

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Beispiele aus Konstruktionsberechnung und Mechanik	1
1.2 Einordnung einer Finite-Elemente-Rechnung in den Prozeß der Konstruktionsberechnung	— 5
1.3 Finite-Elemente-Verfahren für allgemeine Feldprobleme	7
1.4 Die Finite-Elemente-Methode und andere Diskretisierungsverfahren	9
1.5 Zur historischen Entwicklung der Finite-Elemente-Methode	11
1.6 Gliederung des Buches	18
2 Differentialgleichungsformulierungen für Probleme der Strukturmechanik	21
2.1 Tragwerkstypen	21
2.2 Grundgleichungen und Randbedingungen für Scheibe und Stab	24
2.2.1 Zustandsgrößen für Scheibe und Stab	24
2.2.2 Gleichgewichtsbedingungen	25
2.2.3 Materialgesetz (Elastizitätsgesetz)	27
2.2.4 Kinematische Aussagen	28
2.2.5 Verschiebungsdifferentialgleichungen	28
2.2.6 Randbedingungen	29
2.2.7 Zusammenfassung und Erweiterung auf dreidimensionale Kontinua ..	33
2.3 Zustandsgrößen von Balken und Platten	35
2.4 Grundgleichungen für Balken und Platten	38
2.5 Übungsaufgaben	41
3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	49
3.1 Was ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen und wie setzt man es ein? ..	50
3.2 Ableitung des Prinzips der virtuellen Verrückungen aus den Gleichgewichtsbedingungen	55
3.3 Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (Dirichletsches Variationsprinzip)	59
3.4 Zulässige Verschiebungszustände	63
3.5 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für einzelne Kontinua	65

3.5.1	Das Prinzip für dreidimensionale Kontinua, Scheiben und Dehnstäbe . . .	65
3.5.2	Das Prinzip für Balken und Platten	65
3.6	Übertragung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf die Wärmeleitungsaufgabe	69
3.6.1	Grundgleichungen der Wärmeleitung	70
3.6.2	Das Prinzip der virtuellen Temperatur	73
3.6.3	Analogie zwischen den Grundgleichungen der Wärmeleitung und den Grundgleichungen der Strukturmechanik	74
3.7	Übungsaufgaben	76
4	Finite-Elemente-Verfahren für Scheibentragwerke und Fachwerke	85
4.1	Ein Verfahren der finiten Elemente für Scheibentragwerke	85
4.1.1	Vorbemerkung: Globale oder lokal begrenzte Ansätze	86
4.1.2	Verschiebungsansatz für ein Rechtekelement	88
4.1.3	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes	91
4.1.4	Diskretisierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Einführung des Verschiebungsansatzes	93
4.1.5	Ermittlung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren für Rechtekelemente	95
4.1.6	Aufbau und Lösen des Gleichungssystems	103
4.1.7	Berechnung der Schnittkräfte und der Formänderungsenergie	108
4.1.8	Anschauliche Interpretation	109
4.1.9	Zusammenfassung	114
4.1.10	Einfache Beispielrechnung	118
4.1.11	Verbesserte Schnittkraftberechnung	128
4.2	Mechanisch begründete Anforderungen an ein Finite-Elemente-Verfahren . . .	132
4.2.1	Stetigkeit des Verschiebungsansatzes	133
4.2.2	Darstellbarkeit von Starrkörperverschiebungszuständen	134
4.2.3	Darstellbarkeit konstanter Verzerrungszustände	136
4.2.4	Symmetrie der Steifigkeitsmatrix	139
4.2.5	Positive Definitheit der Steifigkeitsmatrix	140
4.2.6	Kriterien für die Wahl von Ansatzfunktionen	142
4.2.7	Überprüfung der Matrizen des 4-Knoten-Rechtekelementes	143
4.3	Ein Verfahren der finiten Elemente für Fachwerke	146
4.3.1	Elementierung	147
4.3.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	148
4.3.3	1. Schritt: Festlegung des Elementtyps	148
4.3.4	2. Schritt: Differentiation des Verschiebungsansatzes	150
4.3.5	3. Schritt: Auswertung der Elementintegrale	150
4.3.6	4. Schritt: Aufbau der Systemmatrizen	151
4.3.7	5. Schritt: Lösen des Gleichungssystems	152
4.3.8	6. Schritt: Berechnung der Schnittkräfte	153
4.3.9	Ermittlung des exakten Verschiebungsansatzes	154

4.3.10	Beispielrechnung	156
4.3.11	Erweiterung auf räumliche Fachwerke	156
4.4	Übungsaufgaben	158
5	Umsetzung des Verfahrens zu einem Finite-Elemente-Programm ...	165
5.1	Dateneingabe und Ergebnisausgabe	165
5.2	Einbau der Elementmatrizen in die Systemmatrix	168
5.3	Einbau der Verschiebungsrandbedingungen in die Systemmatrizen	173
5.4	Direkter Aufbau der Matrizen des gefesselten Systems	175
5.5	Lösen des Gleichungssystems	176
5.6	Übungsaufgaben	183
6	Zur Klassifikation von Elementen und Ansatzfunktionen	187
6.1	Finite Elemente in der Deformationsmethode	187
6.2	Problemtypen beim Kraftgrößenverfahren	193
6.3	Übungsaufgaben	196
7	Ansatzfunktionen für Elemente vom Scheibentyp	201
7.1	Einleitung	201
7.2	Ansatzfunktionen für Rechteckelemente durch Produktbildung	202
7.3	Ansatzfunktionen für Randpunkt- und Übergangselemente	210
7.3.1	Formfunktionen für Randpunktelemente	211
7.3.2	Entwicklung der Steifigkeitsmatrix von Randpunktelementen	219
7.3.3	Formfunktionen für Übergangselemente	220
7.4	Schiefwinklige und krummlinig berandete Elemente	223
7.4.1	Einleitung	223
7.4.2	Abbildungsvorschriften zur Approximation der Elementgeometrie ...	225
7.4.3	Einführung des Verschiebungsansatzes	227
7.4.4	Transformation des Differentialoperators und des Bereichsdifferentials	230
7.4.5	Aufbau von Elementmatrizen und -vektoren	232
7.4.6	Anmerkungen zur numerischen Integration und zur programmtechnischen Umsetzung	234
7.5	Ansatzfunktionen für Dreieckelemente	236
7.5.1	Dreieckskoordinaten	237
7.5.2	Formfunktionen für gradlinig berandete Dreieckelemente	239
7.5.3	Transformation des Differentialoperators und des Flächendifferentials	242
7.5.4	Integration	243
7.5.5	Krummlinig berandete Dreieckelemente	244
7.6	Anmerkungen zu inkompatiblen Ansätzen	245
7.7	Übungsaufgaben	248

8 Numerische Probleme	253
8.1 Hinweise für den Einsatz krummlinig berandeter Elemente	253
8.1.1 Lage der Knoten	253
8.1.2 Ordnung der numerischen Integration	257
8.2 Kontrollalgorithmen für Element- und Systemmatrizen	262
8.3 Genauigkeit und Konvergenzverhalten	265
8.3.1 Definition von Begriffen	266
8.3.2 Schrankencharakter von Energiegrößen	268
8.3.3 Fehlerquellen	270
8.3.4 Ein einfacher Konvergenzbeweis	274
8.4 Richardson-Extrapolation	283
8.5 Beispielrechnungen	286
8.5.1 Scheibenstreifen unter periodischer, treppenförmiger Randschubbelastung	286
8.5.2 Kragplatte unter Rand- und Flächenlasten	288
8.6 Einige praktische Schlußfolgerungen aus den Untersuchungen zum Genauigkeits- und Konvergenzverhalten	294
8.7 Übungsaufgaben	296
9 Finite Elemente für Balken und Platten	299
9.1 Vorbemerkung	299
9.2 Forderungen an Balken- und Plattenelemente	301
9.3 Elemente für schubstarre Balken und Platten	304
9.3.1 Hermite-Ansätze für Balkenelemente	304
9.3.2 Ein kompatibles Plattenrechteckelement	307
9.3.3 Zwei Plattenrechteckelemente mit 12 Freiheitsgraden	312
9.3.4 Einige Bemerkungen zu isoparametrischen Viereckelementen für schubstarre Platten	314
9.3.5 Dreieckelemente für schubstarre Platten	315
9.3.6 Schlußfolgerungen	325
9.4 Elemente für schubweiche Balken und Platten	326
9.4.1 Elemente für schubweiche Balken	327
9.4.2 Elemente für schubweiche Balken auf der Grundlage eines modifizierten Variationsprinzips	336
9.4.3 Viereckelemente für schubweiche Platten	340
9.5 Gemischt-hybride Verfahren zur Entwicklung von Steifigkeitsmatrizen für Flächentragwerken	344
9.6 Verwendung von isoparametrischen Scheiben- und Volumenelementen für Balken- und Plattenstrukturen	346
9.7 Zusammenfassender Vergleich der Elemente für die Behandlung von Biegestrukturen	349
9.8 Übungsaufgaben	351

10 Theorie 2. Ordnung, Stabilität, Schwingungen	354
10.1 Vorbemerkung	354
10.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Balken	355
10.2.1 Nichtlineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen	356
10.2.2 Lineare Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen ..	359
10.3 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach Theorie 2. Ordnung für Platten	362
10.4 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für dynamische Probleme	363
10.5 Berücksichtigung von Dämpfung im Stoffgesetz	367
10.6 Einige numerische Ergebnisse zum Beulen und Schwingen von Platten ..	370
10.6.1 Plattenbeulen	371
10.6.2 Plattenschwingungen	375
10.6.3 Ausnutzung der Symmetrie bei Rechnungen nach Theorie 2. Ordnung	378
10.7 Übungsaufgaben	379
11 Ein Verfahren der finiten Elemente für ebene Rahmentragwerke ..	384
11.1 Elementierung	385
11.2 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statische Probleme nach Theorie 1. und 2. Ordnung	386
11.3 Matrizen des schubweichen Stabelementes	386
11.4 Aufbau der Systemmatrizen	388
11.5 Berechnung der Verschiebungen und der Schnittkräfte an den Elementenden	390
11.6 Zustandsgrößen im Element	392
11.6.1 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 1. Ordnung	392
11.6.2 Zustandsgrößen bei einer statischen Rechnung nach Theorie 2. Ordnung	394
11.7 Beispielrechnungen	396
11.8 Übungsaufgaben	401
12 Ein kombiniertes Verfahren für rotationssymmetrische Flächentragwerke	407
12.1 Problemdefinition	407
12.2 Voraussetzungen und Grundgedanken des Verfahrens	409
12.3 Differentialgleichungsformulierung und Prinzipformulierung	411
12.4 Ausnutzung der Rotationssymmetrie	414
12.5 Numerische Integration des homogenen Differentialgleichungssystems im statischen Fall	416
12.6 Teilinversion zur Steifigkeitsmatrix und Ermittlung von Einheitsverschiebungszuständen	417

12.7	Ermittlung der Massenmatrix und des Belastungsvektors mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen	419
12.8	Aufbau des Gleichungssystems	420
12.9	Einige Ergebnisse	421
12.10	Einsatzgrenzen des Verfahrens	426
12.11	Schlußfolgerungen	427
12.12	Kopplung von Finite-Elemente- und Mehrkörpersystem-Modellen	428
12.13	Übungsaufgaben	430
13	Einstieg in nichtlineare Berechnungsmethoden	433
13.1	Spannungs- und Verzerrungsmaße	434
13.2	Materialgesetz	437
13.3	Prinzip der virtuellen Verrückungen	438
13.4	Geometrie- und Verschiebungsansätze	439
13.5	Transformationen	440
13.6	Aufstellen des Gleichungssystems	442
13.7	Iterationsvorschrift	443
13.8	Elementsteifigkeitsmatrix	445
13.9	Kontrolle der Elementmatrizen	448
13.10	Ablauf des Verfahrens	449
13.11	Beispiel	454
13.12	Übungsaufgaben	456
14	Anhang	459
14.1	Einige Bemerkungen zu den Integralsätzen	459
14.1.1	Greensche Formel	459
14.1.2	Integralsatz für die Membran	461
14.1.3	Integralsatz für die Scheibe	461
14.1.4	Integralsatz für die schubstarre Platte	463
14.2	Grundlagen und Grundbegriffe der Variationsrechnung	464
14.2.1	Fundamentalsatz der Variationsrechnung	464
14.2.2	Variationsprinzip, Funktional, Nebenbedingungen, wesentliche Randbedingungen	465
14.2.3	Durchführung der Variation	467
14.2.4	Eulersche Differentialgleichung	470
14.2.5	Einbau von Nebenbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren	471
14.2.6	Kanonisches Variationsprinzip	475
14.2.7	Übergang zum Castiglianoschen Funktional	476
14.2.8	Einbau von Übergangsbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren: Das Funktional von Pian	477
14.2.9	Einbau von Randbedingungen mit Lagrangeschen Multiplikatoren in das diskretisierte Dirichletsche Funktional	479

14.3 Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften	481
14.3.1 Struktursymmetrie	481
14.3.2 Symmetrische und antimetrische Belastung	482
14.3.3 Behandlung einer Teilstruktur	483
14.3.4 Mehrfachsymmetrie	487
14.3.5 Zyklische Rotationssymmetrie	488
14.4 Übungsaufgaben	493
15 Lösungen der Übungsaufgaben	497
15.1 Vorbemerkungen	497
15.2 Lösungen zu Kapitel 2	497
15.3 Lösungen zu Kapitel 3	505
15.4 Lösungen zu Kapitel 4	511
15.5 Lösungen zu Kapitel 5	522
15.6 Lösungen zu Kapitel 6	528
15.7 Lösungen zu Kapitel 7	535
15.8 Lösungen zu Kapitel 8	544
15.9 Lösungen zu Kapitel 9	548
15.10 Lösungen zu Kapitel 10	552
15.11 Lösungen zu Kapitel 11	558
15.12 Lösungen zu Kapitel 12	568
15.13 Lösungen zu Kapitel 13	569
15.14 Lösungen zu Kapitel 14	574
Symbole und Bezeichnungen	578
Literatur	588
Sachverzeichnis	605