

---

# Ereignisdiskrete Systeme

---

Modellierung und Steuerung verteilter Systeme

---

von  
Uwe Kiencke

---

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

---

Oldenbourg Verlag München Wien

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Verteilte ereignisdiskrete Systeme</b>	<b>1</b>
1.1	Verteilte Systeme .....	1
1.2	Ereignisdiskrete Systeme (DES) .....	3
1.3	Verteilte Steuerungen .....	5
1.3.1	Hierarchische Steuerungen .....	5
1.3.2	Verteilte kooperative Steuerungen .....	6
1.3.3	Hybride Systembeschreibung .....	8
1.3.4	Echtzeit und Lokalität .....	10
<b>2</b>	<b>System-Modellierung</b>	<b>13</b>
2.1	Modell-Klassifikation .....	13
2.2	Modellierung verteilter Systeme .....	15
2.3	Modellierung ereignisdiskreter Systeme .....	18
2.3.1	Zustandsmodelle .....	18
2.3.2	Automaten .....	21
<b>3</b>	<b>Graphentheorie</b>	<b>25</b>
3.1	Grundlegende Begriffe .....	25
3.2	Graphen und Digraphen als Matrizen .....	29
3.3	Bäume .....	33
3.4	Baumalgorithmus .....	34
<b>4</b>	<b>Markov-Theorie</b>	<b>39</b>
4.1	Stochastische Zustandsmodelle .....	39
4.1.1	Stochastische Prozesse .....	39
4.1.2	Verweilzeit in einem Zustand .....	42
4.1.3	Übergangsrate aus einem Zustand .....	47
4.1.4	Markov-Folge .....	50
4.1.5	Kausale Systeme .....	52
4.2	Zeitdiskrete Markov-Ketten .....	53
4.2.1	Markov-Eigenschaft .....	53
4.2.2	Zeitdiskrete Zustandsübergänge .....	53

4.2.3	Homogene zeitdiskrete Markov-Ketten .....	57
4.2.4	Stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	59
4.2.5	Zustandsverteilung .....	61
4.2.6	Zeitdiskrete Verweildauer in einem Zustand .....	72
4.2.7	Einteilung der Systemzustände .....	75
4.3	Zeitkontinuierliche Markov-Ketten .....	77
4.3.1	Markov-Eigenschaft .....	77
4.3.2	Wahrscheinlichkeitsdichte der Verweilzeit .....	78
4.3.3	Übergangsraten .....	80
4.3.4	Zusammenhang zwischen Übergangsrate und Verweilzeit .....	85
4.3.5	Homogene zeitkontinuierliche Markov-Ketten .....	86
4.3.6	Zustandsverteilung homogener zeitkontinuierlicher Markov-Ketten .....	87
4.3.7	Flussbalance zeitkontinuierlicher homogener Markov-Ketten .....	96
4.3.8	Birth-Death-Prozess .....	97
4.3.9	Poisson-Prozess .....	100
4.4	Ereignisprozesse .....	104
4.4.1	Ereignisrate .....	104
4.4.2	Poisson-Ereignisprozess .....	107
4.4.3	Lebensdauer zufällig angetroffener Ereignisintervalle .....	108
4.4.4	Bestimmung der Ereignisrate .....	112
4.5	Semi-Markov-Prozesse .....	116
4.5.1	Eingebettete Markov-Ketten .....	116
4.5.2	Verallgemeinerte Semi-Markov-Prozesse .....	118
4.5.3	Lebensdauer-Verteilung überlagerter Poisson-Ereignisprozesse .....	119
4.5.4	Zustandsübergang mit einem bestimmten Ereignisprozess .....	120
<b>5</b>	<b>Warteschlangensysteme</b> .....	<b>123</b>
5.1	Ereignisprozesse und Kundenzahl .....	123
5.1.1	Grundlegende Begriffe .....	123
5.1.2	Das Gesetz von Little .....	125
5.1.3	Kundenzahl im Warteschlangensystem .....	127
5.2	Poissonverteilte Kundenflüsse .....	128
5.2.1	M/M/1-Warteschlangensystem .....	128
5.2.2	M/M/m-Warteschlangensystem .....	134
5.2.3	M/E <sub>r</sub> /1-Warteschlangensystem .....	136
5.2.4	M/H <sub>r</sub> /1-Warteschlangensystem .....	139
5.2.5	Annäherung einer beliebigen Verteilung .....	140
5.2.6	M/M/1-Warteschlangensystem mit Rückkopplung .....	142
5.3	Warteschlangensysteme mit allg. Verteilungen .....	149
5.3.1	Modellierung als eingebettete Markov-Kette .....	149
5.3.2	M/G/1-Warteschlangensysteme .....	151
5.3.3	G/M/1-Warteschlangensysteme .....	162

5.4	Warteschlangen-Netzwerke.....	173
5.4.1	Wahrscheinlichkeitsdichte der Verlassensintervalle eines M/M/1-Warteschlangensystems .....	174
5.4.2	Vereinigung und Verzweigung schleifenfreier Kundenflüsse .....	177
5.4.3	Übergangsraten in schleifenfreien M/M/1-Warteschlangennetzen .....	180
5.4.4	Übergangsraten in schleifenbehafteten G/M/1-Warteschlangennetzen .....	181
5.4.5	Stationäre Zustandsverteilung schleifenbehafteter G/M/1-Warteschlangennetze .....	185
<b>6</b>	<b>Max-Plus-Algebra</b>	<b>191</b>
6.1	Max-Plus-algebraische Struktur .....	191
6.1.1	Max-Plus-Algebra .....	192
6.1.2	Min-Plus-Algebra .....	194
6.1.3	Binäre Max-Plus-Algebra .....	196
6.1.4	Max-Plus-Matrix-Dioide .....	197
6.1.5	Erweiterte Matrix-Dioide ([CG79]) .....	203
6.2	Ordnungen und Vollständigkeit in Dioiden .....	204
6.2.1	Algebraische Struktur eines Dioiden .....	205
6.2.2	Die kommutativen Dioide $\mathbb{R}_{\max}, \mathbb{R}_{\min}$ .....	207
6.2.3	Der Dioid $\text{Sig}(D)$ , ereignisdiskrete Signale .....	207
6.2.4	Der Dioid $\mathbf{B}[[q, \vartheta]]$ , Punktwolken ereignisdiskreter Signale .....	208
6.2.5	Der Matrix-Dioid $D^{n \times n}$ .....	210
6.2.6	Begriffe aus der Ordnungstheorie .....	211
6.2.7	Geordnete Dioide .....	214
6.3	Gleichungslösung in Dioiden .....	217
6.3.1	Residuierbare Abbildungen .....	218
6.3.2	Duale Residuierung der Addition .....	221
6.3.3	Residuierung der Multiplikation .....	223
6.3.4	Residuierung für Matrizen-Gleichungen .....	224
6.4	Der Stern-Operator in Dioiden .....	228
6.4.1	Gleichungslösung .....	228
6.4.2	Rekursive Berechnung für Matrizen .....	230
6.5	Max-Plus-Beschreibung von Digraphen .....	234
6.5.1	Matrix der maximalen Kantengewichte .....	235
6.5.2	Benötigte Ungleichungen .....	238
6.5.3	Lineares Gleichungssystem .....	240
6.5.4	Erweitertes lineares Gleichungssystem .....	241
6.5.5	Iterative Systemgleichung .....	242
6.5.6	Pfade minimalen Summenkantengewichts .....	248
6.6	Eigenwerte der Adjazenz-Matrix .....	253
6.6.1	Maximales mittleres Summenschleifengewicht .....	253
6.6.2	Eigenvektoren .....	258

6.6.3	Berechnung des Eigenwertes .....	261
6.6.4	Rekursive Bestimmung des Eigenwertes .....	264
6.7	Spektraler Projektor .....	268
6.7.1	Definition und Eigenschaften .....	268
6.7.2	Linearkombination von spektralen Projektoren .....	270
6.7.3	Zyklizität von Graphen .....	273
6.7.4	Konvergenz der Potenz normierter Matrizen .....	279
6.7.5	Iterative Systemgleichung bei Zyklizität $\gamma = 1$ .....	289
<b>7</b>	<b>Petrinetze</b> .....	<b>295</b>
7.1	Zeitdiskrete Petrinetze .....	296
7.1.1	Definitionen .....	296
7.1.2	Netzinvarianten .....	303
7.1.3	Eigenschaften von Petrinetzen .....	307
7.1.4	Konkurrenzen und Konflikte .....	310
7.1.5	Spezielle Petri-Netz-Klassen .....	312
7.2	Zeitkontinuierliche Petrinetze .....	314
7.2.1	Zeitbewertung von Plätzen .....	314
7.2.2	Verzögerte Transitionen .....	316
7.2.3	Petrinetze mit stochastischen Zeitverzögerungen .....	322
7.2.4	Petrinetze mit deterministischen Zeitverzögerungen .....	326
7.3	Gefärbte Petrinetze (coloured PN, CPN) .....	332
7.3.1	Aktivierungs- und Schaltregeln .....	333
7.3.2	Konflikte in gefärbten Petrinetzen .....	336
7.3.3	Identische Funktion und Entfärbungsfunktion .....	338
7.4	Hierarchische Petrinetze .....	340
7.4.1	Hierarchische Struktur .....	340
7.4.2	Verfeinerung einer Transition .....	341
7.4.3	Verfeinerung eines Platzes .....	342
7.4.4	Zeitbewertung in der hierarchischen Struktur .....	343
7.5	Petrinetz-Steuerungen .....	346
7.5.1	Synchronisierte Petrinetze .....	346
7.5.2	Petrinetz-Regler .....	349
7.5.3	Belegungsentscheidung nach der aktuellen Anforderung .....	350
7.5.4	Prädiktive Belegungsentscheidung nach minimaler Planverschiebung .....	352
7.6	Anwendungsbeispiel Verkehrsregelung .....	355
7.6.1	Hierarchisches Petrinetzmodell .....	355
7.6.2	Petrinetz-Steuerung .....	357
<b>8</b>	<b>Zeit in verteilten Systemen</b> .....	<b>361</b>
8.1	Vektorzeit .....	361
8.1.1	Raum-Zeit-Diagramm .....	361
8.1.2	Kausalität in verteilten Systemen .....	366

8.1.3	Logische Zeit in verteilten Systemen .....	369
8.1.4	Vektorzeit in verteilten Systemen .....	372
8.1.5	Konsistenz der Vektorzeit .....	375
8.1.6	Hasse-Diagramm .....	377
8.1.7	Ausschluss von Vektorzeiten und Pfaden im Hasse-Diagramm .....	381
8.2	Abbildung kausaler Auftragsstrukturen .....	385
8.2.1	Einführung .....	386
8.2.2	Abbildung von Auftragsstrukturen in Digraphen .....	387
8.2.3	Vereinfachung der graphischen Auftragsstruktur .....	389
8.2.4	Umsetzung der graphischen Auftragsstruktur in Vektorzeiten .....	392
8.2.5	Hierarchische, auf mehrere Objekte erweiterte Auftragsstruktur .....	396
8.2.6	Auftragsbearbeitung mit Max-Plus-Dioiden .....	400
<b>9</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>403</b>
9.1	Flussberechnung .....	403
9.1.1	Mittlere Verzögerungen in Nachrichtennetzen .....	403
9.1.2	Maximaler Fluss durch ein Netz .....	407
9.1.3	Algorithmus von Ford und Fulkerson .....	412
9.2	Analyse von Echtzeitsystemen mit Max-Plus-Dioiden .....	421
9.2.1	Systemaufteilung in Tasks .....	421
9.2.2	Berechnung der Abarbeitungsreihenfolge .....	422
9.2.3	Task-Ketten .....	425
9.2.4	Algebraische Repräsentation mit Max-Plus-Dioiden .....	427
9.2.5	Echtzeitanalyse .....	429
9.3	Fehlerkompensation in verteilten Systemen .....	436
9.3.1	Systemdarstellung .....	437
9.3.2	Eliminierung defekter Knoten .....	441
9.3.3	Funktionsverlagerung .....	442
9.3.4	Funktionssubstitution .....	444
<b>10</b>	<b>Anhang</b>	<b>449</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>451</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>455</b>