

Vladimir A. Zorich

Analysis II

Übersetzt von Josef Schüle

Mit 40 Abbildungen



Springer

Inhaltsverzeichnis

9	*Stetige Abbildungen (Allgemeine Theorie)	1
9.1	Metrische Räume	1
9.1.1	Definition und Beispiele	1
9.1.2	Offene und abgeschlossene Teilmengen metrischer Räume	5
9.1.3	Unterräume eines metrischen Raumes	7
9.1.4	Das direkte Produkt metrischer Räume	8
9.1.5	Übungen und Aufgaben	9
9.2	Topologische Räume	10
9.2.1	Grundlegende Definitionen	10
9.2.2	Teilräume von topologischen Räumen	14
9.2.3	Das direkte Produkt topologischer Räume	14
9.2.4	Übungen und Aufgaben	15
9.3	Kompakte Mengen	16
9.3.1	Definition und allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen	16
9.3.2	Metrische kompakte Mengen	18
9.3.3	Übungen und Aufgaben	20
9.4	Zusammenhängende topologische Räume	20
9.4.1	Übungen und Aufgaben	22
9.5	Vollständige metrische Räume	23
9.5.1	Grundlegende Definitionen und Beispiele	23
9.5.2	Die Vervollständigung eines metrischen Raumes	26
9.5.3	Übungen und Aufgaben	30
9.6	Stetige Abbildungen topologischer Räume	30
9.6.1	Der Grenzwert einer Abbildung	31
9.6.2	Stetige Abbildungen	33
9.6.3	Übungen und Aufgaben	36
9.7	Das Prinzip einer kontrahierenden Abbildung	37
9.7.1	Übungen und Aufgaben	43

10	*Differentialrechnung aus einem allgemeinen Blickwinkel	45
10.1	Normierte Vektorräume	45
10.1.1	Einige Beispiele von Vektorräumen in der Analysis	45
10.1.2	Normen in Vektorräumen	46
10.1.3	Innere Produkte in Vektorräumen	49
10.1.4	Übungen und Aufgaben	52
10.2	Lineare und multilineare Transformationen	53
10.2.1	Definitionen und Beispiele	53
10.2.2	Die Norm einer Transformation	56
10.2.3	Der Raum der stetigen Transformationen	60
10.2.4	Übungen und Aufgaben	64
10.3	Das Differential einer Abbildung	65
10.3.1	In einem Punkt differenzierbare Abbildungen	65
10.3.2	Die allgemeinen Ableitungsregeln	67
10.3.3	Einige Beispiele	68
10.3.4	Die partielle Ableitung einer Abbildung	75
10.3.5	Übungen und Aufgaben	76
10.4	Der Mittelwertsatz mit Anwendungen	78
10.4.1	Der Mittelwertsatz	78
10.4.2	Einige Anwendungen des Mittelwertsatzes	80
10.4.3	Übungen und Aufgaben	84
10.5	Ableitungen höherer Ordnung	84
10.5.1	Definition des n -ten Differentials	84
10.5.2	Ableitung nach einem Vektor	86
10.5.3	Symmetrie der Differentiale höherer Ordnung	87
10.5.4	Einige Anmerkungen	89
10.5.5	Übungen und Aufgaben	91
10.6	Die Taylorsche Formel und die Untersuchung von Extrema	91
10.6.1	Die Taylorsche Formel für Abbildungen	91
10.6.2	Methode zur Untersuchung innerer Extrema	92
10.6.3	Einige Beispiele	94
10.6.4	Übungen und Aufgaben	99
10.7	Der verallgemeinerte Satz zur impliziten Funktion	101
10.7.1	Übungen und Aufgaben	110
11	Mehrfachintegrale	113
11.1	Das Riemannsche Integral über einem n -dimensionalen Intervall	113
11.1.1	Definition des Integrals	113
11.1.2	Das Kriterium nach Lebesgue für die Riemann-Integrierbarkeit	116
11.1.3	Das Kriterium nach Darboux	121
11.1.4	Übungen und Aufgaben	123
11.2	Das Integral über einer Menge	124
11.2.1	Zulässige Mengen	124

11.2.2	Das Integral über einer Menge	125
11.2.3	Das Maß (Volumen) einer zulässigen Menge	126
11.2.4	Übungen und Aufgaben	128
11.3	Allgemeine Eigenschaften des Integrals	129
11.3.1	Das Integral als lineares Funktional	129
11.3.2	Additivität des Integrals	130
11.3.3	Abschätzungen für das Integral	131
11.3.4	Übungen und Aufgaben	133
11.4	Umformung eines Mehrfachintegrals in iterierte Integrale	134
11.4.1	Satz von Fubini	134
11.4.2	Einige Korollare	137
11.4.3	Übungen und Aufgaben	141
11.5	Substitution in einem Mehrfachintegral	142
11.5.1	Problemstellung. Heuristische Betrachtungen	142
11.5.2	Messbare Mengen und glatte Abbildungen	144
11.5.3	Der ein-dimensionale Fall	146
11.5.4	Der Fall eines einfachen Diffeomorphismus in $\mathbb{R}^n$	149
11.5.5	Verkettete Abbildungen und Substitution	150
11.5.6	Additivität des Integrals	151
11.5.7	Verallgemeinerungen der Substitutionsformel	152
11.5.8	Übungen und Aufgaben	156
11.6	Uneigentliche Mehrfachintegrale	159
11.6.1	Grundlegende Definitionen	159
11.6.2	Der Vergleichstest	162
11.6.3	Substitution in einem uneigentlichen Integral	165
11.6.4	Übungen und Aufgaben	168
12	Mannigfaltigkeiten und Differentialformen in $\mathbb{R}^n$	171
12.1	Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$	171
12.1.1	Übungen und Aufgaben	180
12.2	Orientierung einer Mannigfaltigkeit	181
12.2.1	Übungen und Aufgaben	188
12.3	Der Rand einer Mannigfaltigkeit und seine Orientierung	189
12.3.1	Berandete Mannigfaltigkeiten	189
12.3.2	Die induzierte Orientierung auf dem Rand	192
12.3.3	Übungen und Aufgaben	196
12.4	Die Fläche einer Mannigfaltigkeit im euklidischen Raum	197
12.4.1	Übungen und Aufgaben	204
12.5	Einfache Tatsachen über Differentialformen	207
12.5.1	Differentialformen: Definition und Beispiele	208
12.5.2	Koordinatendarstellung einer Differentialform	212
12.5.3	Das äußere Differential einer Form	214
12.5.4	Transformation unter Abbildungen	217
12.5.5	Formen auf Mannigfaltigkeiten	221
12.5.6	Übungen und Aufgaben	222

13	Linien- und Flächenintegrale	225
13.1	Das Integral einer Differentialform	225
13.1.1	Das Ausgangsproblem. Beispiele	225
13.1.2	Integral über einer orientierten Fläche	232
13.1.3	Übungen und Aufgaben	236
13.2	Das Volumenelement. Integrale der ersten und zweiten Art	241
13.2.1	Die Masse einer dünnen Schicht	241
13.2.2	Die Fläche einer Oberfläche als das Integral einer Form	242
13.2.3	Das Volumenelement	243
13.2.4	Kartesische Formulierung des Volumenelements	245
13.2.5	Integrale erster und zweiter Art	246
13.2.6	Übungen und Aufgaben	249
13.3	Die wichtigen Integralgleichungen der Analysis	252
13.3.1	Greensche-Formel	252
13.3.2	Der Divergenzsatz	258
13.3.3	Der Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$	261
13.3.4	Der allgemeine Satz von Stokes	264
13.3.5	Übungen und Aufgaben	267
14	Elemente der Vektoranalysis und der Feldtheorie	273
14.1	Die Differentialoperationen der Vektoranalysis	273
14.1.1	Skalare und Vektorfelder	273
14.1.2	Vektorfelder und Formen in $\mathbb{R}^3$	273
14.1.3	Die Differentialoperatoren grad, rot, div, und ∇	276
14.1.4	Einige Differentialformeln der Vektoranalysis	279
14.1.5	*Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten	281
14.1.6	Übungen und Aufgaben	290
14.2	Die Integralformeln der Feldtheorie	292
14.2.1	Die klassischen Integralformeln in Vektorschreibweise	292
14.2.2	Die physikalische Interpretation von div, rot und grad	295
14.2.3	Weitere Integralformeln	299
14.2.4	Übungen und Aufgaben	302
14.3	Potentialfelder	304
14.3.1	Das Potential eines Vektorfeldes	304
14.3.2	Notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials	305
14.3.3	Kriterium damit ein Feld ein Potentialfeld ist	306
14.3.4	Topologische Struktur eines Gebiets und Potentiale	310
14.3.5	Vektorpotentiale. Exakte und geschlossene Formen	312
14.3.6	Übungen und Aufgaben	316
14.4	Anwendungsbeispiele	320
14.4.1	Die Wärmegleichung	320
14.4.2	Die Kontinuitätsgleichung	322
14.4.3	Gleichungen zur Dynamik kontinuierlicher Materie	324
14.4.4	Die Wellengleichung	326
14.4.5	Übungen und Aufgaben	327

15	*Integration von Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten	331
15.1	Ein kurzer Rückblick zur linearen Algebra	331
15.1.1	Die Algebra der Formen	331
15.1.2	Die Algebra der schief-symmetrischen Formen	332
15.1.3	Lineare Abbildungen und ihre Adjungierte	335
15.1.4	Übungen und Aufgaben	337
15.2	Mannigfaltigkeiten	338
15.2.1	Definition einer Mannigfaltigkeit	338
15.2.2	Glatte Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen	344
15.2.3	Orientierung einer Mannigfaltigkeit und ihres Randes	347
15.2.4	Zerlegungen der Eins. Mannigfaltigkeiten als Flächen	351
15.2.5	Übungen und Aufgaben	355
15.3	Differentialformen und Integration auf Mannigfaltigkeiten	357
15.3.1	Der Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit in einem Punkt	357
15.3.2	Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit	361
15.3.3	Die äußere Ableitung	363
15.3.4	Das Integral einer Form über einer Mannigfaltigkeit	364
15.3.5	Die Stokesche Formel	366
15.3.6	Übungen und Aufgaben	368
15.4	Geschlossene und exakte Formen auf Mannigfaltigkeiten	374
15.4.1	Der Satz von Poincaré	374
15.4.2	Homologie und Kohomologie	377
15.4.3	Übungen und Aufgaben	383
16	Gleichmäßige Konvergenz und Basisoperationen der Analysis	385
16.1	Punktweise und gleichmäßige Konvergenz	385
16.1.1	Punktweise Konvergenz	385
16.1.2	Formulierung der fundamentalen Probleme	386
16.1.3	Konvergenz einer von einem Parameter abhängigen Familie	388
16.1.4	Das Cauchysche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz	392
16.1.5	Übungen und Aufgaben	393
16.2	Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe von Funktionen	394
16.2.1	Grundlegende Definitionen. Gleichmäßige Konvergenz einer Reihe	394
16.2.2	Weierstraßscher M -Test auf gleichmäßige Konvergenz	397
16.2.3	Der Test nach Abel-Dirichlet	399
16.2.4	Übungen und Aufgaben	403
16.3	Funktionale Eigenschaften einer Grenzfunktion	404
16.3.1	Problembeschreibung	404
16.3.2	Bedingungen für die Vertauschbarkeit zweier Grenzwertübergänge	405
16.3.3	Stetigkeit und Grenzwertübergang	406

16.3.4	Integration und Grenzwertübergang	410
16.3.5	Differentiation und Grenzwertübergang	412
16.3.6	Übungen und Aufgaben	417
16.4	*Teilmengen des Raumes der stetigen Funktion	421
16.4.1	Der Satz von Arzelà–Ascoli	421
16.4.2	Der metrische Raum $C(K, Y)$	424
16.4.3	Der Satz von Weierstraß–Stone	425
16.4.4	Übungen und Aufgaben	428
17	Parameterintegrale	431
17.1	Eigentliche Parameterintegrale	431
17.1.1	Grundbegriffe	431
17.1.2	Stetigkeit des Integrals	432
17.1.3	Ableitung des Integrals	433
17.1.4	Integration des Integrals	437
17.1.5	Übungen und Aufgaben	438
17.2	Uneigentliche Parameterintegrale	440
17.2.1	Gleichmäßige Konvergenz bzgl. eines Parameters	440
17.2.2	Stetigkeit eines Parameterintegrals	448
17.2.3	Ableitung nach einem Parameter	451
17.2.4	Integration eines uneigentlichen Integrals	454
17.2.5	Übungen und Aufgaben	459
17.3	Die Eulerschen Integrale	462
17.3.1	Die Betafunktion	463
17.3.2	Die Gammafunktion	465
17.3.3	Der Zusammenhang zwischen der Beta- und der Gammafunktion	468
17.3.4	Beispiele	469
17.3.5	Übungen und Aufgaben	471
17.4	Faltung und verallgemeinerte Funktionen	475
17.4.1	Faltung bei physikalischen Problemen	475
17.4.2	Allgemeine Eigenschaften einer Faltung	477
17.4.3	Näherungsgleichungen und der Satz von Weierstraß	481
17.4.4	*Elementare Konzepte rund um Distributionen	487
17.4.5	Übungen und Aufgaben	498
17.5	Mehrfache Parameterintegrale	504
17.5.1	Eigentliche mehrfache Parameterintegrale	504
17.5.2	Uneigentliche Mehrfachintegrale	505
17.5.3	Uneigentliche Integrale mit einer veränderlichen Singularität	506
17.5.4	*Faltung im mehr-dimensionalen Fall	511
17.5.5	Übungen und Aufgaben	522

18	Fourier-Reihen und die Fourier-Transformation	527
18.1	Allgemeine Grundbegriffe zu Fourier-Reihen	527
18.1.1	Orthogonale Funktionensysteme	527
18.1.2	Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihen	534
18.1.3	*Eine Quelle für orthogonale Systeme	546
18.1.4	Übungen und Aufgaben	550
18.2	Trigonometrische Fourier-Reihen	556
18.2.1	Wichtige Konvergenzarten klassischer Fourier-Reihen	556
18.2.2	Punktweise Konvergenz einer Fourier-Reihe	562
18.2.3	Glattheit und Abnahme der Fourier-Koeffizienten	572
18.2.4	Vollständigkeit des trigonometrischen Systems	577
18.2.5	Übungen und Aufgaben	584
18.3	Die Fourier-Transformation	592
18.3.1	Fourier-Integraldarstellung	592
18.3.2	Differentialeigenschaften und die Fourier-Transformierte	606
18.3.3	Die wichtigsten strukturellen Eigenschaften	609
18.3.4	Beispiele und Anwendungen	615
18.3.5	Übungen und Aufgaben	621
19	Asymptotische Entwicklungen	629
19.1	Asymptotische Formeln und asymptotische Reihen	631
19.1.1	Grundlegende Definitionen	631
19.1.2	Allgemeine Tatsachen zu asymptotischen Reihen	637
19.1.3	Asymptotische Potenzreihen	641
19.1.4	Übungen und Aufgaben	644
19.2	Die Asymptotik von Integralen (die Laplacesche Methode)	647
19.2.1	Die Idee hinter der Laplaceschen Methode	647
19.2.2	Das Lokalisierungsprinzip für ein Laplace-Integral	650
19.2.3	Kanonische Integrale und ihr asymptotisches Verhalten	652
19.2.4	Asymptotik eines Laplace-Integrals	656
19.2.5	*Asymptotische Entwicklungen von Laplace-Integralen	659
19.2.6	Übungen und Aufgaben	671
	Themen und Fragen für Halbjahresprüfungen	679
1.	Reihen und parameterabhängige Integrale	679
2.	Empfohlene Aufgaben für die Halbjahresprüfungen	680
3.	Integralberechnungen (mehrere Variable)	682
4.	Empfohlene Aufgaben für das Studium der Halbjahresthemen	683
	Prüfungsgebiete	685
1.	Reihen und parameterabhängige Integrale	685
2.	Integralrechnung (Mehrere Variable)	686

Literaturverzeichnis	689
1. Klassische Werke	689
1.1 Hauptquellen	689
1.2 Wichtige umfassende grundlegende Werke	689
1.3 Klassische Vorlesungen in Analysis aus der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts	689
2. Lehrbücher	690
3. Studienunterlagen	690
4. Weiterführende Literatur	691
Symbolverzeichnis	693
Sachverzeichnis	697
Namensverzeichnis	707