Sybille Handrock-Meyer

# Differenzialgleichungen für Einsteiger

## Eine anwendungsbezogene Einführung für Bachelor-Studiengänge

Mit 60 Bildern, 11 Tabellen, 62 Beispielen und 43 Aufgaben
sowie einer Testklausur und Maple-Worksheets



**Fachbuchverlag Leipzig**
im Carl Hanser Verlag

# Inhaltsverzeichnis


**1 Grundlegende Begriffe** 9

1.1 Was ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung? . . . . . 9
1.2 Einteilung gewöhnlicher Differenzialgleichungen . . . . . 12
1.3 Lösungen und ihre geometrische Interpretation . . . . . 13
1.4 Anfangs- und Randwertprobleme . . . . . 17
1.5 Einige Beispiele zur Modellierung . . . . . 19
1.6 Direkte und inverse Probleme . . . . . 24
1.7 Bis hierher alles klar? . . . . . 29

**2 Differenzialgleichungen 1. Ordnung** 31

2.1 Ein grafisches Lösungsverfahren . . . . . 31
2.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . . 33
2.3 Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen . . . . . 39
2.4 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . . 43
2.5 Wiederholung ist die Mutter der Weisheit . . . . . 46

**3 Lineare Differenzialgleichungen $n$-ter Ordnung** 48

3.1 Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen . . . . . 48
3.2 Lösungsstruktur linearer Gleichungen . . . . . 49
3.3 Variation der Konstanten . . . . . 50
3.4 Ein algebraisches Lösungsverfahren . . . . . 53
3.5 Die Schwingungsgleichung . . . . . 58
3.6 Die Methode der Laplace-Transformation . . . . . 67
3.6.1 Definition und Existenz der Laplace-Transformation . . . . . 67
3.6.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . . 70
3.6.3 Regeln für die Rücktransformation . . . . . 73
3.6.4 Anwendung zur Lösung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen . . . . . 75
3.7 Haben Sie alles verstanden? . . . . . 83

**4 Systeme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten** 85

4.1 Homogene und inhomogene Systeme . . . . . 86
4.2 Lösungsstruktur linearer Systeme . . . . . 90
4.3 Variation der Konstanten . . . . . 93
4.4 Ein algebraisches Lösungsverfahren . . . . . 94
4.4.1 Matrixeigenwertprobleme . . . . . 95
4.4.2 Konstruktion eines Fundamentalsystems . . . . . 102
4.5 Lösung von Anfangswertproblemen für Systeme mit dem algebraischen Lösungsverfahren . . . . . 112

4.6 Lösung von Anfangswertproblemen für Systeme mit der Laplace-Transformation . . . . . 117
4.7 Jetzt wiederholen wir noch mal! . . . . . 124

**5 Einführung in die Stabilitätstheorie 126**
5.1 Stetige Abhängigkeit von den Eingangsdaten und Stabilität . . . . . 126
5.2 Stabilität der trivialen Lösung . . . . . 131
5.3 Stabilität und Gleichgewichtslagen . . . . . 135
5.4 Alles stabil? . . . . . 143

**6 Etwas zur numerischen Lösung 144**
6.1 Das EULER-*Verfahren* . . . . . 145
6.2 Das HEUN-*Verfahren* . . . . . 147
6.3 Das klassische RUNGE-KUTTA-*Verfahren* . . . . . 149
6.4 Konvergenz und Schrittweite . . . . . 151
6.5 Annäherungsversuche . . . . . 153

**7 Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen mit MAPLE 155**
7.1 Vorbemerkungen . . . . . 155
7.2 Lösung einer skalaren gewöhnlichen Differenzialgleichung . . . . . 159
7.3 Lösung von Systemen . . . . . 167
7.4 Grafische Lösung von Differenzialgleichungen . . . . . 171

**Anhang 1: Lösungen der Modellierungsbeispiele 175**

**Anhang 2: Lösungen der Aufgaben 179**

**Anhang 3: Testklausur mit Lösungen 189**

**Anhang 4: Tabelle von Laplace-Transformationen 192**

**Literaturverzeichnis 198**

**Sachwortverzeichnis 199**