragen.

Abbildung 6.42 zeigt wieder die (U, x) -Kennlinie mit den durch Kreise gekennzeichneten Simulationen und den Bereichen der aktiven Parameter. Parameterumschaltungen finden wie bisher im Bereich der SP und RP statt. Im Verformungsbild 6.43 sind die Positionen $G1$, $G2$ und $G3$ eingezeichnet. Diesmal hat zuerst die geometrische Position $G3$ Kontakt, gefolgt von der Position $G2$. Nur mit dem Parameter $G1$ kann der gesamte Betriebsbereich des Bauteils gesteuert werden.

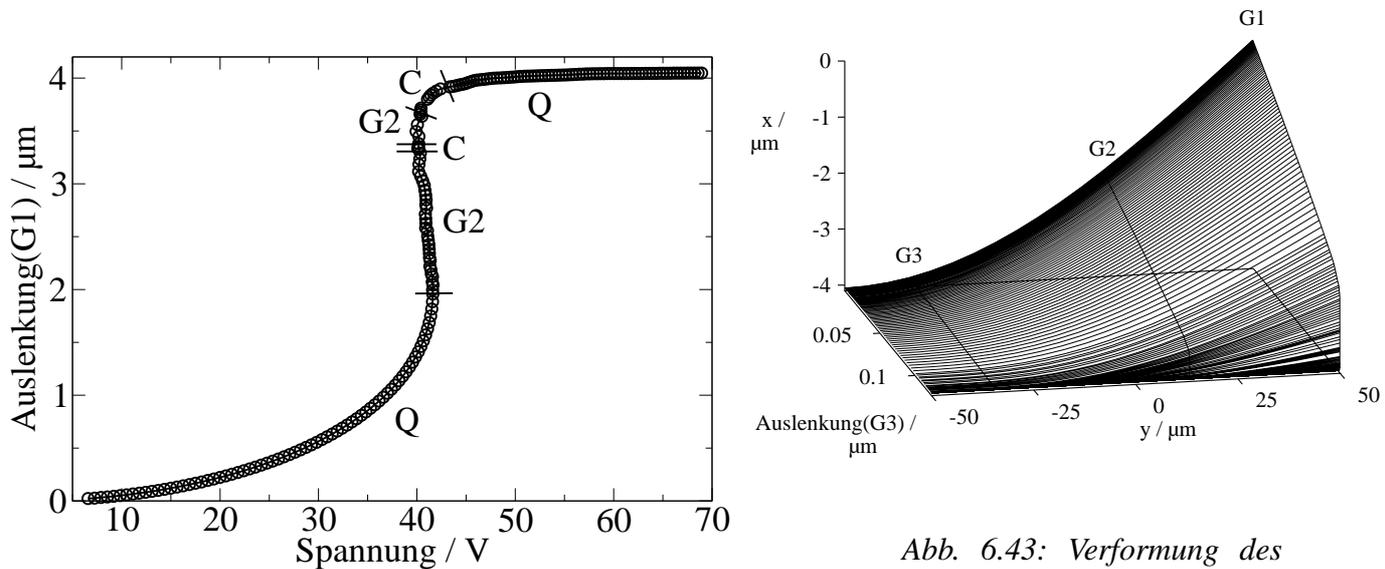


Abb. 6.42: (U, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais aus Multiparameter-Steuerung mit Angabe der aktiven Parameter.

Abb. 6.43: Verformung des Wanderkeilrelais über der Auslenkung mit Angabe des Verlaufs der Positionen $G1$, $G2$ und $G3$.

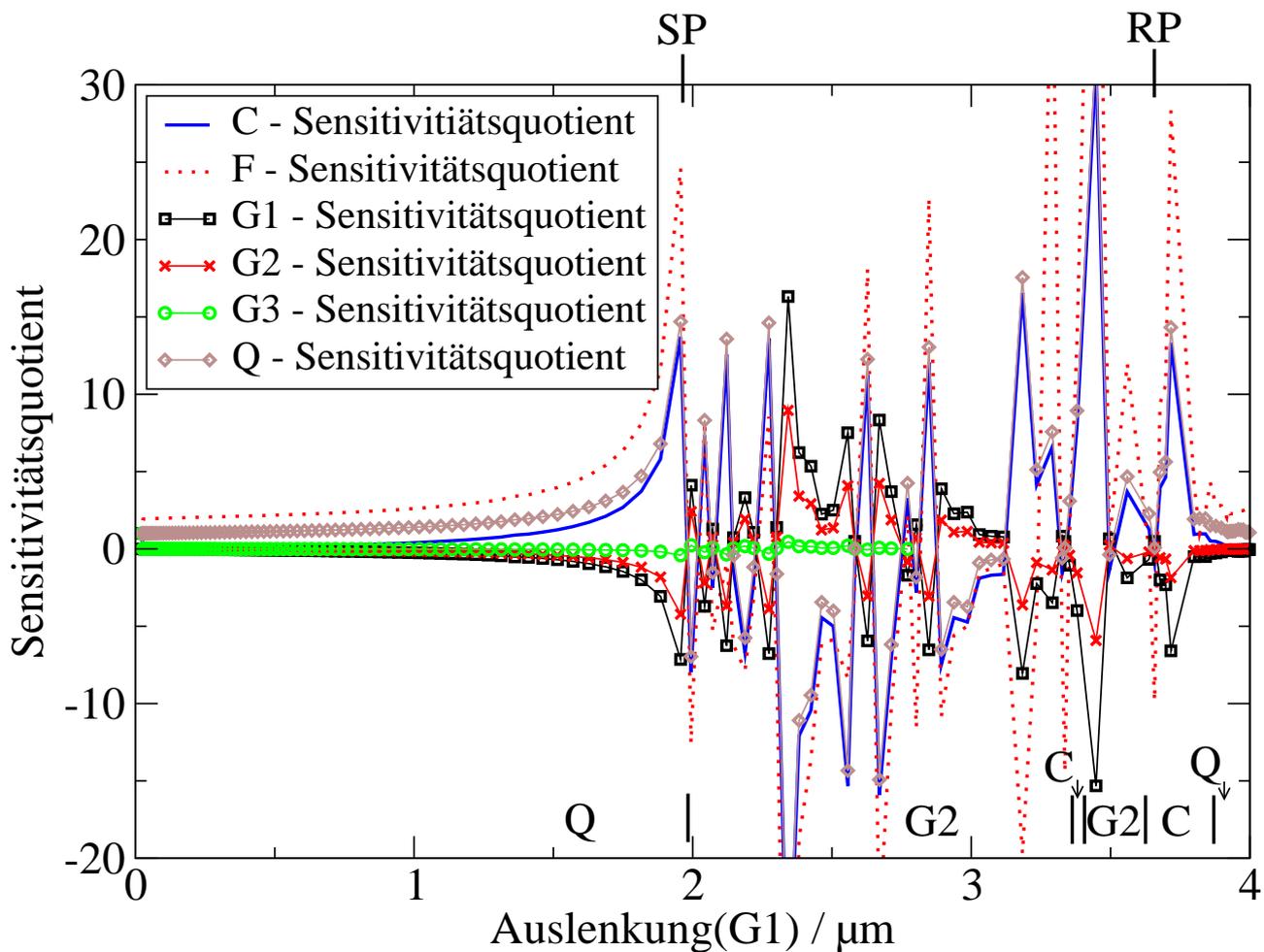


Abb. 6.44: Verlauf der Sensitivitätsquotienten für $G1$, $G2$, $G3$, Q , F und C über der Auslenkung für eine Multiparameter-Simulation des Wanderkeilrelais.

Die Abbildung 6.44 zeigt die Sensitivitätsquotienten der sechs möglichen Steuerparameter über der Auslenkung. Bis zur SP kann man wie auch beim Biegebalkenrelais die typischen Werte für die einzelnen Sensitivitätsquotienten beobachten. Der Sensitivitätsquotient der Ladung startet bei 1 und erhöht sich langsam zur SP hin, ebenso wie der Sensitivitätsquotient der elektrischen Kraft F , nur mit dem Wert 2. Die Sensitivitätsquotienten der geometrischen Positionen inklusive der Kapazität beginnen bei Werten sehr nahe der 0. Nach der RP ist der Wert des Sensitivitätsquotienten der Ladung wieder nahe dem optimalen Wert 1. Trotz der starken Änderungen in den Sensitivitätsquotienten zwischen der SP und RP zeigt sich wieder das globale Schaltverhalten, charakterisiert durch die Folge $Q \rightarrow G(C) \rightarrow Q$, wobei der erste Pfeil den Übergang an der SP angibt und der zweite den Übergang an der RP.

Nach der sehr detaillierten Diskussion des Schaltverhaltens der Sensitivitätsquotienten an unterschiedlichen Beispielen sollen abschließend folgende Punkte bemerkt werden:

- Wie bereits mehrfach hervorgehoben, tritt bevorzugt die Schaltreihenfolge Ladung - Geometrie - Ladung auf, wobei die Umschaltung jeweils in SP und RP geschieht, bei mehreren SP/RP auch mehrfach.

- Das erlaubte Intervall des Sensitivitätsquotienten war eher groß gewählt. Das hat den Vorteil, daß unnötige Parameterwechsel vermieden werden.
- Der Sensitivitätsquotient kann nicht nur zur Steuerung verwendet werden, sondern z.B. auch als Indikator für eine SP/RP.

6.2.2.2 Das Steuerverhalten einzelner Parameter im Vergleich

Am Beispiel des Biegebalkenrelais werden exemplarisch die Steuerverhalten der Parameter geometrische Position $G3$, Ladung Q , elektrostatische Kraft F und Kapazität C diskutiert.

a) Die Ladung Q und die elektrostatische Kraft F

Da die Ladung Q und die Kraft F beide mit dem Algorithmus der Q -Steuerung arbeiten und in der Steuerung ein ähnliches Verhalten zeigen, sollen sie deshalb gemeinsam diskutiert werden.

Das bereits gezeigte Verhalten der Q -Steuerung, nämlich die ungenügende Abtastung vor der RP, findet man abgeschwächt auch bei der F -Steuerung. Die Abbildungen 6.45 und 6.46 zeigen eine (U, x) -Kennlinie mit eingezeichneten Simulationen jeweils für eine Q -Steuerung mit konstantem Inkrement für Q (bis zur Spannung von 62V) und eine F -Steuerung mit konstantem Inkrement für F (bis zur Spannung 48V).

Vor der zweiten RP kann die Kennlinie mit F feiner diskretisiert werden als mit Q . Hier ist die (F, x) -Kennlinie allerdings fast senkrecht, denn um die SP2 und nach der RP2 wird die Abtastung sehr fein. Der Einsatz einer Schrittweitensteuerung wird hier notwendig, um akzeptable Rechenzeiten zu erhalten. Vor der ersten RP tritt beim Parameter F wie der schon aus der Q -Steuerung bekannte charakteristische Sprung auf, bedingt durch leicht rückläufiges Verhalten von F .

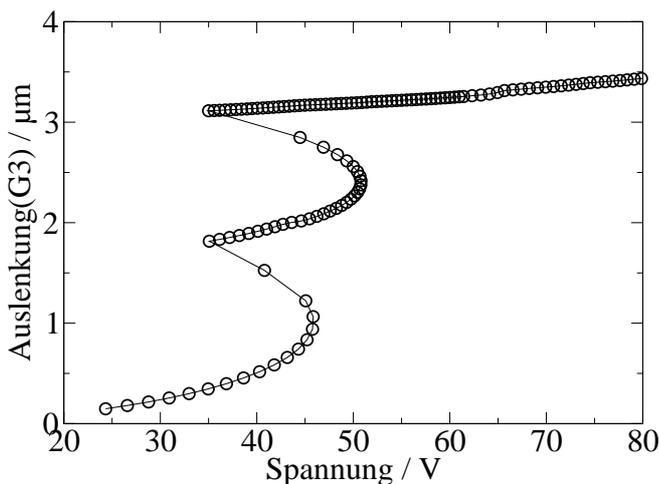


Abb. 6.45: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais mit Angabe der Simulationenpunkte aus einer Simulation mit Q -Steuerung.

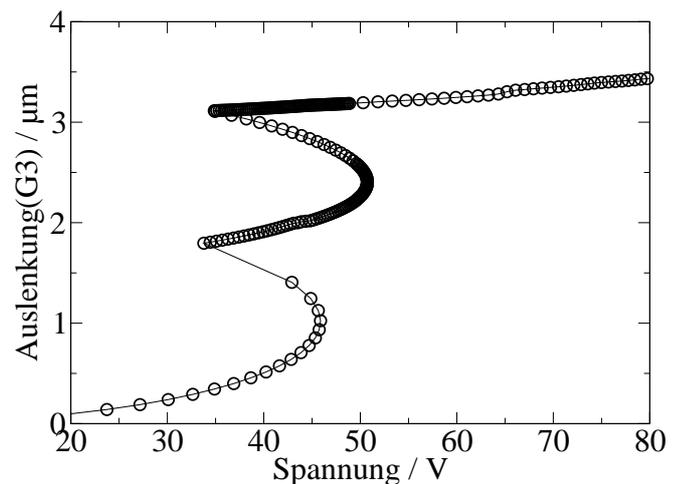


Abb. 6.46: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais mit Angabe der Simulationenpunkte aus einer Simulation mit F -Steuerung.

b) Die Kapazität C

Abbildung 6.47 zeigt die (U, x) -Kennlinie nach Berechnung mit einer C -Steuerung. In der Nähe der beiden SP verfeinert sich die Diskretisierung stark und normalisiert sich erst kurz vor Erreichen der RP wieder. Ein alleiniges Verwenden der C -Steuerung ist nur mit einer zusätzlichen Schrittweitensteuerung sinnvoll.

c) Die geometrische Position $G3$

Für die geometrische Steuerung mit der Position eines Oberflächenpunktes wurde $G3$ (vgl. Position in Abb. 6.40) gewählt. Dieser Punkt kontaktiert die Gegenelektrode als letzter und ist deswegen zur Steuerung im gesamten Arbeitsbereich geeignet.

Natürlich zeigt die (U, x) -Kennlinie (Abb. 6.48) mit Geometriesteuerung die gleichmäßigste Abtastung auf der Ordinate.

Ergänzt man die Geometriehomotopie mit der Q -Steuerung (für den Bereich zwischen RP und SP), so kann man die (U, x) -Kennlinie sehr effektiv abrastern und erhält sehr genaue Werte für RP und SP.

Die Gegenüberstellung der Einzelparameter hat gezeigt, daß das in der Multiparameter-Homotopie typische Schaltverhalten, nämlich der Wechsel der Parameter von Q auf die Geometrie und zurück auf Q bei der SP bzw. RP im Hinblick auf Diskretisierung und Genauigkeit tatsächlich die optimale Kombination von Steuerung darstellt.

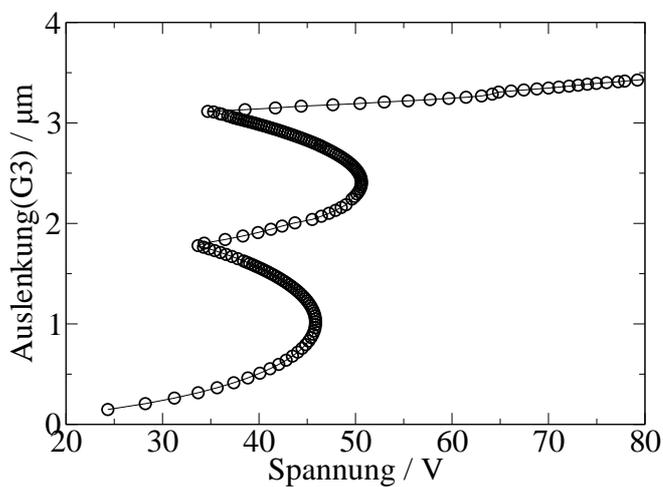


Abb. 6.47: (U, x) -Kennlinie des Biegebal-
kenrelais mit Angabe der Simulationenpunkte
aus einer Simulation mit C -Steuerung.

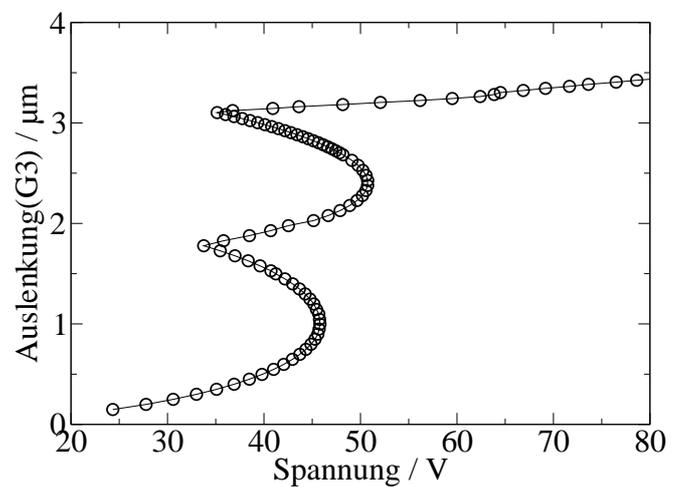


Abb. 6.48: (U, x) -Kennlinie des Biegebal-
kenrelais mit Angabe der Simulationenpunkte
aus einer Simulation mit $G3$ -Steuerung.

6.2.3 Eigenschaften des Verfahrens

6.2.3.1 Robustheit und Konvergenzverhalten

Um die Robustheit der Multiparameter-Homotopie zu untersuchen, wurde exemplarisch am Beispiel der Mikromembran die Simulation mit einer $G3$ -Homotopie durchgeführt mit jeweils drei unterschiedlichen Inkrementen, nämlich $\Delta G3 = 0,03\mu m$, $0,12\mu m$ und $0,24\mu m$. Vergleicht man die (U, x) -Kennlinien (Abb. 6.49), die sich aus den Simulationen mit den unterschiedlichen Inkrementen ergeben, so liegen die Simulationenpunkte der größeren Diskretisierungen exakt auf der Kennlinie der feinsten Diskretisierung. Zu beachten ist, daß bei der größeren Diskretisierung keine genaue Abtastung der Release-Position mehr erfolgt. Bei der mittleren Diskretisierung mit $\Delta G3 = 0,12\mu m$ wird der Spannungsrücklauf an der Release-Position übersprungen, wie an den beiden senkrecht verbundenen Kreismarkierungen in Abbildung 6.49 zu erkennen ist. Das Problem einer exakten Abtastung der Release-Position wird in Kapitel 6.3.2.2 noch gesondert behandelt.

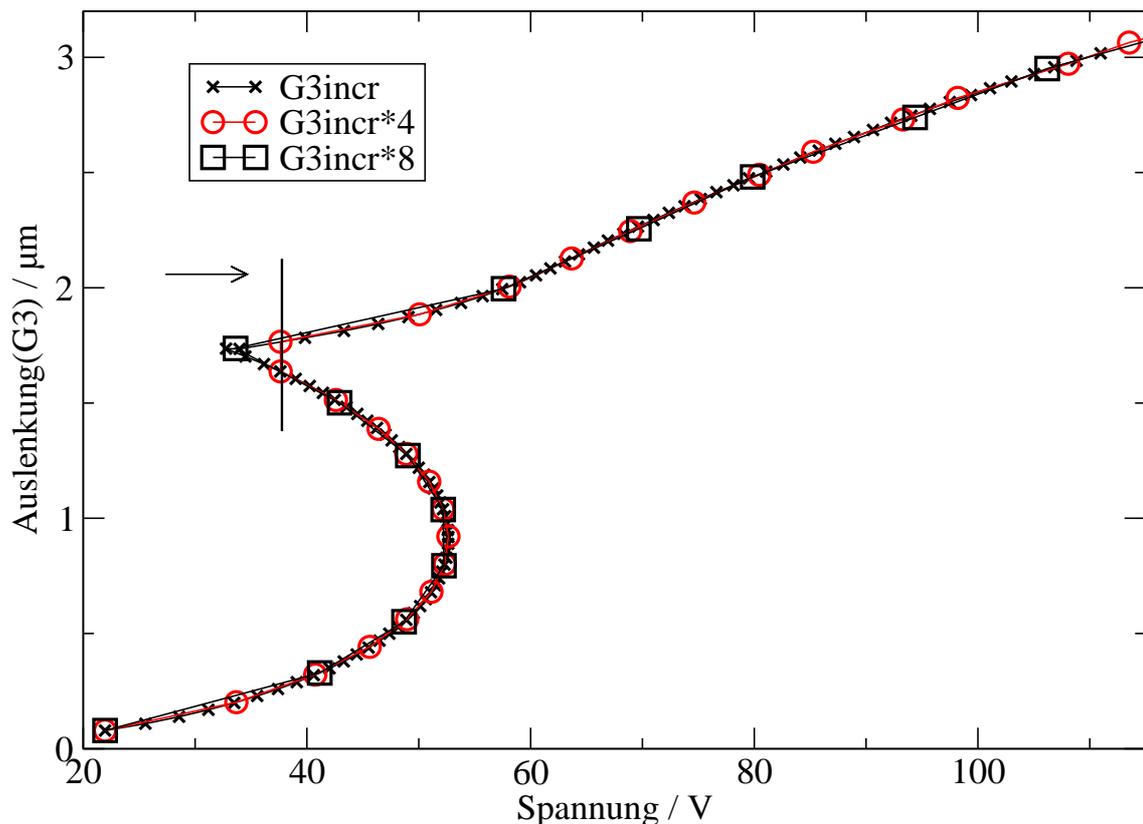


Abb. 6.49: Vergleich von (U, x) -Kennlinien bei verschiedenen feinen Inkrementen des Parameters $G3$.

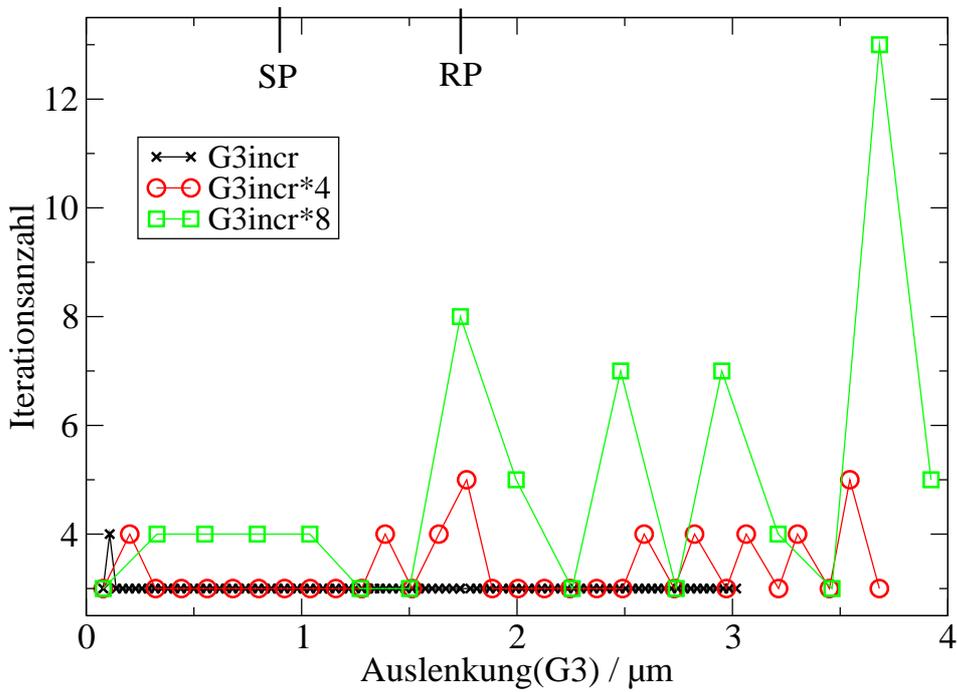


Abb. 6.50: Iterationsanzahl über Auslenkung bei unterschiedlichen Diskretisierungen bei der Mikromembran.

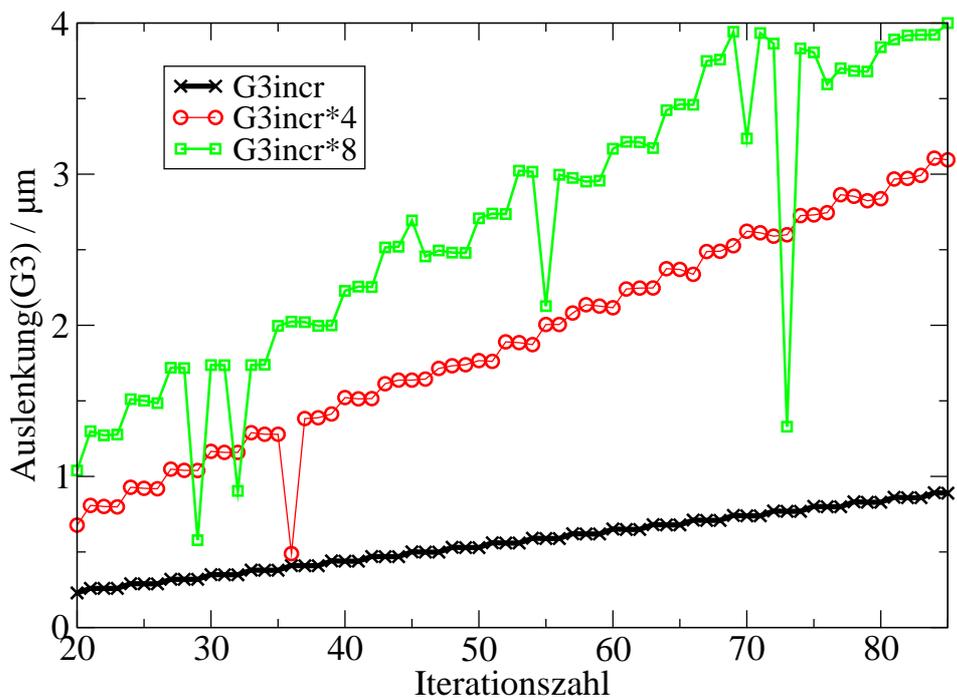


Abb. 6.51: Iterationsverläufe bei unterschiedlichen Diskretisierungen bei der Mikromembran.

Die Abbildungen 6.50 und 6.51 zeigen jeweils für die drei unterschiedlichen Inkremente für $G3$ das Konvergenzverhalten. Im Gegensatz zum Algorithmus der Q -Steuerung (vgl. Abb. 6.24) wirkt sich die Größe des Inkrements auf die Iterationsanzahl aus. Je größer die Diskretisierung, desto mehr Iterationen sind notwendig, um Konvergenz zu erreichen (sh. Abb. 6.50). Ein stärkeres Anwachsen der Iterationszahlen zwischen Snap-in- und Release-Position, wie es bei der Q -Steuerung zu beobachten ist (vgl. Abb. 6.15), tritt hier allerdings nicht auf. Zwischen dem Homotopieparameter $G3$, der ja die Auslenkung eines Einzelpunktes beschreibt, und der Gesamtauslenkung x der Membran, kann im Gegensatz zur (Q, x) -Kennlinie kein senkrechter Verlauf auftreten, solange $G3$ noch nicht die Gegenelektrode berührt.

Abbildung 6.51 zeigt einen Ausschnitt des Einzeliterationsverlaufs für die unterschiedlichen Inkremente des Homotopieparameters $G3$. Der Ausschnitt umfaßt mehrere Lösungspunkte, gezeigt sind alle Werte im Verlauf der inneren Iteration, d.h. konvergierte und nicht konvergierte Werte. Im Gegensatz zu Abb. 6.16 ist der Konvergenzverlauf zu einem einzelnen Lösungspunkt hier nicht markiert.

Wegen der unterschiedlich feinen Diskretisierung steigen die Verläufe trotz zunehmender Iterationsanzahl bei größerer Diskretisierung schneller an. Deshalb liegen bei einer gegebenen Iterationszahl die Kurven der größeren Diskretisierungen oberhalb der feineren Diskretisierung. Damit wird klar erkenntlich, daß mit größerer Diskretisierung Störungen im Einzeliterationsverlauf zunehmen, was bei der Q -Steuerung nicht beobachtet wurde. Inwieweit die Störungen so groß werden, daß keine Konvergenz mehr erreicht werden kann, wird im folgenden Absatz und in den Abbildungen 6.52-6.55 untersucht.

6.2.3.2 Einschwingverhalten

Ähnlich wie bei der Q -Steuerung soll für den modifizierten Algorithmus der Multiparameter-Homotopie das Einschwingverhalten untersucht werden, wenn verschieden stark ausgelenkte Anfangszustände vorgegeben werden.

Die Simulationsergebnisse des Einschwingverhaltens mit einer $G3$ -Steuerung werden wieder exemplarisch an der Mikromembran dargestellt. In Abbildung 6.52 sind in der (U, x) -Kennlinie der Mikromembran die Punkte P1, P2 und P3 eingezeichnet, die jeweils den Simulationsanfang markieren. Die kleinen Kreuze in den Abbildungen 6.53-6.55 zeigen den Einzeliterationsverlauf des modifizierten Algorithmus. Die senkrechten dickeren Striche, unterhalb der Kennlinie, geben jeweils an, wann für einen vorgegeben Homotopiewert $G3$ Konvergenz erreicht wurde. Dabei wird deutlich, daß die Störungen der Einzeliterationen im ersten Iterationslauf von P1 zu P3 zunehmen. Bei P3 sind die Störungen bereits so groß, daß keine Konvergenz mehr erreicht wird. Um diese ungünstige Eigenschaft des modifizierten Algorithmus auszuschalten, wurde dem modifizierten Algorithmus ein Rechenlauf mit Q -Steuerung vorgeschaltet, das heißt, die ersten Simulationspunkte im Rechenlauf, P1, P2 und P3 wurden mit der Q -Steuerung berechnet und erst die Folgepunkte mit $G3$ -Steuerung. Die Kreise in den Abbildungen 6.53-6.55 zeigen den Einzeliterationsverlauf bei vorgeschalteter Q -Steuerung. Die dünneren Striche in den Abbildungen, oberhalb der Kennlinie, geben an wann Konvergenz erreicht wurde. Es zeigt sich im Gegensatz zum Einzeliterationsverlauf ohne vorgeschaltete Q -Steuerung kein gestörter Einschwingvorgang in den Punkten P1 bis P3, da die Q -Steuerung globale Konvergenz besitzt. Ist für den ersten Simulationspunkt P1 bzw. P2 Konvergenz erreicht, mit oder ohne Q -Vorschaltung, so gibt es an den Folgepunkten keinen Unterschied mehr im Iterationsverhalten. Darüber hinaus reduziert die vorgeschaltete Q -Homotopie auch die Iterationsanzahl im Startpunkt; die ersten senkrechten Striche in Abbildung 6.54, die die Konvergenz des Startpunktes mit und ohne Q -Vorschaltung markieren, befinden sich bei den Iterationszahlen 5 bzw. 12.

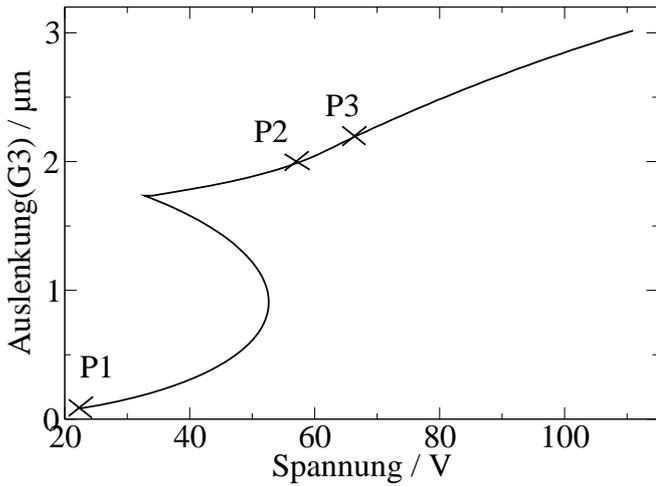


Abb. 6.52: (U, x) -Kennlinie der Mikro-
membran mit markierten Anfangspunkten
der Homotopie.

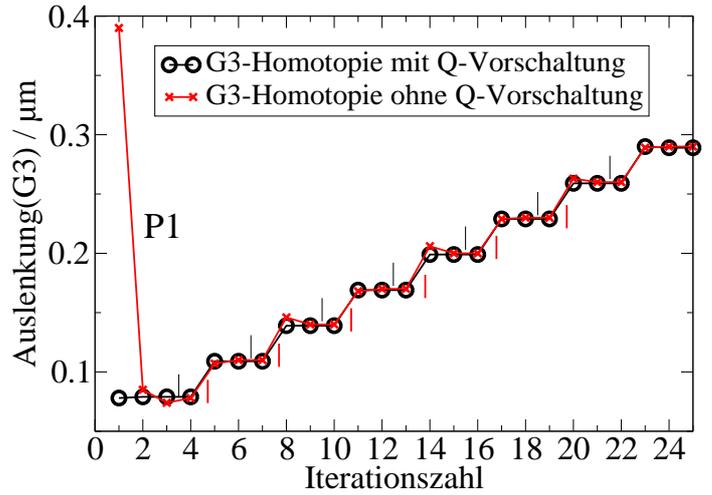


Abb. 6.53: Einschwingvorgang für An-
fangspunkt P1.

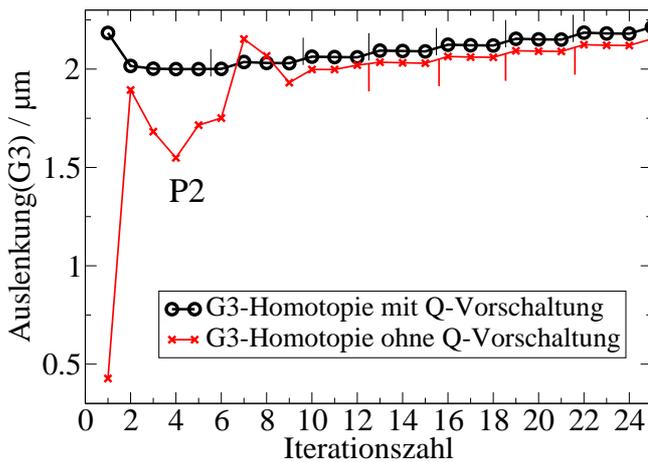


Abb. 6.54: Einschwingvorgang an Fort-
setzung P2.

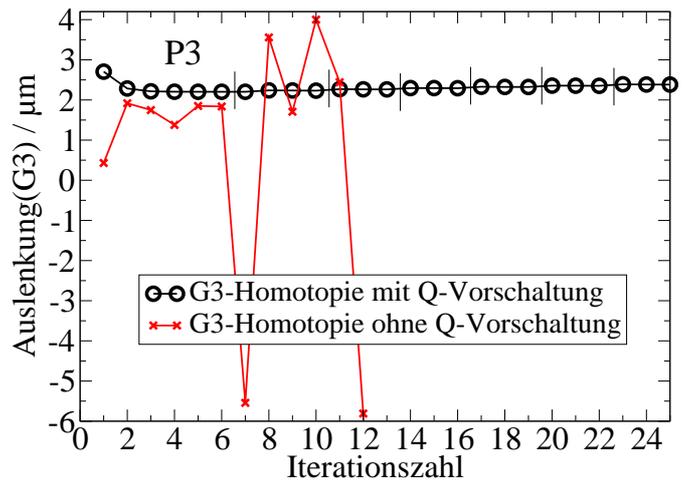


Abb. 6.55: Einschwingvorgang an Fort-
setzung P3.

Die Vorschaltung der Q -Homotopie arbeitet auch in den kritischen Punkten (Snap-in-Position, Release-Position) und im instabilen Bereich zwischen Snap-in- und Release-Position stabil. Für den instabilen Bereich gilt die bereits in Kap. 4.4 gezeigte Einschränkung, daß nicht alle Punkte im instabilen Bereich als Startpunkt erreichbar sind, vgl. z.B. Markierungen a und b in Abb. 6.11.

6.2.3.3 Vergleich der Iterationsanzahl bei unterschiedlichen Steuerungen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Homotopieparameter auf die Iterationsanzahl der Multiparameter-Homotopie untersucht.

Das erste Bauteil, der Balken, wurde zum einen mit einer Multiparameter-Homotopie simuliert, der die Parameter $G1$, $G2$, $G3$, Q , F und C zur Verfügung standen (MULTI6-Homotopie), zum anderen mit einer eingeschränkteren Multiparameter-Homotopie, die nur aus den Parametern $G1$, $G2$ und $G3$ auswählen konnte (MULTIG-Homotopie). Das zweite Bauteil, das Wanderkeilrelais, wurde mit vier Multiparameter-Homotopien simuliert, die jeweils nur einen einzigen Parameter zur Auswahl hatten, nämlich $G1$, Q , F und C .

In Abbildung 6.56 sind für den Balken die resultierenden Iterationsanzahlen über der Auslenkung aufgetragen. Die Abtastrate auf dem simulierten Ausschnitt war bei beiden Steuerungen ähnlich, 62 Simulationspunkte mit der MULTI6-Homotopie und 57 Simulationspunkte mit der MULTIG-Homotopie. Man kann erkennen, daß die Iterationsanzahlen bei der MULTI6-Homotopie fast überall geringer sind als bei der MULTIG-Homotopie. Da bei der MULTI6-Homotopie aus einem größeren Steuerparametersatz ausgewählt werden kann, stehen für manche Bereiche geeignetere Parameter zur Verfügung als bei der MULTIG-Homotopie. Dies bewirkt unter anderem eine Reduktion der Iterationsanzahl.

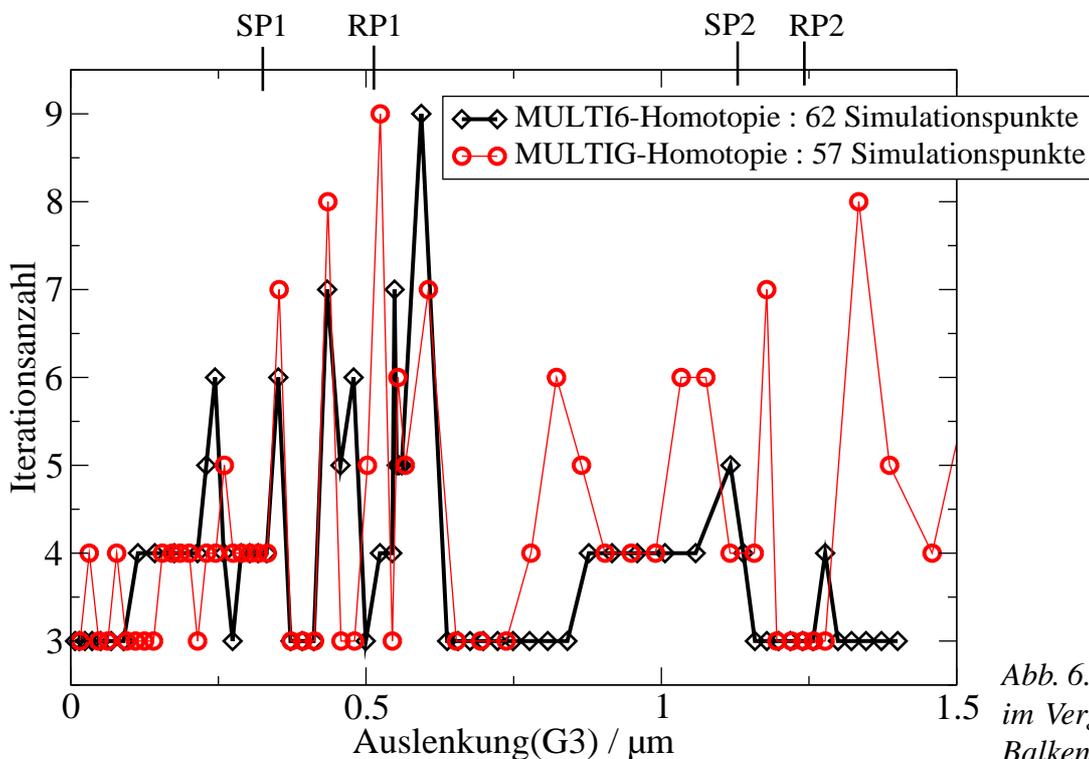


Abb. 6.56: Iterationsanzahlen im Vergleich am Beispiel des Balken.

Für das Beispiel des Wanderkeilrelais ist in Abbildung 6.57 die Iterationsanzahl bei vergleichbar feiner Abstastung für 4 verschiedene Steuerungen über der Auslenkung angetragen. Bei diesem Beispiel schneidet die Q -Homotopie als beste mit den geringsten Iterationsanzahlen ab. Zu beachten ist jedoch, daß dies kein allgemeingültiges Verhalten für alle elektromechanisch gekoppelten Bauteile ist, sondern nur für Bauteile gilt, bei denen ein Abrollverhalten im Betrieb vorliegt. Bei Bauteilen dieser Art tritt in der (Q, x) -Kennlinie kein steiler Verlauf auf, deswegen ist für Q eine optimale Abstastung möglich (vgl. Abb. 7.18 und 7.20), die auch am effizientesten arbeitet.

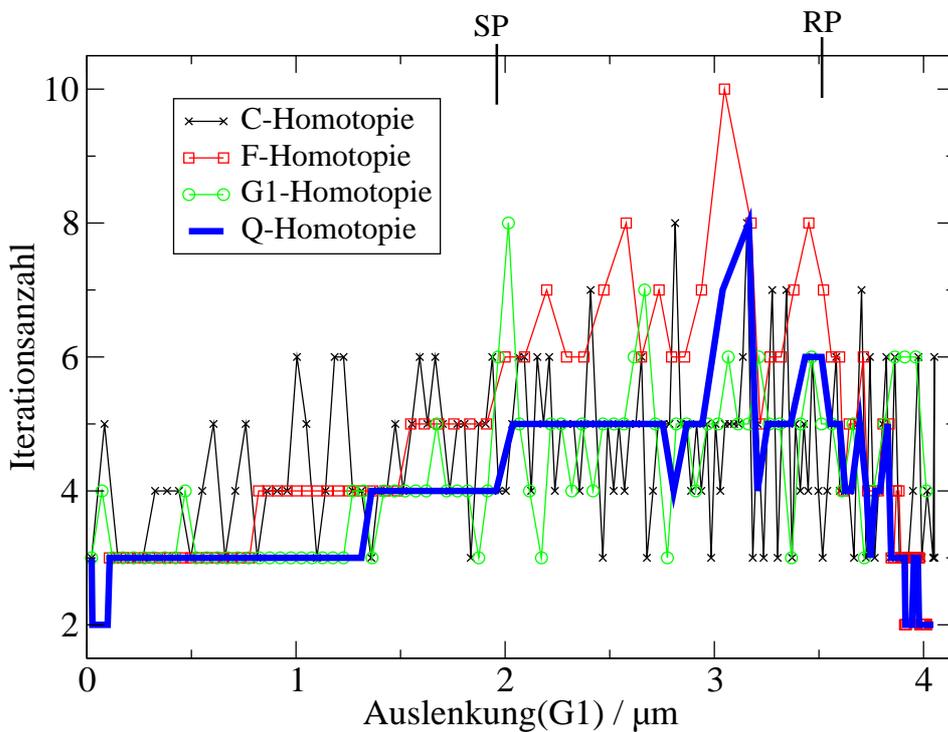


Abb. 6.57: Iterationsanzahlen im Vergleich für das Wanderkeilrelais.

6.2.3.4 Genauigkeit der Simulationen mit verschiedenen Homotopieparametern

In diesem Abschnitt wird verglichen, wie genau eine Simulation mit einem einzelnen Homotopieparameter im Vergleich mit einem anderen ist. Untersucht wurden Homotopien, die mit der Ladung Q , der elektrostatischen Kraft F , der Kapazität C und, entsprechend dem Bauteil, den geometrischen Positionen $G1$, $G2$ oder $G3$ gesteuert wurden.

Für die Berechnung der Abweichung wurde als Bezugssimulation die Position G_i eines Oberflächenpunktes verwendet, der im gesamten Arbeitsbereich nicht die Gegenelektrode kontaktiert. So erhält man ein relatives Fehlerband. Die Breite dieses Fehlerbandes gibt an, wie genau die Simulationen im Schnitt zueinander sind. In Abbildung 6.58 ist dieses Fehlerband für das Beispiel der Mikromembran abgebildet. Als Bezugssimulation wurde die $G3$ -Homotopie mit feiner Abtastung gewählt, da hier die Release-Position in jedem Fall genauer getroffen wird als bei der F - und Q -Homotopie. Bis zur Release-Position bewegt sich das Fehlerband in der für jede Simulation vorgeschriebenen Genauigkeitsschranke von $1 \cdot 10^{-3}$. An der Release-Position treten Fehler bis zu 3% auf, was aufgrund der Diskretisierungslücke der Q - und F -Homotopie um die Release-Position zu erwarten ist. Schmiegt sich die Membran immer weiter an die Gegenelektrode an, so treten einzelne Abweichungen bis $5 \cdot 10^{-3}$ auf.

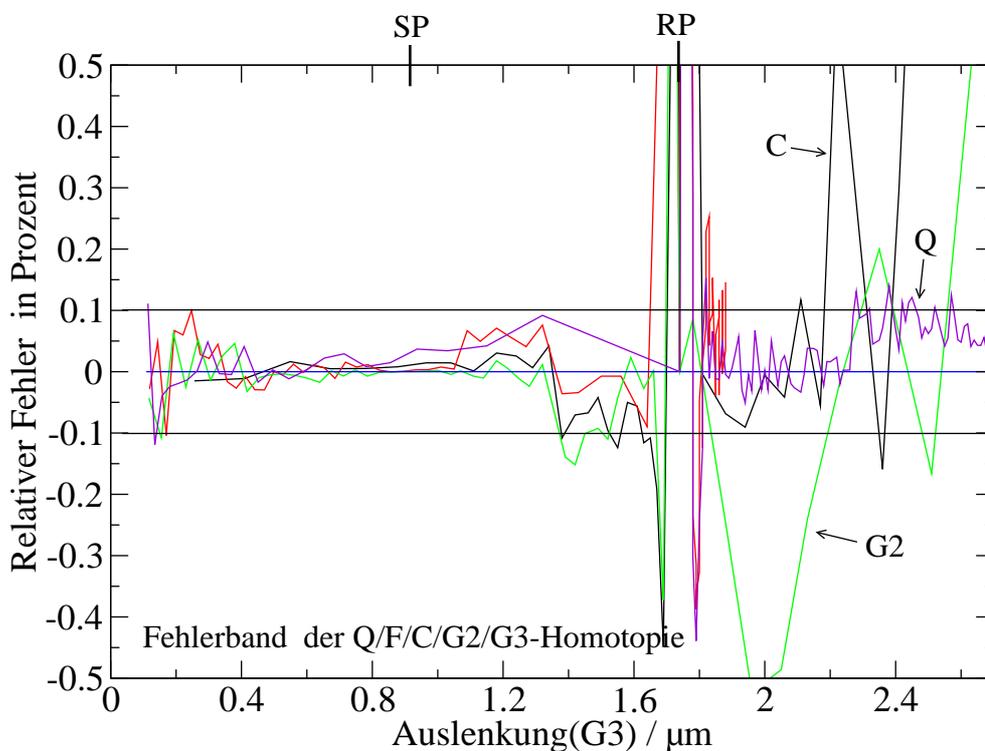


Abb. 6.58: Fehlerband der Mikromembran.

Nach der Release-Position kommen relative Fehler dieser Größenordnung auch beim Balken (Abb. 6.59) und beim Biegebalkenrelais (Abb. 6.60) vor, und zwar immer beim Geometrieparameter $G2$ bzw. bei der Kapazität C . In den Abbildungen 6.59 und 6.60 erkennt man auch ein ähnliches Anwachsen des Fehlerbandes um die Release-Positionen.

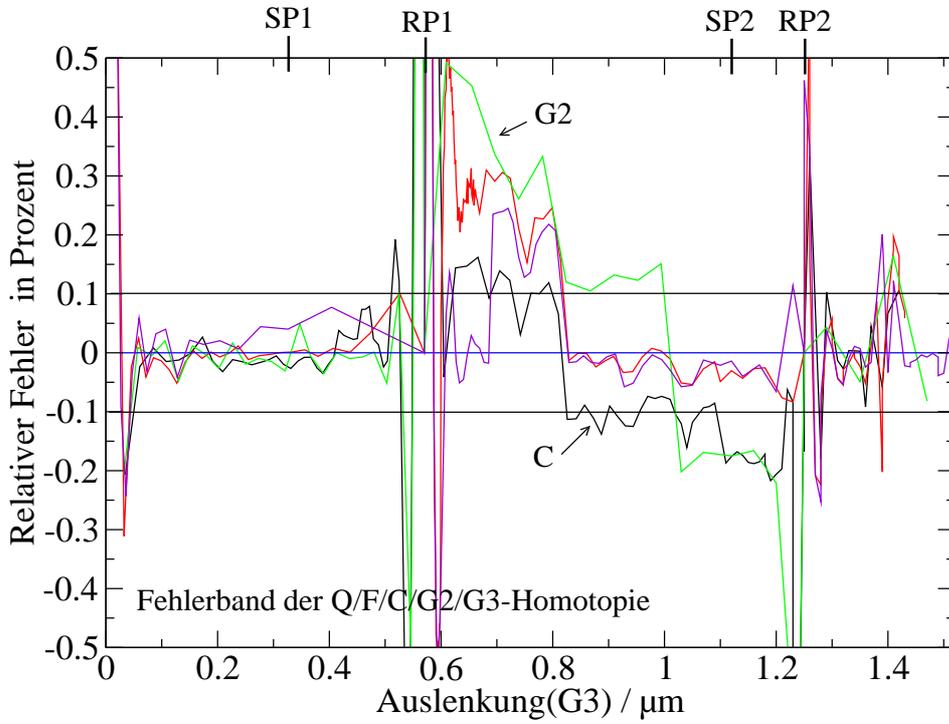


Abb. 6.59: Fehlerband des Balkens.

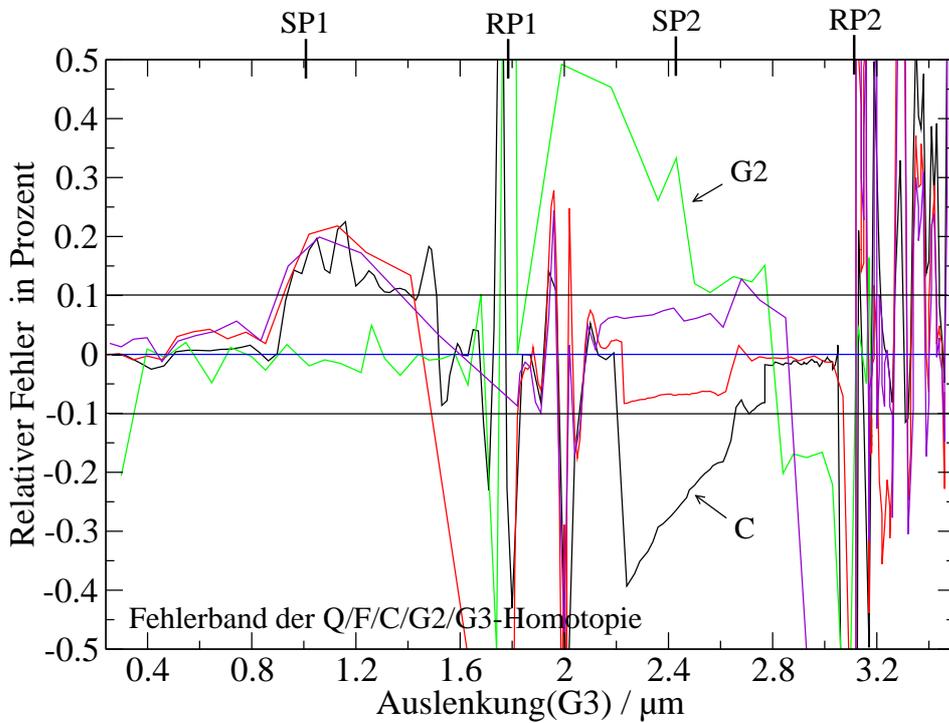


Abb. 6.60: Fehlerband des Biegebalkenrelais.

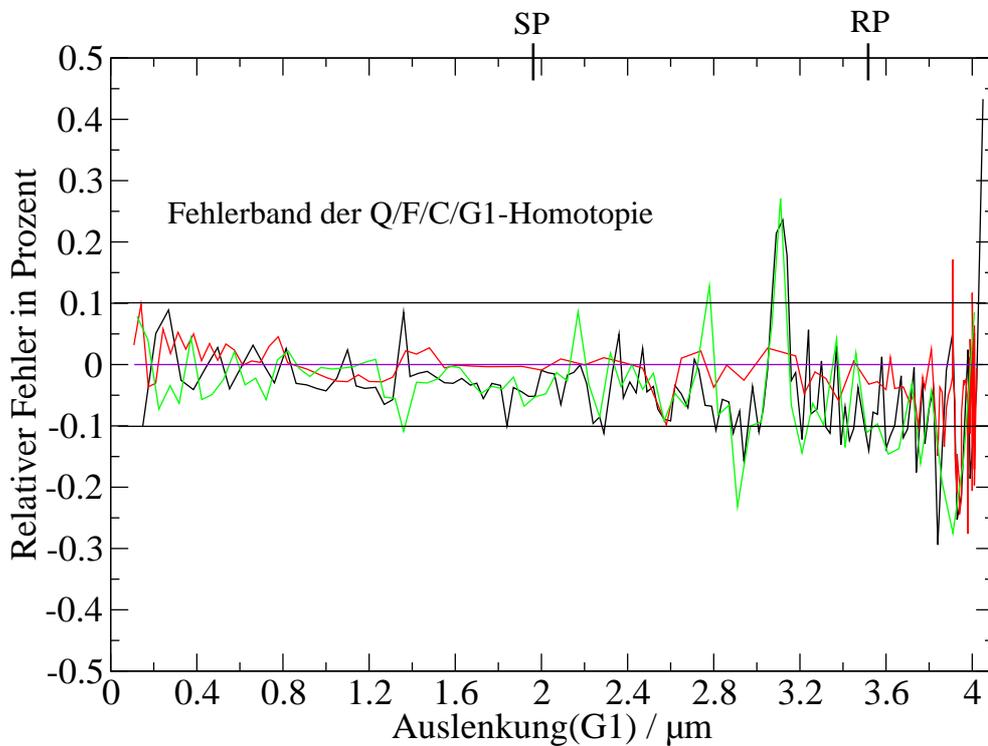


Abb. 6.61: Fehlerband des Wanderkeilrelais.

Das Bild des Fehlerbandes des Wanderkeilrelais (Abb. 6.61) unterscheidet sich von den vorhergehenden darin, daß an der Release-Position keine größeren Störungen auftreten und alle Simulationen fast überall die Genauigkeitsvorgabe von $1 \cdot 10^{-3}$ einhalten. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen ist bei diesem Bauteil die Snap-in-Position und die Release-Position nicht stark ausgeprägt und es liegt ein reines Abrollverhalten vor.

Zur Genauigkeit ist zusammenfassend zu sagen, daß der Algorithmus der Q/F -Steuerung und der erweiterte Algorithmus der Multiparameter-Homotopie die vorgegebene Genauigkeitsschranke, die zu $1 \cdot 10^{-3}$ relativer Fehler gewählt wurde, in der Regel sehr gut einhalten, sowohl im instabilen als auch im stabilen Betriebsbereich. Größere Störungen der Genauigkeit treten um die Release-Position auf, wenn sie nicht von allen Parametern gleich gut getroffen wird, außer bei den Bauteilen, wo bereits vor der Release-Position eine Berührung zwischen Elektrode und Gegenelektrode eingetreten ist und zwischen der Snap-in-Position und der Release-Position ein Abrollverhalten vorliegt.

6.3 Algorithmische Varianten

Die hier vorgestellten algorithmischen Varianten der Multiparameterhomotopie dienen zur lokalen Optimierung des Verfahrens.

Die im ersten Abschnitt untersuchten alternativen Prädiktoren, die die Konvergenz der Multiparameterhomotopie wesentlich bestimmen, bestätigen die Wahl des einfachen robusten Sekantenprädiktors.

Die Schrittweitensteuerungen im nachfolgenden Abschnitt sorgen für eine gesteigerte Effizienz der Multiparameterhomotopie an technisch relevanten Betriebspunkten.

6.3.1 Alternative Prädiktoren und ihr Konvergenzverhalten

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich das Konvergenzverhalten ändert, wenn man statt des bisher verwendeten lokalen Sekantenprädiktors (vgl. Kap. 4.4, S.68)

$$F'_n = F_n + \frac{F_n - F_{n-1}}{H_n - H_{n-1}} \cdot (H_s - H_n)$$

im modifizierten Algorithmus der Multiparameter-Homotopie einen lokalen Prädiktor zweiter Ordnung

$$F'_n = F_n + \frac{F_n - F_{n-1}}{H_n - H_{n-1}} \cdot (H_s - H_n) + \frac{1}{2} \frac{(F_n - F_{n-1}) \cdot (H_{n-1} - H_{n-2}) - (F_{n-1} - F_{n-2}) \cdot (H_n - H_{n-1})}{(H_n - H_{n-2})(H_n - H_{n-1})(H_{n-1} - H_{n-2})} \cdot (H_s - H_n)^2$$

verwendet.

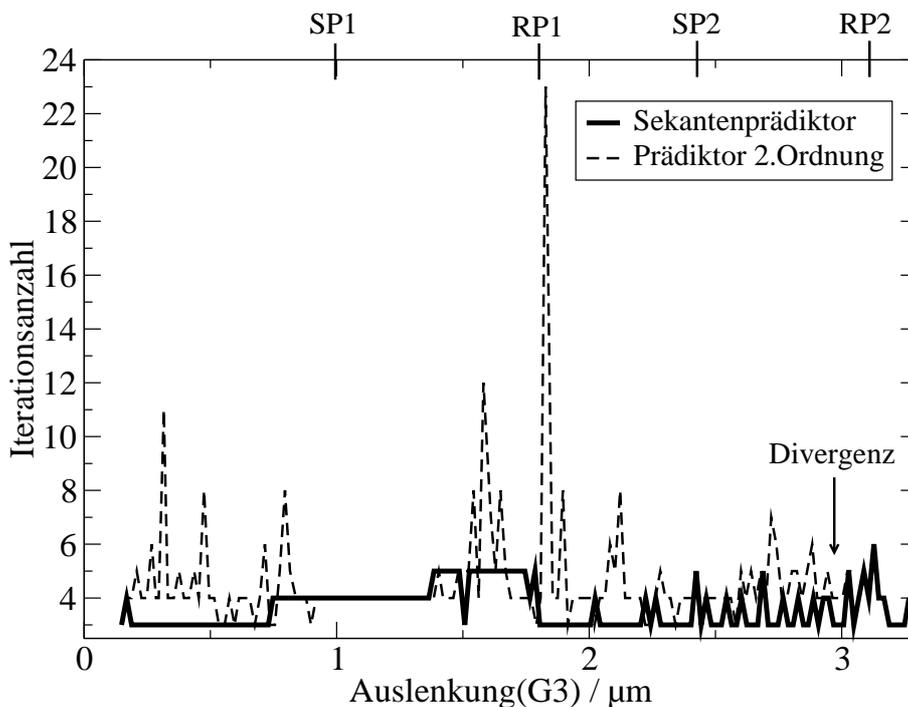


Abb. 6.62: Iterationsanzahl für den Sekantenprädiktor und den Prädiktor 2. Ordnung am Beispiel des Biegeballenrelais mit G3-Homotopie (feine Diskretisierung).

Lokal bedeutet, daß für jede Kraft an jedem einzelnen BEM- bzw. FEM-Knoten eine eigene Prädiktion durchgeführt wird, abhängig nur von den bereits an diesen Knoten in vorigen Iterationen angreifenden Kräften. F_n, F_{n-1}, F_{n-2} bedeuten die korrigierten Kräfte, F'_n die prädiizierte Kraft, H_n, H_{n-1}, H_{n-2} die jeweiligen Homotopiewerte der Iteration und H_s den angesteuerten Homotopiewert.

Am Beispiel des Biegebalkenrelais mit $G3$ -Homotopie wurde mit einer feinen Diskretisierung $\Delta G3 = 0,02\mu\text{m}$ (vgl. Abb. 6.62) und einer größeren Diskretisierung $\Delta G3 = 0,05\mu\text{m}$ (vgl. Abb. 6.63) das Verhalten der Iterationsanzahl über der Auslenkung verglichen. Die durchgezogene Linie zeigt den Iterationsverlauf für den Sekantenprädiktor und die gestrichelte Linie den Iterationsverlauf für den Prädiktor zweiter Ordnung. Man erkennt sofort, daß bei der Simulation mit dem Prädiktor zweiter Ordnung im Schnitt eine höhere Iterationsanzahl zum Erreichen der Konvergenz notwendig ist. Ebenso ist für einen stabilen Konvergenzverlauf eine wesentlich feinere Diskretisierung notwendig als für den Sekantenprädiktor, andernfalls divergiert der Iterationsverlauf (sh. Divergenz in Abb. 6.62 und Abb. 6.63).

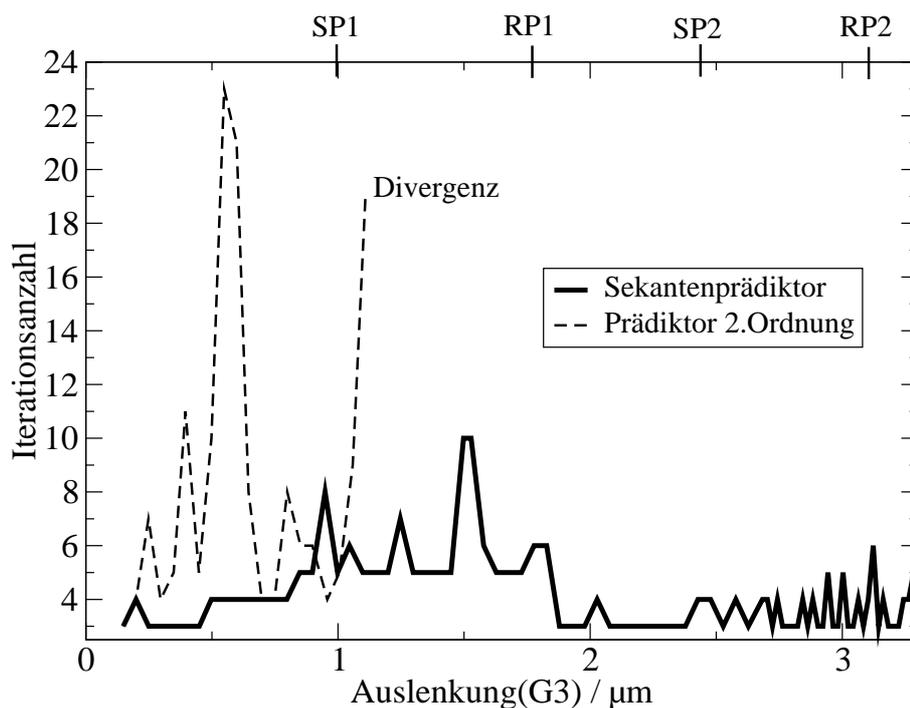


Abb. 6.63: Iterationsanzahl für den Sekantenprädiktor und den Prädiktor 2. Ordnung am Beispiel des Biegebalkenrelais mit $G3$ -Homotopie (größere Diskretisierung).

6.3.2 Schrittweitensteuerungen

6.3.2.1 Schrittweitensteuerung durch Berücksichtigung der Krümmung

Um Snap-in Spannungen und Positionen sehr genau bestimmen zu können, wurde in Kapitel 4.5 eine krümmungsabhängige Schrittweitensteuerung eingeführt, deren Ergebnisse hier vorgestellt werden.

Die Abbildungen 6.64 und 6.65 zeigen die (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais mit markierten Simulationspunkten. Bei beiden Simulationen, mit und ohne Anwendung der Schrittweitensteuerung, wurde eine G^3 -Homotopie verwendet. In Abbildung 6.64 wurde der Krümmungsalgorithmus eingesetzt. Klar erkennbar ist die sehr feine Diskretisierung um die Snap-in Position und die relativ grobe Diskretisierung in den übrigen Bereichen. Dem gegenübergestellt ist eine Simulation mit konstantem G^3 -Inkrement, die fast überall gleich fein abtastet (Abb. 6.65). Bei Einsatz des Krümmungsalgorithmus wird die sehr effektive Abtastung offensichtlich, die sich nur um die Snap-in Position stark verfeinert und dadurch einen sehr exakten Wert der Snap-in Position mit verhältnismäßig wenigen Simulationspunkten liefert. Das Treffen der exakten Release-Position ist mit dem Krümmungsalgorithmus allerdings nicht garantiert. Hier muß der Algorithmus erweitert werden, zum Beispiel durch den im nächsten Abschnitt beschriebenen Kontaktalgorithmus. Alternativ kann man den Vorzeichenwechsel der Kurvenkrümmung detektieren und die exakte Release-Position durch Intervallschachtelung bestimmen.

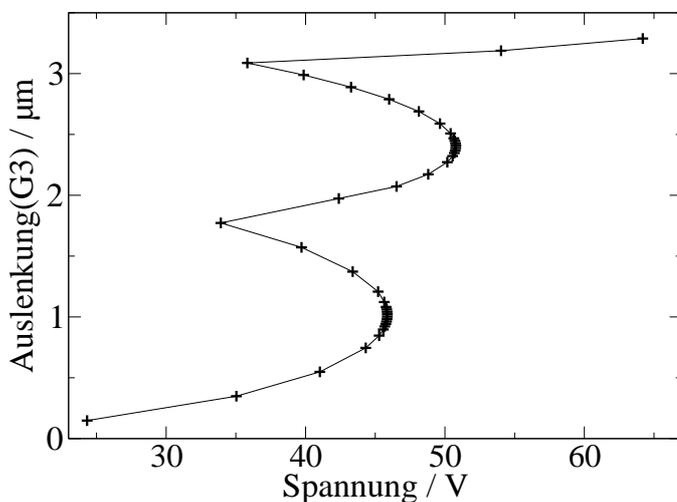


Abb. 6.64: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais, Simulation mit krümmungsabhängiger Schrittweite.

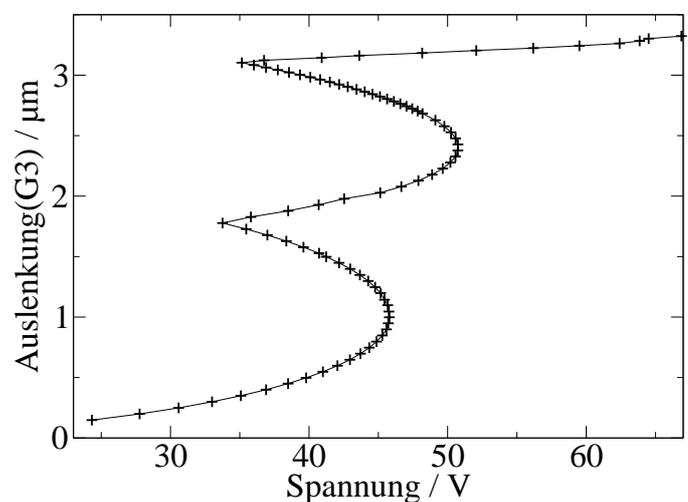


Abb. 6.65: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais, Simulation mit konstanter Diskretisierung.

In Abbildung 6.66 sind die Iterationsanzahlen je Simulationspunkt für die Simulation mit und ohne Schrittweitensteuerung dargestellt. Für beide Simulationen bewegt sich die Iterationsanzahl in ähnlichen Größenordnungen. Vergleicht man allerdings die Summe der Iterationsanzahl je Simulation, so benötigt man bei der $G3$ -Homotopie ohne Schrittweitensteuerung 324 Iterationen und bei der $G3$ -Homotopie mit Schrittweitensteuerung nur gut die Hälfte, nämlich 183 Iterationen.

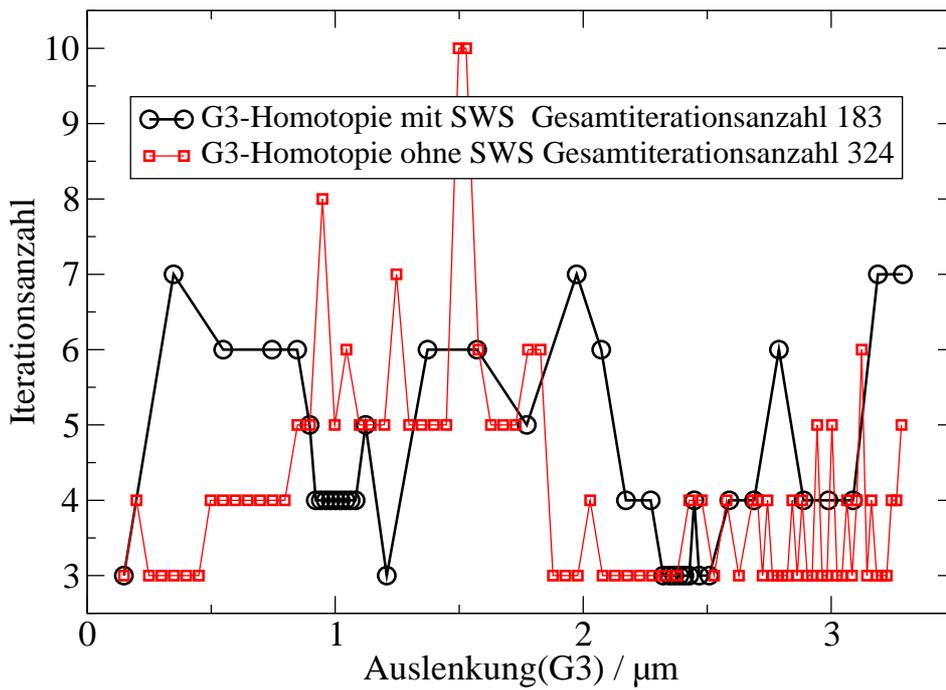


Abb. 6.66: Iterationsanzahl über Auslenkung bei konstanter Diskretisierung mit $G3$ und krümmungsabhängiger Schrittweitensteuerung.

6.3.2.2 Kontaktalgorithmus

Wie bereits mehrfach bemerkt, wird die Release-Position häufig nicht exakt getroffen. Das kann einerseits aus dem der Q -Steuerung eigenen Problem, nämlich der oft ungenügenden Auflösung vor Release-Positionen herrühren. Andererseits kann dieser Effekt auch bei Geometrie-Homotopien dann auftreten, wenn das Inkrement zu grob gewählt wird (vgl. Abb. 6.49).

Der Kontaktalgorithmus nützt aus, daß bei geometriesteuerten Simulationen eine geometrische Position für einen Punkt exakt vorgegeben werden kann, die angesteuert und berechnet werden soll. Beim Beispiel des Balkens und des Biegebalkenrelais ist die Spitze des Balkens der Punkt, der zuerst Kontakt hat, also wird diese geometrische Position (entspricht $G1$ beim Balken und Biegebalkenrelais) als möglicher Parameter in der Multiparameter-Homotopie berücksichtigt. Die Soll-Position am Kontakt wird in die Menge der vorgegebenen Geometriepunkte aufgenommen. Parallel zur Steuerung mit dem Sensitivitätsquotienten wird zusätzlich überprüft, ob sich $G1$ in der Nähe des Kontakts befindet. Ist dies der Fall, dann wird $G1$ automatisch zur Steuerung ausgewählt, bis für $G1$ Kontakt erreicht ist. Die Annäherung von $G1$ an die Kontaktposition findet über eine stetige Verkleinerung des Inkrements für $G1$ statt, die einer geometrischen Reihe entspricht.

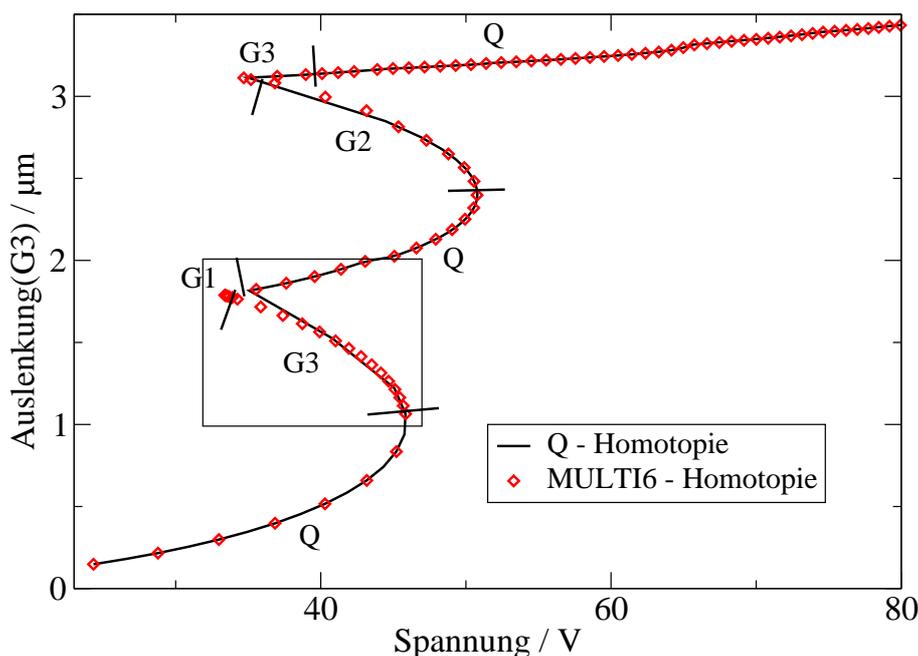


Abb. 6.67: Vergleich Kontaktalgorithmus mit Q -Homotopie.

Abbildung 6.67 zeigt eine komplette (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais. Die Rauten kennzeichnen die Simulationenpunkte der Multiparameter-Homotopie, die durchgezogene Linie wurde mit einer Q -Steuerung berechnet. Zusätzlich sind die steuernden Parameter für die Multiparameter-Homotopie angegeben. Deutlich erkennbar ist die Abweichung zwischen den beiden Simulationen bei der ersten Release-Position. Bei der Multiparameter-Homotopie war der Kontaktalgorithmus integriert, weshalb kurz vor Erreichen der Release-Position auf $G1$ umgeschaltet wurde. Der Bereich um die erste Release-Position, der durch ein Rechteck in Abbildung 6.67 gekennzeichnet ist, ist in Abbildung 6.68 vergrößert dargestellt.

Der Rechteckrahmen in Abbildung 6.68 umfaßt die Punkte, die auch in Abbildung 6.69 und 6.70 dargestellt sind. Ganz links im Rechteckrahmen ist erkennbar, wie sich die Lösungspunkte der G1-Steuerung an die Release-Position annähern.

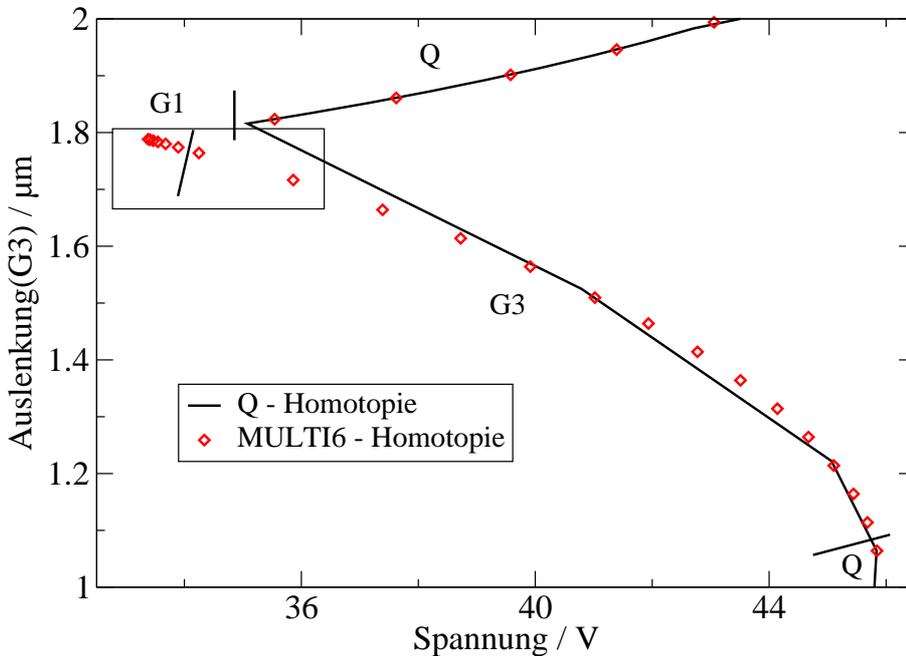


Abb. 6.68: Vergleich Kontaktalgorithmus.

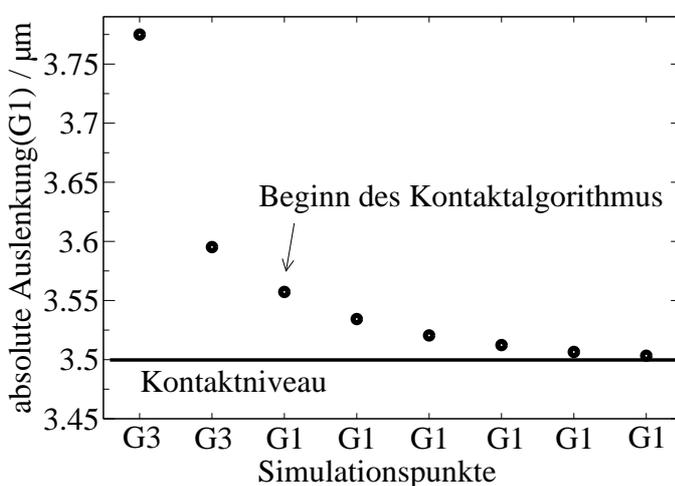


Abb. 6.69: Annäherung beim Kontaktalgorithmus.

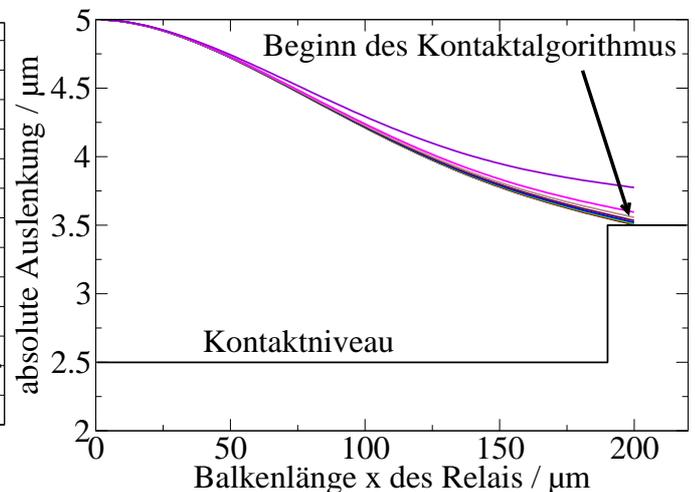


Abb. 6.70: Annäherung beim Kontaktalgorithmus.

In den Bildern 6.69 und 6.70 ist die Annäherung an die Release-Position auf zwei weitere Weisen dargestellt. In Abbildung 6.69 ist die absolute Auslenkung der Balkenspitze über dem Simulationenpunkte dargestellt. Hier kann man die Abnahme des Inkrements für G1 mit der Annäherung an das Kontaktniveau beobachten. Das räumliche Gesamtbild der Annäherung kann man in der stark überhöhten Abbildung 6.70 verfolgen.

6.4 Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

Dieser Abschnitt faßt die wesentlichen Ergebnisse zusammen, die aus den Simulationen des Kapitels 6 gewonnen wurden:

Die **spannungsgesteuerte Simulation** zeigt, wie erwartet, Instabilität ab der Snap-in-Position. Bereits vor der Snap-in-Position steigen die Iterationsanzahlen stark an. Da das Genauigkeitskriterium nur den Unterschied aufeinander folgender Werte prüft, ist die absolute Genauigkeit etwa eine Größenordnung schlechter als die Vorgabe.

Die **ladungsgesteuerte Homotopie** kann den gesamten Arbeitsbereich abdecken und zeigt erhöhte Iterationsanzahlen nur vor den Release-Positionen. Für die beiden Zwischengrößen Kraft und geometrische Position, die zwischen BEM und FEM ausgetauscht werden, sind die Konvergenzverläufe asymptotisch, nicht oszillierend. Die ladungsgesteuerte Homotopie ist robust und global konvergent. Der absolute Fehler des Homotopieparameters Ladung kann als Abbruchkriterium vorgegeben werden, damit ist die Genauigkeitsschranke in Bezug auf diesen Parameter gleich der Vorgabe.

Ein Nachteil des Verfahrens ist die Abtastlücke vor der Release-Position und die Schwierigkeit, die Release-Spannung exakt zu treffen.

Die **Multiparameter-Homotopie** kann ebenfalls den gesamten Arbeitsbereich abdecken, zeigt aber im Gegensatz zur ladungsgesteuerten Homotopie keine erhöhten Iterationsanzahlen vor den Release-Positionen. Eine Abtastlücke vor der Release-Position tritt nicht auf.

Die Multiparameter-Homotopie verwendet intern den Algorithmus der ladungsgesteuerten Homotopie für die Homotopieparameter Q und F und den verallgemeinerten Algorithmus für alle anderen Homotopieparameter.

Die Robustheit des verallgemeinerten Algorithmus ist geringer als die der ladungsgesteuerten Homotopie. Das bedeutet, daß eine gröbere Diskretisierung des Homotopieparameters zu höheren Iterationsanzahlen und einem unruhigeren Iterationsverlauf führt, wenn man Q und F aus den zulässigen Parametern ausschließt.

Läßt man jedoch zusätzlich auch Q oder F als weitere Homotopieparameter zu, sorgt die automatische Parameterumschaltung für ein sehr robustes Verhalten.

In fast allen Fällen wird bis zur Snap-in-Position die Ladung Q als aktiver Parameter gewählt, danach ein geometrischer Parameter G_i bis zur Release-Position, anschließend wieder Q .

Falls auch die nicht-geometrischen Parameter zugelassen werden, ist die gesamte Iterationsanzahl geringer als bei Beschränkung auf geometrische Parameter, weil dann für manche Bereiche geeignetere Parameter zur Verfügung stehen.

Eine globale Konvergenz der Multiparameter-Homotopie ist nicht von vornherein gegeben. Sie kann aber dadurch erreicht werden, daß der erste Lösungspunkt immer mit dem global konvergenten Verfahren der ladungsgesteuerten Homotopie berechnet wird.

Die Genauigkeit der Ergebnisse liegt vor der Release-Position unterhalb der vorgegebenen Genauigkeitsschranke, um die Release-Position wird die Genauigkeitsschranke überschritten, weil die Release-Position meist nicht genau getroffen wird. Nach der Release-Position treten einzelne Abweichungen oberhalb der Genauigkeitsschranke auf.

Ein Nachteil des Verfahrens ist auch hier die Schwierigkeit, die Release-Spannung exakt zu treffen.

Zwei **Zusatzalgorithmen** wurden entwickelt und erprobt, die auf der Multiparameter-Homotopie aufbauen und die Bestimmung der Snap-in-Position/Spannung noch effizienter machen und eine exakte Bestimmung der Release-Position/Spannung ermöglichen. Die Snap-in-Spannung wird besonders schnell bestimmt durch eine Schrittweitensteuerung, die die Homotopie-Schrittweite in stark gekrümmten Kennlinienteilen, also z.B. auch in den interessierenden Faltungspunkten, reduziert. Die Release-Spannung wird exakt bestimmt durch Vorgabe des Kontaktpunkts als Zielwert der Geometrie-Homotopie und eine Schrittweitensteuerung, die bei Kontaktannäherung die Schrittweite immer weiter reduziert.

Kapitel 7

Simulationsergebnisse

Dieses Kapitel zeigt Simulationsergebnisse, die man durch Anwendung der entwickelten Algorithmen bei der Berechnung elektromechanisch gekoppelter Bauteile erhält. Hier soll dargestellt werden, welche umfangreichen Möglichkeiten man mit der Homotopie-Methode erhält, einerseits bei der Charakterisierung und andererseits bei der Designvariation elektromechanischer Bauteile.

Zuerst werden Grundkennlinien wie der Spannungs-, Ladungs- und Kapazitätsverlauf für starre und flexible Strukturen gezeigt. Sehr anschaulich wird dazu die Entwicklung der geometrischen Form jedes Bauteils präsentiert. Danach werden elektrische und mechanische Energieverhältnisse während des Betriebs dargestellt. Der darauf folgende Abschnitt zeigt den elektrischen Feldverlauf auf den Elektroden im Hinblick auf die Frage, wie die elektrischen Felder im Betrieb auf einfache Weise abgeschätzt werden können.

Danach wird das Verhalten der Ladung in bestimmten Arbeitsbereichen mit Hilfe der Multiparameter-Homotopie genauer untersucht und dabei gezeigt, daß in manchen Fällen ein nicht-monotones Verhalten der Ladung auftritt. Zum Schluß wird untersucht, wie sich Designvariationen von Biegebalkenrelais (vgl. S. 88) und Wanderkeilrelais (vgl. S. 89) auf deren Kennlinien auswirken, um festzustellen, ob bestimmte Effekte nur in einem Teil des Parameterraums der Designoptimierung auftreten. Dabei wird u.a. eine unstetige Verschiebung des Snap-in-Verhaltens beobachtbar.

Das Kapitel endet wie das vorherige mit einer Zusammenfassung und Gesamtwertung der Ergebnisse.

7.1 Kennlinien für ausgewählte Bauteile

Dieses Kapitel zeigt für starre und flexible Bauteile verschiedene Kennlinien im gesamten Arbeitsbereich. Instabile Betriebsbereiche eines elektromechanisch gekoppelten Bauteils bedeuten bei der Simulation mit der Multiparameter-Homotopie keine Schwierigkeit mehr. Man erhält abhängig vom Bauteil zum Beispiel nach dem ersten Snap-Point weitere Snap-Points, die sonst im Hysterese-Verhalten untergehen. Dieser volle Überblick über den Betriebsbereich

ermöglicht gezielte Bauteilvariationen im Designablauf.

Die (U, x) -Kennlinien der Bauteile und manche Verformungsbilder wurden bereits im vorherigen Kapitel 6 verwendet, werden aber erst hier ausführlich diskutiert und deswegen noch einmal gezeigt.

7.1.1 Grundkennlinien für ausgewählte Bauteile

1) Der Mikrokippspiegel

Das erste ausgewählte Bauteil mit elektromechanischer Koppelung ist der Mikrokippspiegel (vgl. geometrischer Aufbau Abb. 5.21) aus der Klasse der starren Bauteile.

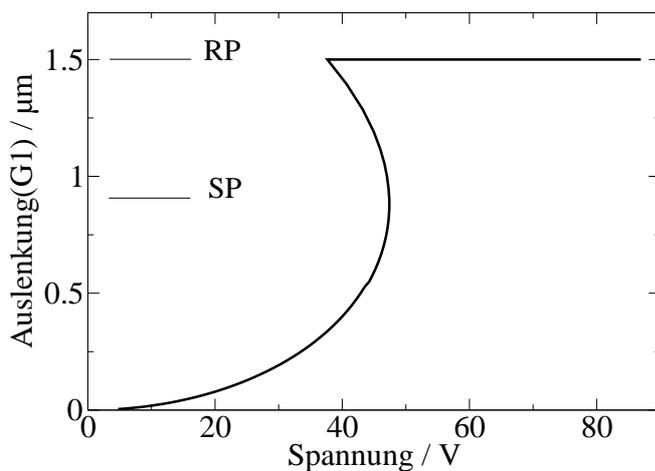


Abb. 7.1: (U, x) -Kennlinie des Mikrokippspiegels.

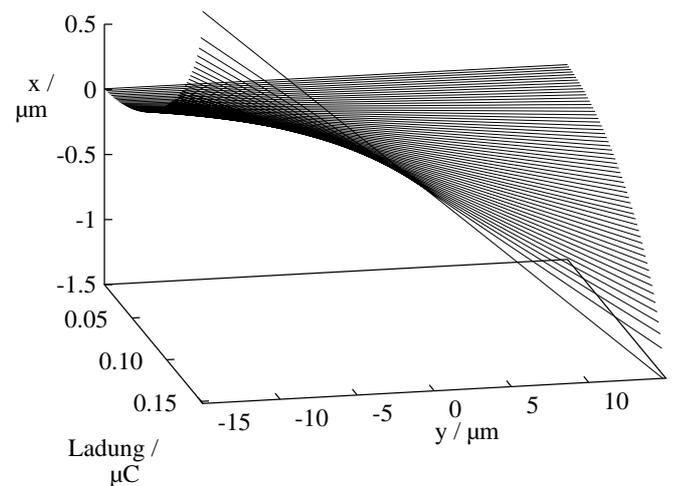


Abb. 7.2: Verformung des Mikrokippspiegels über der Ladung.

Neben der (U, x) -Kennlinie (Abb. 7.1), die bereits gezeigt wurde, ist die (C, x) -Kennlinie (Abb. 7.3) und die (Q, x) -Kennlinie (Abb. 7.4) sowie die Verformung des Kippspiegels über zunehmender Ladung dargestellt (Abb. 7.2). Die Auslenkung x ist in diesem Beispiel die Auslenkung des Punktes $G1$ an der Balkenspitze. Die Snap-in-Position ist mit SP, die Release-Position mit RP bezeichnet. Man beobachtet bei der (C, x) - und der (Q, x) -Kennlinie einen streng monoton ansteigenden Verlauf, bis der Kontakt erreicht ist. Die (C, x) -Kennlinie läßt sich nach Erreichen des Kontakts nicht mehr fortsetzen, da keine Geometrieänderung mehr erfolgt und daher auch keine Kapazitätsänderung mehr stattfinden kann. Die (Q, x) -Kennlinie wie auch die (U, x) -Kennlinie können nach Erreichen des Kontakts fortgesetzt werden, auch wenn keine

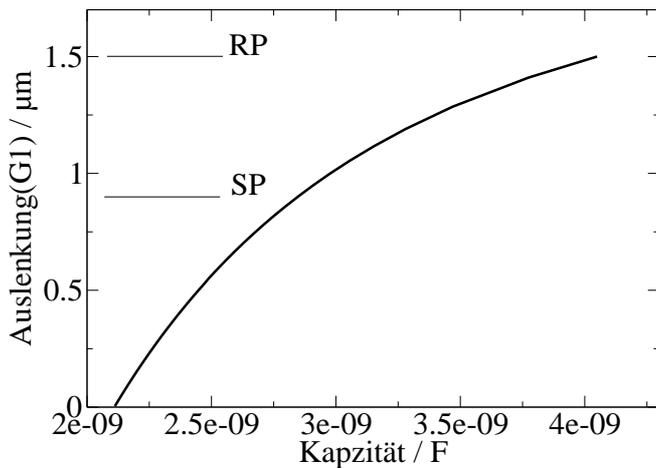


Abb. 7.3: (C, x) -Kennlinie des Mikrokippspiegels.

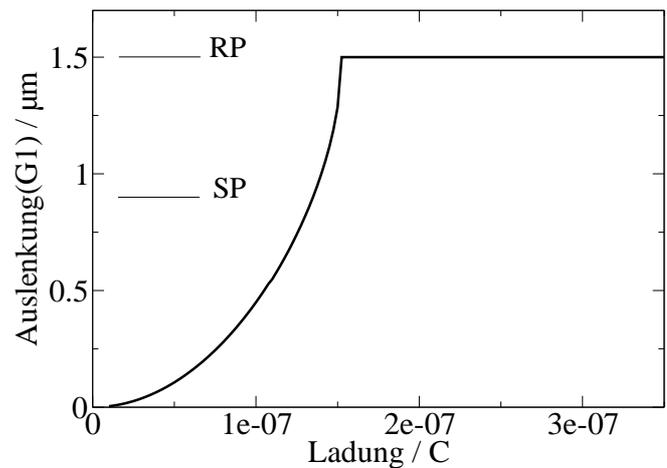


Abb. 7.4: (Q, x) -Kennlinie des Mikrokippspiegels.

Geometrieänderung in der Spiegelposition erfolgt. Das Auftreten von Kontaktkräften wird typischerweise von einem Knick in der Kennlinie begleitet, der in den (Q, x) - und (U, x) -Kennlinien zu sehen ist.

In Abbildung 7.2 ist für jeden Simulationspunkt eine Spiegelposition zugeordnet.

2) Die Mikromembran

Das zweite simulierte Bauteil, die Mikromembran (vgl. geometrischer Aufbau Abb. 5.23), und alle folgenden Bauteile gehören der Klasse der flexiblen Bauteile an, welche aufgrund ihrer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden eine voll gekoppelte Simulation erfordern und daher zu den interessanteren und wesentlich komplexeren Beispielen gehören.

Ebenso wie beim Kippspiegel sind für die Mikromembran die drei Kennlinien (U, x) , (C, x) , (Q, x) und die Verformung des Bauteils über der Auslenkung des Punkts $G3$ dargestellt (Abb. 7.5-7.8). Die x -Koordinaten in den Kennlinien beziehen sich auf den Oberflächenpunkt $G3$. Der Punkt $G3$ befindet sich nicht genau in der Mitte der Membran, sondern eher am Rand, um nach dem Erstkontakt der Membran mit der Gegenelektrode die weitere Auslenkung darstellen zu können (vgl. Abb. 7.6).

Die (C, x) -Kennlinie läßt sich hier nach dem Kontakt im Gegensatz zum Kippspiegel fortsetzen, da sich die Membran mit zunehmender Ladung auch im Kontaktfall weiter verformt, indem sie sich weiter an die Kontaktfläche anschmiegt, was auch sehr gut im Verformungsbild 7.6 zu sehen ist.

Ebenso sieht man im Verformungsbild, daß die Membran sich glatt an die Gegenelektrode anlegt, also im angelegten Teil keine Buckel aufweist.

In der (Q, x) -Kennlinie 7.8 kann man kurz vor der RP ein leichtes Absinken der Ladung mit steigender Auslenkung beobachten. Bei der Membran findet man im Gegensatz zum Kippspiegel den Effekt der nicht-monotonen Ladung.

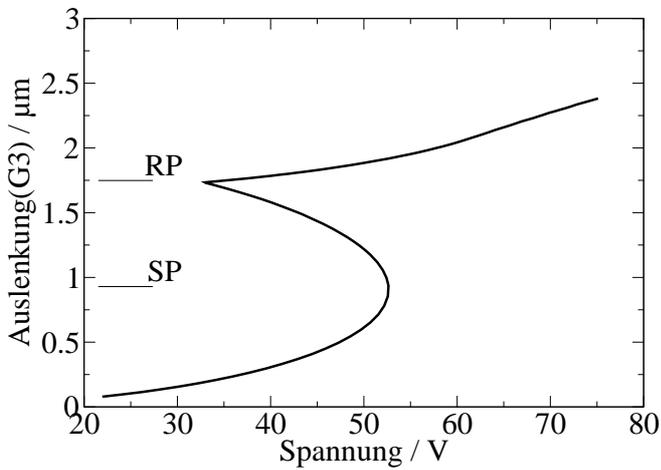


Abb. 7.5: (U, x) -Kennlinie der Mikromembran.

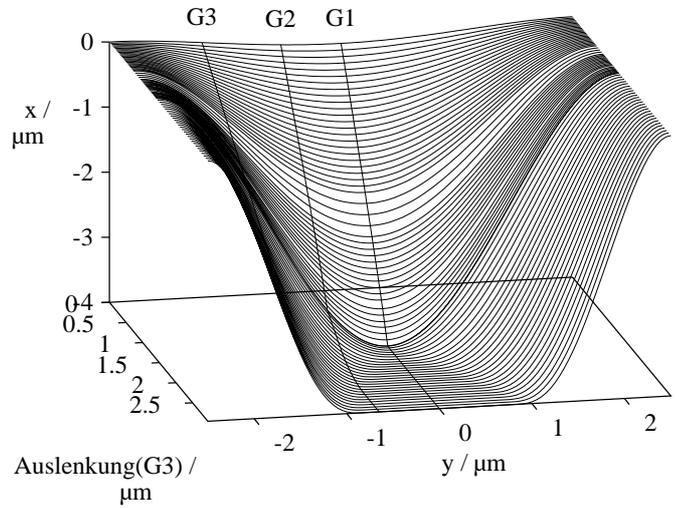


Abb. 7.6: Verformung der Mikromembran über der Auslenkung des Oberflächenpunkts G3.

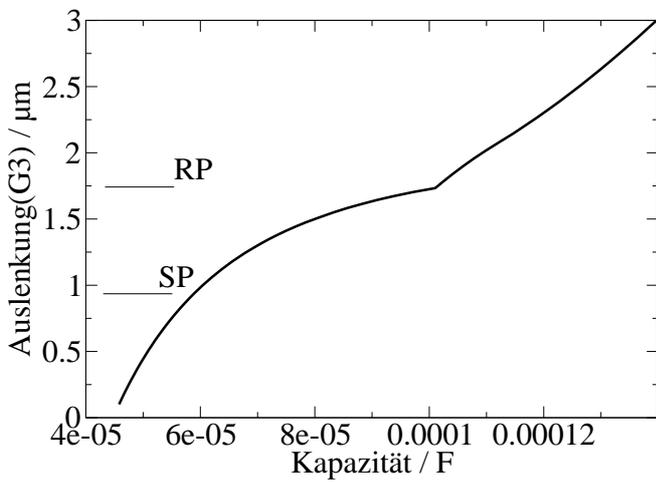


Abb. 7.7: (C, x) -Kennlinie der Mikromembran.

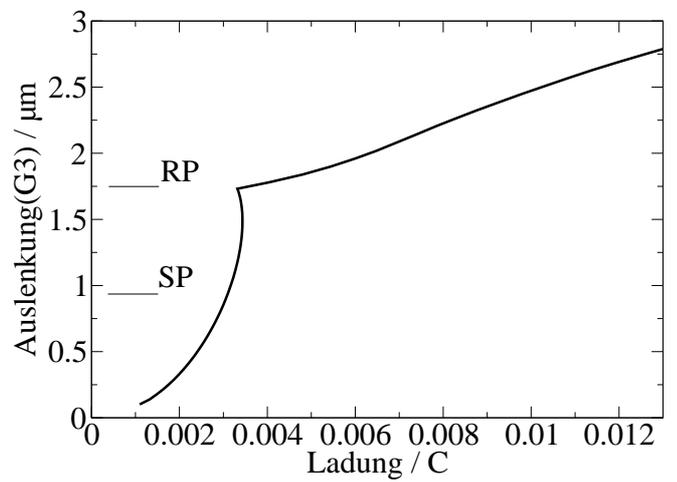


Abb. 7.8: (Q, x) -Kennlinie der Mikromembran.

3) Der Balken

Das Beispiel des Balkens (vgl. geometrischer Aufbau Abb. 5.27) zeigt in der (U, x) -Kennlinie (Abb. 7.9) eine zweite Snap-in-Position (SP2) und eine zweite Release-Position (RP2), die einer instabilen Anschmiegephase des Balkens an die Gegenelektrode entspricht. Von der zweiten Snap-in-Position zur zweiten Release-Position nimmt die Spannung von 155 Volt auf 152 Volt ab. Die zweite Release-Position findet man auch in der (C, x) - und der (Q, x) -Kennlinie wieder, nämlich dort, wo Knicke im Verlauf auftreten.

Nicht-monotone Ladungsverläufe treten beim Balken nur vor dem ersten Release-Point auf, nicht aber vor dem zweiten, vgl. Abb. 7.12. Der Grund für dieses unterschiedliche Verhalten der (Q, x) -Kennlinie vor den zwei Release-Positionen liegt wesentlich in der Art des "Schnappens". Nähert sich das "Schnappverhalten" einem "Abrollverhalten" an, kann kein nicht-monotoner Ladungsverlauf mehr beobachtet werden. Bei den nächsten zwei Beispielen, dem Biegebalkenrelais und dem Wanderkeilrelais, ist dieser Zusammenhang ebenfalls zu beobachten. Nicht-monotone Ladungsverläufe werden in Kap. 7.2 diskutiert.

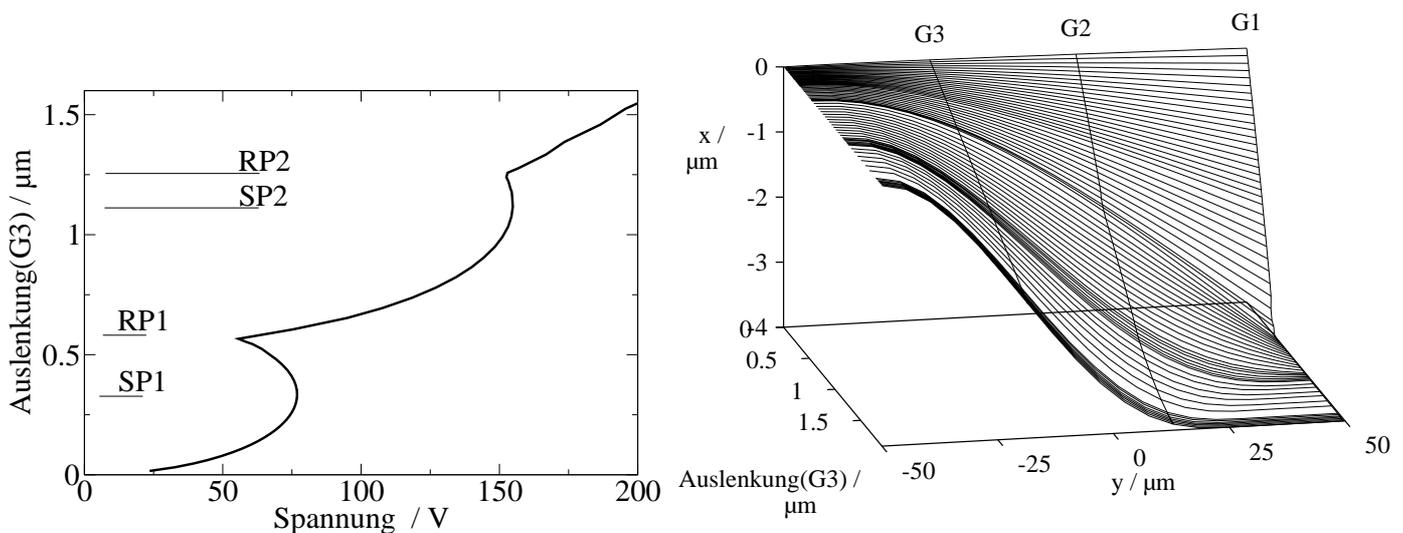


Abb. 7.9: (U, x) -Kennlinie des Balkens.

Abb. 7.10: Verformung des Balkens über der Auslenkung des Oberflächenpunkts G3.

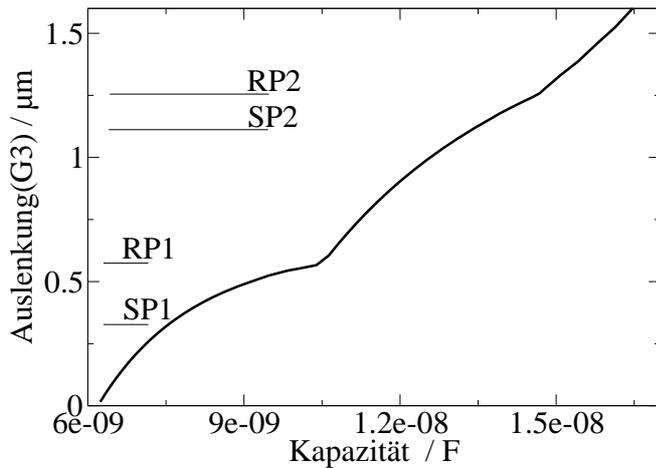


Abb. 7.11: (C, x) -Kennlinie des Balkens.

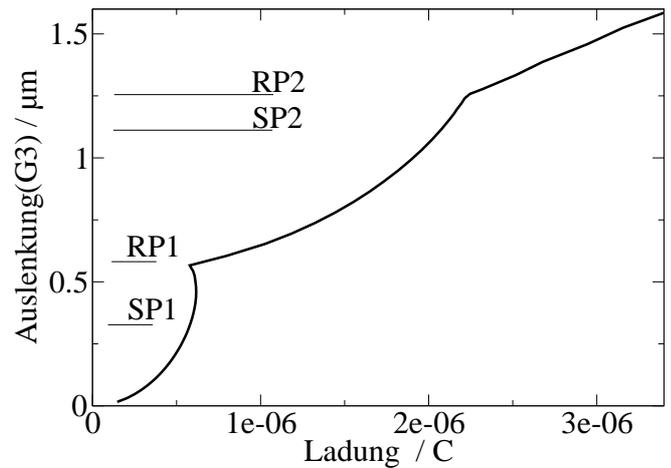


Abb. 7.12: (Q, x) -Kennlinie des Balkens.

4) Das Biegebalkenrelais

Die (C, x) -Kennlinie des Relais (vgl. geometrischer Aufbau Abb. 5.25) in Abb.7.15 zeigt wieder ähnlich monotonen Verhalten wie alle Vorgängerbeispiele. Die (U, x) -Kennlinie des Relais (Abb. 7.13) besitzt, wie schon der Balken, einen doppelten Snap-Point. Die erste Snap-in-Position tritt auf, wenn die Relaisspitze auf die Kontakterhöhung "schnappt". Nach weiterer Spannungserhöhung "schnappt" die Balkenmitte des Relais ähnlich wie die Membran auf die Gegenelektrode.

Im Gegensatz zum Balken ist der Übergang von der Snap-in-Position 2 auf die Release-Position 2 beim Biegebalkenrelais eine Schnappbewegung, kein Abrollverhalten, deswegen tritt an beiden Release-Positionen der Effekt der nicht-monotonen Ladung auf. Man kann kurz vor RP1 und RP2 in der (Q, x) -Kennlinie (Abb. 7.16) ein leichtes Absinken der Ladung mit zunehmender Auslenkung beobachten.

Die absolute Größe der Snap-in-Spannung von SP1 und SP2 (Abb. 7.13) sowie ihr Größenverhältnis zueinander kann bei Geometrieänderung des Bauteils verschoben werden. Bei Spannungssteuerung treten dann am Biegebalkenrelais ein oder zwei Snap-down-Spannungen auf, abhängig davon, ob die Spannung an SP1 größer oder kleiner als die an SP2 ist. Eine genauere Untersuchung dieses Effekts findet man in Kap. 7.3.

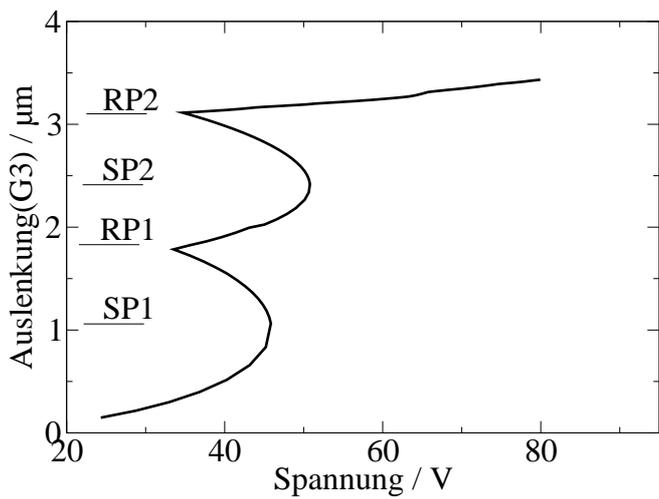


Abb. 7.13: (U, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais.

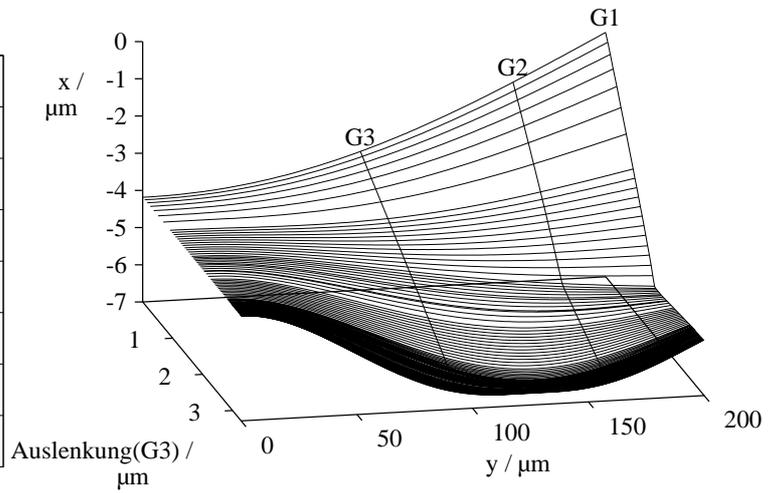


Abb. 7.14: Verformung des Biegebalkenrelais über der Auslenkung des Oberflächenpunkts G3.

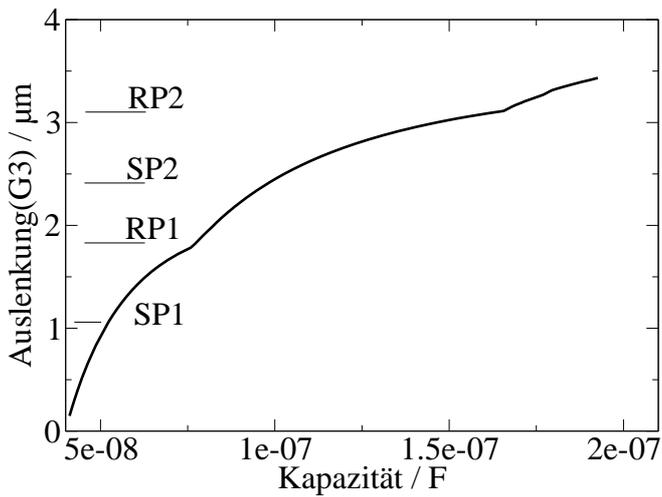


Abb. 7.15: (C, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais.

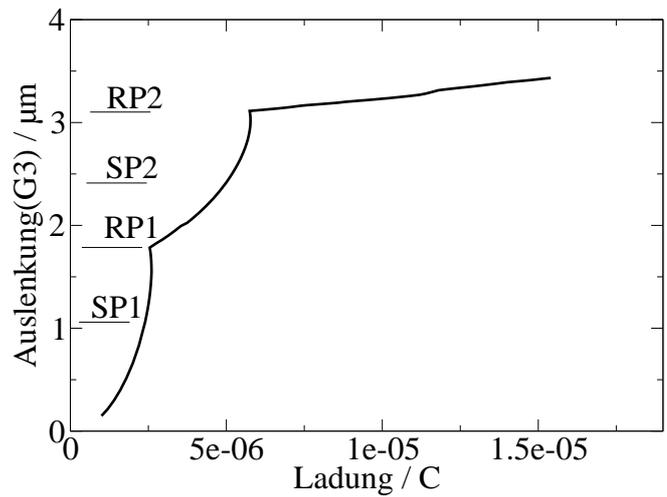


Abb. 7.16: (Q, x) -Kennlinie des Biegebalkenrelais.

5) Das Wanderkeilrelais

Das letzte Beispiel ist ein Wanderkeilrelais (vgl. geometrischer Aufbau Abb. 5.26). Hier wurde die Auslenkung wieder mit dem geometrisch sensitivsten Punkt G1 des Relaisbalkens angetragen, der sich an der Balkenspitze befindet.

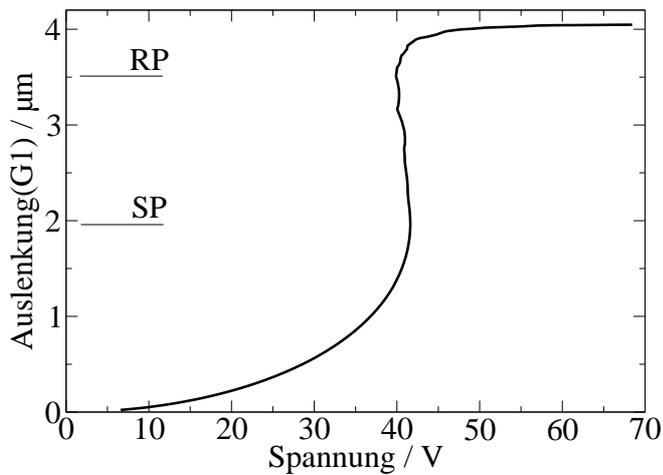


Abb. 7.17: (U, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais.

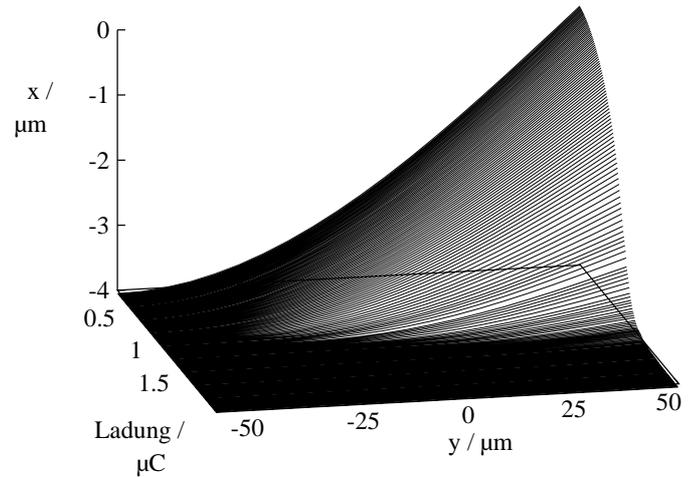


Abb. 7.18: Verformung des Wanderkeilrelais über der Ladung.

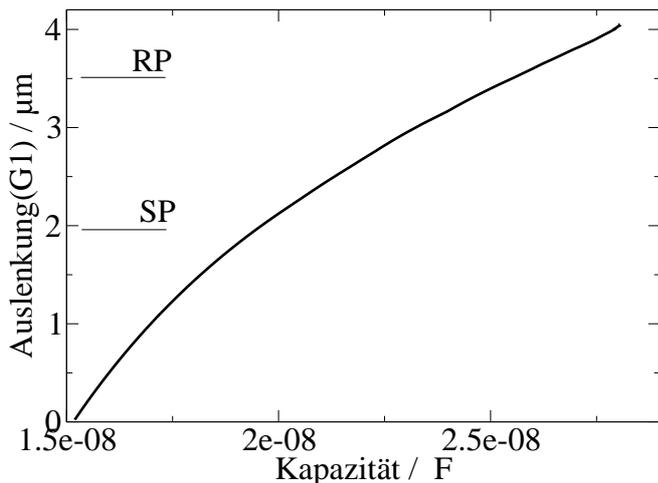


Abb. 7.19: (C, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais.

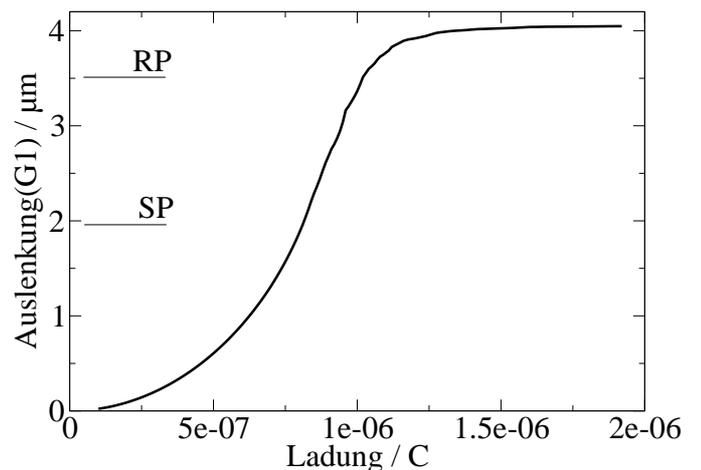


Abb. 7.20: (Q, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais.

Das Wanderkeilrelais ist vorgekrümmt und rollt, bei zunehmender Ladung, auf der Isolationschicht bis in die waagrechte Position ab (vgl. Abb. 7.18). Die Snap-in-Position und die Release-

Position sind nicht sehr ausgeprägt. Allerdings bedeutet ihr Auftreten lokal instabile Bereiche im Abrollverlauf, welches dem zweiten Snap-in / Release -Paar beim Balken entspricht.

Die (C, x) - und (Q, x) -Kennlinie (vgl. Abb. 7.19 und 7.20) sind streng monoton und die (Q, x) -Kennlinie weist keinen kritischen Bereich für die Simulation auf, trotz des Auftretens von Umkehr- und Release-Punkten, das Abrollverhalten dominiert hier das instabile Verhalten.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die entwickelten Algorithmen eine gute Darstellung des Bauteilverhaltens im gesamten Simulationsbereich ergeben, sowohl im instabilen als auch im stabilen Bereich.

Damit ist das Verfahren z.B. in der Lage, den bisher unbekanntem Effekt der nicht-monotonen Ladung (Kap. 7.2) aufzudecken und die prinzipiellen Unterschiede zwischen Abroll- und Schnappverhalten (Kap. 7.1) aufzuzeigen.

7.1.2 Energieverteilungen

Um den Energieumsatz während der Bauteilbewegung zu untersuchen, wurde für einige Bauteile die elektrische, die mechanische und die zugeführte Energie im Arbeitsbereich berechnet. Die dem Bauteil von einer äußeren Energiequelle ("Einspeisung") zugeführte Energie $W_{ges} = \int U dQ$ (im folgenden als Gesamtenergie bezeichnet) ist im Bauteil als elektrische Energie $W_{el} = \frac{1}{2}U \cdot Q$ und mechanische Energie W_{mech} gespeichert. Vernachlässigt man Reibung und Dämpfung, so erhält man über die Energiebilanz $W_{mech} = W_{ges} - W_{el}$. Die kinetische Energie des Bauteils spielt keine Rolle, weil die Homotopie eine Kette von Gleichgewichtspunkten berechnet.

Die Abb. 7.21 bis 7.24 zeigen die Energieverläufe über der Position eines ausgewählten Punktes für den Mikrokippspiegel, die Mikromembran, den Balken und das Biegebalkenrelais. All diese Bauteile weisen einen frei beweglichen, instabilen Bereich auf, zeigen also kein reines Abrollverhalten.

Bei diesen Bauteilen wandelt sich vor der Release-Position ein Teil der gespeicherten elektrischen Energie W_{el} in mechanische Energie um, die (W_{el}, x) -Kennlinie zeigt einen fallenden Teil. Bemerkenswert ist dabei, daß diese Umwandlung bei allen Bauteilen nicht bereits an der Snap-in-Position einsetzt, sondern danach, der Scheitel der (W_{el}, x) -Kennlinie fällt nicht mit der Snap-in-Position zusammen.

Die rückläufige Ladung des vorigen Abschnitts (vgl. Abb. 7.8, 7.12 und 7.16) spiegelt sich in den Energieverläufen wieder. Mikromembran, Balken und Biegebalkenrelais (Abb. 7.22 - 7.24) zeigen zwischen erster Snap-in-Position und erster Release-Position eine fallende Gesamtener-

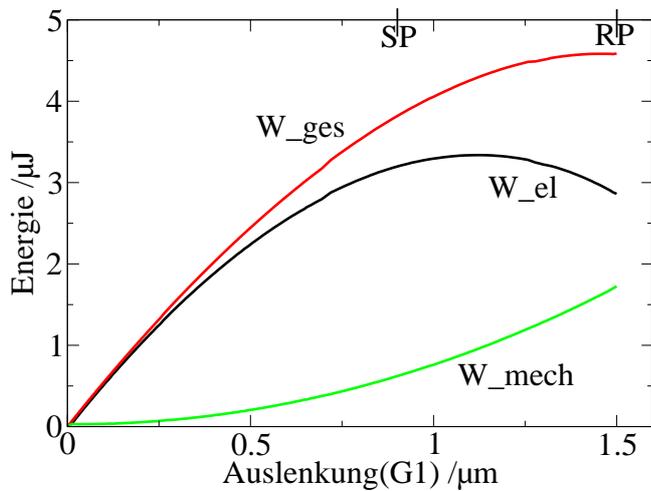


Abb. 7.21: Energien über der Auslenkung im Mikrokippspiegel.

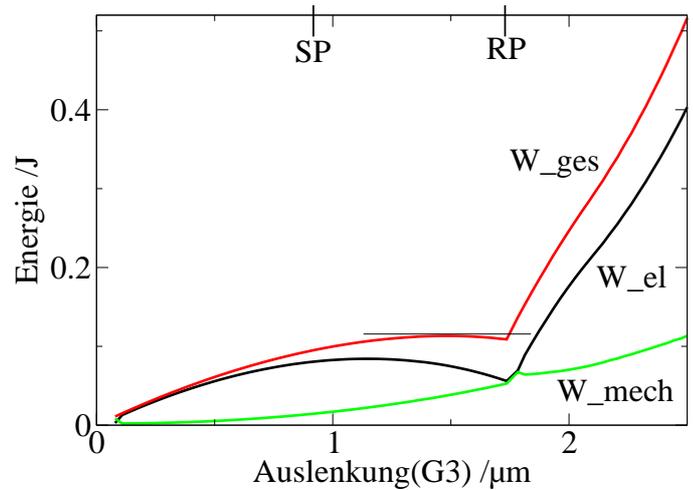


Abb. 7.22: Energien über der Auslenkung in der Mikromembran.

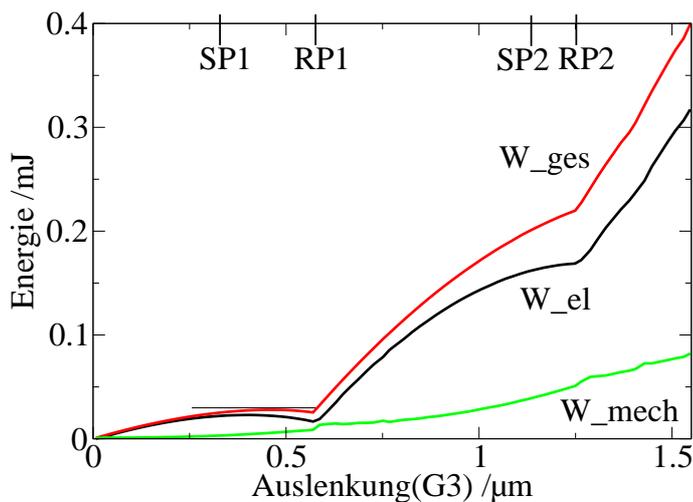


Abb. 7.23: Energien über der Auslenkung im Balken.

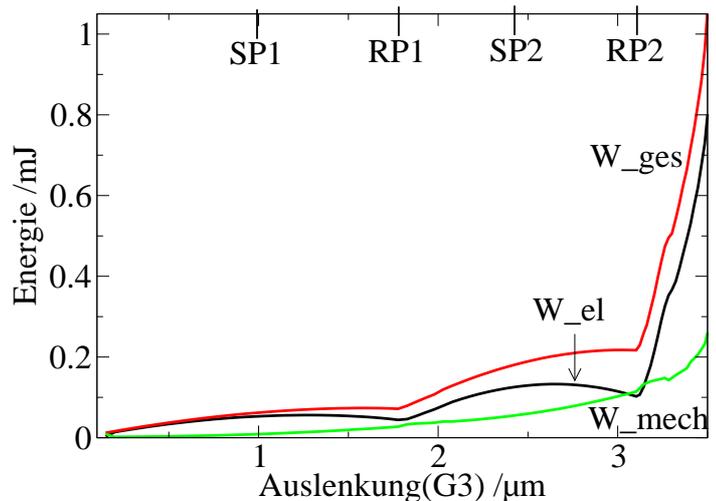


Abb. 7.24: Energien über der Auslenkung im Biegebalkenrelais.

gie. Beim Biegebalkenrelais ist sie wegen des Maßstabs optisch nicht zu erkennen, tritt aber bei einer Analyse der Zahlenwerte zutage.

Das bedeutet, daß die gespeicherte elektrische Energie in diesen Bauteilen vor der ersten Release-Position nicht nur in mechanische Energie umgewandelt wird, sondern auch zu einem kleinen Teil in die elektrische Einspeisung zurückfließt. Die nachstehende Tabelle zeigt, welche Energieanteile vor den jeweiligen Release-Positionen in mechanische Energie umgewandelt werden bzw. in die Einspeisung zurückfließen.

Als 100 % der elektrischen Energie wird der Scheitelwert von W_{el} vor der jeweiligen

Release-Position angesetzt, die umgewandelte elektrische Energie ΔW_{el} ist die Differenz zwischen Scheitelwert $W_{el,max}$ und dem Wert von W_{el} an der Release-Position. Analog wird die rückgespeiste Energie ΔW_{ges} als Differenz zwischen den W_{ges} -Werten zwischen Scheitel und Release-Position berechnet. Der in mechanische Energie umgewandelte Anteil ΔW_{mech} berechnet sich als $\Delta W_{mech} = \Delta W_{el} - \Delta W_{ges}$.

Bauteil	$\Delta W_{el}/W_{el,max}$ (%)	$\Delta W_{mech}/W_{el,max}$ (%)	$\Delta W_{ges}/W_{el,max}$ (%)
Mikrokippspiegel	14,26	14,26	0,00
Mikromembran	33,50	28,15	5,35
Balken RP1	27,49	16,34	11,15
Biegebalkenrelais RP1	21,00	17,72	3,28
Biegebalkenrelais RP2	22,97	22,35	0,62

Tab. 7.1: Energieanteile, die bei Snap-down umgewandelt werden.

Die Abb. 7.25 bis 7.27 zeigen drei Varianten des Wanderkeilrelais, das ein reines Abrollverhalten und keinen frei beweglichen instabilen Bereich aufweist.

Das Wanderkeilrelais unterscheidet sich von den vorherigen Beispielen dadurch, daß in ihm keine Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie stattfindet. Das Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II (vgl. Abb. 7.25) ist dasjenige, mit dem alle bisherigen Simulationen der vorherigen Abschnitte durchgeführt wurden. Das Wanderkeilrelais mit Parabelprofil III hat im Vergleich zum Parabelprofil II eine leicht veränderte Anfangskrümmung. Im Gegensatz zum Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II weist es einen ausgeprägten Snap-Point auf (vgl. (U, x) -Kennlinie Abb. 7.47). Trotz dieses stark ausgeprägten Snap-Points sind die Energiekurven W_{ges} und W_{mech} in Abbildung 7.26 streng monoton steigend.

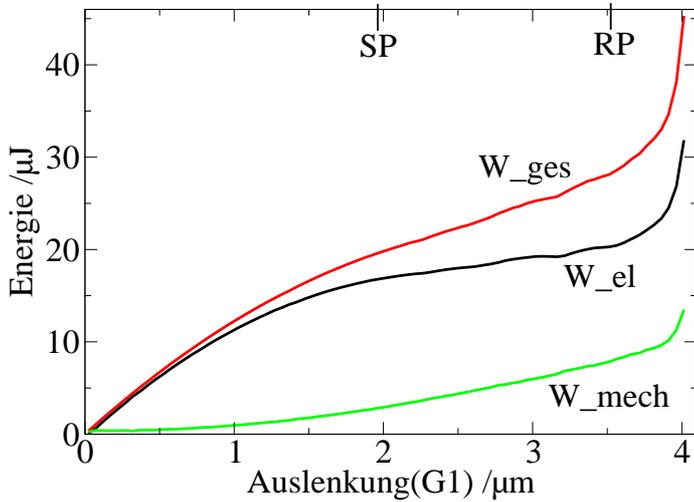


Abb. 7.25: Energien über der Auslenkung im Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II.

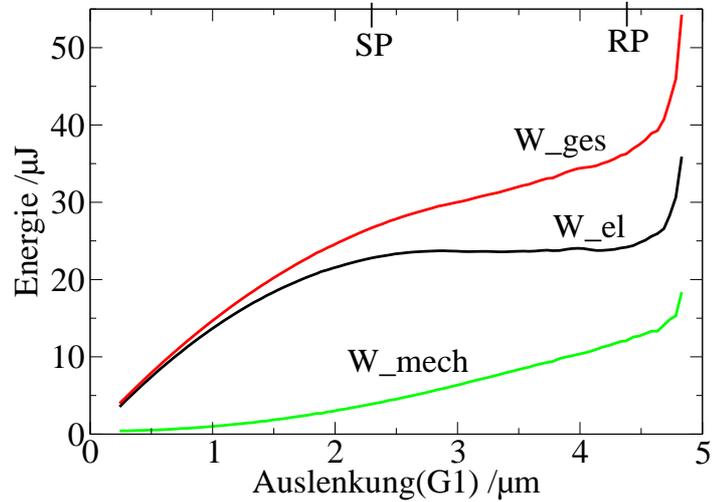


Abb. 7.26: Energien über der Auslenkung im Wanderkeilrelais mit Parabelprofil III.

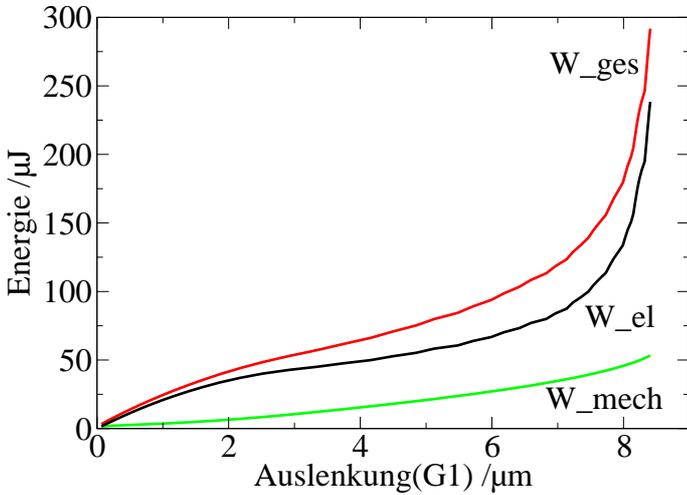


Abb. 7.27: Energien über der Auslenkung im Wanderkeilrelais mit Kreisprofil 10 Grad.

Zusammenfassend kann man folgendes sagen: Wenn ein frei beweglicher, instabiler Bereich (gekennzeichnet durch "Schnappen") durchlaufen wird, findet eine Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie statt. In diesem Fall fließt immer auch ein Teil der elektrischen Energie in die elektrische Einspeisung zurück, entsprechend des Effekts der rückläufigen Ladung.

Bei Abrollverhalten des Bauteils tritt keine Rückspeisung der Energie auf, und auch keine Umwandlung elektrischer in mechanische Energie.

7.1.3 Feldstärken

Schließlich sollen noch die elektrischen Feldverteilungen, die an der Oberfläche einiger Beispielbauteile auftreten, diskutiert werden.

Damit kann gezeigt werden, wo die höchsten Feldstärken auftreten, was zu einer einfachen Abschätzungsregel für die maximale Feldstärke eines Bauelements führt.

Die Abb. 7.28 - 7.31 zeigen die Feldstärken über dem Ort an Membran, Balken, Biegebalkenrelais und Wanderkeilrelais.

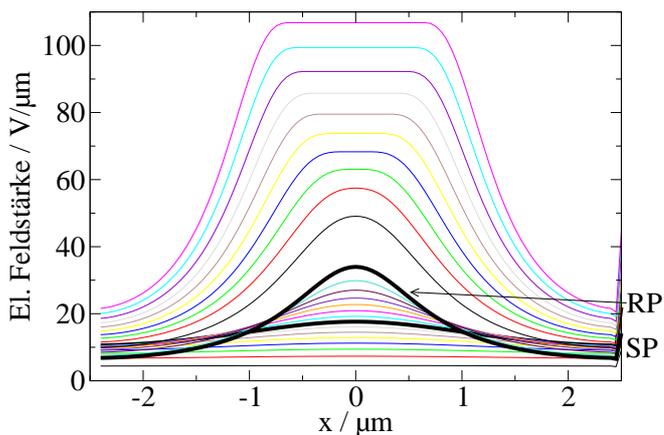


Abb. 7.28: Elektrischer Feldverlauf der Membran.

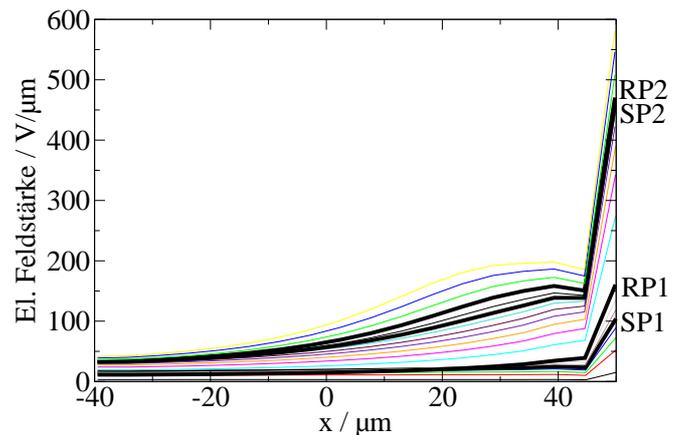


Abb. 7.29: Elektrischer Feldverlauf des Balkens.

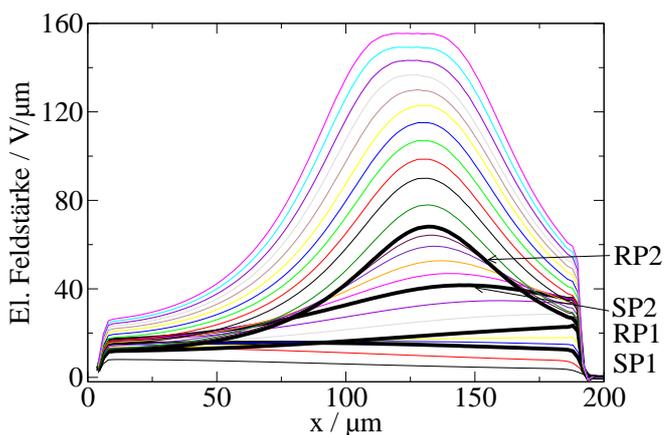


Abb. 7.30: Elektrischer Feldverlauf des Biegebalkenrelais mit Parabelprofil.

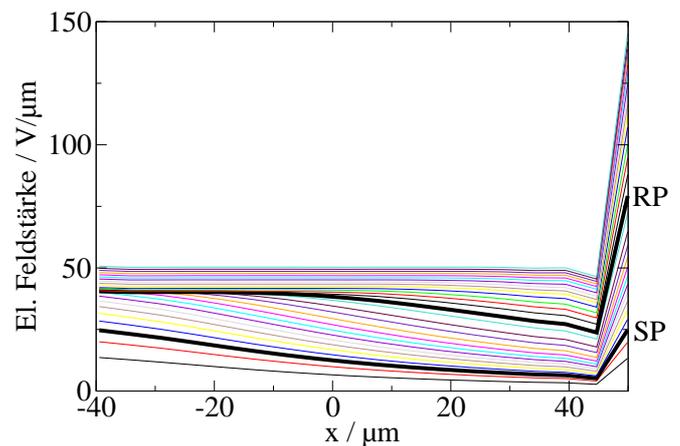


Abb. 7.31: Elektrischer Feldverlauf des Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II.

Die Linien entsprechen Arbeitspunkten beim Durchlaufen des Arbeitsbereichs. Hervorgehoben sind die Linien, die zu Snap-in- und Release-Positionen gehören.

Bei der Berechnung der Feldstärke wurden die Spannungen zugrunde gelegt, die den Gleichgewichtspunkten der (U, x) -Kurve entsprechen. Die real auftretenden Feldstärken können höher

sein als hier gezeigt, weil nach der Snap-in-Position die Snap-in-Spannung bis zum Anschlag wirksam ist. Hier soll aber nur die prinzipielle Form und der Ort der höchsten Feldstärke gezeigt werden, um ein einfaches Verfahren zur Abschätzung der maximalen Feldstärken zu entwickeln. Bei Balken und Wanderkeilrelais treten die höchsten Feldstärken an der Balkenspitze auf, wegen der Feldüberhöhung an der Kante zwischen Balkenunterseite und Balkenstirnseite.

Beim Biegebalkenrelais, das dieselbe Kante aufweist, treten diese hohen Feldstärken jedoch nicht auf. Das wird durch die Geometrie des Biegebalkenrelais (Abb. 5.25 auf Seite 88) erklärlich: Die Spitze des Biegebalkenrelais befindet sich nicht unmittelbar über der Gegenelektrode, sondern in einem neutralen Bereich, deswegen tritt an der Spitze kein nennenswertes Feld auf.

Das bedeutet, daß der Kanteneffekt durch geeignete Designmaßnahmen ausgeschaltet werden kann. Nicht beliebig reduzierbar ist jedoch das Feld in der Fläche des Balkens, da dieses die Antriebskraft des Bauteils liefert.

Die Feldstärkebilder zeigen, daß die höchste Feldstärke auftritt, wenn die bewegliche Elektrode die Gegenelektrode berührt.

Zur Berechnung der Feldstärke an der Elektrodenoberfläche ist davon auszugehen, daß sich auch im angeschmiegteten Zustand eine sehr dünne Luftschicht zwischen Elektrode und Isolation befindet. In diesem Fall kann die maximale Feldstärke an der Elektrodenoberfläche (ohne Kanteneffekt) als $E_{max} = U/d \cdot \epsilon_r$ berechnet werden, mit der anliegenden Spannung U , der Isolierschichtdicke d und der Permittivität ϵ_r der Isolierschicht.

Im Designablauf genügt es also, Betriebsspannungen und Isolierschichtdicke so auszulegen, daß keine Überschlagnfeldstärken auf den Elektrodenflächen erreicht werden, und dann durch Kantenverrundung und Verlegung von Kanten in feldarme Bereiche dafür zu sorgen, daß die Feldstärken an den Kanten die Feldstärken auf den Elektrodenflächen nicht überschreiten.

7.2 Nicht-monotone Ladungsverläufe

Nicht-monotone Ladungsverläufe konnte man bereits bei den Simulationsergebnissen der Multiparameter-Homotopie aus Abschnitt 7.1 beobachten (vgl. z.B. Abb. 7.8).

Die Punkte a, b, c und d, die in die Simulationsergebnisse der Q -Homotopie eingetragen sind, markieren entsprechend den bei diesem Verfahren nicht auflösbaren Bereich vor den Release-Points (vgl. z.B. Abb. 6.11)

Im folgenden sind für das Beispiel der Mikromembran die drei Kennlinien (U, x) , (C, x) und (Q, x) jeweils aus einer Simulation mit Multiparameter-Homotopie und einer mit Q -Homotopie gemeinsam in einer Abbildung gezeigt (Abb. 7.32-7.34).

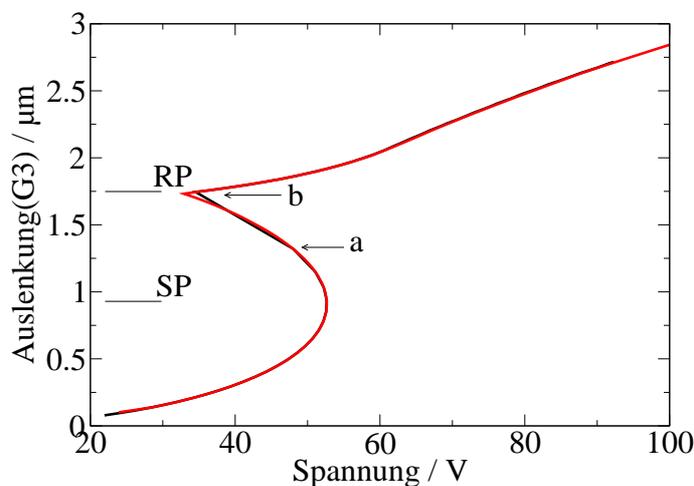


Abb. 7.32: (U, x) -Kennlinie der Mikromembran.

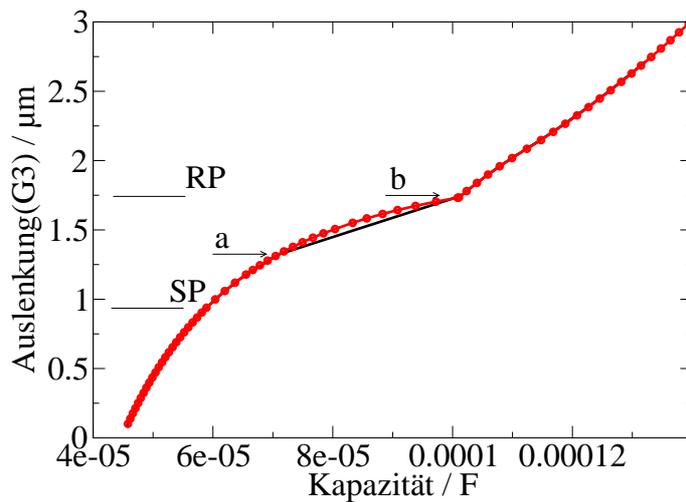


Abb. 7.33: (C, x) -Kennlinie der Mikromembran. Die Punkte markieren Simulationsergebnisse.

Dabei wird sofort anhand der Unterschiede in den Kennlinien klar, wo und wie sich bei der Q -Homotopie die rückläufige Ladung auswirkt. In der (Q, x) -Kennlinie 7.34 beobachtet man die abnehmende Ladung kurz vor der Release-Position. Der Punkt a liegt ungefähr am Ort der senkrechten Tangente an die Kennlinie, der Punkt b fast senkrecht über diesem, lediglich um ein kleines ΔQ versetzt. Da die Ladung der Release-Position mit der Q -Homotopie nicht

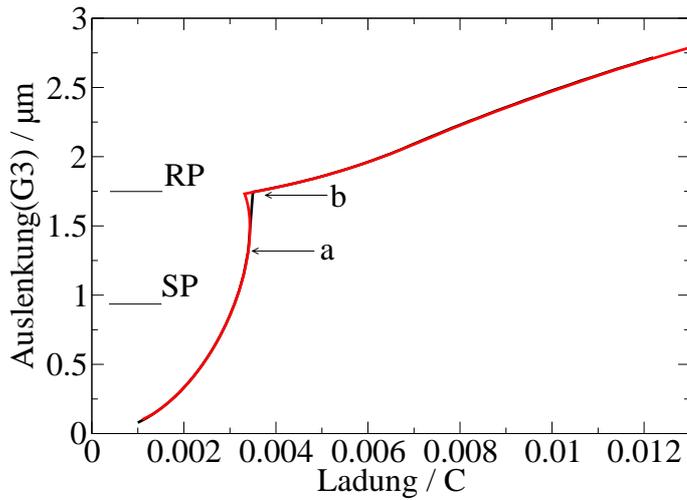


Abb. 7.34: (Q, x) -Kennlinie der Mikromembran.

erreichbar ist, kann natürlich auch die Release-Spannung nicht exakt getroffen werden (Abb. 7.32). Bei der Kapazitätskennlinie erkennt man den gepunkteten Kurvenverlauf zwischen den Punkten a und b mit der Multiparameter-Homotopie (Abb. 7.33).

Im folgenden soll diskutiert werden, bei welchen Bauteilen man rückläufige Ladungsverläufe erwarten kann und wo sie typischerweise auftreten.

a) Rückläufiges Verhalten der Ladung vor der Release-Position

Bei der Mikromembran, beim Balken und beim Biegebalkenrelais konnte rückläufiges Verhalten der Ladung beobachtet werden. In den Abb. 7.35 - 7.37 sind die jeweiligen relativen Positions- und Ladungsfehler eingezeichnet, ebenso die Punkte a, b, c und d aus der Q -Homotopie (vgl. Abb. 6.11, 6.12 und 6.13).

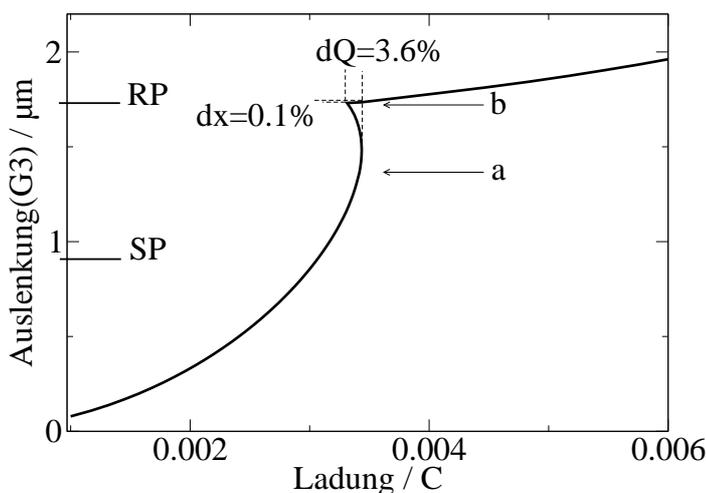


Abb. 7.35: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für die Mikromembran.

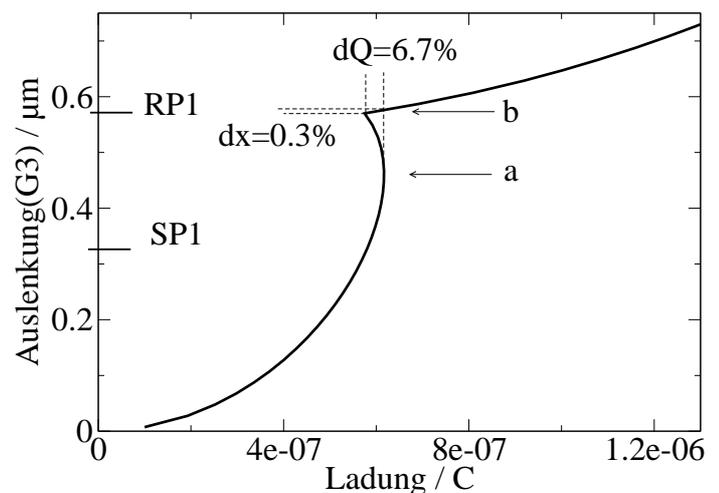


Abb. 7.36: Auslenkung über Ladung im Bereich vor erster RP für den Balken.

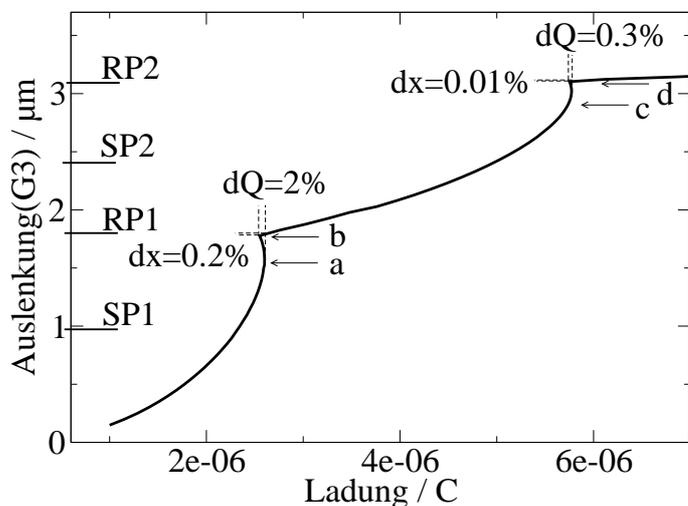


Abb. 7.37: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für das Biegebalkenrelais.

Bemerkenswert ist, daß vor allem die Genauigkeit der Ladung an der Release-Position von diesem Effekt betroffen ist (2%...6,7% in den untersuchten Beispielen), während die Genauigkeit der Release-Position wegen des flachen Kennlinienverlaufs nach der Release-Position nur unwesentlich beeinflusst wird (0,1%...0,3% in den Beispielfällen). Das bedeutet, daß auch bei rückläufiger Ladung eine exakte Release-Position mit ladungsgesteuerter Homotopie ermittelt werden kann. Bei der Berechnung der Release-Spannung mit ladungsgesteuerter Homotopie ist jedoch der Fehler der Release-Spannung in der Größenordnung des Ladungsfehlers, und zwar auch bei beliebig feiner Q -Diskretisierung.

b) Streng monoton steigendes Verhalten der Ladung vor der Release-Position

Das Phänomen der rückläufigen Ladung tritt jedoch nicht bei allen Bauteilen auf. In den Beispielen Mikrokippspiegel und Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II / III und Kreisprofil 10 Grad (Abb. 7.38 - 7.41) ist der (Q, x) -Verlauf monoton. Der Mikrokippspiegel zeigt an der Release-Position eine senkrechte Tangente, die Varianten des Wanderkeilrelais sind streng monoton. Auch vor der zweiten Release-Position beim Balken liegt ebenfalls ein streng monotonen Verhalten der Ladung vor. Abbildung 7.36 im vorigen Abschnitt zeigt nur die erste Release-Position.

Dabei fällt auf, daß bei den Beispielen 7.39-7.41 im Betrieb stets die Elektrode auf der Gegenelektrode abrollt, es tritt nirgends ein "Schnappverhalten" auf. Vergegenwärtigt man sich ferner, daß an der zweiten RP des Balkens ebenfalls ein Abrollprozeß vorliegt (vgl. Abb. 7.10), dann kann man folgern, daß rückläufige Ladung niemals bei Anschmiegeprozessen auftritt. Das ist auch unabhängig davon, wie stark die SP/RP im Anschmiegeprozeß ausgeprägt ist (vgl. Abb. 7.40 mit schwach ausgeprägten SP/RP und Abb. 7.41, deren sehr stark ausgeprägte SP/RP in Abb. 7.47 zu sehen ist). Die Ladungsmonotonie bei Abrollprozessen wurde bereits bei den (Q, x) -Kennlinien beobachtet, die mit Ladungshomotopie simuliert wurden (vgl. S. 138).

Instabile Bewegungen ohne Kontakt wie beim Balken bis zur ersten Release-Position, beim Biegebalkenrelais und bei der Membran (Abschnitt a) weisen im Gegensatz dazu rückläufige Ladung auf. Einen Grenzfall bildet der Kippspiegel, der frei beweglich ist, aber keine rückläufige Ladung zeigt, sondern nur eine senkrechte Tangente.

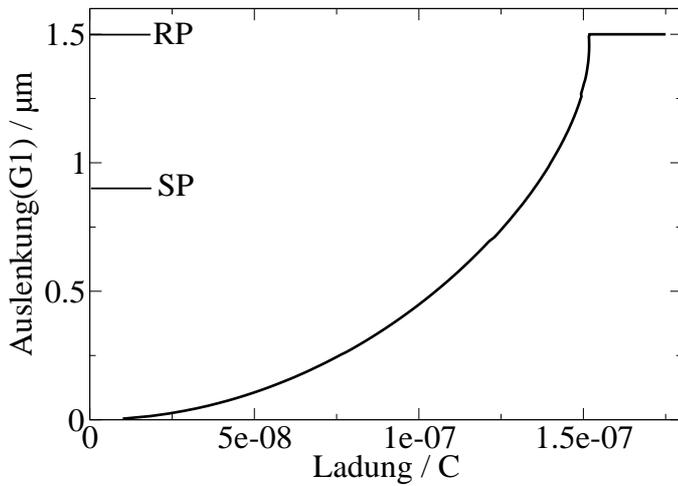


Abb. 7.38: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für den Mikrokippspiegel.

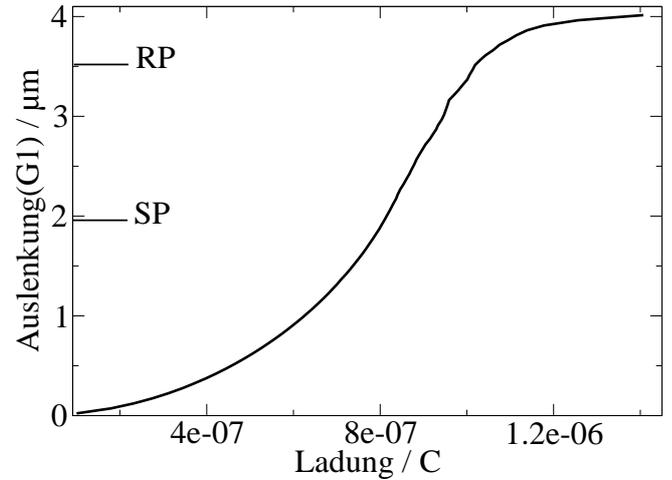


Abb. 7.39: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für das Wanderkeilrelais mit Parabelprofil II.

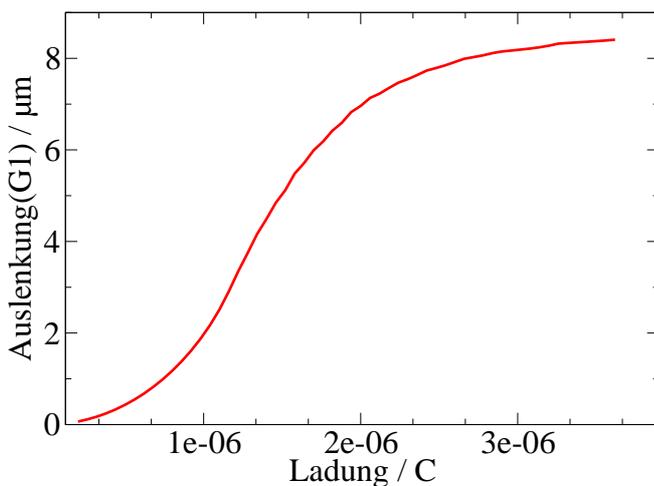


Abb. 7.40: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für das Wanderkeilrelais mit Kreisprofil 10 Grad.

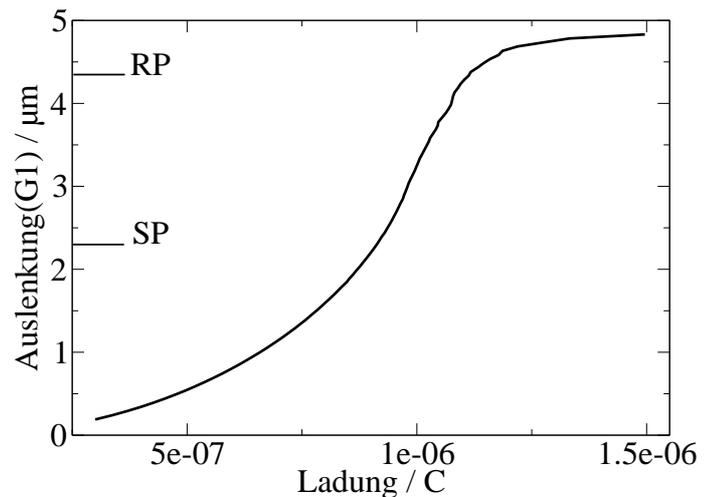


Abb. 7.41: Auslenkung über Ladung im Bereich vor RP für das Wanderkeilrelais mit Parabelprofil III.

Da es sich hier um Simulationsergebnisse und nicht um Messungen handelt, muß auch untersucht werden, ob das Phänomen auf rein numerische Effekte zurückzuführen ist. Ein erhöhter Fehler des BEM-Solvers aufgrund von nahe beieinanderliegenden Elektroden kann ausgeschlossen werden, weil der Fall anschmiegender Elektroden stabil berechnet wird. Weiterhin wurden einige Bauteile mit variierten Diskretisierungen der Geometrie und des Homotopieparameters simuliert. Die Ergebnisse waren identisch, das Phänomen der rückläufigen Ladung ist also tatsächlich eine Bauelementeigenschaft, kein numerischer Effekt.

Das Phänomen der rückläufigen Ladung ist physikalisch nicht dadurch zu erklären, daß sich die Geometrie des Bauteils vor der Release-Position so ändert, daß eine rückläufige Kapazität entsteht. Dies wurde durch Analyse der Geometrie- und Kapazitätsverläufe ausgeschlossen, alle Kapazitäten sind über der Position monoton steigend. Ebenso sind alle Spannungen vor der Release-Position monoton fallend. Vielmehr tritt rückläufige Ladung wegen des Zusammenhangs $\delta Q = U\delta C + C\delta U$ immer dann auf, wenn $\delta Q \leq 0$ für $U\delta C \leq -C\delta U$.

Zusammenfassend kann man sagen, daß das Phänomen der rückläufigen Ladung nur bei Bauteilen zu beobachten ist, die instabile Bewegungen ohne Kontakt aufweisen ("Schnappen"). Dort tritt das Phänomen jeweils kurz vor der RP auf. Bei Anschmiegeverhalten und Abrollverhalten eines Bauteils tritt nie rückläufige Ladung auf.

7.3 Unstetige Verhaltensänderungen am Biegebalkenrelais

In diesem Abschnitt werden für geometrische Varianten des Biegebalkenrelais (Abb. 5.25) die (U, x) -Kennlinien berechnet. Bei der Herstellung dünner freistehender Schichten entstehen häufig innere Spannungen, die über der Länge des Bauteils konstant sind und deswegen eine kreisförmige Krümmung nach oben bewirken. Entsprechend wurden verschiedene Kreis-krümmungen des Balkens modelliert. In diesen Varianten bilden die Tangenten an Anfang und Ende des Balkens Winkel zwischen 0 und 10 Grad. Um herauszufinden, ob das Kreisprofil Bauteileigenschaften verdeckt, die bei anderen Profilen zutage treten, wurde noch ein parabelförmiges Profil berücksichtigt, dessen Anfangskrümmung dem Kreisprofil mit 3 Grad Tangentenwinkel entspricht.

	Tangentenwinkel	Auslenkung $k/\mu m$
Kreisform	0°	1,50
Kreisform	1°	3,25
Kreisform	2°	5,00
Parabelform	—	5,68
Kreisform	3°	6,74
Kreisform	5°	10,22
Kreisform	10°	18,92

Tab. 7.2: Auslenkung der Kreis- und Parabelprofile des Biegebalkenrelais.

Dieses Profil wurde auch bei den Beispielsimulationen zur Beschreibung der Algorithmus-Eigenschaften (Kap. 6) verwendet und bei den Grundkennlinien (Kap. 7.1) gezeigt. Die Abb. 7.42 und 7.43 zeigen die Geometrie der verwendeten Profile, die Höhe der Balkenspitze über dem Kontakt (Maß "k" in Abb. 5.25) ist der Tabelle 7.2 zu entnehmen.

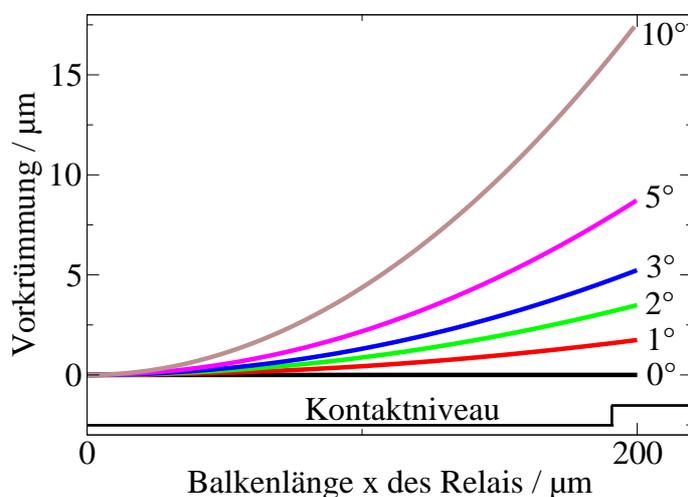


Abb. 7.42: Untersuchte Kreisprofile des Biegebalkenrelais.

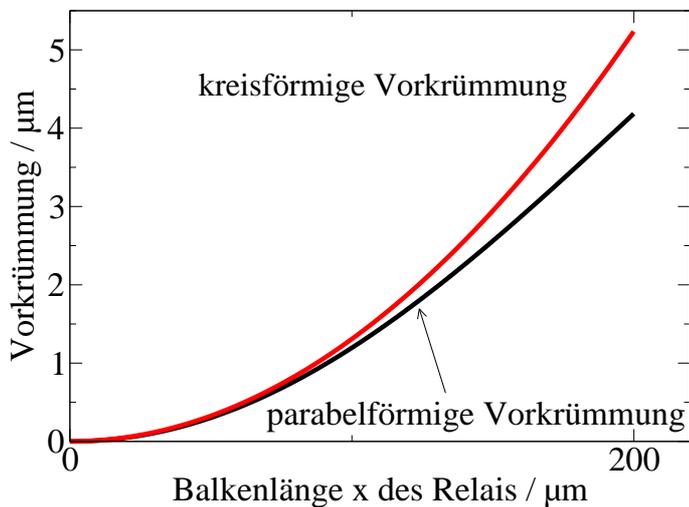


Abb. 7.43: Vergleich zwischen Kreisprofil (Tangentenwinkel 3°) und Parabelprofil des Biegebalkenrelais.

Die Ergebnisse der Kreisprofile in den Abb. 7.44 und 7.45 zeigen alle zwei Release- und Snap-in-Positionen, mit Ausnahme des um 10 Grad gekrümmten Profils, das so weit durchgebogen ist, daß der erste Kontakt in der Wölbung der Balkenmitte stattfindet und nicht an der Balkenspitze.

Besonders fällt auf, daß die Spannung der zweiten Release-Position trotz unterschiedlicher Vorkrümmung nahezu identisch bei ca. 35 V liegt.

Die Spannung an der ersten Snap-in-Position nimmt mit steigender Vorkrümmung zu, an der zweiten Snap-in-Position nimmt sie mit steigender Vorkrümmung ab. Das hat unmittelbaren Einfluß auf das makroskopische Bauteilverhalten: Unterhalb einer gewissen Vorkrümmung (im Beispiel 3 Grad) beobachtet man bei Spannungssteuerung zwei Snap-in-Positionen, darüber nur eine, weil ab dieser Krümmung die zweite Snap-Position eine geringere Spannung als die erste hat und deswegen übersprungen wird.

Der Vergleich der kreis- und parabelförmigen Profile in Abb. 7.46 zeigt denselben Effekt. Beim Kreisprofil wird eine Snap-in-Position übersprungen, beim speziellen Parabelprofil des Beispiels sind beide makroskopisch sichtbar. Prinzipielle Unterschiede zwischen Parabel- und Kreisprofil sind jedoch zu nicht beobachten.

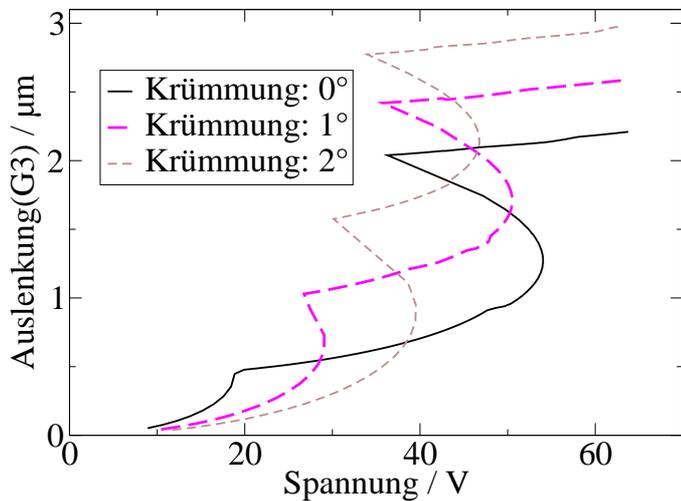


Abb. 7.44: (U, x) -Kennlinien der Biegebalkenrelais mit Kreisprofil $0^\circ - 2^\circ$.

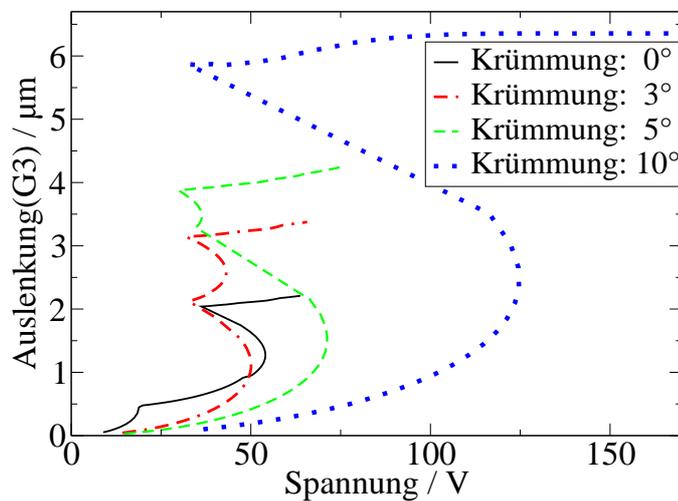


Abb. 7.45: (U, x) -Kennlinien der Biegebalkenrelais mit Kreisprofil $3^\circ - 10^\circ$.

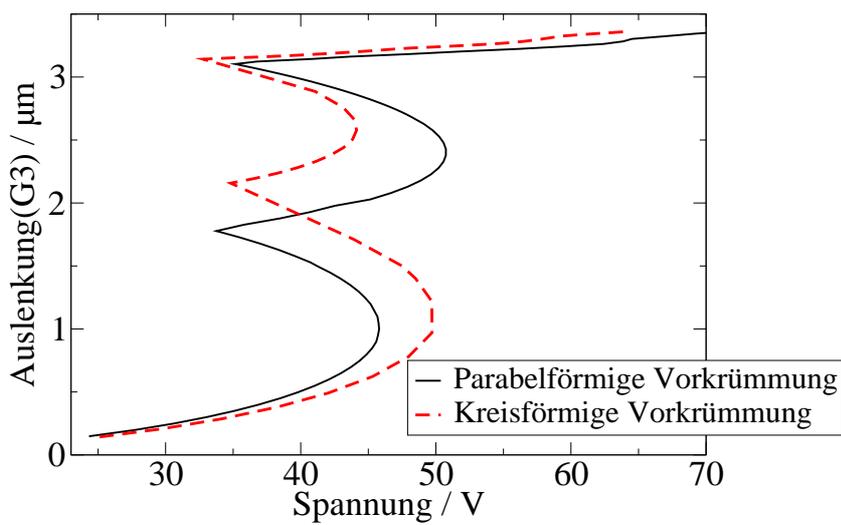


Abb. 7.46: (U, x) -Kennlinie eines kreisförmig und eines parabelförmig vorgekrümmten Biegebalkenrelais (Tangentenwinkel 3°).

7.4 Charakteristikenverschiebung am Wanderkeilrelais

Analog zum vorigen Abschnitt wird hier die Geometrie des Wanderkeilrelais (Abb. 5.26 auf S. 89) variiert. Berücksichtigt werden drei parabelförmige Profile gemäß Abb. 7.48 und sechs Kreisprofile, vgl. Abb. 7.50. Das bereits bei den Eigenschaften des Algorithmus verwendete Wanderkeilrelais entspricht dem Parabelprofil II. Der Abstand bzw. die Auslenkung "k" zwischen Balkenspitze und Gegenelektrode (vgl. Abb. 5.26) ist in der nachfolgenden Tabelle gegeben.

	Tangentenwinkel	Auslenkung $k/\mu m$
Kreisform	2°	1,75
Parabelform I	—	2,29
Kreisform	3°	2,62
Kreisform	4°	3,49
Parabelform II	—	4,05
Kreisform	5°	4,36
Parabelform III	—	4,87
Kreisform	10°	8,71

Tab. 7.3: Auslenkung der Kreis- und Parabelprofile des Wanderkeilrelais.

Die Ergebnisse für die parabelförmigen Profile sind in Abb. 7.47 zu finden. Ähnlich wie beim Biegebalkenrelais prägt sich mit zunehmender Vorkrümmung die erste Snap-in-Position immer weiter zu höheren Spannungen aus, obwohl das Wanderkeilrelais abrollt, während sich das Biegebalkenrelais ohne Kontakt durchbiegt.

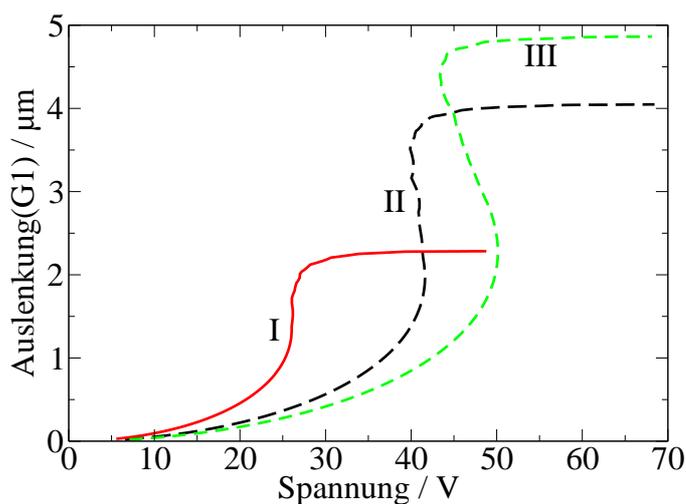


Abb. 7.47: (U, x) -Kennlinien der Wanderkeilrelais mit Parabelprofil.

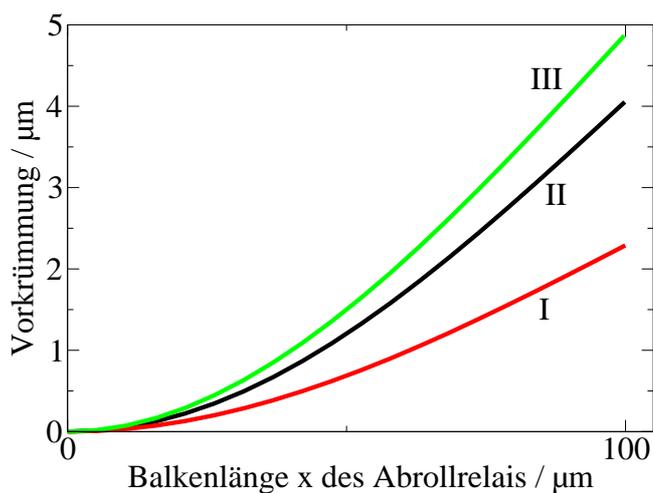


Abb. 7.48: Geometrischer Vergleich der 3 Parabelprofile des Wanderkeilrelais.

Bei geringer Vorkrümmung (Parabelprofil I) ist die erste Snap-in-Position so wenig ausgeprägt, daß dieses Relais im Prinzip im gesamten Arbeitsbereich mit der Spannung noch stabil gesteuert werden kann.

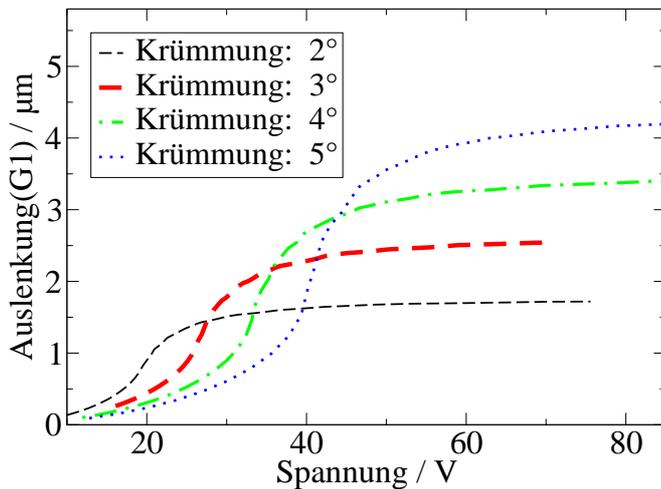


Abb. 7.49: (U, x) -Kennlinien der Wanderkeilrelais mit Kreisprofil $2^\circ - 5^\circ$.

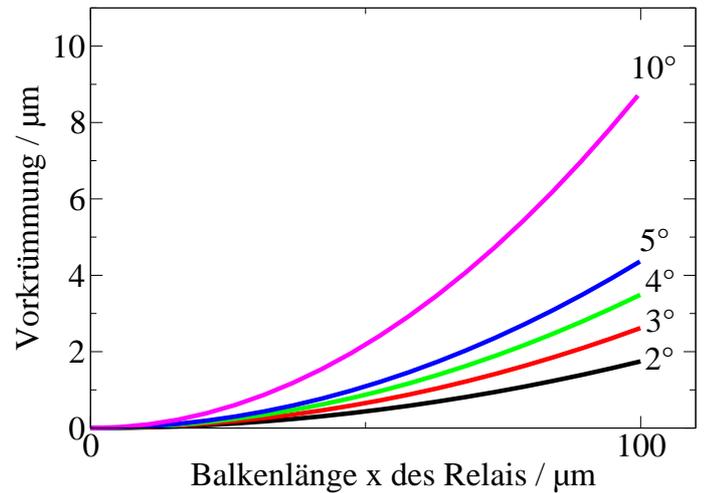


Abb. 7.50: Geometrischer Vergleich der Kreisprofile des Wanderkeilrelais.

Die Ergebnisse für kreisförmige Profile stellen die Abb. 7.49 und 7.51 dar. Auch stärker vorgekrümmte Relais (bis einschließlich 10 Grad Tangentenwinkel) sind stabil spannungssteuerbar. Das geometrische Profil hat also bei sonst gleichen Abmessungen wesentlichen Einfluß auf das Auftreten von linksdrehenden Faltungspunkten.

Mit zunehmender Krümmung wird die Kennlinie immer steiler (vgl. Abb. 7.49 und Abb. 7.51). Zusätzlich steigt natürlich das Niveau der Betriebsspannung mit steigender Vorkrümmung an. Im Gegensatz zum Parabelprofil prägt sich beim Kreisprofil aber keine globale Snap-in-Position aus. Die Einbeziehung von Parabel- und Kreisprofil zeigt also beim Wanderkeilrelais prinzipielle Unterschiede in der Kennlinie.

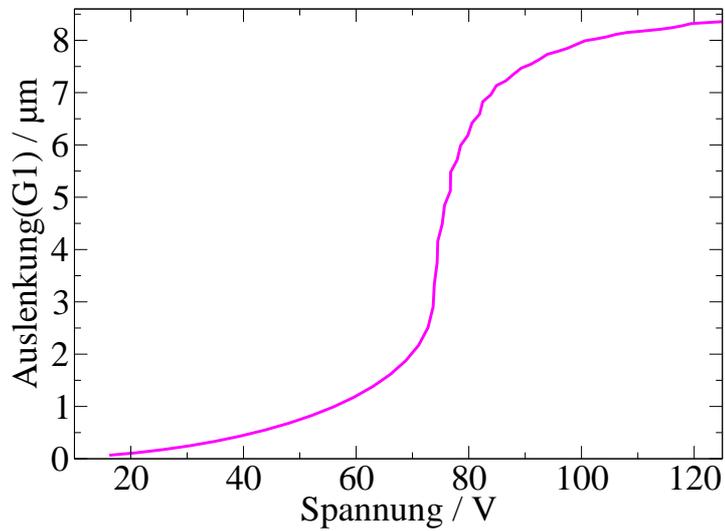


Abb. 7.51: (U, x) -Kennlinie des Wanderkeilrelais mit Kreisprofil 10° .

Zusammenfassend kann man sagen, daß das geometrische Profil bei den Wanderkeilrelais einen wesentlichen Einfluß auf das Auftreten von Snap-Positionen in der Bauteilkennlinie hat. Parabelförmige Relais bilden mit zunehmender Krümmung einen globalen Snap-Point aus, kreisförmige Relais bilden mit zunehmender Krümmung eine sehr steile Charakteristik aus und sind daher bei großen Vorkrümmungen nicht mehr spannungssteuerbar.

7.5 Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse

Dieser Abschnitt faßt die wesentlichen Ergebnisse zusammen, die aus den Simulationen des Kapitels 7 gewonnen wurden.

Die Multiparameter-Homotopie ist in der Lage, für alle vorkommenden Bauteile die relevanten Kennlinien mit vorgebbarer Diskretisierung und vorgebbarer relativer Genauigkeit zu berechnen, und zwar unabhängig von stabilen oder instabilen Bereichen. Hier wurden jeweils Spannungs-, Ladungs- und Kapazitätskennlinien sowie die geometrische Formänderung berechnet.

Es wurde gezeigt, daß aus diesen Grundkennlinien sofort die Verläufe der mechanischen und elektrostatischen Energie und der eingespeisten Gesamtenergie berechnet werden können. Diese Verläufe geben unter anderem Aufschluß über die interne Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie am Snap-Point und weisen auf den bisher unbekanntem Effekt hin, daß manche Bauteile am Snap-Point Energie in die Einspeisung zurückliefern. Abhängig vom Bauteil wurde beim Snap-down eine Umwandlung von bis zu 28 % der elektrischen Energie in mechanische Energie beobachtet und eine Rücklieferung von maximal 11 % der gespeicherten elektrischen Energie in die Einspeisung.

Die exakte Berechnung der Bauteilform und des Spannungsverlaufs im gesamten Betriebsbereich ermöglicht es, die maximalen Oberflächenfeldstärken im Betrieb zu berechnen und daraus Auslegungsregeln abzuleiten. Es genügt, für die Überschlagfestigkeit die Feldstärke an der Isolierschicht im angeschmiegteten Zustand des Bauteils zu berücksichtigen, sofern durch konstruktive Maßnahmen Feldüberhöhungen an Kanten eliminiert werden.

Als Beispiel für Designvariationen wurden beim Wanderkeilrelais die Geometrien bestimmt, deren Spannungs-kennlinien streng monoton sind und somit den Betrieb einer Spannungssteuerung möglich machen.

Mit dem Instrument der Multiparameterhomotopie konnte der bisher unbekanntem Effekt des nicht-monotonen Ladungsverlaufs sowie unstetige Verhaltensänderungen und Charakteristikenverschiebungen beobachtet werden, die in bestimmten MEMS-Bauformen inhärent auftreten. Diese Effekte müssen im Zusammenhang mit Anschmiege- und Abrollverhalten einerseits und mit Schnappverhalten andererseits gesehen werden. Anschmiege- und Abrollverhalten liegt z.B. bei der Membran und beim Wanderkeilrelais vor und ist dadurch charakterisiert, daß eine flexible Elektrode die Gegenelektrode bereits teilweise berührt und sich im weiteren Verlauf der Formänderung kontinuierlich immer weiter an die Gegenelektrode anschmiegt. Ein Schnappverhalten tritt z. B. beim Relais auf und liegt dann vor, wenn eine bewegliche Elektrode die Gegenelektrode noch nicht berührt, sich aber zwischen der aktuellen Position und dem Anschlag in einem instabilen Bereich befindet, was bei Spannungssteuerung zu einem "Schnappen" der Elektrode auf die Gegenelektrode führt.

Das Phänomen des nicht-monotonen (Q, x) -Ladungsverlaufs besteht darin, daß bei bestimmten Bauteilen, nämlich bei der Membran, beim Balken und beim Biegebalkenrelais, vor dem

Release-Point eine rückläufige Ladung auftritt. Wegen dieses Phänomens kann dieser Bereich mit Q-gesteuerten Verfahren prinzipiell nicht abgetastet werden. Es wurde beobachtet, daß ein nicht-monotoner Ladungsverlauf immer nur am Release-Point eines Schnappverhaltens auftritt, aber nicht am Release-Point eines Anschmiege- oder Abrollverhaltens. Deswegen zeigt der Balken nur an einem von zwei Release-Points eine nicht-monotone Ladung, das Biegebalkenrelais aber an beiden.

Der Effekt der unstetigen Verhaltensänderung tritt dann auf, wenn das Biegebalkenrelais bei einer sehr geringfügigen Designänderung plötzlich zwei statt einen Snap-Point aufweist, wenn man Spannungssteuerung anwendet. Die Ursache liegt darin, daß dieses Bauteil zwei instabile Bereiche hat, deren Snap-In-Spannungen sich bei bestimmten Designänderungen gegensinnig ändern. Ist die erste Snap-In-Spannung größer als die zweite, so wird die zweite Snap-In-Position übersprungen, ist sie kleiner, so sind bei Spannungssteuerung zwei Snap-Positionen beobachtbar.

Charakteristikenverschiebung tritt bei Wanderkeilrelais auf. Parabelförmig vorgekrümmte Wanderkeilrelais werden mit abnehmender Vorkrümmung spannungssteuerbar, kreisförmig vorgekrümmte Relais haben sich in den hier durchgeführten Simulationen durchgängig als spannungssteuerbar gezeigt.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Die Motivation für diese Arbeit lag darin, daß die instabilen Arbeitsbereiche von elektrostatisch angetriebenen Mikrobau-elementen (Microelectromechanical Systems, MEMS) mit gängigen Simulationswerkzeugen nicht oder nur unter großen Schwierigkeiten berechnet werden können. Dies behindert das Gesamtverständnis solcher Bauteile und damit eine effektive Parameterextraktion für weiterführende Modelle in der Makromodellierung sowie prädiktive Simulationen neuartiger MEMS-Bauteile für einen effektiven Designentwurf.

Nach einem Überblick der bisher angewendeten numerischen Verfahren zur Lösung elektromechanisch gekoppelter Probleme, wie FEM, BEM, FDM, FVM sowie deren simultane oder iterative numerische Koppelung, wurden die physikalischen Ursachen der bei MEMS auftretenden Instabilitäten untersucht; darauf aufbauend wurde eine Klassifikation der unterschiedlichen Typen von Instabilitäten entwickelt.

Danach wurde das mathematische Verfahren der Homotopie vorgestellt. Homotopieverfahren sind in der Mathematik ein inzwischen häufig eingesetztes Verfahren, um Lösungen hochgradig nichtlinearer Gleichungssysteme zu erhalten, wo prinzipiell immer multiple Lösungen aus instabilen und stabilen Lösungsästen auftreten können. Auch das die elektromechanische Koppelung beschreibende Gleichungssystem besitzt einen hochgradig nichtlinearen Koppelterm.

Dieses Homotopieverfahren wurde mit einem iterativ gekoppelten Relaxationsverfahren aus FEM-Solver und BEM-Solver, die jeweils die Teilprobleme der Elektrostatik und der Mechanik lösen, kombiniert. Dabei wurde Wert darauf gelegt, kein ausschließlich mathematisches Kalkül zu integrieren, sondern das Homotopieverfahren auf eine physikalische Basis zu stellen. Die Steuerparameter des Homotopieverfahrens haben auf dem tatsächlich zu berechnenden Bauteil eine physikalische Entsprechung, wie zum Beispiel die Ladung auf den Elektroden.

Es wurde ein erstes Verfahren entworfen und implementiert, das die Ladung auf den Elektroden als Steuerparameter verwendet und in der Lage ist, den gesamten Arbeitsbereich eines Bauteils zu simulieren, unabhängig von stabilen oder instabilen Bereichen. Der im FEM-Solver enthaltene Kontaktalgorithmus ermöglicht dabei auch die Beherrschung des Kontaktfalles, bei dem sich starre Elektroden berühren oder flexible Elektroden im Betrieb aneinander anschmiegen.

Mit Hilfe dieses Verfahrens konnte für den Fall der flexiblen Elektroden, die sich im Betrieb immer weiter an die Gegenelektrode anschmiegen, gezeigt werden, daß es auch innerhalb dieser

Anschmiegebewegung stabile und instabile Arbeitsbereiche gibt.

Die ladungsgesteuerte Homotopie arbeitet im ganzen Arbeitsbereich stabil und zeigt gute Konvergenz und Genauigkeit, hat aber den Nachteil, daß die Lösungspunkte in bestimmten Bereichen unangemessen weit auseinander liegen und wegen des Phänomens der nicht-monotonen Ladung nicht weiter verdichtet werden können.

Aus diesem Grund wurde zunächst das Homotopieverfahren so erweitert, daß nicht nur die Elektrodenladung, sondern auch andere geeignete Parameter wie die Bauteilkapazität, die mechanische Energie oder die Position eines beweglichen Oberflächenpunkts als Steuerparameter verwendet werden können.

Darauf aufbauend wurde eine Multiparameter-Homotopie entwickelt, die in jedem Arbeitspunkt den geeignetsten Parameter automatisch auswählt, und zwar so, daß die relative Änderung des Homotopieparameters H zur relativen Änderung der anliegenden Bauteilspannung U möglichst nahe bei 1 liegt. Alle nicht-aktiven Parameter werden in jedem Schritt ebenfalls mit berechnet, um ein glattes Umschalten zu ermöglichen. Mit diesem zweiten Verfahren ist die gewünschte feine Auflösung der Kennlinien nun möglich. Der Vorteil der Multiparameter-Homotopie liegt u. a. darin, daß zur Simulation des gesamten Arbeitsbereichs kein durchgehend monotoner Parameter erforderlich ist; es genügen überlappende Bereiche von lokal monotonen Parametern. Durch die Integration der Homotopiemethode in ein iteratives Verfahren, das die Einzelsolver als "black boxes" betrachtet, ist der Algorithmus leicht zu implementieren und zudem leicht auch auf andere Verhältnisse zu übertragen.

Der Algorithmus wurde ausführlich getestet, wobei globale Konvergenz, Schnelligkeit, Robustheit und Einhaltung vorgegebener Genauigkeiten bei stabilen wie instabilen Lösungsästen für beliebige MEMS-Bauteile mit elektrostatischer Antriebseinheit gezeigt wurden. Konkret verwendet wurden in der Implementierung der FEM Solver TP2000 und der BEM Solver BETTI, verbunden mit dem Pre- und Postprozessor FEMAP.

Mit Hilfe des neuen Algorithmus wurden unterschiedliche MEMS-Bauteile charakterisiert und genau analysiert. Dabei konnten bisher unbekannte Effekte wie nicht-monotone Ladungsverläufe und unstetige Verhaltensänderungen gefunden werden, die in bestimmten MEMS-Bauformen inhärent auftreten.

Es wurde beobachtet, daß ein nicht-monotoner Ladungsverlauf meist dann auftritt, wenn sich eine Elektrode innerhalb eines instabilen Arbeitsbereichs frei auf die Gegenelektrode zubewegen kann, was z.B. bei einer Membran und bei einem Biegebalkenrelais der Fall ist. Bei einem anschmiegenden Verhalten wie z.B. beim Wanderkeilrelais wurde dieser Effekt nicht beobachtet. Die hier gefundenen Bereiche mit fallender Ladung (bei steigender Auslenkung) können mit ladungsgesteuerten Verfahren prinzipiell nicht abgetastet werden.

Eine unstetige Verhaltensänderung bei geringfügiger Designänderung konnte an einem Biegebalkenrelais gezeigt werden, das aufgrund seiner Bauweise zwei gestufte Anschlagpunkte aufweist. Abhängig vom Designparameter "Vorkrümmung" kann einer von zwei Snap-Points übersprungen werden, sodaß im makroskopischen Verhalten beide oder nur eine Snap-Position wirksam werden.

Aus den simulierten Energieverläufen wurde ersichtlich, welcher Anteil der elektrischen Feld-

energie beim Snap-down in mechanische Energie gewandelt wird und wieviel Energie gleichzeitig in die Einspeisung zurückgeliefert wird.

Insgesamt ergibt sich ein sehr leistungsfähiges Verfahren, das zum ersten Mal in der Lage ist, instabile Arbeitsbereiche bei Bauteilen mit elektromechanischer Koppelung exakt, zuverlässig und schnell zu simulieren.

Als Ausblick kann gesagt werden, daß die Erweiterung des in dieser Arbeit implementierten 2D-Simulators auf dreidimensionale Berechnungen der erste Schritt sein muß, um komplexe realistische Probleme berechnen zu können. Der Homotopiealgorithmus ist davon nicht betroffen, zu erweitern ist jedoch die datentechnische Anbindung der beteiligten Solver.

Innerhalb der betrachteten Energiedomänen ist die Einbeziehung dynamischer Vorgänge ein nächster relevanter Schritt, der die Simulation von Phänomenen wie Schaltzeiten, Anregung schwingungsfähiger Gebilde im instabilen Arbeitsbereich und Prellverhalten ermöglicht.

Sobald zeitabhängige Probleme betrachtet werden, stellt sich die Frage der Dämpfung. Die Berücksichtigung von Reibung und die Ankoppelung von fluidischen Modellen stellen weitere Herausforderungen auf dem Weg zur Gesamtsimulation von MEMS dar.

Mathematisch interessant ist die Frage der Mehrelektrodensteuerung von MEMS wegen der auftretenden Bifurkationen. Bei solchen MEMS wird im Prinzip ein Teil der mechanischen Federung durch eine Kombination von weiteren Elektroden und Reglern ersetzt, deswegen können sich hier Bauteile mit hochinteressanten Eigenschaften ergeben. Da solche Bauteile voraussichtlich im instabilen Arbeitsbereich betrieben werden, ist es wichtig, für eine korrekte Reglerauslegung die Dynamik in die Simulation mit einzubeziehen.

Anhang A

Leistungsumfang der verwendeten Simulationsumgebung

A.1 Übersicht über das Finite-Element-Programm TP2000

Das Finite-Element-Programm TP2000 ist ein General-Purpose-Programm zur mechanischen Strukturanalyse. Es berechnet in 2- und 3-dimensionalen Gebieten Probleme der Strukturmechanik sowie Potentialprobleme. Folgende Programmkurzbeschreibung gibt eine Übersicht des Funktionsumfangs.

1. Problemklasse

- Strukturmechanik
 - Lineare Probleme der Festigkeit und Steifheit, sowie Spannungs- und Verformungsanalysen.
 - Nicht-lineare Probleme (z.B. wegen der Materialeigenschaft oder großer Verformung)
 - Kontaktanalysen, nichtlineare Kontaktbedingungen (Reibung), Kontakt mehrerer Körper, beweglicher oder Starrkörper.
 - Dynamische Probleme (Responsespektrum, Eigenwertanalyse, Modalanalyse, Freischwingung)
- Wärmeleitung
 - Stationäre und zeitabhängige Probleme
 - Lineare und nicht-lineare Probleme
 - Wärmetransport durch Leitung, Konvektion und Strahlung
 - Phasenübergänge
 - analoge Potentialprobleme (z.B. Akustik, rotationsfreie Strömung)
- Feldtheorie
 - Magnetostatische und elektrostatische Feldberechnung
 - Berücksichtigung der Nichtlinearität durch induktive/magnetische Erregung für ebene und rotationssymmetrische Elemente.

- Gekoppelte Probleme
 - Wärmeleitung/Mechanik sequentiell

2. Eingesetzte numerische Verfahren

- Preprocessing
 - Umfangreiche Elementbibliothek
- Gleichungslösung
 - Lineare Gleichungssysteme werden mit einem direkten Verfahren, dem Cholesky-Algorithmus mit Skyline-Technik (modifiziertes Wellenfront-Lösungsverfahren) gelöst. Optional kann man bei Modellen mit großer Bandbreite (> 10 Prozent) einen iterativen Blockmatrizengleichungslöser wählen.
 - Nicht-lineare Gleichungssysteme werden mit Full Newton Raphson bzw. Modified Newton Raphson gelöst. Ein nicht-lineares Problem wird mit Hilfe des Lastschrittverfahrens zuerst in mehrere lineare Schritte aufgeteilt.
 - Kontaktprobleme werden über Matrixkondensation gelöst.
 - Allgemeine dynamische Probleme werden mit Matrixkondensation oder mit Modaltransformation angegangen.
 - Instationäre Probleme werden mit einem vollimpliziten Zeitschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung gelöst.

A.2 Übersicht über das Rand-Element-Programm BETTI

BETTI war ursprünglich ein Rand-Element-Programm zur Lösung von Wärmeleitungsproblemen in 2- und 3-dimensionalen Gebieten. Dazu löst es die Poissonsche Differentialgleichung mit der Rand-Element-Methode (vgl. Kap. 3.1). Wie schon im vorigen Abschnitt bemerkt, kann die Poissonsche Differentialgleichung, die ein Potentialproblem beschreibt, in ihren Größen umgedeutet werden und so nicht nur die Zusammenhänge der Wärmeleitung beschreiben, sondern ebenso die von elektrostatischen Feldern.

Folgende Programmkurzbeschreibung gibt eine Übersicht des Funktionsumfangs.

1. Problemklasse

- Wärmeleitung
 - Stationäre und zeitabhängige Probleme
 - Lineare und nicht-lineare Probleme
 - Innen- und Außenraumproblem
 - Axialsymmetrische Probleme
 - Wärmetransport durch Leitung, Konvektion und Strahlung
 - Phasenübergänge
 - analoge Potentialprobleme (z.B. stationäre Diffusion, transversale Auslenkung einer dünnen Membran, elektrostatische Felder)

2. Eingesetzte numerische Verfahren

- Preprocessing
 - Umfangreiche Elementbibliothek
- Gleichungslösung
 - Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotsuche
 - Integrale werden, falls nicht analytisch lösbar, mit numerischer Quadratur gelöst

A.3 Pre- und Postprozessor FEMAP

1. Preprozessor

- Modellerstellung und Vernetzung
 - Automatische und "von-Hand" Vernetzung
 - Umfangreiche Elementbibliothek
 - Einsetzbare Funktionalitäten wie Funktioneneingabe, Gruppenzuordnung, etc..

2. Dateikonvertierung

Umwandlung der durch den Preprozessor erstellten Datei in Eingabeformate unter anderem folgender kommerzieller FEM-Simulatoren:

- ABAQUS
- ALGOR
- ANSYS
- COSMOS
- I-DEAS
- NASTRAN
- PATRAN
- STAAD/ISDS
- STARDYNE

3. Postprozessor

- Graphisches Postprozessing mit umfangreichen Darstellungsmöglichkeiten
- xy-Darstellungen

Literaturverzeichnis

- [1] <http://www.gemac-chemnitz.de>, 2000.
- [2] <http://mems.cwru.edu/sic/pages/devices.html>, 2003.
- [3] <http://www.ece.neu.edu/edsnu/zavracky/mfl/programs/relay/relay.html>, 2003.
- [4] <http://www.imagineeringezine.com/ttaoc/emmitter.html>, 2003.
- [5] <http://www.isit.fhg.de/german/mst/spiegel.html>, 2003.
- [6] <http://www.si-micro.com/custom1.html>, 2003.
- [7] Statusbericht zum bmbf-verbundvorhaben rev, Aug. 2000.
- [8] ABAQUS, Hibbit, Karlsson & Sorenson, Inc., Pawtucket, Rhode Island, <http://www.hks.com>.
- [9] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [10] ADINA, ADINA R&D, Inc., Watertown, MA, USA, <http://www.adina.com>.
- [11] ALGOR, ALGOR, Inc., 150 Beta Drive, Pittsburgh, PA 15238-2932, USA, <http://www.algor.com>.
- [12] E.L. Allgower and K. Georg. *Numerical Continuation Methods: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [13] E.L. Allgower and K. Georg. Numerical path following. In P.G. Ciarlet and J.L. Lions, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume 5, pages 3–207. J.L.(North-Holland), 1997.
- [14] N.R. Aluru and J. White. A Multilevel Newton Method for Mixed-Energy Domain Simulation of MEMS. *IEEE Journal of Microelectromechanical Systems*, 8(3):299–308, 1999.
- [15] N.R. Aluru and J. White. A Multi-level Newton Method for Static and Fundamental Frequency Analysis of Electromechanical Systems. In *Proceedings of SISPAD*, pages 125–128, Cambridge, MA, Sept. 1997.
- [16] ANSYS, ANSYS Inc., Canonsburg, PA, USA, <http://www.ansys.com>.

- [17] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 1992.
- [18] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer, Berlin, 1984.
- [19] X. Cai, P. Osterberg, H. Yie, J. Gilbert, S. Senturia, and J. White. Self-Consistent Electromechanical Analysis of Complex 3-D Microelectromechanical Structures Using Relaxation/Multipole-Accelerated Method. *Sensors and Materials*, 6(2):85–99, 1994.
- [20] CFD-ACE+MEMS, CFD Research Corporation, Huntsville, AL, USA, <http://www.cfdrc.com>.
- [21] CoventorWare, Coventor, Cary, NC, USA, <http://www.coventor.com>.
- [22] D.F. Davidenko. On a new method of numerical solution of systems of non-linear equations. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (88), 601–602 Mathematical Reviews (14):906, 1953.
- [23] P. Deuffhard, B. Fiedler, and P. Kunkel. Efficient numerical path-following beyond critical points. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4):912–927, Aug. 1987.
- [24] Enterprise Software Products Inc., P.O.Box 1172, Exton, PA 19341, U.S.A. *FEMAP High Performance CAE for the Desktop*, 1997.
- [25] P.S. Felippa and K.C. Park. Staggered Transient Analysis Procedure for Coupled Mechanical Systems: Formulation. In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 24, pages 61–111. 1980.
- [26] L. Gaul and C. Fiedler. *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [27] J.R. Gilbert, R. Legtenberg, and S.D. Senturia. 3D coupled electromechanics for MEMS: Applications of CoSolve-EM. In *IEEE Microelectromechanical Systems (MEMS)*, pages 122–127, 1995.
- [28] J.E. Goldberg and R.H. Richards. Analysis of nonlinear structures. *J. Struct.Div.Proc. ASCE*, 89:333, 1963.
- [29] G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler, and E. Zeidler, editors. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik Teil II*. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [30] C. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994.
- [31] P. Groth. *FEM-Anwendungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [32] P. Groth. *TP2000 8.1 User's Manual*. IGF Groth/Faiss, Drosselweg 57-2, D-72793 Pfullingen, 2002.
- [33] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Teubner, Stuttgart, 1991.

- [34] M. Handtmann, R. Aigner, F. Plötz, and G. Wachutka. Macromodel for micromechanical, multi-electrode structures in force feedback control systems. In *Simulation of Semiconductor Processes and Devices (SISPAD 99)*, pages 183–186, Kyoto, Japan, Sept.1999.
- [35] C.B. Haselgrove. The solution of nonlinear equations and of differential equations with two-point boundary conditions. *Comput. J.*, 4:255–259, 1961.
- [36] T.J. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, Englewood-Cliffs, 1987.
- [37] IntelliSuite, IntelliSense Corporation, Wilmington, MA, USA, <http://www.intellisense.com>.
- [38] V.P. Jaecklin, C. Linder, and N.F. de Rooij. Optical microshutters and torsional micro-mirrors for light modulator arrays. *Proc.IEEE Micro Electro Mech. Systems*, page 125, 1993.
- [39] V.P. Jaecklin, C. Linder, N.F. de Rooij, J.-M. Moret, and R. Vuilleumier. Line-addressable torsional micromirrors for light modulator arrays. *Sensors and Actuators*, A41-42:324–329, 1994.
- [40] J. G. Korvink, J. Funk, M. Roos, G. Wachutka, and H. Baltes. SESES: A Comprehensive MEMS Modelling System. In *Proceedings of the IEEE MEMS 94*, pages 22–27, Oiso, Japan, 1994.
- [41] J.G. Korvink and H. Baltes. Invited Review Microsystem Modeling. In *Sensors Update*, volume 2, chapter 6, pages 181–209. VCH Verlag, Weinheim, 1996.
- [42] M. Kubicek and V. Hlavacek. Solution of nonlinear boundary value problems – III. A novel method: Differentiation with respect to an actual parameter. *Chem.Eng.Sci.*, 26:705, 1971.
- [43] H. Landes, M. Kaltenbacher, and R. Lerch. Recent Developments in Electrostatic Transducer Modeling using ANSYS and CAPA. In *18th CAD-FEM Users Meeting 2000, Intern. Congress on FEM Technologies*, volume 1, Friedrichshafen, Germany, Sept. 2000.
- [44] H. Landes, R. Lerch, and M. Kaltenbacher. *CAPA User Manual, rel.3.1*. Johannes Kepler Universität Linz, Altenberger Str. 69, A- 4040 Linz, 1998.
- [45] G. Löbel and W. Sichert. *BETTI - Boundary Element Code for Heat Conduction*. Forschungskuratorium Maschinenbau e.V., Frankfurt, 1987.
- [46] A.G. Marathe and V.K. Jain. Parametric differentiation technique applied to a combustion problem. *AIAA J.*, 15:732, 1977.
- [47] W. Mathis, L. Trajkovic, M. Koch, and U. Feldmann. Parameter embedding methods for finding DC operating points of transistor circuits. In *Proc. NDES '95*, pages 147–150, Dublin, Ireland, July 1995.

- [48] A. Mayr, E.-R. König, and G. Wachutka. Numerical analysis of an inclination sensor by force homotopy. In *Micromechanics Europe MME 2002*, pages 177–180, Sinaia, Romania, Oct.2002.
- [49] A. Mayr and G. Wachutka. Numerische Analyse elektromechanisch gekoppelter Mikrobauelemente mit TP2000/BEMFEM. In *5.Chemnitzer Fachtagung Mikromechanik & Mikroelektronik MST*, pages 62–69, Chemnitz, Germany, Okt. 2001.
- [50] J. R. Melcher. *Continuum Electromechanics*, chapter 3.10. M.I.T.Press, Cambridge, MA, U.S.A., 1981.
- [51] MEMS Xplorer, MEMSCAP S.A., St. Ismier, France <http://www.memscap.com>.
- [52] R. Menzel and H. Schwetlick. Zur Lösung parameterabhängiger nichtlinearer Gleichungen mit singulären Jacobi-Matrizen. *Numer. Math.*, 30:65–79, 1978.
- [53] MSC.Marc, MSC, Software Corporation, 500 Arguello St., Suite 200, Redwood City, CA 94063-1526, USA, <http://www.marc.com>.
- [54] MSC.Nastran, MSC, Software Corporation, 2 MacArthur Place, Santa Ana, CA 92707, USA, <http://www.macsch.com>.
- [55] L. Onsager. Reciprocal relations in irreversible processes. *Physical Review*, 37:405–426, 1931.
- [56] J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1970.
- [57] K.C. Park. Partitioned transient analysis procedures for coupled-field problems: stability analysis. *Transactions of the ASME*, 47:370–376, 1980.
- [58] K.C. Park and C. A. Felippa. Partitioned transient analysis procedures for coupled-field problems: accuracy analysis. *Transactions of the ASME*, 47:919–926, 1980.
- [59] J.A. Pelesko. Multiple Solutions in Electrostatic MEMS. In *Modeling and Simulation of Microsystems 2001*, pages 290–293, Hilton Head Island, South Carolina, USA, Mar. 2001.
- [60] Y.-A. Peter, H.P. Herzig, E. Rochat R. Dändliker, C. Marxer, and N.F. de Rooij. Pulsed fiber laser using micro-electro-mechanical mirrors. *Optical Engineering*, 38(4):636–640, April 1999.
- [61] D. Ramaswamy, R. Aluru, and J. White. Fast Coupled-Domain, Mixed-Regime Electro-mechanical Simulation. In *Transducers '99*, pages 314–317, Sendai, Japan, Jun. 1999.
- [62] F. Reif. *Statistische Physik und Theorie der Wärme*, chapter 8.7. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1987.
- [63] W. Rheinboldt and J.V. Burkardt. A Locally Parameterized Continuation Process. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9(2):215–235, Juni 1983.

- [64] P.E. Rubbert and M.T. Landahl. Solution of nonlinear flowproblems through parametric differentiation. *Phys. Fluids*, 10:831, 1967.
- [65] M. Schäfer and M. Peric. *Vorlesungsskript NUMERISCHE STRÖMUNGSMECHANIK*. Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Universität Erlangen-Nürnberg.
- [66] I. Schiele, J. Huber, B. Hillerich, and F. Kozlowski. Surface-micromachined electrostatic microrelay. *Sensors and Actuators A*, 66:345–354, 1998.
- [67] I.C. Schiele. *Entwicklung und Untersuchung von oberflächenmikromechanischen Relais für die Anwendung in der Hochfrequenztechnik*. PhD thesis, Technische Universität München, Herbert Utz Verlag, München, 1999.
- [68] J. Schimkat. *Grundlagen und Modelle zur Entwicklung und Optimierung von Silizium-Mikrorelais*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1996.
- [69] E. Schnack. Stress analysis with a combination of HSM and BEM. In J. Whiteman, editor, *The Mathematics of Finite Elements and Applications V*, pages 273–282. Academic Press, London, 1985.
- [70] G. Schrag. *Modellierung gekoppelter Effekte in Mikrosystemen auf kontinuierlicher Feldebene und Systemebene*. PhD thesis, Technische Universität München, Verlag Shaker, Aachen, 2003.
- [71] G. Schrag, P. Voigt, E.-R. Sieber, U. Wiest, R.H.W. Hoppe, and G. Wachutka. Device- and System-Level Models for Micropump Simulation. In B. Michel and T. Winkler, editors, *Micro Mat'97*, pages 941–944, Berlin, April 16–18, 1997.
- [72] SESES, Numerical Modelling GmbH, Winterthur, CH, <http://www/nmtech.ch>.
- [73] R. Seydel. *Numerische Berechnung von Verzweigungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*. PhD thesis, Technical Univ. Munich, 1977.
- [74] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [75] W.C. Tang, M.G. Lim, and R.T. Howe. Electrostatic Comb Drive Levitation and Control method. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 1(4):170–178, Dec. 1992.
- [76] D. C. van Duyn and S. Middelhoek. Information transduction in solid-state transducers: a general thermodynamic systems approach. *Sensors and Actuators*, A21–A23:25–32, 1990.
- [77] P. Voigt. *Compact Modeling of Microsystems*. PhD thesis, Technische Universität München, 2002.
- [78] G. Wachutka. Tailored Modeling of Miniaturized Electrothermomechanical Systems Using Thermodynamic Methods. In D. Cho, J.P. Peterson, A.P. Pisano, and C. Friedrich, editors, *Micromechanical Systems, DSC-Vol. 40*, pages 183–198. The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1992.

- [79] G. Wachutka. Tailored modeling: a way to the ‘virtual microtransducer fab’? *Sensors and Actuators A*, 46–47:603–612, 1995.
- [80] L.T. Watson. Probability-one homotopies in computational science. Technical Report TR 00-03, Dept. of Computer Sci., Virginia Polytechnic Institute and State Univ., Blacksburg, VA, USA, 2000.
- [81] L.T. Watson, S. Billups, and A. Morgan. HOMPACT: A Suite of Codes for Globally Convergent Homotopy Algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 13(3):281–310, Sept. 1987.
- [82] J. Wibbeler, D. Scheibner, and J. Mehner. Improved Coupled-Field FE Analysis of Micro-machined Electromechanical Transducers. In *Proc. 11th Int. Conf. on Solid-State Sensors and Actuators (Transducers’01)*, pages 240–243, Munich, Germany, June 10–14, 2001.
- [83] D.M. Wolf and S.R. Sanders. Multiparameter Homotopy Methods for Finding DC Operating Points of Nonlinear Circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – 1: Fundamental Theory and Applications*, 43(10):824–838, 1996.
- [84] Wölfel Technische Programme, Max-Planck-Str. 15, D-97204 Höchberg. *WTP2000 Professional*, 1997.
- [85] R. Zengerle. *Mikro-Membranpumpen als Komponenten für Mikro-Fluidsysteme*. PhD thesis, Univ. der Bundeswehr, Verlag Shaker, Aachen, 1994.
- [86] R. Zengerle, J. Ulrich, S. Kluge, M. Richter, and A. Richter. A bidirectional silicon micropump. *Sensors and Actuators A*, 50:81–86, 1995.
- [87] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Company, Maidenhead Berkshire, England, 1977.