

# Darstellung der Kotangentialmoduln von Basisräumen verseller Deformationen

Björn Fröhlich

17. 10. 2007

## **Dank**

Ich danke allen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und zu Ihrer Fertigstellung motiviert haben. Insbesondere danke ich Herrn Prof. Dr. Hubert Flenner für die Betreuung dieser Arbeit.

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Einleitung</b>                                                           | <b>3</b>   |
| <b>0 Grundlagen und Notation</b>                                            | <b>7</b>   |
| 0.1 Notation und Grundbegriffe . . . . .                                    | 7          |
| 0.2 Glatte Algebren und Morphismen . . . . .                                | 11         |
| 0.3 Hom-Funktoren auf abelschen Kategorien . . . . .                        | 14         |
| 0.4 Kohomologie . . . . .                                                   | 19         |
| <b>1 Deformationstheorie</b>                                                | <b>29</b>  |
| 1.1 Faserung in Gruppoide und globale Deformationstheorien . . . . .        | 29         |
| 1.2 Lokale und formale Deformationstheorien . . . . .                       | 38         |
| 1.3 Versalität und Semiuniversalität . . . . .                              | 48         |
| 1.4 Offenheit der Versalität und Obstruktionstheorien . . . . .             | 57         |
| <b>2 Auflösungen von Deformationen</b>                                      | <b>62</b>  |
| 2.1 Der Funktor $\text{Ext}^i(-, -)$ für lokale Noethersche Ringe . . . . . | 62         |
| 2.2 $\mathcal{E}xt$ -Funktoren und Eigenschaften . . . . .                  | 66         |
| 2.3 Der Kotangentenkomplex . . . . .                                        | 73         |
| 2.4 $S$ -Auflösungen und darstellbare Deformationen . . . . .               | 76         |
| <b>3 Beweis des Hauptsatzes und Anwendungen</b>                             | <b>84</b>  |
| 3.1 Lokaler Fall . . . . .                                                  | 84         |
| 3.2 Der globale Fall . . . . .                                              | 89         |
| 3.3 Anwendung auf den Fall feiner Modulräume . . . . .                      | 94         |
| 3.3.1 Der Douady-Raum . . . . .                                             | 96         |
| 3.3.2 Der Quot-Raum . . . . .                                               | 99         |
| 3.4 Deformation von Moduln . . . . .                                        | 103        |
| 3.4.1 Einfache Moduln . . . . .                                             | 106        |
| 3.4.2 Kogerahmte Moduln . . . . .                                           | 108        |
| 3.4.3 Vektorbündel . . . . .                                                | 110        |
| 3.4.4 Geradenbündel . . . . .                                               | 112        |
| 3.5 Deformation kompakter komplexer Räume . . . . .                         | 114        |
| 3.5.1 Kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten . . . . .                        | 115        |
| <b>Literaturverzeichnis</b>                                                 | <b>119</b> |

# Einleitung

In einer Arbeit von 1961 [zu finden in [Gro95]] hat A. Grothendieck ein projektives  $k$ -Schema konstruiert, dessen abgeschlossene Punkte die Quotienten einer gegebenen kohärenten Garbe  $\mathcal{F}$  auf einem projektiven  $k$ -Schema  $X$  parametrisieren – das sogenannte *Quot-Schema*  $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}}$ . Diese Konstruktion wurde von Douady und Pourcin auf den Fall komplexer Räume übertragen [siehe [Dou66] und [Pou69]]. Bereits in der Arbeit von Grothendieck wird für jeden abgeschlossenen Punkt  $q = [\mathcal{G}] \in \mathrm{Quot}_{\mathcal{F}}$  eine Darstellung des Zariski-Tangentialraums  $T_q \mathrm{Quot}_{\mathcal{F}}$  im Punkte  $q$  angegeben. Allerdings gibt Grothendieck keine globale Beschreibung des Tangentialraumes, wie sie beispielsweise durch eine globale Darstellung der Tangentialgarbe oder der Kotangentialgarbe gegeben wäre.

Eine solche Beschreibung gibt M. Lehn in [Leh98]: für ein glattes projektives Schema  $X_0$  wird eine globale Darstellung für den Kotangentialmodul des Quot-Schemas  $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}}$  konstruiert. Hauptidee in dem Beweis von Lehn ist die Charakterisierung des Quot-Schemas als Verschwindungsort eines geeigneten Garbenhomomorphismus auf einem Produkt von Grassmannschen Schemata. Der Beweis verwendet dabei Standard-Techniken der algebraischen Geometrie; mit einigen Anpassung ist der Beweis auch für komplexe Räume gültig.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir einen Beweis angeben, der sowohl in der algebraischen als auch in der analytischen Situation gültig ist. Im Gegensatz zur vorgenannten Arbeit von Lehn wird das Quot-Schema nicht konkret als Verschwindungsort eines Morphismus von kohärenten Moduln realisiert, sondern vielmehr als Basis eines geeigneten Objektes einer „globalen Deformationstheorie“. Mit dieser Methode erhält man allgemeiner auch für nichtglatte eigentliche Schemata resp. komplexe Räume eine Darstellung der Kotangentialgarbe von  $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}}$ . Unter einer „Deformationstheorie“ verstehen wir dabei eine homogene Faserung in Gruppoide  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$ , wie sie beispielsweise in [Fle81a] oder [Rim72] eingeführt wird.

Da das zu Beginn betrachtete Quot-Schema ein feiner Modulraum für die Familie von Quotienten eines vorgegebenen kohärenten Moduls  $\mathcal{F}$  ist, liegt es nahe zu fragen, ob man mit den Methoden dieser Arbeit auch für weitere Modulräume eine globale Beschreibung der Differentialformen angeben kann. Diese Frage kann für feine Modulräume zumeist positiv beantwortet werden, beispielsweise für das Hilbertschema oder das Picardschema. Für grobe Modulräume hingegen ist eine globale Darstellung des Kotangentialmoduls nicht möglich. In diesem Fall kann nur eine Aussage über die lokale Gestalt des Kotangentialmoduls gemacht

werden. In Kapitel 3 werden als Beispiele der Modulraum  $\mathbb{S}$  der Familie von einfachen Moduln, der Modulraum  $\mathbb{K}$  der Familie einfacher kogerahmter Moduln und der zur Familie der einfachen Vektorbündel gehörige Modulraum  $\mathbb{V}$  behandelt.

Zur Formulierung des Hauptsatzes 3.2.1 in Kapitel 3 werden einige Begriffe und Grundlagen der Deformationstheorie und der Kohomologietheorie benötigt, die in Kapitel 1 und 2 soweit wiederholt werden, wie es für diese Arbeit nötig ist. Insbesondere werden die Funktoren  $\text{Aut}(a/S, -)$  und  $\text{Ex}(a/S, -)$  behandelt, welche auf natürliche Weise durch eine Deformationstheorie  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  und ein Objekt  $a \in \mathbf{F}$  definiert sind. Sie beschreiben – vereinfacht gesprochen – die infinitesimalen Automorphismen und Erweiterungen von  $a$ .

Eine wesentliche Voraussetzung für die Berechnung der Kotangentialgarbe ist die Existenz einer sogenannten *S-Auflösung*: diese werden in Kapitel 2 eingeführt. Eine *S-Auflösung* eines Objektes  $a$  ist gegeben durch einen Komplex  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^-(S)$ , der (in  $\mathcal{N}$  funktorielle) Isomorphismen

$$\text{Aut}(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^0(\mathcal{K}, \mathcal{N}) \text{ und } \text{Ex}(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{K}, \mathcal{N})$$

induziert.

Die infinitesimalen Automorphismen und Erweiterungen eines Objektes sind oftmals bekannt: für die Erweiterungen eines Quotienten  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$  gilt beispielsweise [siehe 3.3.14]

$$\text{Ex}(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}(\mathcal{K}, \mathcal{Q} \otimes \mathcal{N}).$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{K}$  den Kern der Projektion  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}$ . Eine *S-Auflösung* ist aus einer solchen Darstellung ableitbar. Dazu wird die Dualitätsaussage für relative *Ext*-Garben aus [Fle81b] ausgenutzt. Dadurch ist sichergestellt, dass für Objekte, deren infinitesimale Automorphismen und Erweiterungen bekannt sind, auch eine *S-Auflösung* existiert und somit eine der wesentlichen Voraussetzungen des Hauptsatzes erfüllt ist.

Eine weitere technische Anforderung für die gewünschte Darstellung des Kotangentialmoduls ist, dass der Kohomologiemodul  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei ist. Für ein universelles Objekt  $a$ , das eine derartige *S-Auflösung*  $\mathcal{K}$  besitzt, ist der Kotangentialmodul  $\Omega_S^1$  der Basis  $S$  dann isomorph zu  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})$ . An dieser Stelle wird deutlich, warum damit eine Darstellung der Differentialformen feiner Modulräume möglich ist: falls ein feiner Modulraum existiert, so gibt es auch stets ein universelles Objekt der betrachteten Familie. Betrachtet man die zu dem jeweiligen Modulproblem gehörige Deformationstheorie, so ist dieses Objekt universell in der Faser  $\mathbf{F}(\mathbb{M})$  über dem Modulraum  $\mathbb{M}$ .

Im Beweis von 3.2.1 werden implizit formale und lokale Deformationstheorien benutzt. Diese ergeben sich durch gewisse Lokalisierungs- und Komplettierungsprozesse aus der globalen Deformationstheorie  $p$ ; sie werden in Kapitel 1 genauer studiert. Da der Kotangentialmodul eines komplexen Raumes  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  in gewisser Weise mit diesen Prozessen verträglich ist, wird mit 3.1.1 zunächst eine „formale Version“ des Hauptsatzes gezeigt. Diese gibt – allgemeiner als der Hauptsatz für global definierte Objekte – eine Darstellung des Kotangentialmoduls  $\Omega_S^1$  eines formalen Raumkeimes  $\bar{S}$  an, der Basis einer *formal versellen*

Deformation  $\bar{a}$  ist. Eine (formal) verselle Deformation  $\bar{a}$  eines gegebenen Objektes  $a_0$  ist dabei eine solche Deformation, die die folgende Liftungseigenschaft erfüllt:

(FV) ist  $\bar{b} \hookrightarrow \bar{b}'$  ein Morphismus in  $\mathbf{F}$  über einer abgeschlossenen Einbettung  $p(\bar{b}) \hookrightarrow p(\bar{b}')$  in  $\mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  und  $f : \bar{b} \rightarrow \bar{a}$  ein Morphismus, so gibt es stets einen Morphismus  $\bar{b}' \rightarrow \bar{a}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{b} & \hookrightarrow & \bar{b}' \\ & \searrow f & \downarrow \text{dotted} \\ & & \bar{a} \end{array}$$

kommutiert.

Im Gegensatz zu „universellen“ Deformationen ist die Liftung  $\bar{b}' \rightarrow \bar{a}$  nicht eindeutig. Unter der in den meisten Fällen erfüllten Voraussetzung, dass die infinitesimalen Erweiterungen  $\text{Ex}(a_0, \mathbb{C})$  des Objektes  $a_0$  endlich-dimensional als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum sind, gibt es stets solche formal versellen Deformationen, darunter auch eine, die in gewisser Weise „minimal“ unter allen versellen Deformationen ist. Diese minimale formal verselle Deformation hat die Eigenschaft, dass zumindest der auf den Tangentialräumen induzierte Morphismus  $T(p(\bar{b}')) \rightarrow T(p(\bar{a}))$  eindeutig bestimmt ist. Sie wird als formal *miniverselle* oder *semiuniverselle* Deformation von  $a_0$  bezeichnet. Eine formal universelle Deformation, also eine solche, die in der Situation von (FV) stets eine eindeutige Liftung induziert, gibt es im Allgemeinen nicht.

In den betrachteten Beispielen ist ferner auch  $\text{Aut}(a_0, \mathbb{C})$  endlich-dimensional. In dem Fall kann man jeder formal versellen Deformation  $\bar{a}$  eindeutig eine nicht-negative Zahl  $d$  zuordnen. Sie wird *verselle Überschussdimension* genannt und ist ein Maß dafür, wie „weit“  $\bar{a}$  von der formal semiuniversellen Deformation  $\bar{a}^*$  entfernt ist. Theorem 3.1.1 lässt sich nun wie folgt zusammenfassen: ist  $\bar{a}$  eine formal verselle Deformation von  $a_0$  und gibt es für  $\bar{a}$  eine minimale  $\bar{S}$ -Auflösung, so ist der Kotangentialmodul von  $\bar{S}$  (modulo einem freien direkten Summanden) isomorph zum Kokern der zweiten Randabbildung dieser minimalen Auflösung. Der Rang des direkten Summanden ist dabei durch die verselle Überschussdimension  $d$  von  $\bar{a}$  gegeben.

Unter einer minimalen Auflösung verstehen wir dabei eine minimale Auflösung im gewohnten Sinne der Kohomologietheorie, also einen Komplex von freien Modulen, dessen Randabbildungen durch Matrizen  $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$  gegeben sind, für die alle Elemente  $a_{ij}$  im maximalen Ideal von  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  liegen. Mit Theorem 3.1.1 wird also allgemein für *jede*  $\bar{S}$ -auflösbare, formal verselle Deformation  $\bar{a}$  über  $\bar{S}$  eine Beschreibung des Kotangentialmoduls von  $\bar{S}$  gegeben.

Die Arbeit ist folgendermassen eingeteilt: in Kapitel 0 werden sämtliche Grundlagen zusammengetragen, die nicht direkt Teil der Deformationstheorie oder Kohomologietheorie sind.

Kapitel 1 fasst die wichtigsten Begriffe und Aussagen der Deformationstheorie zusammen. Insbesondere werden dort Kriterien für Versalität und Semiuniversalität einer Deformation gegeben sowie sogenannte Offenheitskriterien, die es erlauben, bequem festzustellen, ob eine Deformation auf einer offenen Teilmenge des zugrundeliegenden komplexen Raumes versell oder semiuniversell ist.

In Kapitel 2 wird das wichtigste technische Hilfsmittel in dieser Arbeit eingeführt, die sogenannten  $S$ -Auflösungen. Ferner zeigen wir, welche Eigenschaften solche Auflösungen besitzen und welche Informationen eine  $S$ -Auflösung über das betrachtete Objekt  $a$  über  $S$  bereithält. In diesem Kapitel wird auch die für den Beweis wesentliche Dualitätsaussage aus [Fle81b] wiederholt und der Funktor  $L\pi_*$ , der in [Fle81b] definiert wird, für einen glatten eigentlichen Morphismus  $\pi$  explizit berechnet.

Im letzten Kapitel geben wir dann zunächst den Darstellungssatz für Kotangentenbündel von Basisräumen (formal) versellter Deformationen für formale Deformationstheorien und Deformationen an und leiten sodann ein Kriterium her, wann eine ähnliche Aussage für globale Deformationstheorien gilt. Abschließend werden einige Anwendungen des Satzes betrachtet. Dabei zeigt sich, dass der Douady-Raum zum Quot-Funktor  $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}_0/X_0}$  (diesem entspricht das Quot-Schema im algebraischen Fall) und der zum Hilbertfunktor  $\mathrm{Hilb}_{X_0}$  gehörige Douady-Raum im glatten Fall eine zu [Leh98] analoge Darstellung der Kotangentenbündel haben.

# Grundlagen

## 0.1 Notation und Grundbegriffe

**0.1.1** Die in dieser Arbeit vorkommenden Ringe seien sämtlich kommutativ und mit Einselement. Die betrachteten Körper seien algebraisch abgeschlossen und von Charakteristik Null.

**0.1.2** In dieser Arbeit bezeichnet  $A$  zumeist einen lokalen Noetherschen Ring. Oftmals trägt  $A$  zusätzlich die Struktur einer analytischen  $\mathbb{C}$ -Algebra. Die Kategorie der  $A$ -Moduln wird wie üblich mit  $\mathbf{Mod}(A)$  bezeichnet; die Kategorie der endlichen  $A$ -Moduln bezeichnen wir mit  $\mathbf{Coh}(A)$  und die Kategorie der  $A$ -Moduln endlicher Länge mit  $\mathbf{Art}(A)$ .

Soweit nicht anders angegeben seien die betrachteten Ringhomomorphismen in dieser Arbeit stets lokal, das heißt ist  $f : (A, \mathfrak{m}_A) \rightarrow (B, \mathfrak{m}_B)$  ein Ringhomomorphismus lokaler Noetherscher Ringe, so gelte  $f^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$ .

**0.1.3** Eine Teilmenge  $U \subset X$  eines komplexen Raumes ist *Zariski-offen* oder kurz *Z-offen*, wenn das Komplement  $X \setminus U$  eine analytische Teilmenge von  $X$  ist. Dabei nennt man eine Teilmenge  $A \subset X$  *analytisch*, wenn sie lokal das gemeinsame Nullstellengebilde geeigneter holomorpher Funktionen ist, das heißt, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  gibt und  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_X(U)$  mit  $A \cap U = \{u \in U \mid f_1(u) = \dots = f_k(u) = 0\}$ .

Die Z-offenen Teilmengen definieren die *Zariski-Topologie* auf  $X$ . Diese ist zu unterscheiden von der feineren Standardtopologie auf  $X$ : für jeden Punkt  $x \in X$  und jeder Z-offenen Teilmenge  $U$ , die  $x$  enthält, gibt es eine (bezüglich der Standardtopologie) offene Teilmenge  $U'$ , die  $x$  enthält und in  $U$  liegt. Eine solche Teilmenge  $U'$  (resp.  $U$ ) bezeichnen wir auch als *Umgebung* (resp. *Z-Umgebung*) von  $x$ . Zur Unterscheidung der Topologien werden die Begriffe *Z-offen* und *Z-abgeschlossen* im Gegensatz zu *offen* und *abgeschlossen* verwendet. Ist die Topologie aus dem Zusammenhang klar, wird das Präfix „Z“ einfach weggelassen.

Ein Noetherscher Schema wird stets mit der Zariskitopologie versehen. Die vorgenannten Begriffe werden synonym verwendet.

**0.1.4** Unter einem kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{F}$  versteht man stets eine Garbe von Moduln auf  $S$ , für die es eine offene Überdeckung  $\{U\}$  gibt, so dass für jedes  $U$  Zahlen  $p, q$  existieren, für die  $\mathcal{O}_{S|U}^p \rightarrow \mathcal{O}_{S|U}^q \rightarrow \mathcal{F}|_U \rightarrow 0$  exakt ist. Für solche kohärenten Moduln  $\mathcal{F}$  bedeutet  $f \in \mathcal{F}$ , dass  $f$  ein lokaler Schnitt von  $\mathcal{F}$  ist, dass es also eine Umgebung  $U \subset X$  gibt mit  $f \in \mathcal{F}(U)$ . Ist für einen Punkt  $x \in X$  ein

endlicher  $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul  $M$  gegeben, so gibt es stets eine Umgebung  $U$  von  $x$  und einen kohärenten  $\mathcal{O}_{X|U}$ -Modul  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{M}_x \cong M$  [[Gro60], Kapitel 0, (5.3.9)].

**0.1.5** Eine offene Teilmenge  $U$  eines komplexen Raumes  $X$  heißt *Steinsch*, wenn die höheren Kohomologiemoduln sämtlicher kohärenter Garben  $\mathcal{F}$  auf  $U$  verschwinden, i.e.  $H^i(U, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$ .

Ein *Steinsches Kompaktum*  $K \subset X$  ist eine kompakte semianalytische Teilmenge von  $X$ , zu der eine Umgebungsbasis aus offenen Steinschen Unterräumen  $U \subset X$  existiert. Wir versehen  $K$  mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_K := \mathcal{O}_{X|K}$ ; für den Fall, dass  $K = \{x\}$  nur aus einem Punkt besteht, ergibt sich  $\mathcal{O}_K \cong \mathcal{O}_{X,x}$ . Jeder kohärente  $\mathcal{O}_K$ -Modul erfüllt Theorem A und Theorem B von Cartan. Nach [Fri67] ist ferner der Ring der globalen Schnitte  $\Gamma(K, \mathcal{O}_K)$  Noethersch.

Aus den vorgenannten Eigenschaften von Steinschen Kompakta folgt, dass sich diese wie Noethersche affine Schemata verhalten [[BF03], Abschnitt 2, (2.1)]. Sind  $X$  und  $Y$  Räume über einem Basisraum  $\Sigma$  und  $K \subset X$  sowie  $L \subset Y$  jeweils Steinsche Kompakta, so ist auch  $K \times_\Sigma L \subset X \times_\Sigma Y$  ein Steinsches Kompaktum.

Eine Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  eines komplexen Raumes  $X$  durch Steinsche Kompakta wollen wir *lokal endlich* nennen, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x$  gibt derart, dass  $U_x \cap U_i = \emptyset$  für alle bis auf endlich viele  $i \in I$ .

**0.1.6** Ein komplexer Raum  $X$  ist *parakompakt*, wenn er lokal kompakt ist, das heißt wenn es zu jedem Punkt  $x$  eine Umgebung  $U$  gibt, zu der es endlich viele Umgebungen  $V_i$  gibt mit  $U = \bigcup V_i$ . Man beachte, dass es für solche Räume zu jeder Überdeckung stets eine lokal endliche Verfeinerung durch Steinsche Kompakta gibt [siehe 0.1.5].

Ein Schema heißt *quasikompakt*, wenn es lokal stets eine endliche Überdeckung durch affine Noethersche Schemata gibt.

**0.1.7** Ein komplexer Raum  $X$  ist *Hausdorffsch*, wenn es zu zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  stets Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$  gibt mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Ein Morphismus komplexer Räume  $X \rightarrow Y$  ist *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Bezüglich der Zariski-Topologie gibt es keine Hausdorffschen Räume. Für Schemata verwenden wir daher die folgenden relativen Begriffe: ein Morphismus von Schemata  $f : X \rightarrow Y$  ist *separiert*, wenn die Diagonalabbildung  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  eine abgeschlossene Einbettung ist.  $f$  heißt *eigentlich*, wenn  $f$  separiert, vom endlichen Typ und universell abgeschlossen ist [siehe [Har83], Kapitel 2, Abschnitt 4]. Diese Begriffe übertragen sich auch auf komplexe Räume. Insbesondere ist ein komplexer Raum  $X$  genau dann Hausdorffsch, wenn die kanonische Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{C}$  separiert ist. Ebenso ist  $X$  genau dann kompakt, wenn  $X \rightarrow \mathbb{C}$  eigentlich ist. Anstelle von *Hausdorffsch* verwenden wir auch für komplexe Räume den Begriff *separiert*.

**0.1.8** Ein Morphismus komplexer Räume  $f : X \rightarrow S$  heißt *endlich*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist [siehe [KK83], Kapitel 3, Abschnitt 45, insbesondere Theorem 45.4]:

- i) jede Faser ist endlich, das heißt  $f^{-1}(f(x))$  ist für alle  $x \in X$  eine endliche Menge,

- ii) für jeden Punkt  $x \in X$  ist  $\mathcal{O}_{X,x}$  ein endlicher  $\mathcal{O}_{S,f(x)}$ -Modul,
- iii) der Morphismus  $f_x^* : \mathcal{O}_{S,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  ist quasi-endlich, i.e.  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x}$  ist ein endlich-dimensionaler  $\mathcal{O}_{S,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{S,f(x)} = \mathbb{C}$ -Vektorraum.

Die *Dimension* eines komplexen Raumkeimes  $(X, x_0)$  ist die kleinste Zahl  $d$ , für die es eine endliche holomorphe Abbildung  $(X, x_0) \rightarrow \mathbb{C}_0^d$  gibt. Diese Zahl stimmt stets überein mit der Krull-Dimension der zu  $(X, x_0)$  gehörigen analytischen Algebra  $\mathcal{O}_{X,x_0}$ ; sie ist definiert als die maximale Länge von echt aufsteigenden Primidealketten in  $\mathcal{O}_{X,x_0}$ . Ist  $X$  ein komplexer Raum, so setzen wir  $\dim X := \sup_{x \in X} \dim(X, x)$ .

Für ein Noethersches Schema ist die *Dimension* stets als das Supremum der Krulldimensionen aller Halmringe definiert.

**0.1.9** Komplexe Räume werden mit großen Buchstaben wie  $S$ ,  $T$  oder  $X$  bezeichnet. Unter einem *komplexen Raum* versteht man in der vorliegenden Arbeit stets einen separierten komplexen Raum von endlicher Dimension mit einer abzählbaren Basis der Topologie, der zudem parakompakt ist. Die Kategorie der komplexen Räume über einem Basisraum  $\Sigma$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{An}_\Sigma$ . Wenn keine Verwechslung möglich ist, werden auch Raumkeime mit  $S$  und  $T$  bezeichnet. In Abgrenzung zu komplexen Räumen schreiben wir  $S = (S, s)$  für den Keim im Punkte  $s \in S$ . Die Kategorie der komplexen Raumkeime über einem Basiskeim  $(\Sigma, 0)$  wird mit  $\mathbf{An}_{(\Sigma, 0)}$  bezeichnet.

Die Strukturgarbe  $\mathcal{O}_S$  eines komplexen Raumes  $S$  ist stets kohärent und ihre Halmringe sind analytische Algebren. Diese sind wegen [[KK83], Kapitel , Abschnitt 24, Satz 24.2] insbesondere Noethersche lokale Ringe.

Ein Raumkeim  $(S, s)$  eines komplexen Raumes  $S$  im Punkt  $s$  ist (bis auf Isomorphie) eindeutig durch den Halmring  $\mathcal{O}_{S,s}$  bestimmt [[KK83], Kapitel 4, Abschnitt 44].

**0.1.10**  $\widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma, 0)}$  bezeichnet die Kategorie der formalen vollständigen Raumkeime. Objekte sind formale Raumkeime  $\bar{S} = (0, \mathcal{O}_{\bar{S}})$ , wobei  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  eine analytische  $\Lambda := \mathcal{O}_{\Sigma, 0}$ -Algebra ist, die vollständig bezüglich des maximalen Ideals  $\mathfrak{m}$  ist und Restekörper  $\mathcal{O}_{\bar{S}}/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$  besitzt. Genau wie konvergente Raumkeime sind auch formale Raumkeime eindeutig durch die  $\Lambda$ -Algebra  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  bestimmt.

In einigen Beweisen technischer Natur verwenden wir auch die Bezeichnung  $\widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$  für die Kategorie der  $\Lambda$ -Algebren mit vorgenannten Eigenschaften. Mit  $\Lambda := \mathcal{O}_{\Sigma, 0}$  ist offenbar  $\widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma, 0)}^{opp} \cong \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$ .

**0.1.11** Wir verwenden oft die folgende Notation: ist  $s \in S$  ein Punkt und  $\mathfrak{m}_s \subset \mathcal{O}_{S,s}$  das zugehörige maximale Ideal, so bezeichnet  $\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s$  die im Punkt  $s$  konzentrierte Garbe auf  $S$ , das heißt

$$\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s := j_*\mathcal{O}_s \text{ mit } j : \{s\} \hookrightarrow S.$$

Ist  $S$  ein komplexer Raum, so ist stets  $\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s = \mathbb{C}$  und wir verwenden ebenfalls die Notation  $\mathbb{C}_s := \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s$

**0.1.12** Für einen Morphismus komplexer Räume oder Noetherscher Schemata  $f : X \rightarrow S$  bezeichnet  $X(s)$  die *Faser* von  $X$  im Punkte  $s \in S$ . Der zugrundeliegende topologische Raum ist gegeben durch  $f^{-1}(s)$  und die Strukturgarbe durch

$$\mathcal{O}_{X(s)} := \mathcal{O}_X \otimes k(s) := \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s.$$

In der vorliegenden Situation gibt es stets ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X(s) & \xrightarrow{p} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{s\} & \longrightarrow & S. \end{array}$$

Im Falle komplexer Räume ist  $\{s\}$  der reduzierte Punkt, den wir zusammen mit der Strukturgarbe  $\mathbb{C}$  als komplexen Raum auffassen. Betrachten wir Noethersche Schemata, so ist  $\{s\} := \text{Spec } k(s)$ , wobei  $k(s)$  den Restekörper von  $\mathcal{O}_{S,s}$  bezeichnet. Ein reduzierter Punkt trägt also stets die Struktur eines komplexen Raumes bzw. eines Schemas. Er wird mit  $S_s$  bezeichnet; falls sich  $s$  aus dem Zusammenhang ergibt, so verwenden wir auch die Notation  $S_0$ . Ist  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}(s) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s := \mathcal{F} \otimes k(s) := \mathcal{F}/\mathfrak{m}_s \mathcal{F} := p^* \mathcal{F}$$

den auf der Faser  $X(s)$  induzierten Modul.

**0.1.13** Für einen Morphismus komplexer Räume  $f : X \rightarrow S$  und einen Punkt  $x \in X$  ist die *Faserdimension* von  $f$  in  $x$  definiert als  $\dim_x f := \dim f^{-1}(f(x))$ . Ist  $f$  flach, so stimmt diese mit der sogenannten *relativen Dimension* von  $f$  in  $x$  überein, das heißt es gilt [vgl. [Har83], Kapitel 3, Abschnitt 9]

$$\dim_x f = \dim(X, x) - \dim(S, f(x)).$$

**0.1.14** Wenn eine Aussage lokal gilt, so bedeutet dies, dass es für jeden Punkt  $s \in S$  eine Umgebung  $U$  gibt, bezüglich der die Aussage gilt. Für einen  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{F}$  bedeutet dies:  $\mathcal{F}|_U$  erfüllt die Aussage.

Gibt es eine Abbildung von Raumkeimen  $(S, s) \rightarrow (T, t)$ , so lässt sich diese stets auf eine  $Z$ -offene Umgebung von  $S$  fortsetzen [[Gro60], Kapitel 0, (5.2.6) und [KK83], Kapitel 4, Abschnitt 41, Satz 41.15ff]. Ist  $s$  ein Punkt in  $S$  und sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  zwei kohärente  $\mathcal{O}_S$ -Moduln, so lässt sich ferner ein Isomorphismus  $\mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{G}_s$  auf eine Umgebung  $U \subset S$  fortsetzen [[Gro60], Kapitel 0, (5.2.7) und [KK83], Abschnitt 41].

**0.1.15** Für Funktoren werden unterschiedliche Notationen verwendet. Mit  $F : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$  bezeichnen wir einen Funktor, auf der Kategorie der  $A$ -Moduln definiert ist. Eine natürliche Transformation zweier solcher Funktoren  $\psi : F_1 \rightarrow F_2$  ist *surjektiv auf einer Unterkategorie  $\mathbf{K}'$* , wenn  $\psi(N) : F_1(N) \rightarrow F_2(N)$  surjektiv ist für alle Moduln  $N$  aus  $\mathbf{K}'$ . Analog verwenden wir diese Sprechweise für injektive und bijektive Transformationen.

Desweiteren treten Funktoren der Form  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  auf. Objekte in  $\mathbf{F}$  werden mit kleinen Buchstaben wie  $a$  oder  $b$  bezeichnet. Häufig wird  $p(a) = S$  und  $p(b) = T$  sein.  $\mathbf{F}^{opp}$  bezeichnet die zu  $\mathbf{F}$  duale Kategorie, und analog bezeichnet  $p^{opp}$  den durch  $p$  auf den dualen Kategorien induzierten Funktor.

**0.1.16** Mit den entsprechenden Anpassungen gelten die Aussagen dieser Arbeit auch für Noethersche separierte quasikompakte Schemata vom endlichen Typ mit endlicher Krulldimension, dessen Strukturgarbe in jedem Halm den gleichen Restekörper besitzt [vgl. 0.2.5]. Bei der Darstellung werden wir uns im Folgenden auf komplexe Räume beschränken. Nur wenn sich eine Aussage nicht offensichtlich auf den algebraischen Fall überträgt, werden wir näher darauf eingehen.

## 0.2 Glatte Algebren und Morphismen

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen Begriffe und Aussagen über *glatte* Morphismen komplexer Räume und Noetherschen Schemata zusammengetragen. Da jede analytische Algebra ein Noetherscher lokaler Ring ist, werden die Begriffe und Aussagen für Algebren über einem Noetherschen kommutativen Ring  $R$  formuliert. Eine ausführliche Darstellung und Beweise zu den angeführten Aussagen findet man in [[Gro67], Kapitel 17] und [[Mat70], Kapitel 10 und 11]. Ferner sei auch auf [[Wei95], Abschnitt 9, 9.3.1] verwiesen.

**0.2.1** Eine  $R$ -Algebra  $A$  heißt *glatt* (über  $R$ ), wenn es zu jeder  $R$ -Algebra  $B$ , jedem Ideal  $I \subset B$  mit  $I^2 = 0$  und jedem  $R$ -Algebrahomomorphismus  $\nu : A \rightarrow B/I$  einen Homomorphismus von  $R$ -Algebren  $u : A \rightarrow B$  gibt mit  $\epsilon u = \nu$ , das heißt wenn sich jedes kommutative Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \nearrow u & \downarrow \nu \\ A & \xrightarrow{\epsilon} & B/I \end{array}$$

wie angedeutet vervollständigen lässt. Dabei bezeichnet  $\epsilon : B \rightarrow B/I$  die kanonische Surjektion. Ein *glatter  $R$ -Algebra-Homomorphismus*  $A \longrightarrow B$  ist ein Homomorphismus von  $R$ -Algebren derart, dass  $B$  glatt über  $A$  ist. Insbesondere ist  $R \longrightarrow A$  genau dann glatt, wenn  $A$  eine glatte  $R$ -Algebra ist. Aus den Definitionen folgt unmittelbar, dass der Polynomring  $R[X_1, \dots, X_n]$  sowie auch der Ring der formalen Potenzreihen  $R[[X_1, \dots, X_n]]$  glatt über  $R$  ist [siehe auch [Mat70], Kapitel 10, Abschnitt 26, Beispiel 26.J].

**0.2.2** Sei  $A$  eine  $R$ -Algebra und  $M$  ein endlicher  $A$ -Modul. Eine  *$R$ -Derivation* von  $A$  in  $M$  ist ein  $R$ -Homomorphismus  $d : A \rightarrow M$ , der für alle  $a, a' \in A$  die Produktregel  $d(aa') = ad(a') + a'd(a)$  erfüllt. Die Menge aller  $R$ -Derivationen von  $A$  in  $M$  wird mit  $\text{Der}_R(A, M)$  bezeichnet. Sie trägt eine  $A$ -Modulstruktur. Der *universelle endliche Kotangentenmodul*  $\Omega_{A/R}^1 := \Omega_{A/R}$  und die *universelle  $R$ -Derivation*  $d : A \longrightarrow \Omega_{A/R}^1$  sind definiert durch die folgende universelle Eigenschaft: ist  $d' : A \rightarrow M$  eine beliebige  $R$ -Derivation in einen endlichen  $A$ -Modul  $M$ , so existiert genau ein  $A$ -Modulhomomorphismus  $\lambda : \Omega_{A/R}^1 \rightarrow M$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/R}^1 & & \\ \uparrow d & \searrow \lambda & \\ A & \xrightarrow{d'} & M \end{array}$$

kommutiert.

Es bezeichne  $\otimes$  das Tensorprodukt auf der Kategorie der  $A$ -Moduln.  $\Omega_{A/R}^1$  lässt sich wie folgt konstruieren: es sei  $K$  der Kern der Multiplikationsabbildung  $\mu : A \otimes_R A \rightarrow A$  mit  $\mu(x_1 \otimes x_2) = x_1 \cdot x_2$ . Vermöge  $A \rightarrow A \otimes A$ ,  $a \mapsto a \otimes 1$  betrachten wir den Quotienten  $K/K^2$  als  $A$ -Modul. Zusammen mit der Abbildung  $d : A \rightarrow K/K^2$ ,  $d(a) := 1 \otimes a - a \otimes 1 \mod I^2$  liefert das den universellen endlichen Kotangentialmodul und die universelle Derivation.

Auf analoge Weise definiert man den universell endlichen Kotangentialmodul für eine analytische  $R$ -Algebra  $A$  oder für eine vollständige Noethersche lokale  $\bar{R}$ -Algebra  $\bar{A}$ . Im letzteren Fall wird der universell endliche Kotangentialmodul mit  $\Omega_{\bar{A}/\bar{R}}^1$  bezeichnet. Es sei angemerkt, dass sich auch in diesen Fällen die oben angegebene Konstruktion des Kotangentialmoduls überträgt, indem man das Tensorprodukt durch das *analytische* resp. *komplette Tensorprodukt* ersetzt [[GR71], Kapitel 3, Abschnitt 5 und [Nag62], Kapitel 6, Abschnitt 42].

Aus dem Kontext wird klar sein, von welchem Kotangentialmodul die Rede ist. Wir werden im Folgenden also stets annehmen, dass der universelle endliche Kotangentialmodul existiert und eindeutig ist. Außerdem verwenden wir ohne weitere Anmerkungen die folgenden Eigenschaften:

- i) Aus der universellen Eigenschaft für  $\Omega_{A/R}^1$  ergibt sich unmittelbar die Isomorphie  $\text{Der}_R(A, M) \cong \text{Hom}_A(\Omega_{A/R}^1, M) \quad \forall M \in \mathbf{Coh}(A)$ .
- ii) Der universelle endliche Kotangentialmodul  $\Omega_{A/R}^1$  ist mit Basiswechsel verträglich, dass heißt ist  $R'$  eine weitere  $R$ -Algebra und  $A' := A \otimes_R R'$ , so gilt  $\Omega_{A'/R'}^1 \cong \Omega_{A/R}^1 \otimes_R A'$ .
- iii) Ist  $R$  ein Noetherscher lokaler Ring und  $A$  eine lokale  $R$ -Algebra, so ist  $\Omega_{A/R}^1$  mit Kompletterierung verträglich, i.e.  $(\Omega_{A/R}^1)^\wedge \cong \Omega_{\hat{A}/\hat{R}}^1$  [folgt aus [SS72], Korollar 1.6].

**0.2.3** Eine Komposition von Ringhomomorphismen  $R \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A$  induziert stets die folgende fundamentale exakte Sequenz der zugehörigen Kotangentialmoduln:

$$\Omega_{A'/R}^1 \otimes_{A'} A \xrightarrow{\alpha} \Omega_{A/R}^1 \xrightarrow{\beta} \Omega_{A/A'}^1 \rightarrow 0$$

Die Abbildungen sind gegeben durch  $\alpha(d_{A'/R}(a') \otimes a) := ad_{A/R}(f(a'))$  und  $\beta(d_{A/R}(a)) := d_{A/A'}(a)$ . Ist  $f$  glatt, so ist die Abbildung  $\alpha$  injektiv und die Sequenz spaltet. Einen Beweis findet man beispielsweise in [[Wei95], Kapitel 9, 9.3.5].

Ist  $\mathfrak{a}$  ein Ideal von  $A$  und bezeichnet  $A' := A/\mathfrak{a}$ , so ist auch

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A'/R}^1 \otimes_{A'} A \xrightarrow{\alpha} \Omega_{A/R}^1 \rightarrow 0,$$

eine exakte Sequenz, wobei  $\delta$  durch  $\delta(x) := dx \otimes 1$  definiert ist. Ist  $A'$  glatt über  $R$ , so ist  $\delta$  injektiv und die Sequenz spaltet.

**0.2.4** Es sei  $X \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume und  $\triangle : X \rightarrow X \times_S X$  die Diagonaleinbettung. Man beachte, dass dies wegen der Separiertheit von  $X$  und  $S$  stets eine abgeschlossene Einbettung ist. Bezeichnet  $\mathcal{J}$  die definierende

Idealgarbe der Diagonale, so definieren wir den (*relativen*) *Kotangentialmodul*  $\Omega_{X/S}^1$  analog zu 0.2.2 durch

$$\Omega_{X/S}^1 := \Delta^*(\mathcal{J}) \cong \mathcal{J}/\mathcal{J}^2.$$

Dies definiert einen kohärenten Modul auf  $X$ . Aus der Konstruktion folgt, dass  $\Omega_{X/S}^1$  halmweise isomorph ist zu den endlichen Kotangentialmoduln  $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{S,f(x)}}^1$ . Daraus ergibt sich leicht, dass  $\Omega_{X/S}^1$  mit Basiswechsel verträglich ist. Die exakten Sequenzen aus 0.2.3 übertragen sich mit den offensichtlichen Anpassungen: sind  $f : X \rightarrow S$  und  $S \rightarrow \Sigma$  holomorphe Abbildungen, so gibt es eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln

$$f^*\Omega_{S/\Sigma}^1 \rightarrow \Omega_{X/\Sigma}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \rightarrow 0;$$

ist  $j : Z \hookrightarrow S$  eine abgeschlossene Einbettung und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_S$  die definierende Idealgarbe, so gibt es eine exakte Sequenz

$$\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \rightarrow j^*\Omega_{S/\Sigma}^1 \rightarrow \Omega_{Z/\Sigma}^1.$$

**0.2.5** Um den Begriff der Glattheit auf Morphismen komplexer Räume zu übertragen, erklären wir zunächst, wann ein Morphismus  $f : X \rightarrow S$  glatt in einem Punkt  $x \in X$  ist. Wir setzen  $s := f(x)$ ,  $A := \mathcal{O}_{S,s}$  und  $B := \mathcal{O}_{X,x}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- i) Der Ringhomomorphismus  $f_x : A \rightarrow B$  ist glatt
- ii)  $A \rightarrow B$  ist flach und  $\Omega_{X/S,x}^1$  ist ein freier  $B$ -Modul vom Rang  $n := \dim_x f$
- iii) Die Abbildung  $f_x$  ist flach und die Faser  $X_s$  ist *regulär*, das heißt für jedes  $x' \in f^{-1}(s)$  ist der Halmring  $\mathcal{O}_{X_s,x'} \cong \mathcal{O}_{X,x'} \otimes k(s)$  ein regulärer lokaler Ring.
- iv)  $\hat{B} \cong \hat{A}[[T_1, \dots, T_n]]$

Die Äquivalenz dieser Aussagen folgt aus [[Gro67], Kapitel 17, insbesondere Theorem 17.5.1, Theorem 17.5.3 und Satz 17.15.15]. Wegen des Weierstrassschen Vorbereitungssatzes [siehe [KK83], Kapitel 2, Abschnitt 22] übertragen sich diese Aussagen auch auf die analytische Situation. Für Noethersche Schemata  $X$  und  $S$  müssen wir zusätzlich fordern, dass alle Halmringe den gleichen Restekörper besitzen.

Sind die Bedingungen i) – iv) für  $f$  und einen Punkt  $x \in X$  erfüllt, so nennt man  $f$  *glatt im Punkt  $x$* . Ist  $f$  in jedem Punkt  $x \in X$  glatt, so heißt  $f$  kurz *glatt*. Wegen 0.2.5ii) ist  $f$  genau dann glatt, wenn  $f$  flach ist und  $\Omega_{X/S}^1$  ein lokal freier  $\mathcal{O}_X$ -Modul von endlichem Rang. Ist  $f$  glatt und  $\Omega_{X/S}^1$  lokal frei vom Rang  $d$ , so bezeichnen wir  $f$  als *glatt von relativer Dimension  $d$* . In dieser Situation wollen wir der Einfachheit halber stets annehmen, dass die betrachteten komplexen Räume  $X$  und  $S$  zusammenhängend sind.

**0.2.6** Es sei  $f : X \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung komplexer Räume.

- i) Die Menge der glatten Punkte  $\text{Sm}(f) := \{x \in X \mid f \text{ glatt in } x\}$  ist stets eine Zariski-offene Teilmenge von  $X$  [folgt aus [KK83], Kapitel 4, Abschnitt 49, Theorem 49.1].

- ii) Aus 0.2.5 iii) ergibt sich insbesondere, dass für einen glatten Morphismus analytischer Algebren  $\varphi : A \rightarrow B$  die induzierte Algebra  $\bar{B} := B/\mathfrak{m}_A B$  stets ein regulärer lokaler Ring ist. Das maximale Ideal  $\mathfrak{m}_{\bar{B}} = \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_A B$  wird daher von  $n := \dim(\bar{B})$  Elementen erzeugt. Da offensichtlich die Restekörper  $k_{\bar{B}}$  und  $k_B$  gleich sind, liefert der sogenannte *Koszul-Komplex* [siehe [Wei95], Kapitel 4, Abschnitt 5, Korollar 4.5.5]

$$0 \rightarrow \bar{B}^{i_n} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{B}^{i_0} \rightarrow \bar{B} \rightarrow k_B \rightarrow 0$$

eine endliche freie  $\bar{B}$ -Auflösung von  $k_B$ .

### 0.3 Hom-Funktoren auf abelschen Kategorien

In diesem Abschnitt bezeichne  $\mathbf{K}$  stets eine abelsche Kategorie. Einige Aussagen gelten auch ohne die Voraussetzung *abelsch*; wir wollen dies aber der Einfachheit halber voraussetzen. Es sollen im Folgenden einige elementare Eigenschaften der Funktoren  $\text{Hom}(X, -)$  bzw.  $\text{Hom}(-, Y)$  zusammengestellt werden, wobei  $X$  und  $Y$  Objekte der zugrunde liegenden Kategorie  $\mathbf{K}$  bezeichnen. Für  $\mathbf{K}$  treten in dieser Arbeit die Kategorie  $\mathbf{Mod}(A)$  (resp.  $\mathbf{Coh}(A)$ ) der (endlichen) Moduln über einem Noetherschen Ring  $A$  und die Kategorie  $\mathbf{Coh}(X)$  der kohärenten Moduln eines komplexen Raumes oder Noetherschen Schemas  $X$  auf. Daher verwenden wir anstelle der Begriffe *Monomorphismus* und *Epimorphismus* die für Moduln gebräuchlicheren Termini *injektiv* und *surjektiv*.

Einige der hier aufgeführten Aussagen findet man sicherlich in Arbeiten wie [ML98]. Sie werden der Vollständigkeit halber mit angegeben.

**0.3.1** Ein Morphismus  $h : P_1 \rightarrow P_2$  in  $\mathbf{K}$  induziert auf kanonische Weise eine natürliche Transformation von Funktoren

$$h^* : \text{Hom}(P_2, -) \rightarrow \text{Hom}(P_1, -), \quad f \mapsto f \circ h.$$

Da  $P_1 \xrightarrow{h} P_2 \rightarrow \text{coker}(h) \rightarrow 0$  exakt ist und  $\text{Hom}(-, N)$  ein kontravarianter linksexakter Funktor für jedes Objekt  $N \in \mathbf{K}$ , ist der Funktor  $\ker(h^*, -)$  isomorph zu  $\text{Hom}(\text{coker } h, -)$ . Ist umgekehrt  $H$  eine natürliche Transformation von Hom-Funktoren,  $H : \text{Hom}(P_2, -) \rightarrow \text{Hom}(P_1, -)$ , so existiert stets ein Morphismus  $h : P_1 \rightarrow P_2$  in  $\mathbf{K}$  mit  $H = h^*$ . Ist nämlich  $N \in \mathbf{K}$  ein beliebiges Objekt und  $f \in \text{Hom}(P_2, N)$ , so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(P_2, P_2) & \xrightarrow{H_{P_2}} & \text{Hom}(P_1, P_2) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \text{Hom}(P_2, N) & \xrightarrow{H_N} & \text{Hom}(P_1, N) \end{array}$$

da  $H$  nach Voraussetzung eine natürliche Transformation ist. Dem Diagramm entnehmen wir

$$H_N(f) = H_N(f \circ \text{id}_{P_2}) = H_N \circ f_*(\text{id}_{P_2}) = f_* \circ H_{P_2}(\text{id}_{P_2}) = f \circ (H_{P_2}(\text{id}_{P_2}))$$

und daher leistet  $h := H_{P_2}(\text{id}_{P_2}) \in \text{Hom}(P_1, P_2)$  das Gewünschte.

**0.3.2** Da der Funktor  $\text{Hom}(-, -)$  bezüglich der ersten Komponente nicht rechtsexakt ist, werden Injektionen durch den Hom-Funktor nicht auf Surjektionen überführt. Für einen Morphismus  $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$  gilt allerdings stets die Implikation  $\alpha_{P_1}^*$  surjektiv  $\implies \alpha$  injektiv. Genauer ist dann sogar  $P_1$  ein direkter Summand von  $P_2$ . Dies folgt unmittelbar aus der Surjektivität, denn dann gibt es zu  $\text{id}_{P_1} \in \text{Hom}(P_1, P_1)$  ein Urbild  $\beta$ , das heißt es ist  $\text{id}_P = \alpha^*(\beta) = \beta \circ \alpha$  und somit  $\beta$  ein Linksinverses zu  $\alpha$ .

**0.3.3** Sei  $P$  ein Objekt in  $\mathbf{K}$  und  $h_P := \text{Hom}(P, -)$ . Sei weiter  $T : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$  ein kovarianter additiver Funktor und

$$\alpha : h_P = \text{Hom}(P, -) \rightarrow T(-)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren, die für alle Objekte  $N \in \mathbf{K}$  surjektiv ist. Wir wollen diese Transformation mit einer weiteren Transformation  $\beta : h_Q = \text{Hom}(Q, -) \rightarrow T(-)$  vergleichen, wobei  $Q$  ein beliebiges Objekt in  $\mathbf{K}$  sein soll.

- i) Es existiert stets ein Morphismus  $h : P \rightarrow Q$  in  $\mathbf{K}$  derart, dass der induzierte Morphismus  $h^*$  das folgende Diagramm von natürlichen Transformationen wie angedeutet kommutativ macht

$$\begin{array}{ccc} & h_Q & \\ & \downarrow \beta & \\ h_P & \xrightarrow{\alpha} & T \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h^* \\ \searrow \end{array}$$

- ii) Der Morphismus  $h$  in i) ist bis auf  $\ker \alpha$  eindeutig bestimmt, das heißt sind  $h^*$  und  $g^*$  zwei Morphismen, die das Diagramm unter i) kommutativ machen, so gilt für jedes Objekt  $N \in \mathbf{K}$ :  $\text{im}(h^*(N) - g^*(N)) \subset \ker \alpha_N$ .

Beweis: Teil ii) folgt sofort aus  $\beta(N) = \alpha(N) \circ g^*(N) = \alpha(N) \circ h^*(N)$ . Um die Existenz eines solchen Morphismus  $h$  zu zeigen, wenden wir die gegebenen Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  auf  $Q$  an und erhalten Homomorphismen

$$\text{Hom}(Q, Q) \xrightarrow{\beta} T(Q) \xleftarrow{\alpha} \text{Hom}(P, Q).$$

Da  $\alpha$  nach Voraussetzung surjektiv ist, hat  $\beta(\text{id}_Q)$  ein Urbild  $h \in \text{Hom}(P, Q)$ . Es bleibt zu zeigen, dass für ein solches  $h$  und ein beliebiges Objekt  $N \in \mathbf{K}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}(Q, N) & \\ & \downarrow \beta & \\ \text{Hom}(P, N) & \xrightarrow{\alpha} & T(N) \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h^* \\ \searrow \end{array}$$

kommutiert. Da  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $h^*$  natürliche Transformationen zwischen den entsprechenden Funktoren sind, folgt daraus die Behauptung. Sei also  $f : Q \rightarrow N$  ein Morphismus in  $\mathbf{K}$ . Da die Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  mit Morphismen verträglich sind, erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(Q, Q) & \xrightarrow{\beta} & T(Q) \\ f_* \downarrow & & \downarrow F(f) \\ \text{Hom}(Q, N) & \xrightarrow{\beta} & T(N) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}(P, Q) & \xrightarrow{\alpha} & T(Q) \\ f_* \downarrow & & \downarrow T(f) \\ \text{Hom}(P, N) & \xrightarrow{\alpha} & T(N) \end{array}$$

Dem linken Diagramm entnehmen wir  $T(f)(\beta(\text{id}_Q)) = \beta(f)$  und dem rechten  $T(f)(\alpha(h)) = \alpha(f \circ h)$ . Nun ist  $h$  aber so gewählt, dass  $\alpha(h) = \beta(\text{id}_Q)$ , also folgt  $\beta(f) = \alpha(f \circ h) = (\alpha \circ h^*)(f)$ .  $\square$

Wegen Teil i) der obigen Aussage lässt sich jede natürliche Transformation der Form  $h_Q \longrightarrow T$  über eine *surjektive* Transformation  $h_P \longrightarrow T$  faktorisieren, sofern eine solche surjektive Transformation existieren. Wegen ii) ist eine derartige surjektive Transformation, sofern existent, nicht eindeutig bestimmt.

Wir wollen nun noch einige Aussagen zeigen, die lediglich in der abelschen Kategorie  $\mathbf{K} := \mathbf{Mod}(A)$  der Moduln über einem lokalen Noetherschen Ring  $A$  gelten. Soweit nicht anders angegeben seien  $P_1$  und  $P_2$  stets endliche  $A$ -Moduln.

**0.3.4** Eine Surjektion  $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$  induziert für jedes Objekt  $X \in \mathbf{K}$  stets einen injektiven Gruppenhomomorphismus  $\alpha_X^* : \text{Hom}(P_2, X) \rightarrow \text{Hom}(P_1, X)$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist für beliebige abelsche Kategorien  $\mathbf{K}$  falsch. Wir wollen zeigen, dass eine solche Umkehrung für die Kategorie  $\mathbf{Mod}(A)$  der Moduln über einem lokalen Noetherschen Ring  $A$  gilt, wenn  $P_1$  und  $P_2$  endliche Moduln sind. In Anlehnung an die Notation  $\alpha^*$  bezeichnet  $\alpha^+$  im folgenden die auf dem Restekörper  $k := A/\mathfrak{m}$  induzierte Abbildung  $\text{Hom}(P_2, k) \rightarrow \text{Hom}(P_1, k)$ . Für einen Homomorphismus  $\alpha : P_1 \rightarrow P_2$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i)  $\alpha$  ist surjektiv
- ii)  $\alpha^* : \text{Hom}(P_2, -) \rightarrow \text{Hom}(P_1, -)$  ist injektiv auf  $\mathbf{Mod}(A)$
- iii)  $\alpha^+ : \text{Hom}(P_2, k) \rightarrow \text{Hom}(P_1, k)$  ist injektiv

Beweis: Die Implikationen i)  $\implies$  ii)  $\implies$  iii) sind trivial. Sei  $\alpha^+$  injektiv. Wegen

$$\text{Hom}_A(P_2, k) \cong \text{Hom}_k(P_2/\mathfrak{m}P_2, k) = P_2/\mathfrak{m}P_2^\vee$$

induziert  $\alpha^+$  eine Injektion von  $k$ -Vektorräumen  $P_2/\mathfrak{m}P_2^\vee \rightarrow P_1/\mathfrak{m}P_1^\vee$ . Dann ist aber  $P_1/\mathfrak{m}P_1 \rightarrow P_2/\mathfrak{m}P_2$  surjektiv, das heißt  $\text{coker } \alpha/\mathfrak{m} \text{ coker } \alpha = 0$ . Nun folgt i) aus dem Lemma von Nakayama.  $\square$

**0.3.5** Aus 0.3.4 ergibt sich das folgende Isomphiekriterium für endliche Moduln über einem Noetherschen lokalen Ring  $A$ : zwei endliche  $A$ -Moduln  $P_1$  und  $P_2$  sind genau dann isomorph, wenn es Homomorphismen  $h_1 : P_1 \rightarrow P_2$  und  $h_2 : P_2 \rightarrow P_1$  gibt und sowohl  $h_1^+$  als auch  $h_2^+$  injektiv sind. Dies folgt aus der Tatsache, dass über einem Noetherschen Ring zwei endliche Moduln  $P_1$  und  $P_2$  genau dann isomorph sind, wenn es Surjektionen  $\pi : P_1 \rightarrow P_2$  und  $\kappa : P_2 \rightarrow P_1$  gibt. Dann folgt mit einem einfachen Längenargument der behauptete Isomorphismus. Eine alternative Beweisidee geht auf H. Fitting zurück: die Komposition  $\pi \circ \kappa$  definiert einen *surjektiven*  $A$ -Endomorphismus von  $P_2$ , welcher stets bijektiv ist [[SS94], Kapitel 5, Abschnitt 28, Satz 38.15].

**0.3.6** Mit Hilfe von 0.3.4 und 0.3.5 kann eine etwas stärkere Variante von Aussage 0.3.3 gezeigt werden. Wir machen zunächst die folgende Definition: ist  $T : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$  ein kovarianter additiver Funktor, so nennen wir

$T$  semidarstellbar durch einen Modul  $P \in \mathbf{Mod}(A)$ , wenn es eine surjektive Transformation von Funktoren

$$\alpha : h_P = \mathrm{Hom}(P, -) \longrightarrow T(-)$$

auf  $\mathbf{Mod}(A)$  gibt, die für den Restekörper  $k := A/\mathfrak{m}_A$  eine bijektive Abbildung  $\alpha(k)$  induziert. Sei  $T$  semidarstellbar durch  $P$  und  $\beta : \mathrm{Hom}(Q, -) \rightarrow T$  eine weitere Transformation von Funktoren. Dann gilt:

- i) Es gibt einen Homomorphismus von  $A$ -Moduln  $h : P \rightarrow Q$ , so dass das Diagramm in 0.3.3i) kommutiert.
- ii) Ist  $\beta(N)$  surjektiv für alle  $N \in \mathbf{Mod}(A)$ , so gibt es einen Modul  $L \in \mathbf{Mod}(A)$  und eine Darstellung  $Q \cong P \oplus L$ .
- iii) Ein semidarstellender Modul ist bis auf (nichtkanonische) Isomorphie eindeutig bestimmt.

Die erste Behauptung folgt aus 0.3.3 und die dritte aus Behauptung ii). Sei also  $P$  ein semidarstellender Modul von  $T$  und  $\beta : h_Q \rightarrow T$  eine beliebige surjektive Transformation. Aus 0.3.3 folgt nun, dass es lineare Abbildungen  $h : P \rightarrow Q$  und  $g : Q \rightarrow P$  gibt mit  $\alpha = \beta \circ g^*$  und  $\beta = \alpha \circ h^*$ . Wir erhalten somit ein kommutatives Diagramm von Transformationen wie folgt:

$$\begin{array}{ccccc} h_P & \xrightarrow{g^*} & h_Q & \xrightarrow{h^*} & h_P \\ & \searrow \alpha & \downarrow \beta & \swarrow \alpha & \\ & & T & & \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $\alpha(k)$  bijektiv. Aus dem Diagramm ergibt sich, dass auch

$$h^+ \circ g^+ = (g \circ h)^+ : h_P(k) \rightarrow h_Q(k) \rightarrow h_P(k)$$

bijektiv ist. Wegen  $h_P(k) = \mathrm{Hom}(P, k) \cong \mathrm{Hom}_k(P/\mathfrak{m}_A P, k) = P/\mathfrak{m}_A P^\vee$  ist dann auch die zu  $(g \circ h)^+$  duale Abbildung  $P/\mathfrak{m}_A P \rightarrow P/\mathfrak{m}_A P$  ein Isomorphismus. Da  $A$  ein Noetherscher lokaler Ring ist und  $P$  ein endlicher  $A$ -Modul, folgt daraus leicht, dass auch  $g \circ h : P \rightarrow Q \rightarrow P$  ein Isomorphismus von  $A$ -Moduln ist. Daher besitzt  $h$  ein Linksinverses und es gibt eine Darstellung wie behauptet.  $\square$

Es sei angemerkt, dass die Aussage auch für die Kategorie der endlichen  $A$ -Moduln  $\mathbf{Coh}(A)$  anstelle von  $\mathbf{Mod}(A)$  gilt; der Beweis bleibt unverändert gültig.

**0.3.7** Sind die natürlichen Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  in 0.3.6 lediglich für Artinsche Moduln definiert, so bleiben die Aussagen für die Kompletierung  $\hat{A}$  richtig, falls  $T$  Artinsche Moduln auf Artinsche Moduln wirft und mit dem Bilden inverser Limiten verträglich ist. Um dies einzusehen, betrachten wir zunächst die kovarianten Hom-Funktoren  $h_P$  und  $h_Q$  als Funktoren auf  $\mathbf{Art}(A)$ . Diese bilden dann auf die Kategorie der Artinschen Moduln ab, da für einen Artinschen Modul  $N$  auch  $h_P(N)$  und  $h_Q(N)$  Artinsch sind. Ist nun  $T : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$  ein additiver Funktor, welcher ebenfalls Artinsche Moduln in Artinsche Moduln überführt und mit dem Bilden inverser Limiten verträglich ist in dem Sinne,

dass es für jedes gerichtete System Artinscher Moduln  $\{N_n\}_n$  einen natürlichen Isomorphismus

$$\varprojlim_n T(N_n) \cong T(\varprojlim_n N_n)$$

gibt, so gilt für das durch  $N_n := N/\mathfrak{m}^{n+1}N$  definierte inverse System insbesondere

$$\varprojlim_n T(N_n) \cong T(\hat{N}).$$

Ebenso induzieren die natürlichen Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  Abbildungen inverser Systeme

$$\tilde{\alpha} : \{\mathrm{Hom}_A(P, N_n)\}_n \rightarrow \{T(N_n)\}_n, \text{ analog } \tilde{\beta}.$$

Nun prüft man leicht, dass für alle  $n$  die Moduln  $K(N_n) := \ker \tilde{\alpha}(N_n)$  endliche Länge haben und somit das zugehörige inverse System  $\{K(N_n)\}_n$  die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt [[Har83], Kapitel 2, Abschnitt 9, insbesondere Beispiel 9.1.2]. Ebenso sieht man, dass auch  $K'(N_n) := \ker \tilde{\beta}(N_n)$  die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Die inversen Limiten von  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  sind daher gegeben durch die  $\hat{A}$ -Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}, \hat{N}) \cong \varprojlim_n \mathrm{Hom}_A(P, N_n) \xrightarrow{\lim \tilde{\alpha}} \varprojlim_n T(N_n) \cong T(\hat{N})$$

und analog

$$\varprojlim \tilde{\beta} : \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{Q}, \hat{N}) \rightarrow T(\hat{N}).$$

Man sieht leicht, dass diese Abbildungen funktoriell in  $\hat{N}$  sind; da  $K(N_n)$  die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt, ist  $T$  (als Funktor auf  $\mathbf{Mod}(\hat{A})$ ) semidarstellbar durch  $\hat{P}$ . Da auch  $K'(N_n)$  der ML-Bedingung genügt und  $A$  und  $\hat{A}$  den gleichen Restekörper haben, können wir den Beweis von 0.3.6 auf die vorliegende Situation übertragen und erhalten die folgenden Aussagen:

- i)' Ist  $\alpha$  surjektiv auf  $\mathbf{Art}(A)$  und ist für  $k := A/\mathfrak{m}_A$  die Abbildung  $\alpha(k)$  bijektiv, so gibt es eine  $\hat{A}$ -lineare Abbildung  $\bar{h} : \hat{P} \rightarrow \hat{Q}$  derart, dass

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{Q}, \bar{N}) & \\ \nwarrow \bar{h}^* & \downarrow \lim \tilde{\beta} & \\ \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}, \bar{N}) & \xrightarrow{\lim \tilde{\alpha}} & T(\bar{N}) \end{array}$$

für alle endlichen  $\hat{A}$ -Moduln  $\bar{N}$  kommutiert.

- ii)' Ist  $\beta$  surjektiv auf  $\mathbf{Art}(A)$ , so gibt es einen Modul  $\bar{L} \in \mathbf{Coh}(\hat{A})$  und eine Darstellung  $\hat{Q} \cong \hat{P} \oplus \bar{L}$ .
- iii)' Ist zusätzlich  $\beta(k)$  bijektiv, so gibt es einen nichtkanonischen Isomorphismus  $\hat{P} \cong \hat{Q}$ .

**0.3.8** Zwei endliche  $A$ -Moduln  $P_1$  und  $P_2$  über einem Noetherschen lokalen Ring  $A$  sind genau dann isomorph, falls ihre Kompletterungen  $\hat{P}_1$  und  $\hat{P}_2$   $\hat{A}$ -isomorph sind. Wir wollen den Beweis kurz skizzieren: zunächst bemerkt man, dass es einen  $A$ -Isomorphismus

$$(\mathrm{Hom}_A(P_1, P_2))^\wedge \cong \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2).$$

gibt, der in beiden Komponenten mit Abbildungen verträglich ist. Daraus folgt leicht, dass ein  $A$ -Isomorphismus stets einen  $\hat{A}$ -Isomorphismus induziert. Sei also  $\bar{\varphi} : \hat{P}_1 \rightarrow \hat{P}_2$  ein Isomorphismus von  $\hat{A}$ -Moduln, das heißt  $\bar{\varphi} \in \text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2)$ . Da  $P_1$  und  $P_2$  endliche  $A$ -Moduln sind, ist auch  $\text{Hom}_A(P_1, P_2)$  endlich über  $A$ . Analog sind  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_2$  und  $\text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2)$  endliche  $\hat{A}$ -Moduln. Aus  $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$  ergeben sich  $A$ -Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2)/\hat{\mathfrak{m}} \text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) \cong \text{Hom}_A(P_1, P_2)/\mathfrak{m} \text{Hom}_A(P_1, P_2)$$

und

$$\text{Hom}_{\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{P}_1/\hat{\mathfrak{m}}\hat{P}_1, \hat{P}_2/\hat{\mathfrak{m}}\hat{P}_2) \cong \text{Hom}_{A/\mathfrak{m}}(P_1/\mathfrak{m}P_1, P_2/\mathfrak{m}P_2)$$

Wir betrachten den kanonischen Homomorphismus

$$\alpha : \text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{P}_1/\hat{\mathfrak{m}}\hat{P}_1, \hat{P}_2/\hat{\mathfrak{m}}\hat{P}_2) \cong \text{Hom}_{A/\mathfrak{m}}(P_1/\mathfrak{m}P_1, P_2/\mathfrak{m}P_2)$$

welcher  $\bar{\varphi}$  abbildet auf  $\bar{\varphi} \otimes \text{id}_{A/\mathfrak{m}} : \hat{P}_1 \otimes A/\mathfrak{m} \rightarrow \hat{P}_2 \otimes A/\mathfrak{m}$ . Der Homomorphismus  $\alpha$  faktorisiert über der kanonischen Surjektion  $\bar{\pi}$ , das heißt

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\hat{A}}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{A/\mathfrak{m}}(P_1/\mathfrak{m}P_1, P_2/\mathfrak{m}P_2) \\ & \searrow \bar{\pi} & \nearrow \\ & \text{Hom}_A(P_1, P_2)/\mathfrak{m} \text{Hom}_A(P_1, P_2) & \end{array}$$

kommutiert. Das Element  $\bar{\pi}(\bar{\varphi}) =: [\bar{\varphi}] \in \text{Hom}_A(P_1, P_2)/\mathfrak{m} \text{Hom}_A(P_1, P_2)$  besitzt ein Urbild unter der kanonischen Surjektion

$$\pi : \text{Hom}_A(P_1, P_2) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, P_2)/\mathfrak{m} \text{Hom}_A(P_1, P_2).$$

Sei  $\varphi$  ein solches Urbild. Sowohl  $\varphi$  als auch  $\bar{\varphi}$  induzieren die gleiche Abbildung

$$\varphi \otimes \text{id}_{A/\mathfrak{m}} = \alpha(\bar{\varphi}) : P_1/\mathfrak{m}P_1 \rightarrow P_2/\mathfrak{m}P_2$$

Nun ist  $\bar{\varphi}$  nach Voraussetzung ein Isomorphismus. Daher ist die Abbildung  $\alpha(\bar{\varphi}) = \varphi \otimes \text{id}_{A/\mathfrak{m}}$  insbesondere surjektiv, das heißt es gibt eine  $A$ -lineare Abbildung  $\varphi : P_1 \rightarrow P_2$ , für die  $P_1/\mathfrak{m}P_1 \rightarrow P_2/\mathfrak{m}P_2$  surjektiv ist. Mit den üblichen Schlüssen folgt aus dem Lemma von Nakayama, dass auch  $\varphi$  surjektiv ist. Das Argument lässt sich genauso auf die Umkehrabbildung  $\bar{\varphi}^{-1}$  anwenden. Wir erhalten einen weiteren surjektiven  $A$ -Homomorphismus  $P_2 \rightarrow P_1$ . Aus 0.3.5 folgt dann die behauptete Isomorphie von  $P_1$  und  $P_2$ .

## 0.4 Kohomologie

An dieser Stelle sei ein kurzer Überblick der für die vorliegende Arbeit notwendigen Kohomologietheorie gegeben. Dabei werden die Notationen aus [Har66] und [[Wei95], Kapitel 10] verwendet. Wir beginnen mit dem Überblick derivierter Kategorien und Funktoren über der Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathbf{Mod}(S)$  für einen geringten Raum  $S = (S, \mathcal{O}_S)$ . Soweit nicht anders angegeben, sind in diesem Abschnitt alle auftretenden Räume stets geringte Räume.

**0.4.1** Ein Komplex von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln wird mit  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, \partial)$  bezeichnet. Dabei ist  $\partial = (\partial^i)_i$  eine Abbildung vom Grad 1 mit  $\partial^{i+1}\partial^i = 0$ . Ein Morphismus von Komplexen  $f : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$  besteht aus einer Familie von Homomorphismen  $f^n : \mathcal{K}_1^n \rightarrow \mathcal{K}_2^n$ , die mit den Randabbildungen verträglich sind. Die Komplexe von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln bilden zusammen mit den Morphismen eine abelsche Kategorie  $\mathbf{Ch}(S)$ .

Zwei Morphismen von Komplexen  $f, g$  nennt man *homotop*, wenn es eine Abbildung  $k : \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$  vom Grad  $-1$  gibt mit

$$f^n - g^n = \partial_2^{n-1}k^n + k^{n+1}\partial_1^n.$$

Die Abbildung  $k$  nennt man eine *Homotopie*. Die Eigenschaft, homotop zu sein, liefert eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf der Menge der Morphismen.  $\mathbf{K}(S)$  bezeichnet die Kategorie der Komplexe mit den Homotopieklassen von Abbildungen als Morphismen, das heißt  $\mathbf{K}(S)$  hat die gleichen Objekte wie  $\mathbf{Ch}(S)$ , und für die Morphismen gilt  $\text{Hom}_{\mathbf{K}(S)}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) = \text{Hom}_{\mathbf{Ch}(S)}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) / \sim$ .

**0.4.2** Auf  $\mathbf{K}(S)$  definieren wir den 0-ten Kohomologiefunktor  $H^0 : \mathbf{K}(S) \rightarrow \mathbf{Mod}(S)$  durch  $H^0(\mathcal{K}) := \ker \partial^0 / \text{im } \partial^{-1}$ . Zusammen mit dem *Translationsfunktork*  $[\ ]$ , welcher gegeben ist durch

$$\mathcal{K}[i]^n := \mathcal{K}^{i+n} \text{ und } \partial_{\mathcal{K}[i]} := (-1)^i \partial_{\mathcal{K}},$$

definiert  $H^i := H^0 \circ [i]$  den *i-ten Kohomologiefunktor*. Eine Abbildung von Komplexen  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  induziert stets Homomorphismen von den Kohomologiemoduln  $f_*^i : H^i(\mathcal{K}) \rightarrow H^i(\mathcal{L})$ . Diese Homomorphismen hängen nur von der Homotopieklasse der Abbildung  $f$  ab.

Induziert die Abbildung  $f$  Isomorphismen  $f_*^i$  für jedes  $i \in \mathbb{Z}$ , so bezeichnen wir  $f$  als *Quasi-Isomorphismus* oder kurz als *QIS*. Die *derivierte Kategorie*  $\mathbf{D}(S)$  konstruiert man aus  $\mathbf{K}(S)$  durch Invertieren aller Quasi-Isomorphismen [vgl. [Wei95], Abschnitt 10.4]. Aus der Konstruktion folgt insbesondere, dass die Kategorie  $\mathbf{D}(S)$  aus den gleichen Objekten wie  $\mathbf{K}(S)$  besteht.

Zwei Komplexe  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  bezeichnen wir als *quasiisomorph*, wenn sie isomorph sind in  $\mathbf{D}(S)$ , das heißt, wenn es eine Kette von Quasiisomorphismen

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_1 \leftarrow \mathcal{K}_2 \rightarrow \dots \leftarrow \mathcal{K}_n = \mathcal{L}$$

gibt. Man beachte, dass in  $\mathbf{K}(S)$  nicht notwendig ein Morphismus zwischen zwei quasiisomorphen Komplexen existiert.

**0.4.3** Für ein  $i \in \mathbb{Z}$  definieren wir die folgenden *abgeschnittenen* Komplexe  $\sigma_{\leq i}(\mathcal{L})$  und  $\sigma_{> i}(\mathcal{L})$  eines Komplexes  $\mathcal{L} \in \mathbf{K}(S)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\leq i}(\mathcal{L}) : & \rightarrow \mathcal{L}^{i-2} \xrightarrow{d^{i-2}} \mathcal{L}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \text{Ker } d^i \rightarrow 0 \\ \sigma_{> i}(\mathcal{L}) : & 0 \rightarrow \text{Im } d^i \xrightarrow{d^i} \mathcal{L}^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \mathcal{L}^{i+2} \xrightarrow{d^{i+2}} \dots \end{aligned}$$

Diese Komplexe sind mit der Kohomologie des Komplexes  $\mathcal{L}$  verträglich, das heißt es ist  $H^j(\sigma_{\leq i}(\mathcal{L})) = H^j(\mathcal{L})$  für  $j \leq i$  und  $H^j(\sigma_{\leq i}(\mathcal{L})) = 0$  für  $j > i$  sowie  $H^j(\sigma_{> i}(\mathcal{L})) = H^j(\mathcal{L})$  für  $j > i$  und  $H^j(\sigma_{> i}(\mathcal{L})) = 0$  für  $j \leq i$ . Ferner gibt es die folgende exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \sigma_{\leq i}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \sigma_{> i}(\mathcal{L}) \rightarrow 0$$

Eine weitere Variante *abgeschnittener* Komplexe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_{<i}(\mathcal{L}^\cdot) : & \rightarrow \mathcal{L}^{i-2} \xrightarrow{d^{i-2}} \mathcal{L}^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{I}m\, d^{i-1} \longrightarrow 0 \\ \sigma_{\geq i}(\mathcal{L}^\cdot) : & \quad \quad \quad 0 \longrightarrow \mathcal{C}oker\, d^{i-1} \xrightarrow{d^i} \mathcal{L}^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \mathcal{L}^{i+2} \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Auch diese Komplexe induzieren eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \sigma_{<i}(\mathcal{L}^\cdot) \rightarrow \mathcal{L}^\cdot \rightarrow \sigma_{\geq i}(\mathcal{L}^\cdot) \rightarrow 0$$

und die Kohomologie der abgeschnittenen Komplexe ist mit der von  $\mathcal{L}^\cdot$  verträglich, es gilt also  $H^j(\sigma_{<i}(\mathcal{L}^\cdot)) \cong H^j(\mathcal{L}^\cdot)$  für  $j < i$  und  $H^j(\sigma_{\geq i}(\mathcal{L}^\cdot)) \cong H^j(\mathcal{L}^\cdot)$  für  $j \geq i$  und die übrigen Kohomologien von  $\sigma_{<i}(\mathcal{L}^\cdot)$  und  $\sigma_{\geq i}(\mathcal{L}^\cdot)$  verschwinden.

**0.4.4** Oftmals werden beschränkte Komplexe von Interesse sein: die Kategorie der *nach links beschränkten* Komplexe  $\mathbf{K}^+(S)$  besteht aus solchen Komplexen  $\mathcal{L}^\cdot$ , für die es ein  $l_0 \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $\mathcal{L}^i = 0 \quad \forall i < l_0$ . Ist die Schranke  $l_0$  für jeden Komplex gleich, so verwenden wir auch die Notation  $\mathbf{K}^{\geq l_0}(S)$ . Entsprechend betrachtet man die Kategorien  $\mathbf{K}^-(S)$  und  $\mathbf{K}^{\leq l_0}$  der *nach rechts beschränkten* Komplexe und die Kategorie der *beidseitig beschränkten* oder einfach *beschränkten* Komplexe  $\mathbf{K}^b(S) := \mathbf{K}^+(S) \cap \mathbf{K}^-(S)$ . Auch die Komplexe mit kohärenter Kohomologie bilden eine Unterkategorie  $\mathbf{K}_c(S)$  von  $\mathbf{K}(S)$ ; analog werden wir die Unterkategorien von nach links, nach rechts oder beidseitig beschränkten Komplexen mit kohärenter Kohomologie betrachten und dafür den Index  $c$  in der Notation verwenden. Die Kategorien  $\mathbf{K}^+(S)$ ,  $\mathbf{K}^-(S)$  und  $\mathbf{K}^b(S)$  sind auf natürliche Weise volle Unterkategorien von  $\mathbf{K}(S)$ , ebenso wie die entsprechenden Unterkategorien mit kohärenter Kohomologie.

Nach [[Har66], Kapitel 1, Abschnitt 4] lassen sich all diese Unterkategorien derivieren. In der Notation wird  $\mathbf{K}$  durch  $\mathbf{D}$  ersetzt, das heißt  $\mathbf{D}(S)$  bezeichnet die derivierte Kategorie von  $\mathbf{K}(S)$ ,  $\mathbf{D}^+(S)$  die von  $\mathbf{K}^+(S)$  usw. Die verschiedenen derivierten Kategorien sind sämtlich volle Unterkategorien von  $\mathbf{D}(S)$ .

Bei den derivierten Kategorien verwenden wir auch die Notation  $\mathcal{L}^\cdot \in \mathbf{D}^{\leq l_0}(S)$ . Da in der derivierten Kategorie die Komplexe lediglich bis auf Quasiisomorphie eindeutig bestimmt sind, bedeutet dies, dass  $\mathcal{L}^\cdot$  ein nach rechts beschränkter Komplex ist und  $\mathcal{H}^j(\mathcal{L}^\cdot) = 0 \quad \forall j > l_0$ . Es sei angemerkt, dass es für  $\mathcal{L}^\cdot$  auch Repräsentanten  $\mathcal{R}^\cdot$  gibt mit  $\mathcal{R}^i \neq 0$  für  $i > l_0$ . Diese sind allerdings stets quasiisomorph zum abgeschnittenen Komplex  $\sigma_{\leq l_0}(\mathcal{R}^\cdot)$ , wie leicht aus 0.4.3 folgt. Daher können wir stets annehmen, dass  $\mathcal{L}^j = 0 \quad \forall j > l_0$ . Auf analoge Weise wird die Notation  $\mathcal{K}^\cdot \in \mathbf{D}^{\geq l_0}(S)$  verwendet.

**0.4.5** Unter gewissen Voraussetzungen lässt sich ein Funktor  $F : \mathbf{K}(S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$ , der mit dem Translationsfunktor  $[ ]$  verträglich ist, auf einer geeigneten Unterkategorie  $\mathbf{K}^*(S)$  *derivieren*, das heißt zu einem Funktor  $\tilde{F} : \mathbf{D}^*(S) \rightarrow \mathbf{D}^*(S)$  fortsetzen, wobei  $\mathbf{K}^*(S)$  eine geeignete Unterkategorie von  $\mathbf{K}(S)$  ist und  $\mathbf{D}^*(S)$  die zugehörige derivierte Kategorie [vgl. [Har66], Kapitel 1, Abschnitt 5]. Derivierte Funktoren sind, sofern existent, eindeutig bis kanonische Isomorphie [vgl. [Wei95], Abschnitt 10, 10.5.1]. Die Berechnung eines solchen derivierten Funktors erfolgt mit einer geeigneten *F-azyklischen Auflösung* [siehe [Wei95], Abschnitt 2, 2.4.3 und Abschnitt 10.5].

Wir wollen für den wichtigen Fall eines linksexakten Funktors  $F : \mathbf{K}^+(S) \rightarrow \mathbf{K}^+(S)$  die explizite Berechnung des sogenannten *rechtsderivierten* Funktors

$RF = R^+F : \mathbf{D}^+(S) \rightarrow \mathbf{D}^+(S)$  angeben: da die Kategorie  $\mathbf{Mod}(S)$  genügend Injektive besitzt, hat jeder Komplex  $\mathcal{K} \in \mathbf{K}^+(S)$  eine *injektive Auflösung*  $\mathcal{J}$ , das heißt es gibt einen Quasiisomorphismus  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  und die Moduln  $I^j$  sind injektiv für alle  $j$ . Eine solche injektive Auflösung ist  $F$ -azyklisch [[Wei95], Abschnitt 10, 10.5.6] und kann somit für die Berechnung von  $RF$  verwendet werden; für  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{J}$  wie zuvor definiert ergibt sich  $RF(\mathcal{K}) = F(\mathcal{J})$ . Dabei bedeutet " $=$ ", dass die Objekte in der derivierten Kategorie übereinstimmen. Die Kohomologiemoduln dieser Komplexe sind daher eindeutig bestimmt. Sie werden im Folgenden mit  $R^iF(\mathcal{K})$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  bezeichnet.

Da die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Moduln nicht genügend Projektive hat, können wir die Überlegungen für die Berechnung von  $RF$  nicht direkt auf den dualen Fall eines rechtsexakten Funktors  $G : \mathbf{K}^-(S) \rightarrow \mathbf{K}^-(S)$  anwenden. Allerdings ist jeder Modul auf  $S$  Quotient eines flachen Moduls [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 1, Satz 1.2] und es gibt für  $\mathcal{L} \in \mathbf{K}^-(S)$  stets eine flache Auflösung. Für bestimmte rechtsexakte Funktoren  $G$  lassen sich linksderivierte Funktoren  $LG := L^-G$  vermöge einer solchen flachen Auflösung definieren.

Es sei noch auf die allgemeinen Existenzaussagen von derivierten Funktoren verwiesen [siehe [Har66], Kapitel 1, Abschnitt 5, Theorem 5.1 und [Wei95], Abschnitt 10, Theorem 10.5.9].

**0.4.6** Als Nächstes wollen wir ein paar Beispiele für derivierte Funktoren angeben. Dabei seien die betrachteten Räume  $X$  und  $S$  komplexe Räume wie in 0.1.9 oder Noethersche Schemata wie in 0.1.16. Für einige Beispiele ist es zwar ausreichend, geringte Räume zu betrachten, da in dieser Arbeit aber stets eine geometrische Situation zugrunde liegt, ist es zweckmäßig, zusätzlich eine analytische oder algebraische Struktur zu fordern.

- i) **Exakte Funktoren** Aus der Definition der Kohomologiefunktoren  $\mathcal{H}^i$  folgt leicht, dass diese mit exakten Funktoren kommutieren: ein additiver exakter Funktor  $F : \mathbf{Mod}(S) \rightarrow \mathbf{Mod}(S)$  induziert einen Funktor auf der Kategorie  $\mathbf{K}(S)$ , den wir ebenfalls mit  $F$  bezeichnen. Für alle  $\mathcal{K} \in \mathbf{K}(S)$  gilt nun

$$\mathcal{H}^i(F(\mathcal{K})) \cong F(\mathcal{H}^i(\mathcal{K})),$$

denn aus der Exaktheit von  $F$  folgt für einen  $\mathcal{O}_S$ -Modulhomomorphismus  $\partial^i : \mathcal{K}^i \rightarrow \mathcal{K}^{i+1}$  unmittelbar

$$F(\ker \partial^i) \cong \ker F(\partial^i) \text{ und } F(\operatorname{im} \partial^i) \cong \operatorname{im} F(\partial^i).$$

Dies impliziert insbesondere, dass ein exakter Funktor  $F$  Quasiisomorphismen respektiert; daher lässt sich der durch  $F$  induzierte Funktor  $F : \mathbf{K}(S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$  trivial fortsetzen zu  $F : \mathbf{D}(S) \rightarrow \mathbf{D}(S)$ , das heißt auf ganz  $\mathbf{K}(S)$  derivieren. In diesem Fall ist  $LF = RF = F$ .

Ist  $F$  lediglich ein linksexakter (resp. rechtsexakter) Funktor, so lässt sich der auf  $\mathbf{K}^-(S)$  (resp.  $\mathbf{K}^+(S)$ ) induzierte Funktor trivial derivieren; aus den Definitionen folgt leicht, dass der derivierte Funktor

$$LF = F : \mathbf{D}^-(S) \rightarrow \mathbf{D}^-(S) \quad (\text{ oder } RF = F : \mathbf{D}^+(S) \rightarrow \mathbf{D}^+(S))$$

durch  $F$  gegeben ist.

- ii) **Hom-Funktor** Für zwei Komplexe  $(\mathcal{K}^\bullet, \partial_{\mathcal{K}})$  und  $(\mathcal{L}^\bullet, \partial_{\mathcal{L}})$  auf  $S$  definieren wir den *Hom-Komplex* durch

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet)^n &:= \{f : \mathcal{K}^\bullet \rightarrow \mathcal{L}^\bullet \mid |f| = n\} = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(\mathcal{K}^p, \mathcal{L}^{p+n}) \\ \text{und } \partial_{\text{Hom}}(f) &:= [\partial, f] = \partial_{\mathcal{L}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ \partial_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $[\cdot, \cdot]$  die graduierte Lie-Klammer und  $|f|$  den Grad von  $f$ , welcher definiert ist als die Zahl  $n \in \mathbb{Z}$ , für die  $f : \mathcal{K}^\bullet \rightarrow \mathcal{L}^\bullet[n]$  ein Morphismus von Komplexen ist. Eine einfache Rechnung zeigt  $\partial_{\text{Hom}}^2 = 0$ . Diese Konstruktion ist bezüglich beider Komponenten funktoriell. Der zugehörige Bi-Funktor

$$\text{Hom}^\bullet(-, -) : \mathbf{K}(S)^{opp} \times \mathbf{K}(S) \rightarrow \mathbf{K}(S)$$

kann auf  $\mathbf{K}(S)^{opp} \times \mathbf{K}^+(S)$  bezüglich der zweiten Komponente rechts-deriviert werden, da es für Komplexe  $\mathcal{K}^\bullet \in \mathbf{K}^+(S)$  stets eine injektive Auflösung gibt. Der resultierende Funktor  $R_{II} \text{Hom}^\bullet(-, -)$  ist bezüglich der ersten Komponente exakt; daher liefert Derivieren bezüglich dieser Komponente eine triviale Fortsetzung auf  $\mathbf{D}(S)^{opp}$  und wir erhalten

$$R \text{Hom}^\bullet := R_{II} R_{II} \text{Hom}^\bullet : \mathbf{D}(S)^{opp} \times \mathbf{D}^+(S) \rightarrow \mathbf{D}(S).$$

Der Komplex  $R \text{Hom}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet)$  lässt sich mit einer injektiven Auflösung  $\mathcal{J}^\bullet$  von  $\mathcal{L}^\bullet$  berechnen; dafür ist  $R \text{Hom}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{J}^\bullet)$ .

Man beachte, dass in manchen Fällen der Funktor  $\text{Hom}^\bullet$  auch zunächst bezüglich der ersten Komponente deriviert werden kann [vgl. [Har66], Kapitel 1, Abschnitt 6]. In einem solchen Fall wird der derivierte Funktor mit  $R \text{Hom}^\bullet := R_{II} R_I \text{Hom}^\bullet$  bezeichnet. Da dieser auf  $\mathbf{D}^-(S)^{opp} \times \mathbf{D}^+(S)$  mit  $R_I R_{II} \text{Hom}^\bullet$  übereinstimmt, können wir die an sich nicht eindeutige Schreibweise  $R \text{Hom}^\bullet$  verwenden. Der Funktor  $R_{II} R_I \text{Hom}^\bullet$  existiert beispielsweise dann, wenn  $\mathcal{K}^\bullet$  eine projektive Auflösung  $\mathcal{P}^\bullet$  besitzt. Dann gilt  $R \text{Hom}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(\mathcal{P}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet)$ .

$R \text{Hom}^\bullet$  erhält den Grad der Komplexe, das heißt, ist  $\mathcal{K}^\bullet \in \mathbf{D}^{\leq k_0}(S)$  und  $\mathcal{L}^\bullet \in \mathbf{D}^{\geq l_0}(S)$ , so folgt  $R \text{Hom}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \mathcal{L}^\bullet) \in \mathbf{D}^{\geq l_0 - k_0}(S)$ . Ebenso ist der Funktor mit kohärenter Kohomologie der Komplexe verträglich. Die Einschränkung des Funktors  $R \text{Hom}^\bullet$  auf den vollen Unterkategorien  $\mathbf{D}_c^-(S)$  und  $\mathbf{D}_c^+(S)$  induziert einen Funktor

$$R \text{Hom}^\bullet : \mathbf{D}_c^-(S)^{opp} \times \mathbf{D}_c^+(S) \rightarrow \mathbf{D}_c^+(S).$$

Die Konstruktion des Funktors  $\text{Hom}^\bullet(-, -)$  lässt sich vergarbifizieren, indem man die in der Definition auftretenden Hom-Moduln durch  $\mathcal{H}om$ -Objekte ersetzt. Die vorstehenden Aussagen bleiben unverändert auch für den  $\mathcal{H}om$ -Funktor und dem derivierten Funktor  $R \mathcal{H}om^\bullet$  gültig.

Weitere Anmerkungen zum Hom-Funktor von Komplexen und Beweise zu den obigen Aussagen findet man in [[Har66], Kapitel 1, Abschnitt 6 und Kapitel 2, Abschnitt 3].

- iii) **Tensorprodukt** Sind  $\mathcal{K}^\bullet$  und  $\mathcal{L}^\bullet$  wie in Beispiel ii), so ist das *Tensorprodukt* von  $\mathcal{K}^\bullet$  und  $\mathcal{L}^\bullet$  definiert durch:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^\bullet \otimes \mathcal{L}^\bullet)^n &:= \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathcal{K}^p \otimes \mathcal{L}^{n-p} \\ \partial_\otimes &:= \partial_{\mathcal{K}} \otimes id_{\mathcal{L}} + (-1)^n id_{\mathcal{K}} \otimes \partial_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Diese Konstruktion ist in beiden Komponenten funktoriell; der Funktor  $F_{\otimes} := - \otimes -$  kann auf  $\mathbf{K}^{-}(S) \times \mathbf{K}^{-}(S)$  linksderiviert werden. Nun ist der derivierte Funktor  $LF_{\otimes}$  unabhängig davon, ob zunächst bezüglich der ersten Komponente deriviert wird und dann (trivial) bezüglich der Zweiten oder umgekehrt. Daher verwenden wir die Notation  $\underline{\otimes}$ . Für den Funktor  $F_{\otimes}$  sind flache Auflösungen azyklisch: sind  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$  flache Auflösungen von  $\mathcal{K}^{\cdot}$  resp.  $\mathcal{L}^{\cdot}$ , so gilt

$$\mathcal{K}^{\cdot} \underline{\otimes} \mathcal{L}^{\cdot} \cong \mathcal{K}^{\cdot} \otimes \mathcal{F}_2 \cong \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{L}^{\cdot}.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktoren  $\otimes$  und  $\underline{\otimes}$  mit den Gradbeschränkungen und der Kohärenz der Kohomologie der gegebenen Komplexe verträglich sind, das heißt es ist  $\mathcal{K}^{\cdot} \underline{\otimes} \mathcal{L}^{\cdot} \in \mathbf{D}^{\leq k_0 + l_0}(S)$  für  $\mathcal{K}^{\cdot} \in \mathbf{D}^{\leq k_0}(S)$  und  $\mathcal{L}^{\cdot} \in \mathbf{D}^{\leq l_0}(S)$  und es gibt einen derivierten Funktor  $\underline{\otimes} : \mathbf{D}_c^{-}(S) \times \mathbf{D}_c^{-}(S) \rightarrow \mathbf{D}_c^{-}(S)$ . Für Beweise der Aussagen über das Tensorprodukt von Komplexen verweisen wir auf [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 4].

- iv)  **$R\pi_*$  und  $L\pi^*$**  Ein Morphismus  $\pi : X \rightarrow S$  induziert auf natürliche Weise Funktoren  $\pi_* : \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(S)$  und  $\pi^* : \mathbf{K}(S) \rightarrow \mathbf{K}(X)$ . Dazu existieren die derivierten Funktoren

$$R\pi_* : \mathbf{D}^{+}(X) \rightarrow \mathbf{D}^{+}(S) \text{ und } L\pi^* : \mathbf{D}^{-}(S) \rightarrow \mathbf{D}^{-}(X).$$

Beide Funktoren  $\pi_*$  und  $\pi^*$  und somit auch die zugehörigen derivierten Funktoren  $R\pi_*$  und  $L\pi^*$  sind graderhaltend, das heißt für ein  $\mathcal{K}^{\cdot} \in \mathbf{D}^{\geq k_0}(S)$  ist auch  $R\pi_*(\mathcal{K}^{\cdot}) \in \mathbf{D}^{\geq k_0}(S)$ . Dies gilt analog für  $\mathcal{K}^{\cdot} \in \mathbf{D}^{\leq k_0}(S)$  und  $L\pi^*$ . Ferner ist  $L\pi^*$  mit kohärenter Kohomologie der Komplexe verträglich und induziert daher einen Funktor  $L\pi^* : \mathbf{D}_c^{-}(S) \rightarrow \mathbf{D}_c^{-}(S)$ .

Der Funktor  $R\pi_*$  hingegen ist nur dann mit kohärenter Kohomologie von Komplexen verträglich, falls  $\pi$  eigentlich ist. Wie zuvor wird auch in diesem Fall der auf den Unterkategorien  $\mathbf{D}_c^{+}(X)$  und  $\mathbf{D}_c^{+}(S)$  induzierte Funktor mit  $R\pi_*$  bezeichnet.

Berechnen lassen sich die derivierten Funktoren wieder mit injektiven resp. flachen Auflösungen: für  $R\pi_*$  ist  $R\pi_*(\mathcal{K}^{\cdot}) = \pi_*(\mathcal{J}^{\cdot})$ , wenn  $\mathcal{J}^{\cdot}$  eine injektive Auflösung von  $\mathcal{K}^{\cdot}$  bezeichnet; für  $L\pi^*$  ist  $L\pi^*(\mathcal{L}^{\cdot}) = \pi^*(\mathcal{F}^{\cdot})$ , wobei  $\mathcal{F}^{\cdot}$  eine flache Auflösung von  $\mathcal{L}^{\cdot}$  ist.

Abschließend sei auf [[Har66], Kapitel 2, Abschnitte 2 und 4] verwiesen, wo die vorgenannten Funktoren ausführlich behandelt werden.

Es sei angemerkt, dass der Translationsfunktor  $[\ ]$  per definitionem mit den hier angegebenen Funktoren aus Beispiel i) – iv) und somit auch mit den zugehörigen derivierten Funktoren verträglich ist.

Da wir später auch Kompositionen der Funktoren in 0.4.6 betrachten, wiederholen wir kurz das sogenannte *Composition Theorem*, welches etwas darüber aussagt, wie der derivierte Funktor einer Komposition von Funktoren aussieht.

**0.4.7** Seien  $F, G : \mathbf{K}^{+}(S) \rightarrow \mathbf{K}^{+}(S)$  zwei Funktoren, für die die rechtsderivierten Funktoren  $RF$ ,  $RG$  und  $R(F \circ G)$  existieren. Dann gibt es eine eindeutige Transformation von Funktoren auf  $\mathbf{D}^{+}(S)$

$$\zeta : R(F \circ G) \rightarrow RF \circ RG$$

mit folgenden Eigenschaften:

- i) für jeden Komplex  $\mathcal{K} \in \mathbf{K}^+(S)$  gibt es ein kommutatives Diagramm in  $\mathbf{D}^+(S)$  wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} (F \circ G)(\mathcal{K}) & \longrightarrow & RF(G(\mathcal{K})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(F \circ G)(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\zeta} & RF \circ RG(\mathcal{K}) \end{array}$$

- ii) sind  $F$  und  $G$  linksexakt und überführt  $G$  Komplexe injektiver Moduln in Komplexe injektiver Moduln, so ist  $\zeta$  ein Funktorisomorphismus.

Analog gilt diese Aussage auch für Funktoren  $F, G : \mathbf{K}^-(S) \rightarrow \mathbf{K}^-(S)$ , zu denen die linksderivierten Funktoren  $LF$ ,  $LG$  und  $L(F \circ G)$  existieren. Eigenschaft ii) ist dabei wie folgt verallgemeinerbar:  $\zeta$  ist ein Funktorisomorphismus, wenn durch den Funktor  $G$  jede  $G$ -azyklische Auflösung auf eine  $F$ -azyklische Auflösung geworfen wird. Für einen Beweis des Composition Theorems verweisen wir auf [[Wei95], Kapitel 10, Abschnitt 8, insbesondere Theorem 10.8.2]. Dort wird eine etwas allgemeinere Variante behandelt.

**0.4.8** 0.4.7 findet beispielsweise Anwendung, wenn wir die Komposition der derivierten Funktoren  $Rf_*$  und  $Rg_*$  betrachten, wobei  $f : X \rightarrow S$  und  $g : X' \rightarrow X$  zwei holomorphe Abbildungen sind und  $f_*$  und  $g_*$  jeweils die auf  $\mathbf{K}^+(S)$  induzierten Funktoren bezeichnen. Da  $g_*$  injektive Moduln auf  $X'$  in welche Moduln auf  $X$  und somit injektive Auflösungen in  $f_*$ -azyklische Auflösungen überführt, ist  $R(f \circ g)_* = Rf_* \circ Rg_*$  [siehe auch [Har66], Kapitel 2, Abschnitt 5, Satz 5.1]. Ebenso können wir die Funktoren  $f^*$  und  $g^*$  betrachten. Da  $f^*$  flache Moduln auf  $S$  in flache Moduln auf  $X$  überführt und somit  $f^*$ -azyklische Auflösungen in  $g^*$ -azyklische, liefert 0.4.7 hier  $L(f \circ g)^* = Lg^* \circ Lf^*$ .

In manchen Situationen lassen sich auch Kompositionen von links- und rechtsderivierten Funktoren berechnen: für eine eigentliche Abbildung komplexer Räume  $f : X \rightarrow S$  gilt beispielsweise für jedes  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^-(S)$

$$Rf_* Lf^* \mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes Rf_* \mathcal{O}_X.$$

Hier ist das Composition Theorem 0.4.7 nicht anwendbar. Die obige Isomorphie ist ein Spezialfall der sogenannten *Projektionsformel*. Einen Beweis findet man in [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 5, Satz 5.6]. Insbesondere liefert die Projektionsformel in dieser Form die bekannte Projektionsformel für kohärente Moduln auf  $S$ : ist  $f$  eine abgeschlossene Einbettung und  $\mathcal{K} \in \mathbf{Coh}(S)$ , so ist

$$f_* f^* \mathcal{K} \cong \mathcal{K} \otimes f_* \mathcal{O}_X.$$

Dies folgt unmittelbar aus der oben angegebenen allgemeineren Projektionsformel, indem man den nullten Kohomologiemodul auf beiden Seiten betrachtet. Ferner sei angemerkt, dass  $f_*$  exakt ist, da  $f$  eine abgeschlossene Einbettung ist.

**0.4.9** Unter dem  $i$ -ten *Hyperext*-Modul  $\text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  versteht man den Modul  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(S)}(\mathcal{L}, \mathcal{K}[i])$ . Diese Definition macht für alle unbeschränkten Komplexe  $\mathcal{L}, \mathcal{K}$  aus  $\mathbf{D}(S)$  Sinn. Ist  $\mathcal{K}$  nach links beschränkt, so erhalten wir die wohl-bekannten Ext-Moduln, das heißt es gilt  $\text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{K}) = R^i \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  für

$\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^+(S)$  [[Har66], Kapitel 1, Abschnitt 6, Theorem 6.4]. Aus der Definition der Hyperextmoduln ersieht man sofort, dass diese nur von der Quasiisomorphieklasse abhängen und nicht von der expliziten Wahl der Komplexe. Ferner folgt aus den Eigenschaften der derivierten Kategorie  $\mathbf{D}(S)$  leicht, dass jede kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow 0$$

lange exakte Sequenzen der Form

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{X}) \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{Y}) \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{L}, \mathcal{Z}) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(\mathcal{L}, \mathcal{X}) \rightarrow \dots$$

und

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{Z}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{Y}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Ext}^i(\mathcal{X}, \mathcal{K}) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(\mathcal{Z}, \mathcal{K}) \rightarrow \dots$$

induzieren [[Har66], Kapitel 1, Abschnitt 6, Satz 6.1].

Vermöge der Definition  $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{L}, \mathcal{K}) := R^i\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  lässt sich der *i-ten Hyperext- $\mathcal{O}_S$ -Modul* für  $\mathcal{L} \in \mathbf{D}(S)$  und  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^+(S)$  definieren. Entsprechend gibt es auch für diese  $\mathcal{E}xt$ -Moduln lange exakte Sequenzen wie oben.

Wir wollen nun eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Aussagen der Kohomologietheorie in der lokalen Situation geben, i.e. wir betrachten im Folgenden Komplexe von Moduln über Noetherschen lokalen Ringen.

**0.4.10** Bereits bei den Beispielen in 0.4.6 haben wir uns auf eine geometrische Situation festgelegt; es ist klar, dass sämtliche Aussagen dieses Abschnitts insbesondere für komplexe Räume oder für Noethersche Schemata anstelle von geringten Räumen gelten. Für den Spezialfall, dass  $S$  lediglich ein abgeschlossener Punkt ist, liefern die Aussagen in diesem Abschnitt entsprechende Aussagen über die Kohomologie von Moduln über Noetherschen lokalen Ringen. In der lokalen Situation gelten aber oftmals stärkere Aussagen; als Quelle für die Kohomologietheorie von Moduln über Noetherschen Ringen seien bereits vorab [Rob98], [Bou07] und [HS97] genannt.

Im Folgenden sei  $A$  ein Noetherscher lokaler Ring und  $K$  ein nach rechts beschränkter Komplex von  $A$ -Moduln. Jeder solche Komplex  $K$  besitzt eine *projektive Auflösung*, i.e. es gibt einen zu  $K$  quasiisomorphen Komplex  $P$ , der aus projektiven  $A$ -Moduln besteht. Da  $A$  ein lokaler Ring ist, sind solche projektiven Auflösungen stets durch Komplexe von freien Moduln gegeben [[SS94], Kapitel 5, Abschnitt V.B]. Wir sprechen daher auch von einer *freien Auflösung* von  $K$ . Insbesondere besitzt jeder  $A$ -Modul  $M$  eine projektive resp. freie Auflösung. Dies entspricht einer exakten Sequenz

$$P : \dots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

in der die  $P^i$  sämtlich projektive Moduln sind. Besitzt  $M$  eine endliche projektive Auflösung, das heißt ist  $P^i = 0 \quad \forall i < -n_0$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so definieren wir die *projektive Dimension* von  $M$  durch  $\text{pd}(M) := \min n_0(P)$ , wobei das Minimum über alle endlichen projektiven Auflösungen  $P$  genommen wird. Gibt es keine endliche Auflösung durch projektive Moduln, so setzen wir  $\text{pd}(M) := \infty$ .

**0.4.11** Wie im globalen Fall können wir von einer derivierten Kategorie die volle Unterkategorie der Komplexe mit *kohärenter* Kohomologie betrachten, i.e.  $\mathbf{D}_c(A) \subset \mathbf{D}(A)$ ,  $\mathbf{D}_c^-(A) \subset \mathbf{D}^-(A)$  usw. Da  $\mathbf{Mod}(A)$  genügend Projektive besitzt, gibt es eine Äquivalenz von Kategorien

$$\mathbf{D}_c^-(A) \cong \mathbf{D}^-(\mathbf{Coh}(A)).$$

Dies werden wir später ohne weitere Anmerkungen anwenden, indem wir bei einem gegebenen Komplex  $K \in \mathbf{D}_c^-(A)$  ohne Einschränkung annehmen, dass  $K$  ein Komplex endlicher  $A$ -Moduln ist. Ein Beweis ergibt sich aus der dualen Aussage zu [[Har66], Kapitel 1, Abschnitt 4, Satz 4.8].

**0.4.12** Ist  $K \in \mathbf{K}^-(A)$  ein nach rechts beschränkter Komplex endlich erzeugter Moduln, so gibt es stets eine freie Auflösung  $F$  von  $K$ . Diese ist eindeutig bestimmt bis auf einen *spaltend exakten* direkten Summanden  $(S, \sigma)$ . Dabei heisst ein Komplex  $(S, \sigma)$  *spaltend exakt*, wenn es für alle  $i \in \mathbb{Z}$  eine Zerlegung  $S^i \cong \ker \sigma^i \oplus \operatorname{im} \sigma^i$  gibt oder äquivalent, wenn  $S$  eine direkte Summe kurzer spaltend exakter Sequenzen ist. Insbesondere gibt es in der Quasiisomorphieklasse von  $K \in \mathbf{D}_c^-(A)$  einen (bis auf Isomorphie von Komplexen) eindeutigen *minimalen* Komplex  $M$  von endlichen freien Moduln. In [[Rob98], Kapitel 4, Abschnitt 4.4] findet man eine Konstruktion für  $M$ . Wir werden im ersten Abschnitt von Kapitel 2 näher auf solche *minimalen Auflösungen* eingehen.

**0.4.13** Dual zu 0.4.10 können wir *injektive Auflösungen* eines nach links beschränkten Komplexes  $K \in \mathbf{K}^+(A)$  betrachten. Diese sind gegeben durch einen zu  $K$  quasiisomorphen Komplex injektiver Moduln  $I$ . Eine solche Auflösung existiert stets; insbesondere besitzt jeder  $A$ -Modul  $M$  eine injektive Auflösung, welche einer exakten Sequenz

$$I : 0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

entspricht, in der die Moduln  $I^j$  injektiv sind. Analog zu 0.4.10 definieren wir die *injektive Dimension* durch  $\operatorname{id}(M) := \min m_0(I)$ , wobei das Minimum über alle endlichen injektiven Auflösungen  $I$  genommen wird und  $m_0(I)$  die zugehörige obere Schranke für die Indizes  $j$  der nichtverschwindenden Moduln  $I^j$  bezeichnet. Wir setzen wieder  $\operatorname{id}(M) := \infty$ , falls keine endliche injektive Auflösung von  $M$  existiert.

**0.4.14** Eine weitere wichtige Dimension eines gegebenen  $A$ -Moduls  $M$  ist die *flache Dimension*  $\operatorname{fd}(M)$ . Sie wird genauso wie die projektive Dimension definiert, wobei anstelle von projektiven Auflösungen *flache Auflösungen* betrachtet werden, i.e. Komplexe von flachen Moduln anstelle von projektiven Moduln. Da projektive Moduln stets flach sind, ist offensichtlich  $\operatorname{fd}(M) \leq \operatorname{pd}(M)$ ; ist  $M$  ein endlicher  $A$ -Modul, so gilt die Gleichheit [[Wei95], Kapitel 4, Abschnitt 1, Satz 4.1.5].

**0.4.15** Nachdem wir den Begriff der projektiven Dimension eines  $A$ -Moduls eingeführt haben, können wir die folgenden wichtigen Aussagen von Auslander-Buchsbaum-Serre angeben. Sie werden später in bestimmten Beweisen benötigt.

- i) Für einen endlichen  $A$ -Modul  $M$  mit endlicher projektiver Dimension  $\text{pd}(M)$  ist stets  $\text{pd}(M) \leq \dim(A)$  [folgt aus [Rob98], Kapitel 4, Abschnitt 4.4, Theorem 4.4.3]
- ii) Ein lokal Noetherscher Ring  $A$  ist genau dann regulär, wenn jeder endliche  $A$ -Modul endliche projektive Dimension besitzt [[Rob98], Kapitel 4, Abschnitt 4.4, Theorem 4.4.5].

# Kapitel 1

## Deformationstheorie

Dieses Kapitel gibt eine kurze Einführung in die Deformationstheorie analytischer Strukturen. Die Darstellung orientiert sich dabei an [BF], [Fle78] und [Fle81a]. Da sich [BF] derzeit noch in Arbeit befindet, werden in der vorliegenden Arbeit die verfügbaren Quellen [Fle78] und [Fle81a] verwendet. Für Aussagen, die sich nicht unmittelbar aus den vorgenannten zugänglichen Quellen ergeben, werden Beweise angegeben.

Das Kapitel ist wie folgt eingeteilt: im ersten Abschnitt wird der Begriff der *Deformationstheorie* eingeführt, die dabei auftretenden Moduln von Erweiterungen und ihre Automorphismen werden betrachtet und dann die Verträglichkeit der Erweiterungs- und Automorphismenmoduln mit Abbildungen kohärenter Moduln sowie wichtige Abbildungen zwischen diesen Moduln, etwa die *Kodaira-Spencer-Abbildung*, studiert.

Danach wird kurz auf den Zusammenhang zwischen globalen, lokalen und formalen Deformationstheorien eingegangen. Oftmals genügt es, die formale Situation zu betrachten und diese dann auf den lokalen oder gar globalen Fall zu übertragen. Der zweite Abschnitt fasst die wichtigsten Resultate der lokalen und formalen Theorie zusammen.

Im Rahmen der formalen und lokalen Deformationstheorien können *verselle Deformationen* definiert und untersucht werden. Im Allgemeinen gibt es keine universellen Deformationen, sondern nur *verselle* und *semiuniverselle*. Entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen werden im dritten Abschnitt behandelt.

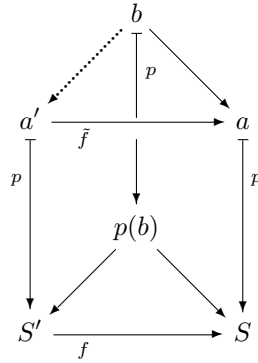
In Abschnitt 4 zeigen wir schließlich, dass *formale Versalität* unter gewissen Voraussetzungen eine offene Eigenschaft ist. Es werden sogenannte *Obstruktions-theorien* eingeführt, mit deren Hilfe ein handliches Kriterium für die Offenheit der Versalität formuliert werden kann.

### 1.1 Faserung in Gruppoide und globale Deformationstheorien

In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe und elementare Sätze der Deformationstheorie wiederholt. Diese werden im Wesentlichen aus [Fle78] und [Fle81a] zitiert. Während man *Faserung in Kategorien* und *Faserung in Gruppoide* für beliebige Kategorien  $\mathbf{F}$  und einer beliebigen Basiskategorie  $\mathbf{C}$  definieren kann,

wird der Begriff der *Deformationstheorie* nur für die Basiskategorie  $\mathbf{An}_\Sigma$  der komplexen Räume eingeführt. Es sei angemerkt, dass mit den üblichen Anpassungen sämtliche Aussagen dieses Abschnitts auch in der algebraischen Situation gelten [vgl. dazu auch die Anmerkungen in [Fle81a]].

**1.1.1 Definition:** Eine *Faserung in Kategorien* ist ein Funktor  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$  mit folgender Eigenschaft: ist  $f : S' \rightarrow S$  ein Morphismus in  $\mathbf{C}$  und  $a \in \mathbf{F}$  ein Objekt über  $S$ , so gibt es einen Morphismus  $\tilde{f} : a' \rightarrow a$  über  $f$  derart, dass jedes Diagramm der Form



durch einen eindeutigen Morphismus  $b \rightarrow a'$  vervollständigt werden kann. In diesem Fall sagt man,  $\tilde{f}$  ist *kartesisch* und schreibt für  $a'$  auch  $a \times_S S'$ . Ein Funktor  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$  heißt *Kofaserung in Kategorien*, wenn  $p^{opp} : \mathbf{F}^{opp} \rightarrow \mathbf{C}^{opp}$  eine Faserung in Kategorien ist.

Die Kategorie  $\mathbf{C}$  wollen wir als *Basiskategorie* der Faserung bezeichnen. Für ein Objekt  $S$  aus  $\mathbf{C}$  bezeichne  $\mathbf{F}(S)$  die Unterkategorie von  $\mathbf{F}$ , die aus den Objekten  $a$  mit  $p(a) = S$  und den Morphismen  $\alpha$  mit  $p(\alpha) = id_S$  besteht.  $\mathbf{F}(S)$  nennt man *Faser von S*. Ein Morphismus  $f : S' \rightarrow S$  in  $\mathbf{C}$  induziert einen sogenannten *inversen Bildfunktor* auf den Fasern:  $f^* : \mathbf{F}(S) \rightarrow \mathbf{F}(S')$  ist gegeben durch  $f^*(a) := a \times_S S'$ . Dual erhält man bei Kofaserungen einen sogenannten *direkten Bildfunktor*  $f_* : \mathbf{F}(S') \rightarrow \mathbf{F}(S)$ .

Mengenwertige Funktoren induzieren auf natürliche Weise eine Faserung in Kategorien.

**1.1.2 Beispiel:** Ein Funktor  $F : \mathbf{C}^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen}$  induziert folgendermaßen eine Faserung in Kategorien  $p_F := p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$ : Objekte in  $\mathbf{F}$  sind Paare  $(S, a)$  mit  $a \in F(S)$ , und ein Morphismus  $(S, a) \rightarrow (T, b)$  ist ein Morphismus  $f : S \rightarrow T$  mit  $F(f)(b) = a$ . Der Funktor  $p$  ordnet einem Objekt  $(S, a)$  das Objekt  $S \in \mathbf{C}$  zu, und ein Morphismus  $(S, a) \rightarrow (T, b)$  wird auf den Morphismus  $f : S \rightarrow T$  in  $\mathbf{C}$  geworfen. Offensichtlich ist dann jeder Morphismus in  $\mathbf{F}$  kartesisch. Eine Faser  $\mathbf{F}(S)$  ist die diskrete Kategorie, die aus der Menge  $F(S)$  besteht und nur die Identitäten als Morphismen hat.

Ist umgekehrt eine Faserung in Kategorien  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{C}$  gegeben, so gibt es stets einen zu  $p$  assoziierten mengenwertigen Funktor

$$[F_p] : \mathbf{C}^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen},$$

der einem Objekt  $S \in \mathbf{C}$  die Isomorphieklasse  $[F_p(S)]$  zuordnet. Man prüft leicht nach, dass  $[F_{p_F}]$  wieder den Funktor  $F$  liefert. Allerdings stimmt eine gegebene Faserung  $p$  im Allgemeinen nicht mit  $p_{[F_p]}$  überein. Dies zeigt, dass mengenwertige Funktoren und Faserungen in Kategorien zwar keine äquivalenten Konzepte sind, aber dicht beieinander liegen.

Die in diesem Beispiel konstruierte Faserung in Kategorien  $p_F$  ist die einfachste Form einer sogenannten *Faserungen in Gruppoide*. Dies sind solche Faserungen, bei der jede Faser ein *Gruppoid* ist, also eine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. Offensichtlich ist für solche Faserungen ein Morphismus  $f$  in  $\mathbf{F}$  genau dann ein Isomorphismus, wenn der Morphismus  $p(f)$  in  $\mathbf{C}$  ein Isomorphismus ist.

Faserungen in Gruppoide liefern das Grundgerüst für die *Deformationstheorien*. Allerdings benötigen wir noch eine Homogenitätsbedingung, welche die Existenz von Fasersummen sicherstellt. Dazu studieren wir zunächst sogenannte *Erweiterung komplexer Räume*. Wie bereits erwähnt, beschränken wir uns dabei auf die analytische Situation, das heißt, von nun an werden nur noch Faserungen in Gruppoide der Form  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  betrachtet. Mit den entsprechenden Anpassungen lassen sich die Begriffe und Aussagen dieses Abschnitts auf die algebraische Situation übertragen.

**1.1.3 Definition:** Eine *Erweiterung*  $S' \hookrightarrow S$  eines komplexen Raumes  $S$  über  $\Sigma$  ist eine abgeschlossene Einbettung komplexer Räume  $S \hookrightarrow S'$  mit  $\mathcal{I}^2 = 0$ , wobei  $\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S)$  das definierende Ideal ist. Man beachte, dass  $\mathcal{I}$  wegen  $\mathcal{I}^2 = 0$  ein  $\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_{S'}/\mathcal{I}$ -Modul ist. Eine *Erweiterung von  $S$  durch einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$*  ist ein Paar  $(i : S \hookrightarrow S', u)$ , wobei  $i$  eine Erweiterung von  $S$  ist und  $u$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathcal{N} \cong \ker(\mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S)$ . Ist  $(j : T \hookrightarrow T', v)$  eine Erweiterung von  $T$  durch einen  $\mathcal{O}_T$ -Modul  $\mathcal{P}$ , so ist ein *Morphismus von Erweiterungen*  $(i, u) \rightarrow (j, v)$  gegeben durch ein Paar von  $\Sigma$ -Morphismen  $f : S \rightarrow T$ ,  $f' : S' \rightarrow T'$ , welches ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{i} & S' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ T & \xrightarrow{j} & T' \end{array}$$

induziert, das mit den Isomorphismen  $u$  und  $v$  verträglich ist, i. e. bezeichnet  $\tilde{f}'$  den durch  $f'$  auf den Kernen von  $i^*$  und  $j^*$  induzierten Homomorphismus, so kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}_{S'} \\ \tilde{f}' \downarrow & & \downarrow f'^* \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}_{T'} \end{array}$$

Eine Erweiterung  $S \hookrightarrow S'$  von  $S$  durch  $\mathcal{N}$  ist *trivial*, wenn sie isomorph ist zu der durch die *Idealisierung von  $S$  durch  $\mathcal{N}$*  gegebenen Erweiterung. Die Idealisierung von  $S$  durch  $\mathcal{N}$  wird mit  $S[\mathcal{N}]$  bezeichnet. Sie ist gegeben durch  $S[\mathcal{N}] := (S, \mathcal{O}_S[\mathcal{N}])$ , wobei die Multiplikation auf  $\mathcal{O}_S[\mathcal{N}] := \mathcal{O}_S \times \mathcal{N}$  definiert wird durch  $(a, m)(b, n) := (ab, an + bm)$  für lokale Schnitte  $a, b \in \mathcal{O}_S$  und  $m, n \in \mathcal{N}$ .

$n \in \mathcal{N}$ . Diese Konstruktion liefert einen komplexen Raum und zusammen mit der Identität auf  $\mathcal{N}$  eine Erweiterung von  $S$  durch  $\mathcal{N}$ .

**1.1.4 Bemerkung:** i) Offensichtlich bilden die Erweiterungen von komplexen Räumen zusammen mit den Morphismen von Erweiterungen eine Kategorie. Diese wird mit  $\mathbf{Ex}_\Sigma$  bezeichnet. Für einen festen komplexen Raum  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  liefern die Erweiterungen von  $S$  zusammen mit den Morphismen, die auf  $S$  die Identität induzieren, ebenfalls eine Kategorie, welche mit  $\mathbf{Ex}_\Sigma(S)$  bezeichnet wird. Eine solche Erweiterung hat konstruktionsgemäß die folgende Darstellung durch eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_\Sigma$ -Moduln:

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

Ebenso lässt sich ein Morphismus von Erweiterungen  $(\text{id}_S, f') : (S \hookrightarrow S'_1, u_1) \rightarrow (S \hookrightarrow S'_2, u_2)$  darstellen durch ein kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen in  $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_2 & \xrightarrow{u_2} & \mathcal{O}_{S'_2} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \\ & & \tilde{f}' \downarrow & & \downarrow f'^* & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_1 & \xrightarrow{u_1} & \mathcal{O}_{S'_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dabei ist  $\tilde{f}'$  die durch  $f'$  induzierte Abbildung. Für festes  $\mathcal{N}$  betrachten wir die Unterkategorie  $\mathbf{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N}) \subset \mathbf{Ex}_\Sigma(S)$  aller Erweiterungen von  $S$  durch  $\mathcal{N}$ . Die Isomorphieklassen solcher Erweiterungen wird mit  $\text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N})$  bezeichnet und die Menge der Automorphismen, also die Menge der Isomorphismen von Erweiterungen im obigen Sinne, mit  $\text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N})$ . Diese Mengen tragen auf natürliche Weise eine  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -Modulstruktur. Für den Automorphismenmodul gilt sogar  $\text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N}) \cong \text{Der}_\Sigma(\mathcal{O}_S, \mathcal{N})$ . Ein Beweis dafür ergibt sich aus [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 2, Teil C, Satz 2.21 (1)] und [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 3, Teil C, Satz 3.11] zusammen mit [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 3, Teil A, Bemerkung 3.6 (2)].

ii) Eine triviale Erweiterung von  $S$  durch  $\mathcal{N}$  ist ebenfalls durch eine exakte Sequenz gegeben, welche zu

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_S[\mathcal{N}] \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

isomorph ist. Dies ist sogar eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. Man sieht leicht, dass eine Erweiterung  $S'$  von  $S$  durch  $\mathcal{N}$  genau dann trivial ist, wenn die zugehörige Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$$

exakt über  $S$  ist.

Die Homogenitätsbedingung lässt sich nun wie folgt formulieren:

**1.1.5 Definition:** Sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine Faserung in Gruppoide. Man nennt  $p$  eine *homogene Faserung in Gruppoide* oder einfach *Deformationstheorie*, wenn

folgende Homogenitätsbedingung erfüllt ist: für jedes Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc}
 a & \xrightarrow{\quad} & a' & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & b & \cdots \cdots \rightarrow & b' = a' \amalg_a b \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 S & \xrightarrow{\xi} & S' & & \\
 \searrow \varepsilon & & \downarrow & \searrow & \\
 & & T & \xrightarrow{\quad} & S' \amalg_S T
 \end{array}$$

in dem  $\varepsilon : S \rightarrow T$  eine endliche Abbildung komplexer Räume und  $\xi : S \hookrightarrow S'$  eine Erweiterung durch einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  ist, existiert die gefaserte Summe  $b' := a' \amalg_a b$ .

**1.1.6 Bemerkung:** i) Nach einem Resultat von Schuster ist unter den genannten Voraussetzungen an  $\varepsilon$  und  $\xi$  die Fasersumme  $S' \amalg_S T$  in  $\mathbf{An}_\Sigma$  existent und eindeutig [Sch70].

ii) Die gefaserte Summe  $a' \amalg_a b$  in  $\mathbf{F}$  liegt stets über  $S' \amalg_S T$ . Insbesondere ist  $a' \amalg_a b$  in  $\mathbf{F}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt [vgl. [BF03], Abschnitt 6, 6.3].

**1.1.7 Beispiel:** i) Bei der Deformationen komplexer Räume betrachtet man die Faserung  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ ; für einen komplexen Raum  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  sind die Objekte in  $F(S)$  gegeben durch flache Abbildungen komplexer Räume  $a = (f : X \rightarrow S)$ . Ist  $a' = (f' : X' \rightarrow S')$  ein Objekt über  $S'$ , so ist ein Morphismus  $a' \rightarrow a$  gegeben durch ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \longrightarrow & X \\
 f' \downarrow & & \downarrow f \\
 S' & \longrightarrow & S,
 \end{array}$$

das heißt das obige Diagramm kommutiert und es gibt einen Isomorphismus komplexer Räume  $X' \cong X \times_S S'$ . Man beachte, dass man für  $a = (f : X \rightarrow S)$  und eine holomorphe Abbildung  $\varphi : S' \rightarrow S$  stets einen kartesischen Morphismus  $a' \rightarrow a$  hat vermöge des Pullbacks  $X' := X \times_S S'$ , da  $X'$  flach über  $S'$  ist.  $p$  ist eine Faserung in Gruppoide, die die Homogenitätsbedingung 1.1.5 erfüllt [[Sch70], Satz 2.7].

ii) In diesem Beispiel sei  $X \in \mathbf{An}_\Sigma$  ein festgewählter komplexer Raum. Für einen  $\Sigma$ -Raum  $S$  betrachten wir die Kategorie  $F(S)$  der kohärenten  $\mathcal{O}_{X \times_\Sigma S}$ -Moduln  $\mathcal{N}$ , die flach über  $S$  liegen. Ein Morphismus in  $\mathbf{F}$  zweier Objekte  $(T, \mathcal{P}) \rightarrow (S, \mathcal{N})$  ist gegeben durch ein Paar von Morphismen  $(f, \varphi)$ , wobei  $f : T \rightarrow S$  ein  $\Sigma$ -Morphismus ist und  $\varphi : (\text{id}_X \times_\Sigma f)^* \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$  ein Isomorphismus von  $\mathcal{O}_{X \times_\Sigma T}$ -Moduln. Der dadurch definierte Funktor  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  liefert wieder eine homogene Faserung in Gruppoide [[Sch70], Satz 2.7]. Sie ist bei der Deformation von Moduln von zentraler Bedeutung.

- iii) Eine nichthomogene Faserung in Kategorien ist etwa gegeben durch  $p : \mathbf{Mod}_\Sigma \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ . Ein Objekt  $a$  über  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  ist ein Paar  $(S, \mathcal{N})$ , wobei  $S$  der gegebene komplexe Raum ist und  $\mathcal{N}$  ein  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Ein Morphismus  $(S, \mathcal{N}) \rightarrow (T, \mathcal{P})$  ist gegeben durch ein Morphismus  $f : S \rightarrow T$  über  $\Sigma$  und einem  $\mathcal{O}_S$ -Modulhomomorphismus  $\varphi : f^* \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ . Die Faserung  $p$  ist nun definiert durch die Zuordnung  $(S, \mathcal{N}) \mapsto S$ . Die Faser  $\mathbf{Mod}_\Sigma(S)$  ist die Kategorie der  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. Daraus folgt bereits, dass  $p$  keine Deformationstheorie ist: die Faser  $\mathbf{Mod}_\Sigma(S)$  beinhaltet im Allgemeinen viele verschiedene Homomorphismen von Moduln, die keine Isomorphismen sind.

Soweit nicht anders angegeben bezeichnet  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  in dieser Arbeit stets eine Deformationstheorie. Wir wollen nun für Objekte  $a \in \mathbf{F}$  den Begriff der *Erweiterung* definieren. Desweiteren werden wir auch die Menge der Automorphismen solcher Erweiterungen studieren. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass diese Mengen eine kanonische Modulstruktur tragen. Vorbereitend wollen wir die Konstruktion der Kategorie  $\mathbf{Ex}_\Sigma(S)$  auf beliebige Objekte  $a \in \mathbf{F}$  übertragen.

**1.1.8 Die Kategorie  $\mathbf{Ex}_\Sigma(a)$**  Sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine Deformationstheorie und  $a$  ein Objekt aus  $\mathbf{F}(S)$ . Eine *Erweiterung von  $a$  durch einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$*  ist ein Paar  $(a \hookrightarrow b, u)$ , wobei  $a \hookrightarrow b$  ein Morphismus über eine Erweiterung  $S \rightarrow T := p(b)$  von  $S$  durch  $\mathcal{N}$  und  $u$  ein Isomorphismus  $u : \mathcal{N} \cong \text{Ker}(\mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_S)$  ist. Für eine Erweiterung  $(a \hookrightarrow b', u')$  durch einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}'$  ist ein Morphismus  $(a \hookrightarrow b, u) \rightarrow (a \hookrightarrow b', u')$  gegeben durch einen Morphismus  $\beta : b \rightarrow b'$ , der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \parallel & & \downarrow \beta \\ a & \longrightarrow & b' \end{array}$$

Die Erweiterungen von  $a$  durch einen kohärenten Modul zusammen mit den Morphismen von Erweiterungen liefern wieder eine Kategorie, welche mit  $\mathbf{Ex}_\Sigma(a)$  bezeichnet wird. So wie in  $\mathbf{Ex}_\Sigma(S)$  gibt es auch in dieser Kategorie *triviale* Erweiterungen. Dazu betrachten wir zunächst das folgende kommutative Diagramm von Kofaserungen [vgl. [Fle81a], Abschnitt 2]:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} := \mathbf{Ex}_\Sigma(a)^{opp} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{G} := \mathbf{Ex}_\Sigma(S)^{opp} \\ & \searrow \wr & \swarrow \alpha \\ & \mathbf{Coh}(S) & \end{array}$$

Offensichtlich sind  $\mathbf{H}(0) = \{a\}$  und  $\mathbf{G}(0) = \{S\}$  triviale Kategorien, das heißt, sie bestehen nur aus einem Objekt und haben die Identität als einzigen Morphismus. Für einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  induziert die kanonische Injektion  $i : 0 \hookrightarrow \mathcal{N}$  direkte Bildfunktoren  $i_* : \mathbf{H}(0) \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{N})$  und  $i_* : \mathbf{G}(0) \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{N})$ . Setzen wir  $a[\mathcal{N}] := i_*(a)$  und  $S[\mathcal{N}] := i_*(S)$ , so ist  $S[\mathcal{N}]$  genau die in Definition 1.1.3 beschriebene *triviale Erweiterung* und  $a[\mathcal{N}]$  eine Erweiterung von  $a$  über  $S[\mathcal{N}]$ . Ein Objekt  $b \in \mathbf{Ex}_\Sigma(a)$  heißt nun *trivial*, falls  $b$  isomorph ist zu  $a[\mathcal{N}]$ .

In der Deformationstheorie sind die folgenden Mengen von zentraler Bedeutung:

**1.1.9 Die Erweiterungs- und Automorphismenmoduln** Sei  $a \in \mathbf{F}(S)$  ein Objekt über  $S$  und  $\mathcal{N}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Die Menge  $\text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N})$  der Erweiterungen von  $a$  durch  $\mathcal{N}$  besteht aus den Isomorphieklassen von Paaren  $(a \hookrightarrow b, u)$ , wobei  $b$  eine Erweiterung von  $a$  durch  $\mathcal{N}$  ist und  $u : \mathcal{N} \cong \ker(\mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S)$  ein Isomorphismus. Dabei sind zwei Paare  $(a \hookrightarrow b, u)$  und  $(a \hookrightarrow b', u')$  isomorph, wenn es einen Isomorphismus  $\beta : b \rightarrow b'$  gibt, der mit  $a \hookrightarrow b$  und  $a \hookrightarrow b'$  verträglich ist und  $p(\beta) : T := p(b) \rightarrow T' := p(b')$  ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{u'} & \mathcal{O}_{T'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow p(\beta)^* & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{u} & \mathcal{O}_T & \longrightarrow & \mathcal{O}_S \longrightarrow 0 \end{array}$$

induziert. Mit  $\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N})$  wird die Menge der in diesem Sinne auftretenden Automorphismen des Paares  $(a \hookrightarrow a[\mathcal{N}], i_\mathcal{N})$  bezeichnet, wobei  $i_\mathcal{N} : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{O}_S[\mathcal{N}]$  die kanonische Injektion ist. Neben diesen Mengen der Erweiterungen und Automorphismen von  $a$  betrachtet man in der Deformationstheorie auch die folgenden *infinitesimalen* Erweiterungen und Automorphismen von  $a$ : ein Element in  $\text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  ist gegeben durch eine Isomorphieklassse von Paaren  $(a \hookrightarrow b, i_\mathcal{N})$  mit  $p(b) = S[\mathcal{N}]$ . In diesem Fall sind zwei Paare  $(a \hookrightarrow b, i_\mathcal{N})$  und  $(a \hookrightarrow b', i_\mathcal{N})$  isomorph, wenn es einen mit  $a \hookrightarrow b$  und  $a \hookrightarrow b'$  verträglichen Isomorphismus  $\beta : b \rightarrow b'$  gibt mit  $p(\beta) = \text{id}_{S[\mathcal{N}]}$ . Wir nennen  $\text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  Menge der *infinitesimalen Deformationen* von  $a$ . Mit  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  wollen wir schließlich die Menge der über  $\text{id}_{S[\mathcal{N}]}$  liegenden Automorphismen des Paares  $(a \hookrightarrow a[\mathcal{N}], i_\mathcal{N})$  bezeichnen.

**1.1.10 Bemerkung:** Es sei angemerkt, dass die in 1.1.9 eingeführten Mengen von Automorphismen und Erweiterungen sämtlich funktoriell in  $\mathcal{N}$  und mit endlichen direkten Produkten kohärenter Moduln verträglich sind. Sie tragen daher eine natürliche  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -Modulstruktur [vgl. [Fle81a], Abschnitt 2 und [BF03], Abschnitt 6, Satz 6.4].

Die Funktorialität der in 1.1.9 konstruierten Ex- und Aut-Moduln lässt sich explizit beschreiben: ist  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$  ein  $\mathcal{O}_S$ -Modul-Homomorphismus, so induziert dieser  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} f_* : \text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N}) &\rightarrow \text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N}') \text{ via } [S'] \mapsto [f_* S'] \\ \text{und } f_* : \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) &\rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}') \text{ vermöge } [a'] \mapsto [f_* a' := a' \times f_* S'] \end{aligned}$$

Die Erweiterung  $f_* S'$  geht dabei wie folgt aus  $S'$  hervor: ist  $[S'] \in \text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N})$  gegeben durch die exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{O}_{S'} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$ , so setze  $\mathcal{O}_{f_* S'} := (\mathcal{O}_{S'} \oplus \mathcal{N}')/\mathcal{N}$ . Man sieht leicht, dass  $f_* S'$  die zur exakten Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{O}_{f_* S'} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow 0$  gehörige Erweiterung ist, also eine Erweiterung von  $S$  durch  $\mathcal{N}'$ .

Per Konstruktion ist ferner  $f_*(S[\mathcal{N}]) \cong S[\mathcal{N}']$ ; somit induziert  $f$  Abbildungen  $\text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N}')$  und  $\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}')$  vermöge  $[\varphi] \mapsto [f_*(\varphi)]$ . Falls  $[a'] \in \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  eine infinitesimale Deformation von  $a$  ist, folgt aus der Definition von  $f_* S'$  und  $f_* a'$ , dass auch  $[f_* a'] \in \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}')$  eine infinitesimale Deformation ist. Daher erhält man genauso für die Funktoren

$\text{Ex}_\Sigma(a/S, -)$  und  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, -)$   $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -lineare Abbildungen.

Wegen [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 4, Teil A, Lemma 4.1 und Lemma 4.2] sind die Funktoren  $\text{Ex}_\Sigma(a, -)$  und  $\text{Ex}_\Sigma(a/S, -)$  auf der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln halbexakt und  $\text{Aut}_\Sigma(a, -)$  und  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, -)$  auf  $\mathbf{Coh}(S)$  sogar linksexakt. Ist  $0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln, so kann man einen Verbindungshomomorphismus  $\delta : \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}'') \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}')$  wie folgt definieren: zunächst beobachtet man, dass die Surjektion  $q : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}''$  eine Bijektion

$$\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}'') \rightarrow \text{Mor}_{\mathbf{Ex}_\Sigma(a)}(a[\mathcal{N}], a[\mathcal{N}''']), \quad \beta \mapsto \tilde{\beta} := \beta \circ a[q]$$

induziert. Daher gibt es zu einem  $\beta \in \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}'')$  stets ein *kartesisches* Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \alpha' & \longrightarrow & a[\mathcal{N}] \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{\beta} \\ a & \xrightarrow{\text{can}} & a[\mathcal{N}'''] \end{array}$$

Man beachte dabei, dass in  $\mathbf{Ex}_\Sigma(a)$  Faserprodukte existieren, da  $\mathbf{Ex}_\Sigma(a) \rightarrow \mathbf{Coh}(S)$  eine homogene Kofaserung in Gruppoide ist [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 4, Teil A]. Der Verbindungshomomorphismus  $\delta$  ist nun definiert durch  $\delta(\beta) := [\alpha'] \in \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}')$ . Man prüft nach, dass diese Konstruktion mit *infinitesimalen* Deformationen und Automorphismen verträglich ist und somit ebenfalls einen Verbindungshomomorphismus

$$\delta : \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}'') \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}')$$

liefert. Zusammenfassend gilt:

**1.1.11 Theorem:** *Ist  $0 \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Moduln, so sind auch die folgenden  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -Modulsequenzen exakt:*

$$\begin{aligned} i) \quad 0 \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}') &\rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}'') \\ &\xrightarrow{\delta} \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}') \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad 0 \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}') &\rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}'') \\ &\xrightarrow{\delta} \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}') \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}'') \end{aligned}$$

Beweis: [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 4, Teil A, Satz 4.3 und [Fle81a], Abschnitt 2].  $\square$

Wir wollen eine zweite wichtige exakte Sequenz zwischen den Aut- und Ex-Moduln herleiten. Im folgenden sei  $\mathcal{N}$  ein festgewählter kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Die kanonischen Zuordnungen  $[a'] \mapsto [a']$  und  $[b] \mapsto [p(b)]$  induzieren lineare Abbildungen

$$\text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}).$$

und

$$\mathrm{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N}).$$

Ebenso erhält man eine Sequenz von Homomorphismen

$$\mathrm{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N})$$

durch die Zuordnungen  $[\beta] \mapsto [\beta]$  und  $[\beta'] \mapsto [p(\beta')]$ . Diese Sequenz sowie die entsprechende Sequenz der Ex-Moduln sind sogar exakt. Ferner lässt sich ein Verbindungshomomorphismus  $\partial_{KS} : \mathrm{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  wie folgt konstruieren: wegen Bemerkung 1.1.4i) reicht es, eine Abbildung  $\mathrm{Der}_\Sigma(\mathcal{O}_S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  anzugeben. Ist  $\vartheta : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{N}$  eine  $\Sigma$ -Derivation, so induziert diese einen Retrakt  $1 - \vartheta : S[\mathcal{N}] \rightarrow S$  der kanonischen Inklusion  $S \hookrightarrow S[\mathcal{N}]$ . Da  $p$  eine Deformationstheorie ist, erhalten wir durch den inversen Bildfunktor  $(1 - \vartheta)^* : \mathbf{F}(S) \rightarrow \mathbf{F}(S[\mathcal{N}])$  eine Abbildung auf den Fasern. Das Bild von  $\vartheta$  in  $\mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  ist dann definiert als  $[(1 - \vartheta)^*(a)]$ . Die auf diese Weise konstruierte Abbildung  $\partial_{KS}$  heißt *Kodaira-Spencer-Abbildung*. Vermöge dieser Konstruktion setzen sich die oben angegebenen Aut- und Ex-Modulsequenzen zu einer exakten Sequenz zusammen:

**1.1.12 Theorem:** *Die Kodaira-Spencer Abbildung*

$$\partial_{KS} : \mathrm{Der}_\Sigma(\mathcal{O}_S, \mathcal{N}) \xrightarrow{\partial_{KS}} \mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$$

ist funktoriell in  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$ . Ferner ist

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Der}_\Sigma(\mathcal{O}_S, \mathcal{N}) \\ \xrightarrow{\partial_{KS}} \mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{N}) \end{aligned}$$

eine exakte Sequenz von  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -Moduln, die natürlich ist in  $\mathcal{N}$ . Die Sequenz heißt Kodaira-Spencer-Sequenz.

Beweis: Ein Beweis der Aussage ergibt sich aus [[BF03], Abschnitt 6, Satz 6.4] und [[Fle81a], Abschnitt 2, Lemma 2.2].  $\square$

In begrenztem Maße sind die Aut- und Ex-Moduln auch bezüglich der ersten Komponente funktoriell.

**1.1.13 Satz:** *Sei  $\tilde{f} : a \rightarrow b$  ein Morphismus über einer endlichen Abbildung komplexer Räume  $f : S \rightarrow T$  und  $\tilde{f}_* : \mathbf{Ex}_\Sigma(a) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Sigma(b)$  der durch  $\tilde{f}_*(a') := b \amalg_a a'$  definierte Funktor. Dann gilt für alle  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$ :*

i)  $\tilde{f}_*$  induziert  $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ -lineare Abbildungen

$$\tilde{f}_* : \mathrm{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Sigma(b, f_*\mathcal{N}) \text{ und } \tilde{f}_* : \mathrm{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(b, f_*\mathcal{N}),$$

welche funktoriell in  $\mathcal{N}$  sind.

ii) Für die infinitesimalen Automorphismen und Deformationen induziert  $\tilde{f}$  Isomorphismen

$$\mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Ex}_\Sigma(b/T, f_*\mathcal{N}) \text{ und } \mathrm{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Aut}_\Sigma(b/T, f_*\mathcal{N})$$

Die Abbildungen sind mit den exakten Sequenzen aus 1.1.11 und der Kodaira-Spencer-Sequenz 1.1.12 verträglich. Ferner ist die Konstruktion der Abbildungen funktoriell, das heißt ist  $\tilde{g} : b \rightarrow b'$  ein weiterer Morphismus über einer endlichen Abbildung komplexer Räume  $T \rightarrow T'$ , so gilt  $(\tilde{g} \circ \tilde{f})_* = \tilde{g}_* \circ \tilde{f}_*$ .

Beweis: Aus der Definition des Funktors  $\tilde{f}_*$  folgt unmittelbar, dass eine Erweiterung  $a'$  von  $a$  durch  $\mathcal{N}$  auf eine Erweiterung von  $b$  durch  $f_*\mathcal{N}$  überführt wird. Die Zuordnung liefert insbesondere analog zu 1.1.9 Homomorphismen

$$\begin{aligned}\tilde{f}_* &: \text{Ex}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(b, f_*\mathcal{N}) \\ \tilde{f}_* &: \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(b, f_*\mathcal{N}) \\ \tilde{f}_* &: \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Ex}_\Sigma(b/T, f_*\mathcal{N}) \\ \tilde{f}_* &: \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(b/T, f_*\mathcal{N}).\end{aligned}$$

Zu den unteren beiden Abbildungen gibt es weiterhin eine inverse Abbildung: ist  $f[\mathcal{N}] : S[\mathcal{N}] \rightarrow T[f_*\mathcal{N}]$  die durch  $f$  induzierte Abbildung, so liefert der Pullback  $f[\mathcal{N}]^*$  die Inverse zu  $\tilde{f}_*$ . Die Verträglichkeit mit exakten Sequenzen und der Kodaira-Spencer-Sequenz sowie die Funktorialität ergibt sich leicht direkt aus der Definition von  $\tilde{f}_*$ .  $\square$

**1.1.14 Bemerkung:** Es sei angemerkt, dass sich die Ex- und Aut-Moduln vergarbizieren lassen:  $\mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathcal{N})$  wird definiert als die zur Prägarbe

$$U \mapsto \text{Ex}_\Sigma(a|_U, \mathcal{N}|_U), \quad U \subset S \text{ offen}$$

assoziierte Garbe. Dabei bezeichnet  $\mathcal{N}|_U$  die übliche Restriktion von Garben. Die Restriktion von  $a$  ist gegeben durch  $a|_U := a \times_S U$ . Dies macht Sinn, da  $p$  eine Deformationstheorie ist und eine offene Teilmenge  $U \subset S$  stets die kanonische induzierte Struktur eines komplexen Raumes trägt. Die Garben  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$ ,  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{N})$  und  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  konstruiert man auf die gleiche Weise aus den entsprechenden Erweiterungs- und Automorphismenmoduln. Sie sind per Konstruktion  $\mathcal{O}_S$ -Moduln und die Aussagen 1.1.11 – 1.1.13 übertragen sich entsprechend.

## 1.2 Lokale und formale Deformationstheorien

Zur Definition des Begriffs der *Deformationstheorie* wurden Erweiterungen komplexer Räume betrachtet. Völlig analog kann man auch *Erweiterungen komplexer Raumkeime* definieren und somit homogene Faserungen der Form  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma, 0)}$  einführen. Entsprechend können Erweiterungs- und Automorphismenmoduln wie unter 1.1.9 definiert werden. Die Sätze des vorigen Abschnitts lassen sich auf den lokalen Fall übertragen. In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Aussagen der lokalen Situation zusammentragen.

Eine homogene Faserungen über der Kategorie der komplexen Raumkeime wird naheliegenderweise als *lokale Deformationstheorie* bezeichnet. Es wird sich zeigen, dass viele relevanten Probleme, die mit Deformationstheorien gelöst werden sollen, lokaler Natur sind. Aus diesem Grund genügt es oftmals, lokale Deformationstheorien zu betrachten.

Lokale Deformationstheorien lassen sich komplettieren. Dies liefert die sogenannten *formalen* Deformationstheorien. Ausgehend von den formalen Deformationstheorien führen wir die Begriffe der *formalen Versalität* und der *Versalität* ein.

Da die Kategorie der komplexen Raumkeime über einem festen Keim  $(\Sigma, 0)$  äquivalent ist zu der Kategorie  $\mathbf{Anal}_\Lambda^{opp}$  mit  $\Lambda = \mathcal{O}_{\Sigma,0}$ , wird je nach Situation sowohl die Faserung  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  als auch die Kofaserung  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Anal}_\Lambda$  über der Kategorie der analytischen  $\mathbb{C}$ -Algebren über der festen analytischen  $\mathbb{C}$ -Algebra  $\Lambda$  betrachtet. Solange keine Verwechslungen möglich sind, werden beide Funktoren mit  $p$  bezeichnet und in beiden Fällen der Begriff *lokale Deformationstheorie* verwendet.

Sei zunächst  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  eine Faserung in Gruppoide. Solang keine Missverständnisse möglich sind, wird der Basispunkt eines Raumkeimes stets mit 0 bezeichnet. Unter einer *Erweiterung* eines gegebenen komplexen Raumkeimes  $(S, 0)$  über  $(\Sigma, 0)$  durch einen endlichen Modul  $N$  versteht man völlig analog zu 1.1.3 einen Raumkeim  $(S', 0)$  derart, dass die zugehörige analytische  $\mathcal{O}_{\Sigma,0}$ -Algebra  $\mathcal{O}_{S',0}$  eine Erweiterung von  $\mathcal{O}_{S,0}$  durch  $N$  ist.

**1.2.1 Definition:** Eine Faserung in Gruppoide  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  heißt *lokale Deformationstheorie*, wenn die Homogenitätsbedingung aus Definition 1.1.5 für Raumkeime  $(S, 0)$ ,  $(S', 0)$  und  $(T, 0)$  erfüllt ist.

In diesem Abschnitt bezeichnet  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  stets eine lokale Deformationstheorie. Ist  $(S, 0)$  ein Raumkeim, so liegt der reduzierte Punkt  $S_0 := (0, \mathbb{C})$  stets in  $(S, 0)$ , das heißt es gibt stets eine Injektion von Raumkeimen  $S_0 \hookrightarrow (S, 0)$ , die auf dem Niveau der zugehörigen analytischen Algebren der kanonischen Surjektion  $\mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \mathcal{O}_{S,0}/\mathfrak{m}_0 = \mathbb{C}$  entspricht. Ein Objekt  $a$  über einem Raumkeim  $(S, 0)$  induziert also  $a_0 := a \times_{(S,0)} S_0$  über dem reduzierten Punkt. In diesem Fall wollen wir  $a$  als *Deformation* von  $a_0$  bezeichnen, das heißt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  ist eine *Deformation von  $a_0$* , wenn das folgende Diagramm kartesisch ist:

$$\begin{array}{ccc} a_0 & \longrightarrow & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_0 & \longrightarrow & (S, 0) \end{array}$$

**1.2.2 Bemerkung:** Wie in 1.1.8 definiert man die Kategorie  $\mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(a)$  der Erweiterungen von  $a$  über  $(S, 0)$ . Für einen endlichen  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modul  $N$  definiert man analog zu 1.1.9 die Mengen

$$\mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(a, N) , \mathbf{Aut}_{(\Sigma,0)}(a, N) , \mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(a/S, N) \text{ und } \mathbf{Aut}_{(\Sigma,0)}(a/S, N).$$

Wie im globalen Fall sind auch diese Konstruktionen funktoriell in  $N$  und mit endlichen direkten Produkten von endlichen Moduln verträglich. Daher tragen die Mengen eine natürliche  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modulstruktur.

**1.2.3 Lokalisieren globaler Deformationstheorien** Bevor wir die lokalen Varianten der Aussagen 1.1.11 – 1.1.13 auflisten, wollen wir zeigen, wie man eine globale Deformationstheorie lokalisieren kann. Sei dazu  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine

globale Deformationstheorie und  $0 \in \Sigma$  ein Punkt. Wir ordnen  $p$  wie folgt eine lokale Deformationstheorie  $p_0 : \mathbf{F}_0 \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  zu: für ein  $(S, s_0) \in \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  setze

$$\mathbf{F}_0(S, s_0) := \varinjlim_{U \ni s_0} \mathbf{F}(U),$$

wobei der Limes über alle Umgebungen  $U \subset S$  von  $s_0$  geht. Für ein (globales) Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  und einen Punkt  $s_0 \in S$  ist der *Keim von  $a$  an der Stelle  $s_0$*  definiert als

$$(a, s_0) := \varinjlim_{U \ni s_0} a \times_S U$$

Die Morphismen in  $\mathbf{F}_0$  werden analog als direkter Limes der Morphismen in  $\mathbf{F}$  definiert. Wenn keine Missverständnisse möglich sind, wird der Keim  $(a, s_0)$  einfach mit  $a$  bezeichnet.  $a_{s_0}$  bezeichnet das über dem Punkt  $s_0$  induzierte Objekt, das heißt es ist  $a_{s_0} := (a, s_0) \times_{(S, s_0)} S_{s_0}$ . Man beachte, dass für ein beliebiges Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  der Keim  $(a, s_0)$  stets eine Deformation von  $a_{s_0}$  ist im Sinne der oben angegebenen Definition.

**1.2.4 Bemerkung:** i) Aus der universellen Eigenschaft des direkten Limes folgt unmittelbar, dass das Lokalisieren einer Deformationstheorie eine Transformation von Funktoren  $p \rightarrow p_0$  definiert. Dies bedeutet, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{loc} & \mathbf{F}_0 \\ p \downarrow & & \downarrow p_0 \\ \mathbf{An}_\Sigma & \xrightarrow{loc} & \mathbf{An}_{(\Sigma,0)} \end{array}$$

Per Konstruktion werden Fasersummen in  $\mathbf{F}$  auf Fasersummen in  $\mathbf{F}_0$  geworfen.

ii) Sei  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$ . Aus der Definition der  $\mathcal{O}_S$ -Moduln in Bemerkung 1.1.14 ergibt sich für die Halme im Punkt  $s \in S$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathcal{N})_s &= \text{Ex}_{(\Sigma,0)}((a, s), \mathcal{N}_s), \\ \mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})_s &= \text{Ex}_{(\Sigma,0)}((a, s)/(S, s), \mathcal{N}_s), \\ \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N})_s &= \text{Aut}_{(\Sigma,0)}((a, s), \mathcal{N}_s), \\ \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})_s &= \text{Aut}_{(\Sigma,0)}((a, s)/(S, s), \mathcal{N}_s). \end{aligned}$$

iii) Aus ii) und Bemerkung 1.1.14 folgt unmittelbar, dass die Aussagen 1.1.11 – 1.1.13 mit den entsprechenden Anpassungen für die Moduln

$$\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a, N), \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a, N), \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a/S, N) \text{ und } \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a/S, N)$$

gelten, wobei  $N$  ein endlicher  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modul ist.

**1.2.5 Formale Deformationstheorien** Wir wollen nun zu einer lokalen Deformationstheorie  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  eine *Komplettierung*  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  konstruieren. Unter Verwendung der Notation  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Anal}_\Lambda$  mit  $\Lambda := \mathcal{O}_{\Sigma,0}$  ist die Komplettierung gegeben durch eine homogene Kofaserung  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$

wie in [[Rim72], Seite 9]. Dabei bezeichnet  $\widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$  die Kategorie der lokalen kompletten  $\Lambda$ -Algebren mit Restekörper  $\mathbb{C}$ .

Wir wollen eine explizite Konstruktion der Kompletzierung angeben. Dazu erinnern wir an die Kategorie  $\widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  der formalen komplexen Raumkeime: Objekte sind gegeben durch  $\bar{S} = (\{0\}, \mathcal{O}_{\bar{S}})$ , wobei  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  eine lokale Noethersche  $\mathcal{O}_{\Sigma,0}$ -Algebra mit Restekörper  $\mathbb{C}$  ist, die bezüglich ihres maximalen Ideals vollständig ist. Für  $\bar{S} \in \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  definieren wir die *n-te infinitesimale Umgebung* von  $\bar{S}$  als  $\bar{S}_n = (\{0\}, \mathcal{O}_{\bar{S}}/\mathfrak{m}_{\bar{S},0}^{n+1})$ . Somit ist  $\bar{S}_n \in \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$ . Die Kompletzierung  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  von  $p$  ist nun wie folgt definiert: für  $\bar{S} \in \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  ist ein Objekt  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  gegeben durch eine Sequenz von Morphismen

$$a_0 \hookrightarrow a_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow a_n \hookrightarrow a_{n+1} \hookrightarrow \dots,$$

in  $\mathbf{F}$ , wobei für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Morphismus  $a_n \hookrightarrow a_{n+1}$  über der Erweiterung  $\bar{S}_n \hookrightarrow \bar{S}_{n+1}$  liegt. In diesem Fall schreiben wir kurz  $\bar{a} = (a_n)$  und nennen  $\bar{a}$  *formale Deformation* von  $a_0$ . Ein Morphismus  $\bar{a} \rightarrow \bar{b} \in \hat{\mathbf{F}}$  über  $\bar{S} \rightarrow \bar{T}$  ist eine Kette von Morphismen  $a_n \rightarrow b_n$  über  $\bar{S}_n \rightarrow \bar{T}_n$ , die mit den Abbildungen  $a_n \hookrightarrow a_{n+1}$  und  $b_n \hookrightarrow b_{n+1}$  verträglich sind. Aus der Konstruktion folgt unmittelbar, dass  $\hat{p}$  eine Faserung in Gruppoide ist. Jede solche Faserung wird als *formale Deformationstheorie* bezeichnet.

**1.2.6 Satz:** Eine formale Deformationstheorie  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  ist stets homogen, das heißt für jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} & \longrightarrow & \bar{a}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{b} & & \bar{b}' \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} \bar{S} & \longrightarrow & \bar{S}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{T} & & \bar{T}' \end{array},$$

in dem  $\bar{S} \rightarrow \bar{S}'$  eine Erweiterung und  $\bar{S} \rightarrow \bar{T}$  eine endliche Abbildung ist, existiert die Fasersumme  $\bar{b}' = \bar{b} \amalg_{\bar{a}} \bar{a}'$ .

Beweis: Sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  die zugehörige lokale Deformationstheorie zu  $\hat{p}$ . Da  $p$  homogen ist, existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Fasersumme  $b'_n := b_n \amalg_{a_n} a'_n$ . Diese liegt über  $T'_n := T_n \amalg_{S_n} S'_n \in \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$ . Wir zeigen nun, dass  $b' := (b'_n)$  die gesuchte Fasersumme über  $\bar{T}' := \bar{T} \amalg_{\bar{S}} \bar{S}' \in \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  ist. Dazu betrachten wir die formale Deformationstheorie  $\hat{p}$  als Kofaserung  $\hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$ . Bezeichnen  $A := \mathcal{O}_{\bar{S}}$ ,  $B := \mathcal{O}_{\bar{T}}$  und  $A' := \mathcal{O}_{\bar{S}'}$ , sowie  $B' := \mathcal{O}_{\bar{T}'}$ , die jeweiligen vollständigen lokalen Ringe, so ist per Definition  $B' = A' \times_A B$  und  $\mathfrak{m}_{B'} = \mathfrak{m}_{A'} \times_A \mathfrak{m}_B$ . Daraus ergibt sich  $\mathfrak{m}_{B'}^{n+1} = \mathfrak{m}_{A'}^{n+1} \times_A \mathfrak{m}_B^{n+1}$  und ferner

$$B'_n = B' / \mathfrak{m}_{B'}^{n+1} \cong A' / \mathfrak{m}_{A'}^{n+1} \times_A B / \mathfrak{m}_B^{n+1} = A'_n \times_A B'_n \cong A'_n \times_{A_n} B'_n$$

Dual liefert diese Rechnung  $\bar{T}'_n \cong \bar{T}_n \amalg_{\bar{S}_n} \bar{S}'_n$ , das heißt  $\bar{b}'$  liegt über  $\bar{T}'$  und man sieht leicht, dass dies eine Fasersumme in  $\hat{\mathbf{F}}$  ist.  $\square$

**1.2.7 Bemerkung:** i) Ist  $\bar{S} \in \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  ein formaler Raumkeim und  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  ein Objekt über  $\bar{S}$ , so können wir analog zu 1.1.8 die Kategorie  $\mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a})$  definieren. Dies liefert ebenfalls eine Kofaserung  $\mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}) \rightarrow$

$\mathbf{Coh}(\bar{S})$ , wie man leicht sieht. Ferner können wir analog zu 1.1.9 für einen endlichen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modul  $\bar{N}$  die Mengen

$$\mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \bar{N}), \mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \bar{N}), \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \bar{N}) \text{ und } \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \bar{N})$$

definieren. Da  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  stets homogen ist, gibt es in  $\mathbf{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a})$  Faserprodukte; insbesondere tragen die oben definierten Erweiterungs- und Automorphismenmengen eine natürliche  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modulstruktur.

- ii) Ist  $(S, 0)$  ein komplexer Raumkeim über einem Basiskeim  $(\Sigma, 0)$  und ist  $\hat{\mathcal{O}}_{S,0}$  die  $\mathfrak{m}_{S,0}$ -adische Kompletzierung von  $\mathcal{O}_{S,0}$ , so heißt  $\hat{S} = (0, \hat{\mathcal{O}}_{S,0})$  *Kompletzierung von  $(S, 0)$* . Die Abbildung  $\mathcal{O}_{S,0} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{S,0}$  induziert eine Abbildung  $\hat{S} \rightarrow (S, 0)$  und für die  $n$ -te infinitesimale Umgebung gibt es einen Morphismus  $\hat{S}_n \rightarrow (S, 0)$  in  $\mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$ . Daher kann man jedem Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  ein formales Objekt  $\hat{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\hat{S})$  zuordnen via  $\hat{a}_n = a \times_{(S,0)} \hat{S}_n$ . Man nennt  $\hat{a}$  *formale Kompletzierung von  $a$* . Diese Zuordnung liefert offenbar einen Funktor  $\hat{\phantom{x}} : \mathbf{F} \rightarrow \hat{\mathbf{F}}$  und ein kommutatives Diagramm von Faserungen

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F} & \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} & \hat{\mathbf{F}} \\ p \downarrow & & \downarrow \hat{p} \\ \mathbf{An}_{(\Sigma,0)} & \xrightarrow{\hat{\phantom{x}}} & \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}. \end{array}$$

In diesem Sinne lässt sich eine lokale Deformationstheorie stets als formale Deformationstheorie auffassen, insbesondere auch die zu einer globalen Deformationstheorie assoziierte lokale Deformationstheorie aus 1.2.3.

- iii) Für ein gegebenes Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  und einen endlichen  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modul  $N$  induziert die Kompletzierungsabbildung aus ii)  $\mathcal{O}_{S,0}$ -lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(a, N) &\rightarrow \mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(\hat{a}, \hat{N}) \\ \mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(a/S, N) &\rightarrow \mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(\hat{a}/\hat{S}, \hat{N}) \\ \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(a, N) &\rightarrow \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\hat{a}, \hat{N}) \text{ und} \\ \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(a/S, N) &\rightarrow \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\hat{a}/\hat{S}, \hat{N}). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind mit exakten Sequenzen von  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Moduln wie in 1.1.11 und der Kodaira-Spencer-Sequenz 1.1.12 verträglich. Es sei angemerkt, dass sich die vorgenannten Aussagen entsprechend auf die Situation einer formalen Deformationstheorie und endlichen  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Moduln übertragen. In 1.2.10 und 1.2.11 werden diese exakten Sequenzen nochmal explizit angegeben.

- iv) Gibt es zu einer formalen Deformation  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  von  $a_0$  ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  über einem Raumkeim  $(S, 0) \in \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  mit  $\bar{a} = \hat{a}$ , so bezeichnet man  $\bar{a}$  auch als *konvergentes Objekt* oder auch *konvergente Deformation* von  $a_0$ .

Im Folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften der Ex- und Aut-Moduln für formale Deformationen zusammengefasst. Es sei  $\Lambda$  eine festgewählte analytische  $\mathbb{C}$ -Algebra und  $\widehat{\mathbf{Anal}}_{\Lambda}$  die Kategorie der analytischen  $\Lambda$ -Algebren mit

Restekörper  $\mathbb{C}$ , welche vollständig sind bezüglich ihres maximalen Ideals. Wir betrachten eine formale Deformationstheorie  $\hat{p} : \hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$ . Da dies eine Kofaserung in Gruppoide ist, werden wir im Folgenden oft auch stillschweigend die Faserung  $\hat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda^{opp}$  betrachten. Es sei  $\bar{a}$  stets ein Objekt über der Algebra  $A \in \widehat{\mathbf{Anal}}_\Lambda$  sowie  $\bar{b}$  ein Objekt über  $B$ . Ein Morphismus  $\bar{f} : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$  liege dabei über dem Algebra-Homomorphismus  $\hat{p}(f) : A \leftarrow B$ . Soweit nicht anders angegeben bezeichnet  $N$  einen endlichen  $A$ -Modul.

Die bereits in 1.2.7i) definierten Erweiterungs- und Automorphismenmoduln von  $\bar{a}$  werden von nun an mit

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N), \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N), \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \text{ und } \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, N)$$

bezeichnet. Das folgende Lemma zeigt, dass sie gewissermassen mit direkten Limiten verträglich sind, falls  $N$  ein Artinscher Modul ist.

**1.2.8 Satz:** *Ist  $N$  ein Artinscher  $A$ -Modul mit  $\mathfrak{m}_A^{n+1}N = 0$ , so sind die folgenden natürlichen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -linearen Abbildungen bijektiv:*

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{l \geq n} \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}_l, N) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N) \\ ii) \quad & \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}_n/A_n, N) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \\ iii) \quad & \lim_{l > n} \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}_l, N) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N) \\ iv) \quad & \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}_n/A_n, N) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \end{aligned}$$

Beweis: Sei zunächst  $[\bar{b}] \in \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N)$  und  $(a \rightarrow b, u)$  ein Repräsentant von  $[\bar{b}]$ . Wir betrachten die dadurch induzierte exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{u} B \rightarrow A \rightarrow 0.$$

Da  $N$  nach Voraussetzung artinsch ist, folgt aus dem Lemma von Artin-Rees  $\mathfrak{m}_B^l \cap u(N) = 0$  für  $l \gg 0$ . Daraus ergeben sich leicht die folgenden kokartesischen Diagramme in  $\mathbf{Anal}_\Lambda$  und  $\mathbf{F}$  für  $m \geq l \gg 0$ :

$$\begin{array}{ccc} A_l & \longleftarrow & A_m \\ \uparrow & & \uparrow \\ B_l & \longleftarrow & B_m \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} a_l & \longrightarrow & a_m \\ \downarrow & & \downarrow \\ b_l & \longrightarrow & b_m \end{array}$$

Dabei beachte man, dass  $\hat{p}$  eine Kofaserung in Gruppoide ist. Aus den Diagrammen folgt daher  $B_m \cong B_l \times_{A_l} A_m$  und  $\bar{b}_m \cong \bar{b}_l \amalg_{\bar{a}_l} \bar{a}_m$ ; dies zeigt, dass  $\bar{b}$  eindeutig durch  $\bar{b}_l$  bestimmt ist. Daraus folgt die Bijektivität der Abbildung in i). Ist  $[\bar{b}]$  ein Element aus  $\mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, N)$ , so ist die zugehörige analytische  $\mathbb{C}$ -Algebra  $B$  isomorph zu  $A \times N$ . Daraus ergibt sich unmittelbar  $\mathfrak{m}_B^n \cap u(N) = 0$  und die Behauptung ii) folgt mit dem gleichen Argument wie zuvor.

Um die Behauptung für die Aut-Funktor zu zeigen, betrachten wir einen Isomorphismus  $\beta : \bar{a}[N] \rightarrow \bar{a}[N]$ , der mit den kanonischen Abbildungen  $\bar{a} \hookrightarrow \bar{a}[N]$  verträglich ist. Wegen dem ersten Teil des Beweises reicht es, das Objekt  $(\bar{a}[N])_l$  zu betrachten für genügend großes  $l$ . Für  $l > n$  ist aber

$$A[N]_l \cong A_l \times N_{l-1} \cong A_l \times N = A_l[N].$$

Dies folgt mit einer leichten Rechnung aus der Definition der Multiplikation auf  $A[N] = A \times N$  und aus der Voraussetzung an  $N$ . Da  $\bar{a}[N]$  eindeutig durch  $a_l[N]$  bestimmt ist für ein  $l \gg 0$ , ist  $\beta$  eindeutig durch  $\beta_l$  bestimmt. Dies zeigt iii). Mit den gleichen Argumenten zeigt man, dass auch die unter iv) gegebene Abbildung bijektiv ist.  $\square$

Das folgende Lemma gibt eine Charakterisierung des Moduls  $\text{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N)$  durch Morphismen in  $\hat{\mathbf{F}}$ . Mit  $\text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a})$  wollen wir dabei die Menge aller  $\bar{a}$ -Morphismen in  $\hat{\mathbf{F}}$  bezeichnen, das heißt für jedes  $f \in \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a})$  ist  $f \circ j = \text{id}_{\bar{a}}$ , wobei  $j : \bar{a} \hookrightarrow \bar{a}[N]$  die kanonische Abbildung ist.

**1.2.9 Lemma:** Für  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(A)$  und  $N \in \mathbf{Coh}(A)$  gibt es eine kanonische Bijektion

$$\text{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N) \cong \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a})$$

Beweis: Schritt 1: Wir bemerken zunächst, dass es eine kanonische Bijektion

$$\text{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N) \cong \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a}[N])$$

gibt. Per Definition ist jeder Automorphismus  $\beta \in \text{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N)$  ein  $\bar{a}$ -Morphismus von  $\bar{a}[N]$  auf sich selbst. Die kanonische Zuordnung  $\beta \mapsto \beta$  ist also injektiv. Sie ist sogar bijektiv: ist nämlich  $f : \bar{a}[N] \rightarrow \bar{a}[N]$  ein  $\bar{a}$ -Morphismus, so liegt dieser über  $A[N] \leftarrow A[N]$ , i.e. wir erhalten ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \bar{a}[N] & \\ \nearrow & \downarrow f & \nwarrow \\ \bar{a} & & \bar{a}[N] \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} & A[N] & \\ \nearrow & \downarrow & \nwarrow \\ A & & A[N] \end{array}$$

Da aber  $A[N] \rightarrow A[N]$  auch ein Morphismus von trivialen Erweiterungen ist, folgt mit dem Fünferlemma leicht, dass dies ein Isomorphismus ist. Da  $\hat{p}$  eine Faserung in Gruppoide ist, ist auch  $f$  ein Isomorphismus.

Schritt 2: Wir konstruieren einen kanonischen Morphismus

$$\psi : \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a}[N]) \rightarrow \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a}).$$

Dazu betrachten die kanonische Injektion  $i : A \hookrightarrow A[N], a \mapsto (a, 0)$ . Da jeder Morphismus in  $\hat{\mathbf{F}}$  kartesisch ist, gibt es ein  $\pi : \bar{a}[N] \rightarrow \bar{a}$  und ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{a}[N] & \xrightarrow{\pi} & \bar{a} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[N] & \xleftarrow{i} & A \end{array}$$

Wir fixieren einen solchen kartesischen Morphismus  $\pi$  und setzen  $\psi(f) := \pi \circ f$ . Dies definiert offensichtlich einen kanonischen Morphismus wie behauptet.

**Schritt 3:** Der in Schritt 2 konstruierte Morphismus  $\psi$  ist bijektiv. Dazu reicht es zu zeigen, dass ein Element  $g \in \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a})$  *genau* ein Urbild unter  $\psi$  besitzt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \bar{a}[N] & \\ & \downarrow \pi & \\ \bar{a}[N] & \xrightarrow{g} \bar{a} & \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} & A[N] & \\ & \uparrow & \\ A[N] & \longleftarrow A & \end{array}$$

$g$  induziert einen Algebramorphismus  $g^* = \text{id}_A \times \delta : A \rightarrow A[N] = A \times N$ . Wir definieren einen Homomorphismus  $\beta : A[N] \rightarrow A[N]$  vermöge  $\beta(a, n) := (a, \delta(a) + n)$ . Per Konstruktion macht diese Abbildung das rechte Diagramm kommutativ; ferner ist  $\beta$  mit der kanonischen Projektionsabbildung  $A[N] \rightarrow A$  verträglich. Wegen der Kartesizität gibt es dann genau einen Morphismus  $\tilde{\beta} : \bar{a}[N] \rightarrow \bar{a}[N]$ , der über  $\beta$  liegt und das linke Diagramm kommutativ ergänzt. Nun rechnet man sofort nach, dass  $\tilde{\beta}$  ein Urbild von  $g$  unter  $\psi$  ist.  $\square$

Als Nächstes geben wir kurz an, wie sich die Aussagen 1.1.11 – 1.1.13 auf die Situation der formalen Deformationstheorien übertragen. Die Beweise verlaufen analog zu denen der globalen Aussagen und werden daher fortgelassen.

**1.2.10 Theorem:** *Für jede exakte Sequenz endlicher  $A$ -Moduln  $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$  gibt es exakte Sequenzen von  $A$ -Moduln der Form*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}, N') \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}, N) \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}, N'') \\ \rightarrow \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}, N') \rightarrow \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}, N) \rightarrow \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}, N''), \end{aligned}$$

*analog für  $\text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}/A, -)$  und  $\text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}/A, -)$ .*  $\square$

Völlig analog überträgt sich die Kodaira-Spencer-Sequenz auf formale Deformationstheorien.

**1.2.11 Theorem:** *Ist  $N$  ein endlicher  $A$ -Modul, so gibt es eine in  $N$  natürliche Abbildung  $d_{KS} : \text{Der}_{\Lambda}(A, N) \xrightarrow{d_{KS}} \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}/A, N)$ , so dass die Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}/A, N) \rightarrow \text{Aut}_{\Lambda}(\bar{a}, N) \rightarrow \text{Der}_{\Lambda}(A, N) \\ \xrightarrow{d_{KS}} \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}/A, N) \rightarrow \text{Ex}_{\Lambda}(\bar{a}, N) \rightarrow \text{Ex}_{\Lambda}(A, N) \end{aligned}$$

*exakt und natürlich in  $N$  ist.*  $\square$

**1.2.12 Bemerkung:** Ist  $a_0$  ein Objekt über der Artinschen  $\Lambda$ -Algebra  $A_0 = A/\mathfrak{m}_A \cong \mathbb{C}$ , so ist stets  $\text{Der}_{\Lambda}(A_0, \mathbb{C}) \cong \text{Der}_{\Lambda}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$  und  $\text{Ex}_{\Lambda}(A_0, \mathbb{C}) = 0$ . Aus der Kodaira-Spencer-Sequenz für  $\bar{a} = a_0$  folgt nun unmittelbar  $\text{Ex}_{\Lambda}(a_0/A_0, \mathbb{C}) \cong \text{Ex}_{\Lambda}(a_0, \mathbb{C})$  und  $\text{Aut}_{\Lambda}(a_0/A_0, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}_{\Lambda}(a_0, \mathbb{C})$ .

Auch die Verträglichkeit der Ex- und Aut-Moduln mit endlichen Abbildungen findet sich in der formalen Situation wieder. Genau wie 1.1.13 zeigt man:

**1.2.13 Satz:** *Sei  $f : A \leftarrow B$  ein Morphismus in  $\widehat{\mathbf{Anal}}_{\Lambda}$  derart, dass  $A$  ein endlicher  $B$ -Modul ist. Ferner sei  $\tilde{f} : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$  ein Morphismus über  $f$  und  $\tilde{f}_* :$*

$\mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b})$  der durch  $\bar{a}' \mapsto \bar{b}\Pi_{\bar{a}}\bar{a}'$  definierte Funktor. Für jeden endlichen  $A$ -Modul  $N$  induziert  $\tilde{f}_*$   $B$ -lineare Abbildungen

$$\mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b}, N) \text{ und } \mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N) \rightarrow \mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{b}, N).$$

sowie  $B$ -Isomorphismen

$$\mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \cong \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b}/B, N) \text{ und } \mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \cong \mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{b}/B, N).$$

Die Abbildungen sind mit exakten Sequenzen in  $N$  und der Kodaira-Spencer-Sequenz verträglich.  $\square$

Die folgende Variante von 1.2.13 zeigt, dass die Aussagen für beliebige Morphismen  $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$  über  $A \leftarrow B$  gelten, falls  $N$  ein Artinscher Modul ist.

**1.2.14 Satz:** Ist  $N$  ein Artinscher  $A$ -Modul mit  $\mathfrak{m}_A^{n+1}N = 0$ , so gelten die Aussagen von Satz 1.2.13 für jeden Morphismus  $\tilde{f} : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$  in  $\widehat{\mathbf{F}}$ . Die Abbildungen sind mit der Kodaira-Spencer-Sequenz und mit exakten Sequenzen Artinscher Moduln verträglich.

Beweis: Zuerst sei angemerkt, dass  $N$  für  $l \geq n$  ein  $A_l$ -Modul ist, wobei  $A_l := A/\mathfrak{m}_A^{l+1}$ . Ferner ist auch  $\mathfrak{m}_B^{n+1}N = 0$  und somit  $N$  ein  $B_l$ -Modul für  $l \geq n$ . Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_n & \xrightarrow{f_n} & A_n \end{array}$$

Nun zeigen wir: ist  $N$  ein  $A_n$ -Modul, so gibt es eine  $B$ -lineare Abbildung  $\eta : \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b}, N)$ . Dabei fassen wir  $N$  auf der linken Seite als  $A$ -Modul und auf der rechten Seite als  $B$ -Modul auf. Da die senkrechten Pfeile im obigen Diagramm surjektiv sind, ergeben sich  $B$ -lineare Abbildungen

$$\mathbf{Ex}_\Lambda(b_n, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b}, N) \text{ und } \mathbf{Ex}_\Lambda(a_n, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N)$$

Nun ist aber  $A_n$  eine Artinsche  $\mathbb{C}$ -Algebra und trägt somit die Struktur eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraums. Da auch  $B_n$  eine Artinsche  $\mathbb{C}$ -Algebra ist, ist  $A_n$  endlich als  $B_n$ -Modul. Daher gibt es eine  $B_n$ -lineare Abbildung

$$\mathbf{Ex}_\Lambda(a_n, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(b_n, N).$$

Völlig analog konstruiert man für  $l \geq n$  Abbildungen

$$\mathbf{Ex}_\Lambda(a_l, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(b_l, N).$$

Bilden wir nun den direkten Limes dieser Abbildungen, so ergibt sich daraus wegen 1.2.8 eine Abbildung  $\eta : \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{a}, N) \rightarrow \mathbf{Ex}_\Lambda(\bar{b}, N)$ . Aus der Konstruktion folgt unmittelbar, dass diese Abbildung  $B$ -linear ist. Genauso zeigt man, dass es  $B$ -Homomorphismen

$$\mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{a}, N) \rightarrow \mathbf{Aut}_\Lambda(\bar{b}, N),$$

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{b}/B, N)$$

und

$$\mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, N) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{b}/B, N)$$

gibt. Aus der Konstruktion der Abbildungen ergibt sich mit 1.2.13 leicht, dass die unteren beiden Abbildungen wieder Isomorphismen sind.  $\square$

Wir wollen die Verträglichkeit mit Abbildungen für den durch eine Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$  gegebenen Morphismus  $a_0 \hookrightarrow \bar{a}$  genauer betrachten. So können die Funktoren  $\mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, -)$  und  $\mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, -)$  als Fortsetzung von  $\mathrm{Ex}_\Lambda(a_0, -)$  und  $\mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, -)$  auf  $A$  aufgefasst werden.

**1.2.15 Satz:** *Ist  $\bar{a}$  über  $A$  eine Deformation von  $a_0$ , so gibt es für jeden endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$   $A$ -lineare Abbildungen*

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(a_0, V) \rightarrow \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}, V), \quad \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, V) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}, V)$$

und Isomorphismen von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(a_0, V) \cong \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, V) \text{ und } \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, V) \cong \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, V).$$

Beweis: Es bezeichne  $A_0 := A/\mathfrak{m}_A = \mathbb{C}$  die 0-te infinitesimale Umgebung von  $A$ . Da  $A \rightarrow A_0$  surjektiv ist, liegt der Morphismus  $a_0 \rightarrow \bar{a}$  insbesondere über einer endlichen Abbildung. Die Existenz der ersten beiden  $A$ -Homomorphismen folgt somit aus 1.2.13. Die Injektivität von  $\psi : \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, V) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}, V)$  folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0/A_0, V) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, V) \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, V) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}, V) \end{array},$$

in dem die waagerechten Pfeile die Abbildungen aus den Kodaira-Spencer-Sequenzen für  $a_0$  und  $\bar{a}$  sind. Aus 1.2.13 folgt ferner, dass

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(a_0/A_0, V) \cong \mathrm{Ex}_\Lambda(\bar{a}/A, V) \text{ und } \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0/A_0, V) \cong \mathrm{Aut}_\Lambda(\bar{a}/A, V)$$

$A$ -Isomorphismen sind. Da aber  $A$  insbesondere eine analytische  $\mathbb{C}$ -Algebra ist, folgt leicht, dass dies auch Isomorphismen von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen sind. Es bleibt zu zeigen, dass für jeden endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$

$$\mathrm{Ex}_\Lambda(a_0/A_0, V) \cong \mathrm{Ex}_\Lambda(a_0, V) \text{ und } \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0/A_0, V) \cong \mathrm{Aut}_\Lambda(a_0, V)$$

gilt. Wegen Bemerkung 1.2.12 gilt dies zunächst für  $V = \mathbb{C}$ . Dass die Moduln  $\mathrm{Ex}_\Lambda(A_0, V)$  und  $\mathrm{Der}_\Lambda(A_0, V)$  für jeden endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  verschwinden, ergibt sich aus dem folgenden Verschwindungsargument.

**1.2.16 Lemma:** *Sei  $A$  ein Noetherscher lokaler Ring mit Restekörper  $k$  und  $F : \mathbf{Mod}(A) \rightarrow \mathbf{Mod}(A)$  ein halbexakter Funktor, welcher endliche Moduln in endliche Moduln überführt und mit direkten Summen verträglich ist. Ferner sei für zwei  $A$ -Moduln  $M, N$  die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(F(M), F(N))$$

*$A$ -linear. Dann gilt:  $F(N)$  verschwindet genau dann für jeden endlichen  $A$ -Modul  $N$ , wenn  $F(k) = 0$ .*

Beweis: Da  $k \cong A/\mathfrak{m}_A$  der Restekörper von  $A$  ist, folgt sofort die eine Richtung. Um zu beweisen, dass die Bedingung  $F(k) = 0$  hinreichend ist für das Verschwinden von  $F$  auf  $\mathbf{Coh}(A)$ , betrachten wir zunächst einen Modul  $N$  der Länge 1, das heißt  $N \cong k$ . Nach Voraussetzung ist dann  $F(N) \cong F(k) = 0$ . Sei nun  $\lg(N) > 1$  und  $N_0 \subset N$  ein Untermodul mit  $\lg(N_0) = 1$ . Dann ist mit  $\bar{Q} := N/N_0$

$$0 \rightarrow N_0 \rightarrow N \rightarrow \bar{Q} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von  $A$ -Moduln mit  $\lg(\bar{Q}) < \lg(N)$ . Da  $F$  halbexakt ist, folgt  $F(N) = 0$  per Induktion nach  $\lg N$ . Sei schließlich  $N$  ein beliebiger endlicher  $A$ -Modul. Die Moduln  $N_n := N/\mathfrak{m}^{n+1}N$  sind sämtlich Moduln endlicher Länge und nach [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 4, Teil B, Korollar 4.5] ist die Abbildung

$$\widehat{F(N)} \hookrightarrow \varprojlim_n F(N_n)$$

injektiv. Dabei bezeichnet  $\widehat{\phantom{x}}$  die  $\mathfrak{m}_A$ -adische Kompletterung. Aus dem bereits Gezeigten folgt, dass  $F(N_n)$  für alle  $n$  verschwindet; wegen der Injektivität der obigen Abbildung verschwindet daher auch  $\widehat{F(N)}$ . Nach Voraussetzung ist aber  $A$  lokal Noethersch und somit  $F(N) \hookrightarrow \widehat{F(N)}$  stets injektiv. Dann verschwindet notwendig auch  $F(N)$ .  $\square$

### 1.3 Versalität und Semiuniversalität

In diesem Abschnitt werden die Begriffe der *versellen* und *semiuniversellen Deformation* eingeführt.  $S_0$  bezeichnet stets den reduzierten Punkt  $\{0\}$ , welcher als komplexer Raum mit der Strukturgarbe  $\mathbb{C}$  versehen ist. Da Versalität eine lokale Eigenschaft ist, betrachten wir in diesem Abschnitt zunächst eine lokale Deformationstheorie  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma, 0)}$ .

**1.3.1 Definition:** Ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  heißt *versell*, wenn die folgende Liftungseigenschaft erfüllt ist: ist  $b \rightarrow b'$  ein Morphismus in  $\mathbf{F}$  über einer abgeschlossenen Einbettung  $p(b) := (T, 0) \hookrightarrow (T', 0) =: p(b')$ , so lässt sich jeder Morphismus  $b \rightarrow a$  liften zu einem Morphismus  $b' \rightarrow a$ . In der Sprache der Diagramme bedeutet das, dass jedes Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\quad} & b' \\ & \searrow & \swarrow \text{gestrichelt} \\ & a & \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} (T, 0) & \xrightarrow{\quad} & (T', 0) \\ & \searrow & \\ & (S, 0) & \end{array},$$

in dem  $(T, 0) \hookrightarrow (T', 0)$  eine abgeschlossene Einbettung von Raumkeimen ist, sich wie durch den gestrichelten Pfeil angedeutet kommutativ ergänzen lässt.

Unter einer *kleinen Erweiterung* von komplexen Raumkeimen  $(T, 0) \hookrightarrow (T', 0)$  wollen wir eine Erweiterung durch einen  $\mathcal{O}_{T, 0}$ -Modul  $N$  der Länge 1 verstehen, also eine Erweiterung von  $(T, 0)$  durch  $N \cong \mathbb{C}$ . Eine Erweiterung  $a \hookrightarrow b$  in  $\mathbf{F}$  heiße *klein*, wenn die Erweiterung der komplexen Raumkeime  $p(a) \hookrightarrow p(b)$  klein ist. Analog definiert man *kleine Erweiterungen* für Objekte in  $\widehat{\mathbf{F}}$  über formale Raumkeime. Einen Raumkeim der Form  $(0, \mathcal{O}_{S, 0}/\mathfrak{m}_{S, 0}^{n+1})$  wollen wir im Folgenden als *fetten Punkt* bezeichnen. Mit diesen Begriffen können wir nun *formale Versalität* einführen:

**1.3.2 Definition:** Ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  heißt *formal versell*, wenn die Liftungseigenschaft in 1.3.1 lediglich für Morphismen  $b \rightarrow b'$  über einer kleinen Erweiterung fetter Punkte erfüllt ist. Analog nennen wir ein Objekt  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  *formal versell*, wenn die Liftungseigenschaft 1.3.1 für  $\bar{a}$  und Morphismen  $\bar{b} \rightarrow \bar{b}'$  über einer kleinen Erweiterung fetter Punkte erfüllt ist.

Die Definitionen gelten insbesondere für eine Deformation  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  eines Objektes  $a_0 \in \mathbf{F}(0)$ . Wir werden daher im Folgenden von versellen und formal versellen Deformationen  $a$  eines gegebenen Objekts  $a_0$  sprechen. Ebenso macht es Sinn, von einer formal versellen Deformation  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  von  $a_0$  zu sprechen. Für solche formal versellen Deformationen ergibt sich die folgende stärkere Liftungseigenschaft:

**1.3.3 Lemma:** Sei  $\bar{a} \in \hat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  eine formal verselle Deformation von  $a_0$ . Dann ist die Liftungseigenschaft 1.3.1 erfüllt für jeden Morphismus  $\bar{b} \rightarrow \bar{b}'$  in  $\hat{\mathbf{F}}$ , der über einer abgeschlossenen Einbettung  $\bar{T} \hookrightarrow \bar{T}'$  liegt.

Beweis: Ist  $\bar{T} \hookrightarrow \bar{T}'$  eine Erweiterung fetter Punkte, so ist  $K := \ker(\mathcal{O}_{\bar{T}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{T}})$  ein  $\mathcal{O}_{\bar{T}'}$ -Modul endlicher Länge und die Behauptung folgt leicht per Induktion über die Länge von  $K$ . Im allgemeinen Fall konstruieren wir die Liftung  $\bar{f}' : \bar{b}' \rightarrow \bar{a}$  eines gegebenen Morphismus  $\bar{f} : \bar{b} \rightarrow \bar{a}$  wie folgt: für ein  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir die induzierten Abbildungen

$$\bar{f}_n : \bar{b}_n \rightarrow \bar{a} \text{ und } \bar{b}_n \rightarrow \bar{b}'_n.$$

Für  $n = 0$  ist  $\bar{b}_0 = \bar{b}'_0$ ; es gibt also eine triviale Liftung für  $n = 0$ . Für  $n \geq 1$  nehmen wir an, dass es für  $i = 0, \dots, n-1$  Liftungen  $\bar{f}'_i$  von  $\bar{f}_i$  gibt, die miteinander verträglich sind. Es sei  $\beta_n := \bar{b}_n \amalg_{\bar{b}'_{n-1}} \bar{b}'_{n-1}$ . Aus der universellen Eigenschaft für Fasersummen ergibt sich dann, dass es zu den Morphismen  $\bar{b}'_{n-1} \rightarrow \bar{b}'_n$  und  $\bar{b}_n \rightarrow \bar{b}'_n$  genau einen Morphismus  $\beta_n \rightarrow \bar{b}'_n$  gibt, über den die beiden vorgenannten Morphismen faktorisieren. Ebenso gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus  $\beta_n \rightarrow \bar{a}$ , über welchen die Morphismen  $\bar{b}'_{n-1} \rightarrow \bar{a}$  und  $\bar{b}_n \rightarrow \bar{a}$  faktorisieren. Man prüft nun leicht nach, dass  $\beta_n \rightarrow \bar{b}'_n$  über einer Erweiterung fetter Punkte liegt. Wegen dem ersten Teil des Beweises gibt es also eine Liftung  $\bar{f}'_n : \bar{b}'_n \rightarrow \bar{a}$ , i.e. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \beta_n & \xrightarrow{\quad} & \bar{b}'_n \\ & \searrow & \vdots \\ & & \bar{a} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \bar{f}_n \end{array}$$

kommutiert. Mit Diagrammjagd folgt nun unmittelbar, dass auch die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{b}_n & \xrightarrow{\quad} & \bar{b}'_n \\ & \searrow & \vdots \\ & & \bar{a} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \bar{f}_n \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \bar{b}'_{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \bar{b}'_n \\ & \searrow & \vdots \\ & & \bar{a} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \bar{f}'_{n-1} \end{array}$$

kommutieren. Daher ist  $\bar{f}'_n$  mit den Morphismen  $\bar{f}'_i$ ,  $i < n$ , verträglich und liftet  $\bar{f}_n$ . Die gesuchte Liftung  $\bar{f}'$  von  $\bar{f}$  ergibt sich also induktiv aus den  $\bar{f}'_i$ .  $\square$

- 1.3.4 Bemerkung:** i) Aus den Definitionen folgt unmittelbar, dass ein verselles Objekt  $a \in \mathbf{F}$  bzw.  $\bar{a} \in \widehat{\mathbf{F}}$  stets formal versell ist.
- ii) Da die Morphismen  $T := (T, 0) \rightarrow S := (S, 0)$  von fetten Punkten  $T \in \mathbf{An}_{(\Sigma, 0)}$  eindeutig Morphismen  $T \rightarrow \hat{S}$  entsprechen, ist ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  genau dann formal versell, wenn  $\hat{a} \in \mathbf{F}(\hat{S})$  formal versell ist.
- iii) Aus den beiden vorangehenden Bemerkungen folgt insbesondere, dass für ein verselles Objekt  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  die Kompletterung  $\hat{a}$  stets formal versell ist.
- iv) Ist  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine globale Deformationstheorie, so nennen wir ein Objekt  $a$  über  $S$  *(formal) versell im Punkt  $s_0 \in S$* , wenn der Keim  $(a, s_0)$  aus 1.2.3 eine (formal) verselle Deformation von  $a_{s_0}$  ist.

Die Liftungseigenschaft in Definition 1.3.1 ist im Allgemeinen nicht leicht zu überprüfen. Für die formale Versalität gilt das folgende Kriterium:

**1.3.5 Satz:** Sei  $\hat{p} : \widehat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma, 0)}$  eine formale Deformationstheorie und  $\bar{a} \in \widehat{\mathbf{F}}(\bar{S})$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i)  $\bar{a}$  ist formal versell
- ii)  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) = 0$
- iii)  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}, N) = 0$  für alle endlichen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln  $N$

Beweis: Folgt aus [[BF03], Abschnitt 6, Satz 6.6]. □

In Definition 1.3.1 haben wir nicht gefordert, dass es eine eindeutige Liftung  $b' \rightarrow a$  gibt. Eine (formal) verselle Deformation eines Objekts  $a_0$  ist daher nicht eindeutig. Wir wollen nun den Begriff der *semiuniversellen* Deformation einführen. Dazu erinnern wir an die Definition des *Tangentialraums* eines komplexen Raumkeimes  $S = (S, 0)$  über der Basis  $(\Sigma, 0)$ . Dieser ist gegeben durch

$$T_0(S) := \text{Der}_{(\Sigma, 0)}(\mathcal{O}_{S, 0}, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{S/\Sigma}^1 \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C});$$

für den zugehörigen Dualraum ergibt sich

$$T_0(S)^\vee \cong \Omega_{S/\Sigma}^1 \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{m}_0 / (\mu_0 \mathcal{O}_S + \mathfrak{m}_0^2),$$

wobei  $\mathfrak{m}_0 \subset \mathcal{O}_{S, 0}$  das zu  $0 \in S$  gehörige maximale Ideal bezeichnet und  $\mu_0$  das maximale Ideal in  $\mathcal{O}_{\Sigma, 0}$ . Für einen formalen komplexen Raumkeim  $\bar{S}$  definiert man auf analoge Weise den Tangentialraum  $T_0(\bar{S})$ , entsprechend für einen komplexen Raum  $S$  und einem Punkt  $s_0 \in S$  den Tangentialraum  $T_{s_0}(S)$  von  $S$  in  $s_0$ .

**1.3.6 Definition:** Eine (formal) verselle Deformation  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  von  $a_0$  heißt *(formal) semiuniversell*, wenn der Tangentialraum  $T_0(S)$  von  $S = (S, 0)$  isomorph ist zu dem Vektorraum  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$ . Analog bezeichnen wir eine formale Deformation  $\bar{a} \in \widehat{\mathbf{F}}$  als *(formal) semiuniversell*, wenn sie (formal) versell ist und der Tangentialraum  $T_0(\bar{S})$  isomorph ist zu  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$ . Schließlich nennen wir eine globale Deformation  $a \in \mathbf{F}(S)$  *(formal) semiuniversell im Punkt*

$s_0$ , wenn der Keim  $(a, s_0)$  eine (formal) semiuniverselle Deformation von  $a_{s_0}$  ist, das heißt wenn  $(a, s_0)$  eine (formal) verselle Deformation von  $a_{s_0}$  ist und  $T_{s_0}(S) \cong \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_{s_0}, \mathbb{C})$ .

Wenn die infinitesimalen Erweiterungen  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$  eines gegebenen Objekts  $a_0$  über  $S_0$  endliche  $\mathbb{C}$ -Dimension haben, gibt es stets eine formal semiuniverselle Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$ . Schlessinger gibt dafür sogar einen konstruktiven Beweis.

**1.3.7 Theorem:** *Ist  $a_0$  ein Objekt über dem reduzierten Punkt  $S_0$  und ist  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C}) < \infty$ , so existiert stets eine formal semiuniverselle Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$ .*

Beweis: [[Rim72], (1.11)]. □

Diese Aussage sichert insbesondere die Existenz formal verseller Deformationen eines gegebenen Objektes  $a_0$ . Bevor wir näher auf die Eindeutigkeit formal verseller und formal semiuniverseller Deformationen eingehen, sollen zunächst die folgenden Eigenschaften formal (semiuni)verseller Deformationen gezeigt werden:

**1.3.8 Satz:** *Gegeben sei ein Objekt  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$  und eine formal verselle Deformation  $\bar{a} \in \mathbf{F}(\bar{S})$ .*

- i) *Jede formale Deformation  $\bar{b}$  von  $a_0$  wird durch eine Abbildung  $f : p(\bar{b}) \rightarrow p(\bar{a})$  von  $\bar{a}$  induziert, es ist also  $\bar{b} \cong f^*(\bar{a})$ .*
- ii)  *$\bar{a}$  ist genau dann formal semiuniversell, wenn die assoziierte Abbildung der Tangentialräume*

$$T_0(p(\bar{b})) \rightarrow T_0(p(\bar{a}))$$

*eindeutig bestimmt ist durch  $\bar{b}$ .*

Beweis: Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition von *formal versell*, angewandt auf die kanonischen Einbettungen  $a_0 \hookrightarrow \bar{b}$  und  $a_0 \hookrightarrow \bar{a}$ . Um die zweite Behauptung zu zeigen, betrachten wir die Kodaira-Spencer-Sequenz von  $\bar{a}$  zunächst für einen beliebigen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $W$ :

$$0 \rightarrow \text{Aut}(\bar{a}/\bar{S}, W) \rightarrow \text{Aut}(\bar{a}, W) \rightarrow \text{Hom}(\Omega_{\bar{S}}^1, W) \xrightarrow{\delta_{KS}} \text{Ex}(\bar{a}/\bar{S}, W) \rightarrow 0.$$

Es bezeichne  $V$  den Vektorraum  $T_0(\bar{S})^\vee \cong \Omega_{\bar{S}}^1 \otimes \mathbb{C}$ . Wir zerlegen die obige Sequenz in zwei kurze exakte Sequenzen und betrachten diese als Sequenzen von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen. Wegen 1.2.15 haben diese die Form

$$0 \longrightarrow \text{Aut}(a_0, W) \longrightarrow \text{Aut}(\bar{a}, W) \longrightarrow K(W) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow K(W) \longrightarrow \text{Hom}(V, W) \xrightarrow{\delta_{KS}} \text{Ex}(a_0, W) \longrightarrow 0,$$

wobei  $K(W)$  den Vektorraum  $\ker \delta_{KS}$  bezeichnet. Aus der zweiten Sequenz folgt leicht, dass  $K$  bezüglich  $W$  ein linksexakter kovarianter Funktor ist.

Wir wollen nun speziell den Fall  $W := T_0(\bar{T})^\vee \cong \Omega_{\bar{T}}^1 \otimes \mathbb{C}$  betrachten: es ist

$$\text{Hom}(V, W) \cong \text{Hom}(T_0(\bar{S})^\vee, T_0(\bar{T})^\vee) \cong \text{Hom}(T_0(\bar{T}), T_0(\bar{S}))$$

und ferner induziert jeder Morphismus  $\bar{b} \rightarrow \bar{a}$  insbesondere eine Erweiterung  $\bar{b}_1 \rightarrow \bar{a}_1$  über den infinitesimalen Umgebungen  $\bar{T}_1 \rightarrow \bar{S}_1$ . Per Konstruktion der formalen Deformationen ist  $\bar{b}_1$  eine Erweiterung von  $a_0$  durch  $W$ . Eine Deformation  $\bar{b}$  von  $a_0$  liefert also ein eindeutig bestimmtes Element  $[\bar{b}_1] \in \text{Ex}(a_0, W)$ . Wegen der Surjektivität der Kodaira-Spencer-Abbildung  $\delta_{KS}$  induziert ein solches Element stets eine Abbildung der Tangentialräume  $d_{\bar{b}_1} \in \text{Hom}(V, W)$ ; diese ist genau dann eindeutig, wenn der Kern  $K(W)$  verschwindet. Da  $K$  aber ein linksexakter Funktor ist, folgt die Behauptung nun leicht per Induktion nach  $\dim_{\mathbb{C}} W$ .  $\square$

Für eine formal semiuniverselle Deformation  $\bar{a}$  ist also zumindest die auf den Tangentialräumen der Basisräume induzierte Abbildung eindeutig. Soweit nichts anderes angegeben ist, wollen wir stets annehmen, dass  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$  endliche  $\mathbb{C}$ -Dimension hat und somit stets eine formal semiuniverselle Deformation existiert. Diese ist allerdings nur bis auf nichtkanonische Isomorphie eindeutig bestimmt. Formal verselle Deformationen hingegen können sich um einen glatten Faktor unterscheiden. Genauer gilt:

**1.3.9 Satz:** *i) Eine formal semiuniverselle Deformation von  $a_0$  ist eindeutig bestimmt bis auf nichtkanonische Isomorphie.*

*ii) Ist  $\bar{b}$  über  $\bar{T}$  formal semiuniversell und  $\bar{a} \in \mathbf{F}(\bar{S})$  eine formal verselle Deformation von  $a_0$ , so ist jeder Morphismus  $f : \bar{S} \rightarrow \bar{T}$  mit  $f^*(\bar{b}) \cong \bar{a}$  glatt, dass heißt, es ist  $\mathcal{O}_{\bar{S}} \cong \mathcal{O}_{\bar{T}}[[X_1, \dots, X_d]]$ .*

Beweis: Man beachte, dass sich die erste Behauptung unmittelbar aus ii) ergibt. Der zweite Teil ist aber genau [[Fle81a], Abschnitt 5, Lemma 5.3].  $\square$

Offensichtlich hängt die Zahl der Unbestimmten  $d$  nicht von der Wahl von  $f$  ab. Da es nach 1.3.8 stets eine Abbildung  $f : \bar{S} \rightarrow \bar{T}$  mit  $f^*(\bar{b}) \cong \bar{a}$  gibt und die formal semiuniverselle Deformation von  $a_0$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, können wir jeder formal versellen Deformation  $a$  von  $a_0$  eindeutig die Zahl  $d$  zuordnen, wobei  $d$  die Anzahl der Unbestimmten in 1.3.9ii) sein soll.

**1.3.10 Definition:** Gegeben sei eine formal verselle Deformation  $\bar{a} \in \mathbf{F}(\bar{S})$  von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$ . Die Zahl  $d$  aus 1.3.9ii) heißt *(formal verselle) Überschussdimension* von  $\bar{a}$  und wird mit  $\text{odim}(\bar{a})$  bezeichnet. Für eine lokale Deformation  $a$  über  $(S, 0)$  ist die *(verselle) Überschussdimension* definiert durch  $\text{odim}(a) := \text{odim}(\hat{a})$ . Ist  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$  eine globale Deformationstheorie, so bezeichnen wir die Zuordnung  $\text{odim} : S \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $s \mapsto \text{odim}(a, s)$  als *(verselle) Überschussfunktion* von  $a$ . Ist  $\text{odim}(s) \equiv d_0$  konstant für ein Objekt  $a \in \mathbf{F}$ , so nennt man  $a$  *äquiversell* vom Rang  $d_0$ .

**1.3.11 Bemerkung:** Wegen 1.3.9 sind die Begriffe *(formal) verselle Überschussdimension* und *verselle Überschussfunktion* wohldefiniert. Ebenso ist offensichtlich, dass  $\bar{a}$  genau dann formal semiuniversell ist, wenn  $\text{odim}(\bar{a})$  verschwindet.

Wir werden im Folgenden eine (formal) verselle Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$  mit  $\text{odim}(\bar{a}) = d$  auch kurz *(formal) d-versell* nennen. Es gilt die folgende Verallgemeinerung von 1.3.9i):

**1.3.12 Satz:** Zu einer Zahl  $d \in \mathbb{N}$  gibt es bis auf (nicht-kanonische) Isomorphie genau eine formal  $d$ -verselle Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$ .

Beweis: Wir zeigen: zwei formal verselle Deformationen  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$  von  $a_0$  sind genau dann isomorph, wenn ihre Überschußdimension übereinstimmt. Sei  $\bar{b} \in \mathbf{F}(\bar{T})$  die formal semiuniverselle Deformation von  $a_0$ ,  $d := \text{odim}(\bar{a})$  und  $d' := \text{odim}(\bar{a}')$ . Dann ist  $\mathcal{O}_{\bar{S}} = \mathcal{O}_{\bar{T}}[[X_1, \dots, X_d]]$  und  $\mathcal{O}_{\bar{S}'} = \mathcal{O}_{\bar{T}}[[X_1, \dots, X_{d'}]]$ . Aus  $\bar{a} \cong \bar{a}'$  folgt dann unmittelbar  $d = d'$ . Sind umgekehrt die Überschußdimensionen  $d$  und  $d'$  gleich, so folgt  $\mathcal{O}_{\bar{S}} \cong \mathcal{O}_{\bar{S}'}$  und damit auch  $\bar{S} \cong \bar{S}'$ . Da  $p$  eine Faserung in Gruppoide ist, impliziert dies, dass auch  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$  isomorph sind.  $\square$

Wir wollen als Nächstes Formeln für die Überschußdimension herleiten. Dazu müssen wir zusätzlich annehmen, dass auch  $\text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$  eine endliche  $\mathbb{C}$ -Dimension hat.

**1.3.13 Lemma:** Sei  $\bar{b}$  über  $\bar{T}$  die formal semiuniverselle Deformation von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$  und  $\bar{a} \in \mathbf{F}(\bar{S})$  eine  $d$ -verselle Deformation von  $a_0$ . Es seien ferner  $\text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$  und  $\text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$  endlich-dimensionale  $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

i) Für den relativen Kotangententialmodul von  $\bar{S}$  gilt

$$\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \cong \Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d.$$

ii) Für die Überschußdimension  $d := \text{odim}(\bar{a})$  von  $\bar{a}$  gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} d &= \dim_{\mathbb{C}} T_0(\bar{S}) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Beweis: Da  $\mathcal{O}_{\bar{S}} \cong \mathcal{O}_{\bar{T}}[[X_1, \dots, X_d]]$  eine glatte  $\mathcal{O}_{\bar{T}}$ -Algebra ist, ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}} \rightarrow \Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \rightarrow \Omega_{\bar{S}/\bar{T}}^1 \rightarrow 0$$

exakt und spaltend. Wegen  $\Omega_{\bar{S}/\bar{T}}^1 \cong \mathcal{O}_{\bar{S}}^d$  folgt i). Bezeichnet  $F$  den Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(-, \mathbb{C})$  mit  $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{\bar{S}}/\mathfrak{m}_{\bar{S}}$ , so folgt unmittelbar, dass auch

$$(*) \quad 0 \rightarrow F(\Omega_{\bar{S}/\bar{T}}^1) \rightarrow F(\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1) \rightarrow F(\Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}) \rightarrow 0$$

exakt ist. Wegen

$$F(\Omega_{\bar{S}/\bar{T}}^1) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\mathcal{O}_{\bar{S}}^d, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^d,$$

$$F(\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}) = T_0(\bar{S})$$

und

$$F(\Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}) = T_0(\bar{T}) \cong \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(a_0, \mathbb{C})$$

ist  $(*)$  eine exakte Sequenz von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen und die erste Formel für  $d$  folgt aus der Tatsache, dass die Dimension additiv ist bezüglich exakter Sequenzen. Die zweite Formel ergibt sich aus der Kodaira-Spencer-Sequenz für  $\bar{a}$ :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Der}_{(\Sigma, 0)}(\mathcal{O}_{\bar{S}}, \mathbb{C}) \\ &\rightarrow \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Ex}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) = 0 \end{aligned}$$

Wegen 1.2.15 ist  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  und  $\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) \cong \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$ ; die Formel ergibt sich nun wieder aus der Additivität von  $\dim_{\mathbb{C}}$  bezüglich exakter Sequenzen.  $\square$

Mit den Formeln für die Überschussdimension lassen sich leicht folgende Korollare zeigen.

**1.3.14 Korollar:** *Es seien die Voraussetzungen von 1.3.13 erfüllt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- i)  $d = 0$
- ii)  $\bar{a}$  ist formal semiuniversell
- iii)  $T_0(\bar{S}) \cong \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$
- iv)  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) \cong \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$

Beweis: Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen folgt direkt aus Bemerkung 1.3.11. Aus dem Beweis von 1.3.13 folgt, dass die in iii) und iv) angegebenen Vektorräume endlich über  $\mathbb{C}$  sind. Daher ergibt sich die Äquivalenz von i), iii) und iv) aus 1.3.13ii).  $\square$

**1.3.15 Bemerkung:** Aus der Definition der Überschussdimension ergibt sich insbesondere  $d \geq 0$ . Da ferner die in 1.3.13 vorkommenden  $\mathbb{C}$ -Dimensionen nicht-negativ sind, ergeben sich die Ungleichungen

$$\dim_{\mathbb{C}} T_0(\bar{S}) \geq \dim_{\mathbb{C}} \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$$

und

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) \geq \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}).$$

Zusammen mit 1.3.14iii) zeigt die erste Ungleichung, dass die in 1.3.6 gegebene Definition von *(formal) semiuniversell* eine Minimalitätsforderung an den Tangentialraum  $T_0(\bar{S})$  ist.

Nachdem wir nun (formal) verselle und semiuniverselle Deformationen betrachtet haben, wollen wir kurz auch auf *(formal) universelle Deformationen* eingehen.

**1.3.16 Definition:** Eine Deformation  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$  heißt *universell*, wenn die Liftung  $b' \rightarrow a$  in 1.3.1 eindeutig bestimmt ist.  $a$  heißt *formal universell*, wenn es eine eindeutige Liftung  $b' \rightarrow a$  gibt in dem Fall, dass  $b \rightarrow b'$  über einer kleinen Erweiterung fester Punkte liegt. Der Begriff *formal universell* überträgt sich entsprechend auf formale Deformationen  $\bar{a}$  von  $a_0$ .

In den meisten Fällen existiert zu einem Objekt  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$  eine solche universelle Deformation nicht. Aus der Definition folgt sofort, dass eine universelle Deformation, wenn sie existiert, stets eindeutig ist. Es gilt das folgende Kriterium für formale Universalität:

**1.3.17 Satz:** *Ist  $\bar{a}$  über  $\bar{S}$  eine formal verselle Deformation von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$ , so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i)  $\bar{a}$  ist formal universell

ii)  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) = 0$

iii)  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, N) = 0$  für alle endlichen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln

Beweis: i)  $\implies$  iii) Sei  $\beta \in \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, N)$ . Wegen 1.2.9 ist

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, N) \cong \text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a}).$$

Da  $\bar{a}$  formal universell ist, besitzt die Identität  $\text{id}_{\bar{a}}$  eine eindeutige Liftung, i.e. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} & \xhookrightarrow{j} & \bar{a}[N] \\ & \searrow & \vdots \exists! \\ & & \bar{a} \end{array}$$

ist kommutativ. Dabei bezeichnet  $j : \bar{a} \hookrightarrow \bar{a}[N]$  den Morphismus über der kanonischen Erweiterung  $\bar{S} \hookrightarrow \bar{S}[N]$ . Daraus folgt, dass  $\text{Mor}_{\bar{a}}(\bar{a}[N], \bar{a})$  aus nur einem Element besteht und der Automorphismenmodul somit trivial ist. Die Implikation iii)  $\implies$  ii) ist trivial. Zu zeigen bleibt ii)  $\implies$  i). Wir müssen zeigen, dass es für jeden Morphismus  $\bar{b} \rightarrow \bar{a}$  und jeden Morphismus  $k : \bar{b} \rightarrow \bar{b}'$ , der über einer kleinen Erweiterung fetter Punkte liegt, genau einen Morphismus  $k' : \bar{b}' \rightarrow \bar{a}$  gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{b} & \xrightarrow{k} & \bar{b}' \\ & \searrow & \downarrow k' \\ & & \bar{a} \end{array}$$

kommutiert. Wegen der formalen Versalität von  $a$  gibt es stets einen solchen Morphismus  $k'$ . Es bezeichne  $\kappa' = j \circ k'$  die Verknüpfung von  $k'$  mit dem kanonischen Morphismus  $j : \bar{a} \hookrightarrow \bar{a}[\mathbb{C}]$  über  $\bar{S} \hookrightarrow \bar{S}[\mathbb{C}]$ . Nun ergibt sich aus der formalen Versalität das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \bar{b} & \xrightarrow{k} & \bar{b}' \\ \downarrow & & \downarrow \kappa' \\ \bar{a} & \xrightarrow{j} & \bar{a}[\mathbb{C}] \end{array}$$

In  $\bar{a}[\mathbb{C}]$  hinein hat man stets einen eindeutig bestimmten Morphismus

$$\tilde{k}' : \bar{a} \amalg_{\bar{b}} \bar{b}' \rightarrow \bar{a}[\mathbb{C}].$$

Dieser ergibt sich aus der universellen Eigenschaft der Fasersumme. Aus dem folgenden Lemma folgt leicht, dass  $\tilde{k}'$  sogar ein Isomorphismus ist. Seien nun  $k'_1$  und  $k'_2$  zwei Liftungen von  $k$  und

$$\tilde{k} := k'_1 \circ k'_2{}^{-1} : \bar{a}[\mathbb{C}] \xrightarrow{\sim} \bar{a}[\mathbb{C}].$$

Dieser Morphismus ist per Konstruktion ein Isomorphismus und mit dem kanonischen Morphismus  $j$  verträglich, das heißt  $\tilde{k} \in \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C})$ . Nach Voraussetzung ist nun  $\tilde{k} = \text{id}_{\bar{a}[\mathbb{C}]}$  und somit  $k'_1 = k'_2$ . Aus der Konstruktion der

Morphismen  $\tilde{k}'_i$  folgt dann auch  $k'_1 = k'_2$ .  $\square$

Im Beweis haben wir das folgende Lemma verwendet:

**1.3.18 Lemma:** *Sei  $\bar{T} \rightarrow \bar{T}'$  eine kleine Erweiterung fetter Punkte,  $\bar{S}$  ein formaler Raumkeim und  $j : \bar{S} \hookrightarrow \bar{S}[\mathbb{C}]$  die kanonische kleine Erweiterung von  $\bar{S}$ . Ist nun*

$$\begin{array}{ccc} \bar{T} & \longrightarrow & \bar{T}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{S} & \xrightarrow{j} & \bar{S}[\mathbb{C}] \end{array}$$

*ein kommutatives Diagramm, so ist die eindeutig bestimmte Abbildung*

$$f : \bar{S} \amalg_{\bar{T}} \bar{T}' \rightarrow \bar{S}[\mathbb{C}]$$

*ein Isomorphismus.*

Beweis: Da  $\bar{T} \rightarrow \bar{T}'$  eine kleine Erweiterung fetter Punkte ist, existiert die Fasersumme  $\bar{S}' := \bar{S} \amalg_{\bar{T}} \bar{T}'$  für jeden Morphismus formaler Raumkeime  $\bar{T} \rightarrow \bar{S}$ . Ferner definiert  $\bar{S}'$  eine kleine Erweiterung von  $\bar{S}$ . Auf dem Niveau der analytischen Algebren ergibt sich nun das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{S}'} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{S}} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{S}[\mathbb{C}]} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{S}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da ein formaler Raumkeim eindeutig durch die zugehörige analytische Algebra bestimmt ist, folgt die Behauptung aus dem Fünferlemma.  $\square$

Zusammen mit Korollar 1.3.14 folgt aus diesem Kriterium, dass sich die formal semiuniverselle und die formal universelle Deformation eines Objektes  $a_0$  nur in den infinitesimalen Automorphismen  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  unterscheiden. Insbesondere kann  $a_0$  keine *universelle* Deformation besitzen, sobald es nichttriviale infinitesimale Automorphismen gibt.

**1.3.19 Korollar:** *Eine Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$  ist genau dann formal universell, wenn  $\bar{a}$  formal semiuniversell ist und  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) = 0$ .*

Beweis: Ist  $\bar{a}$  formal semiuniversell und gilt  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) = 0$ , so folgt aus Korollar 1.3.14iv) sofort  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) = \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) = 0$ . Dies zeigt die eine Richtung. Sei umgekehrt  $\bar{a}$  formal universell. Nach dem Kriterium für formale Universalität ist dann  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) = 0$ . Aus der Kodaira-Spencer-Sequenz für  $\bar{a}$  ergibt sich

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) = 0$$

und

$$T_0(\bar{S}) \cong \text{Hom}(\Omega_{\bar{S}}^1, \mathbb{C}) \cong \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C})$$

Wegen 1.2.15 ist damit auch die Umkehrung der Aussage bewiesen.  $\square$

Nachdem bislang hauptsächlich die *formale* Versalität untersucht wurde, stellt sich die Frage, ob analoge Aussagen auch für lokale Deformationen  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$  von  $a_0$  gelten und ob es überhaupt verselle, semiuniverselle oder gar universelle Deformationen gibt. Der folgende Satz ist dabei von zentraler Bedeutung:

**1.3.20 Satz:** *Es möge eine verselle Deformation  $a \in \mathbf{F}$  von  $a_0 \in \mathbf{F}(S_0)$  existieren. Dann gilt:*

- i) *In  $\mathbf{F}$  existiert eine semiuniverselle Deformation von  $a_0$ .*
- ii) *Jede formal verselle Deformation von  $a_0$  ist bereits versell.*

Beweis: [[Fle81a], Abschnitt 5, Satz 5.2]. □

**1.3.21 Bemerkung:** i) Nach Bemerkung 1.3.4 ist jede verselle Deformation auch formal versell. Gibt es in  $\mathbf{F}$  eine verselle Deformation, dann sind *(semiuni)versell* und *formal (semiuni)versell* äquivalente Begriffe und die Aussagen dieses Abschnitts gelten entsprechend für (semiuni)verselle Deformationen  $a \in \mathbf{F}(S, 0)$ .

- ii) Ist  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine globale Deformationstheorie und  $a$  ein universelles Objekt in  $\mathbf{F}(S)$ , so ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Keime  $(a, s)$ ,  $s \in S$ , dass jeder Keim  $(a, s)$  eine universelle Deformation von  $a_s$  ist. Insbesondere ist ein universelles Objekt stets äquiversell vom Rang 0.

## 1.4 Offenheit der Versalität und Obstruktions-theorien

In diesem Abschnitt sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine globale Deformationstheorie und  $a \in \mathbf{F}(S)$  ein Objekt über  $S$ . Wir erinnern nochmal daran, dass ein solches Objekt für jedes  $s \in S$  ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} a_s & \longrightarrow & (a, s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{s\} & \hookrightarrow & (S, s) \end{array}$$

induziert und der Keim  $(a, s)$  stets eine lokale Deformation von  $a_s$  darstellt. Insbesondere macht der Begriff der formalen Versalität Sinn für  $(a, s)$ . Unter gewissen Voraussetzungen ist formale Versalität eine *offene* Eigenschaft, das heißt die Menge der Punkte, für die  $(a, s)$  eine formal verselle Deformation von  $a_s$  ist, ist Zariski-offen in  $S$ . In diesem Abschnitt wollen wir die folgenden Notationen und Begriffe verwenden: die Menge

$$V_a := \{s \in S \mid a \text{ ist formal versell in } s\}$$

bezeichnen wir mit *Menge der formal versellen Punkte von  $a$* . Unter der *Offenheit der formalen Versalität* für ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  wollen wir die Tatsache verstehen, dass  $V_a$  eine Zariski-offene Teilmenge von  $S$  ist. Ziel dieses Abschnitts ist, ein handliches Kriterium für die Offenheit der formalen Versalität vorzustellen.

Zunächst benötigen wir den folgenden Begriff:

**1.4.1 Definition:** Ein additiver Funktor  $F : \mathbf{Coh}(S) \rightarrow \mathbf{Coh}(S)$  genügt dem *generischen Prinzip*, wenn es zu jedem abgeschlossenen reduzierten Teilraum  $T$  von  $S$  eine Zariski-offene dichte Teilmenge  $U \subset T$  gibt mit der Eigenschaft, dass die kanonische Abbildung

$$F(\mathcal{O}_T) \otimes_{\mathcal{O}_T/\mathfrak{m}_t} \rightarrow F(\mathcal{O}_T/\mathfrak{m}_t)$$

bijektiv ist für alle  $t \in U$ .

Die folgenden Beispiele seien zur Verdeutlichung des generischen Prinzips angegeben.

**1.4.2 Beispiel:** i) Gegeben sei ein komplexer Raum  $S$  und für jede offene Teilmenge  $U \subset S$  ein *Kohomologiefunktor*

$$F^i(U, -) : \mathbf{Coh}(U) \rightarrow \mathbf{Coh}(U), i \in \mathbb{Z}$$

Unter einem *Kohomologiefunktor* wollen wir dabei eine Familie halbexakter Funktoren  $\{F^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  verstehen, welche für eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  eine lange Kohomologiesequenz der Form  $\dots \rightarrow F^i(\mathcal{M}') \rightarrow F^i(\mathcal{M}) \rightarrow F^i(\mathcal{M}'') \rightarrow F^{i+1}(\mathcal{M}') \rightarrow \dots$  induziert. Die Funktoren  $F^i(U, -)$  seien weiterhin mit Einschränkungen auf offenen Teilmengen verträglich, das heißt für eine offene Teilmenge  $V \subset U$  und einem kohärenten  $\mathcal{O}_U$ -Modul  $\mathcal{N}$  sei

$$F^i(V, \mathcal{N}|_V) = F^i(U, \mathcal{N})|_V.$$

Für eine festgewählte Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  genügt dann der Funktor  $F^k(S, -)$  dem generischen Prinzip. Einen Beweis dafür findet man in [[Fle78], Kapitel 1, Satz 4.6]. Ein solcher Funktor ist beispielsweise gegeben durch die *Ext*-Funktoren  $\mathcal{E}xt_U^i(\mathcal{K}, -)$ , wobei  $\mathcal{K}$  ein geeigneter Komplex von  $\mathcal{O}_U$ -Moduln ist mit kohärenter Kohomologie.

ii) Ebenso gilt auch die folgende relative Variante von Beispiel i): sei  $f : X \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume. Für jede offene Teilmenge  $U \subset S$  seien nun Kohomologiefunktoren

$$F^i(U, -) : \mathbf{Coh}_e(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathbf{Coh}(U), i \in \mathbb{Z},$$

gegeben, wobei hier  $\mathbf{Coh}_e(f^{-1}(U))$  die Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_{f^{-1}(U)}$ -Moduln mit eigentlichem Träger über  $U$  ist. Die Funktoren  $F^i(U, -)$  seien wieder in dem unter i) beschriebenen Sinn miteinander verträglich, das heißt für eine offene Teilmenge  $V \subset U$  und einem Modul  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}_e(f^{-1}(U))$  gelte  $F^i(U, \mathcal{N})|_V = F^i(V, \mathcal{N}|_{f^{-1}(V)})$ .

Sei  $\mathcal{M}$  ein kohärenter  $S$ -flacher Modul auf  $X$ , dessen Träger eigentlich über  $S$  liegt. Wir betrachten den folgenden durch  $\mathcal{M}$  induzierten Kohomologiefunktor

$$F^i(U, \mathcal{M} \otimes f^* -) : \mathbf{Coh}(U) \rightarrow \mathbf{Coh}(U), i \in \mathbb{Z}$$

Diese sind ebenfalls mit Restriktionen auf offenen Teilmengen verträglich, wie man leicht sieht. Da  $\mathcal{M}$  flach über  $S$  ist, folgt mit [[Fle81a], Abschnitt 7, Satz 7.3], dass der Funktor  $F^k(S, \mathcal{M} \otimes f^* -)$  für festes  $k$  dem generischen Prinzip genügt. Ein Beispiel für solche Kohomologiefunktoren wird durch die relativen *Ext*-Funktoren gegeben, die in Kapitel 2, Abschnitt 2 eingeführt werden.

Für das eingangs erwähnte Offenheitskriterium benötigen wir den Begriff der *Obstruktionstheorien*.

**1.4.3 Definition:** Eine *Obstruktionstheorie* für ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  ist gegeben durch einen Funktor

$$\mathcal{O}b(a/S, -) : \mathbf{Coh}(S) \rightarrow \mathbf{Coh}(S)$$

der die folgende Eigenschaft erfüllt: für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  gibt es eine (in  $\mathcal{N}$  funktorielle) Abbildung

$$ob : \mathcal{E}x(S/\Sigma, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{O}b(a/S, \mathcal{N}),$$

welche die folgende Sequenz exakt macht:

$$\mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}x(S/\Sigma, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{O}b(a/S, \mathcal{N})$$

**1.4.4 Bemerkung:** i) Besitzt ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$  eine Obstruktionstheorie  $\mathcal{O}b(a/S, -)$ , so ist diese im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

ii) Analog definiert man *Obstruktionstheorien* für formale Objekte  $\bar{a}$  über einem formalen Raumkeim  $\bar{S}$  und für Objekte  $a := (a, 0)$  über einem komplexen Raumkeim  $(S, 0)$ . Die genaue Formulierung der jeweiligen Definition sei dem Leser überlassen.

iii) Man prüft leicht nach, dass die in 1.4.3 gegebene Definition äquivalent ist zu der Folgenden: eine Obstruktionstheorie für  $a$  ist gegeben durch einen Funktor  $\mathcal{O}b_\Sigma(a/S, -) : \mathbf{Coh}(S) \rightarrow \mathbf{Coh}(S)$ , der die Kodaira-Spencer-Sequenz erweitert und der mit Restriktionen auf Zariski-offenen Teilmengen  $U \subset S$  verträglich ist, i.e. für jedes  $U \subset S$  gibt es einen Funktor  $\mathcal{O}b(a/U, -) : \mathbf{Coh}(U) \rightarrow \mathbf{Coh}(U)$  zusammen mit einer natürlichen Transformation  $ob_U : \mathcal{O}b(a/S, -) \rightarrow \mathcal{O}b(a/U, -)$ , so dass für jeden Modul  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(U)$  die Sequenz

$$\mathcal{E}x_\Sigma(a|_U, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}x_\Sigma(U/\Sigma, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{O}b_\Sigma(a|_U/U, \mathcal{N})$$

exakt und mit den Transformationen  $ob_U$  verträglich ist.

Das Offenheitskriterium lässt sich nun wie folgt formulieren:

**1.4.5 Theorem:** Es sei  $a \in \mathbf{F}(S)$  ein Objekt über  $S$  und

- i) der Funktor  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, -)$  erhalte Kohärenz, das heißt ist  $\mathcal{N}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul, so ist auch  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  kohärent auf  $S$ ;
- ii) der Funktor  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, -)$  genüge dem generischen Prinzip und
- iii) es existiere eine Obstruktionstheorie  $\mathcal{O}b(a/S, -)$  für  $a$ , die dem generischen Prinzip genügt.

Dann gilt die Offenheit der formalen Versalität für  $a$ .

Beweis: [[Fle81a], Abschnitt 4, Satz 4.3]. □

**1.4.6 Bemerkung:** Anstatt Offenheit der *formalen* Versalität kann man ebenso untersuchen, wann die Offenheit der Versalität gilt, das heißt wann die Menge

$$\{s \in S \mid (a, s) \text{ ist eine konvergente verselle Deformation von } a_s\}$$

Zariski-offen in  $S$  ist. Sobald es für jedes  $s \in S$  eine konvergente verselle Deformation zu  $a_s$  gibt, sind wegen 1.3.21 Offenheit der formalen Versalität und Offenheit der Versalität identische Eigenschaften.

Wir wollen zum Ende des Abschnitts das Kriterium 1.4.5 auf die formale Universalität übertragen. Im Folgenden sei dazu

$$U_a := \{s \in S \mid a \text{ ist formal universell in } s\}.$$

Bevor wir die Aussage formulieren und beweisen, seien die folgenden *globalen* Varianten der Kriterien 1.3.5 und 1.3.17 genannt:

**1.4.7 Korollar:** *Es sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine globale Deformationstheorie und  $a \in \mathbf{F}(S)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- i)  $a$  ist formal versell in  $s$
- ii) Die Garbe  $\mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)$  hat verschwindenden Halm in  $s$
- iii) Es ist  $\mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathcal{N})_s = 0$  für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$

Sei nun  $a$  formal versell in  $s$ . Dann gilt die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $\alpha)$   $a$  ist formal universell in  $s$
- $\beta)$   $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_s = 0$
- $\gamma)$  Für alle  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$  ist  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{N})_s = 0$

Beweis: Ein Beweis ergibt sich direkt aus den Kriterien für formale Deformationen zusammen mit Bemerkung 1.2.4ii) [siehe auch [Fle81a], Abschnitt 3, Satz 3.2 und Bemerkung am Ende von Abschnitt 3].  $\square$

Theorem 1.4.5 überträgt sich nun wie folgt auf die formale Universalität:

**1.4.8 Satz:** *Es sei  $a \in \mathbf{F}(S)$  und es gelten die Eigenschaften i) - iii) aus 1.4.5. Zusätzlich sei der Funktor  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, -)$  kohärenzerhaltend. Dann ist die Menge  $U_a$  eine Zariski-offene Teilmenge von  $S$ .*

Beweis: Sei  $\mathcal{N}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul. Nach Voraussetzung ist dann auch  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$  kohärent und aus der Kodaira-Spencer-Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{D}er_\Sigma(\mathcal{O}_S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$$

ergibt sich die Kohärenz von  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{N})$ . Insbesondere ist der Modul  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S)$  kohärent auf  $S$  und somit

$$A := S \setminus \text{supp}(\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S))$$

Z-offen in  $S$ . Da die Eigenschaften i) – iii) aus 1.4.5 erfüllt sind, ist auch  $V_a$  Z-offen in  $S$ . Offensichtlich genügt es nun, die folgende Gleichung nachzuweisen:

$$U_a = V_a \cap A.$$

Sei also  $s \in U_a$ . Dann ist insbesondere  $s \in V_a$  und wegen Korollar 1.4.7 ferner  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{N})_s = 0$  für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$ . Für  $\mathcal{N} := \mathcal{O}_S$  zeigt dies genau  $s \in A$ . Sei umgekehrt  $s$  sowohl in  $V_a$  als auch in  $A$ . Bezeichnet  $\mathfrak{m}_s \subset \mathcal{O}_S$  die kohärente Idealgarbe zu  $s$ , so ist

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_s \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. Die zugehörige  $\mathcal{A}ut$ - $\mathcal{E}x$ -Sequenz 1.1.11 hat die Gestalt

$$0 \rightarrow \mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathfrak{m}_s) \rightarrow \mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s) \rightarrow \mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathfrak{m}_s) \rightarrow \dots$$

Insbesondere ist diese Sequenz für die Halme an der Stelle  $s$  exakt. Wegen  $s \in V_a$  ist

$$\mathcal{E}x_\Sigma(a, \mathfrak{m}_s)_s = 0$$

und wegen  $s \in A$  ist

$$\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S)_s = 0.$$

Aus der Exaktheit folgt dann  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_s = 0$ ; wegen Kriterium 1.4.7 ist  $a$  formal universell in  $s$ .  $\square$

**1.4.9 Bemerkung:** i) Ein analoges Kriterium für die Menge

$$S_a := \{s \in S \mid a \text{ ist formal semiuniversell in } s\}$$

gibt es leider nicht. Wir werden später sehen, dass unter weiteren Voraussetzungen  $S_a$  eine Zariski-offene Teilmenge von  $V_a$  und auch von  $S$  ist, falls  $V_a$  selbst Z-offen in  $S$  liegt [vgl. Theorem 3.2.1ff].

- ii) Aus 1.4.8 folgt unmittelbar, dass  $U_a \subset V_a$  stets Zariski-offen ist. Da wir an Aussagen über (formal) verselle Deformationen interessiert sind, betrachten wir für ein gegebenes Objekt  $a$  über  $S$  oftmals den Fall  $S = V_a$ , indem wir  $a$  durch die Restriktion  $a|_{V_a}$  ersetzen.

## Kapitel 2

# Auflösungen von Deformationen

In diesem Kapitel soll der Begriff der *S-Auflösung* für Objekte  $a \in \mathbf{F}(S)$  eingeführt werden. Dabei sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine Deformationstheorie. Eine solche Auflösung ist im Wesentlichen durch einen Komplex  $\mathcal{K}$  gegeben, der eine explizite Darstellung der Funktoren  $\mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, -)$  und  $\mathrm{Aut}_\Sigma(a/S, -)$  als Funktoren der Form  $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{K}, -)$  erlaubt. Die ersten beiden Abschnitte geben eine kurze Beschreibung dieser Ext-Funktoren. Die Definitionen und Bezeichnungen halten sich sämtlich an die Notation von [Har66], wobei wir speziell die analytische Situation zugrunde legen. Die betrachteten komplexen Räume seien dabei weiterhin endlichdimensional, parakompakt und haben eine abzählbare Basis der Topologie; die aus [Har66] zitierten Aussagen sind in dieser Situation m.m. gültig. In [RR74] werden die wichtigsten Aussagen speziell für den Fall komplexer Räume gezeigt.

Bevor im vierten Teil dieses Kapitels explizit *Auflösungen von Deformationen* oder allgemeiner *Auflösungen eines Objektes*  $a \in \mathbf{F}(S)$  für globale Deformationstheorien  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eingeführt werden, wiederholen wir im dritten Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften der sogenannten *Kotangentenkomplexe* holomorpher Abbildungen. Diese benötigen wir später für die explizite Konstruktion von *S-Auflösungen*, beispielsweise bei Deformationen des Douady-Raums oder Deformationen kompakter komplexer Räume.

Eine *S-Auflösung* von einem Objekt  $a$  ist eines der wichtigsten technischen Hilfsmittel in dieser Arbeit. Die Auflösungen sind aber leider nicht eindeutig bestimmt; es ist sogar unklar, unter welchen Voraussetzungen solche Auflösungen überhaupt existieren. Die in der Geometrie vorkommenden Fälle erweisen sich jedenfalls sämtlich als *S-auflösbar*.

### 2.1 Der Funktor $\mathrm{Ext}^i(-, -)$ für lokale Noethersche Ringe

In diesem Abschnitt betrachten wir die Funktoren  $\mathrm{Ext}^i(-, -)$  für Komplexe von endlichen Moduln über lokalen Noetherschen Ringen und zeigen, wie man diese möglichst leicht berechnen kann. Notationen in diesem Abschnitt werden nur

dann kommentiert, falls diese von der Standardnotation der kohomologischen Algebra abweichen. Für allgemeine Aussagen und Beweise über die Kohomologie von Komplexen endlicher Moduln verweisen wir auf [Rob98], [HS97] und [Bou07].

Es sei  $A$  stets ein Noetherscher lokaler Ring,  $N$  ein endlich erzeugter  $A$ -Modul und  $K^\cdot$  ein nach rechts beschränkter Komplex endlicher  $A$ -Moduln.  $\text{Ext}^i(K^\cdot, N)$  bezeichnet wie üblich die  $i$ -te Kohomologie des Komplexes  $R\text{Hom}^\cdot(K^\cdot, N)$ . Zur Berechnung betrachten wir eine freie Auflösung  $F^\cdot$  von  $K^\cdot$ . Nach Gradverschiebung kann man annehmen, dass  $K^\cdot$  in negativen Graden konzentriert ist und somit auch  $F^\cdot$  in positiven Graden verschwindet, also von der Gestalt  $F^\cdot : \dots \xrightarrow{d^{-3}} F^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} F^0 \longrightarrow 0$  ist. Da die  $F^i$  sämtlich freie Moduln sind, hat der  $\text{Hom}^\cdot$ -Komplex die Form

$$\text{Hom}^\cdot(F^\cdot, N) : 0 \longrightarrow \text{Hom}(F^0, N) \xrightarrow{d^{-1*}} \text{Hom}(F^{-1}, N) \xrightarrow{d^{-2*}} \text{Hom}(F^{-2}, N) \dots$$

Die  $i$ -te Kohomologie dieses Komplexes liefert nun  $\text{Ext}^i(K^\cdot, N)$ . Aus 0.3.1 folgt

$$\text{Ext}^i(K^\cdot, N) = \ker d^{-i-1*} / \text{im } d^{-i*} \cong \text{Hom}(\text{coker } d^{-i-1}, N) / \text{im } d^{-i*}.$$

Damit haben wir gezeigt:

**2.1.1 Lemma:** *Ist  $K^\cdot \in \mathbf{K}^-(A)$  ein Komplex endlicher  $A$ -Moduln und  $F^\cdot$  eine freie Auflösung von  $K^\cdot$ , so ist für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  die Sequenz*

$$0 \rightarrow \text{im } d^{-i*} \xrightarrow{\text{can}} \text{Hom}(\text{coker } d^{-i-1}, N) \xrightarrow{\tilde{d}^{-i}} \text{Ext}^i(K^\cdot, N) \longrightarrow 0$$

*exakt und natürlich in  $N$ . Insbesondere ist jedes  $\tilde{d}^{-i}$  eine surjektive Transformation von additiven, halbexakten Funktoren.*  $\square$

Im Allgemeinen sind freie Auflösungen nicht eindeutig bestimmt. Es gibt allerdings stets eine *minimale* freie Auflösung von nach rechts beschränkten Komplexen.

**2.1.2 Definition:** Eine freie Auflösung  $(F^\cdot, d)$  heißt *minimal*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i) Für alle  $i$  gilt  $d(F^i) \subset \mathfrak{m}F^{i+1}$
- ii) Der induzierte Komplex  $F^\cdot / \mathfrak{m}F^\cdot$  hat nur triviale Randabbildungen, i.e.  $\bar{d}^i = 0$  für alle  $i$ .
- iii) Der  $\text{Hom}^\cdot$ -Komplex  $\text{Hom}^\cdot(F^\cdot, A/\mathfrak{m})$  hat nur triviale Randabbildungen

Der einfache Beweis dieser Äquivalenzen sei dem Leser überlassen.

Der folgende Satz zeigt, dass eine minimale Auflösung eines gegebenen Komplexes  $K^\cdot$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist; es folgt sogar, dass gewissermaßen jede freie Auflösung von  $K^\cdot$  die minimale Auflösung enthält.

**2.1.3 Satz:** *Zu jedem nach rechts beschränkten Komplex von endlichen  $A$ -Moduln existiert eine freie Auflösung. Es gibt (bis auf nicht-kanonische Isomorphie) genau eine freie minimale Auflösung. Jede freie Auflösung lässt sich zerlegen in eine direkte Summe der minimalen freien Auflösung und einem spaltend exakten Komplex freier Moduln.*

Beweis: [[Rob98], Abschnitt 4, Satz 4.4.2].  $\square$

Betrachten wir nun den zu Beginn des Abschnitts eingeführten Hom-Komplex für  $N = k := A/\mathfrak{m}$ :

$$\mathrm{Hom}^\bullet(F^\bullet, k) : 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F^0, k) \xrightarrow{d^{-1*}} \mathrm{Hom}(F^{-1}, k) \xrightarrow{d^{-2*}} \dots$$

Im Folgenden sei  $F^\bullet = (F^\bullet, d)$  die minimale freie Auflösung von  $K^\bullet$ . Wegen 2.1.2iii) verschwinden sämtliche Randabbildungen  $d^i$  und somit auch im  $d^{i*}$ . Ferner gilt  $\ker d^{-i*} = \mathrm{Hom}(F^{-i+1}, k)$ ; aus der Definition der Ext-Moduln sowie 2.1.1 folgt nun unmittelbar

**2.1.4 Lemma:** *Ist  $F^\bullet$  die minimale freie Auflösung von  $K^\bullet$ , so gilt*

$$\mathrm{Ext}^i(K^\bullet, k) = \mathrm{Hom}(F^{-i}, k) \text{ und } \mathrm{Ext}^i(K^\bullet, k) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{coker } d^{-i-1}, k). \quad \square$$

Zusammen mit 2.1.1 folgt aus diesem Lemma, dass der Modul  $\mathrm{coker } d^{-i-1}$  ein semidarstellender Modul des Funktors  $\mathrm{Ext}^i(K^\bullet, -)$  ist. 0.3.6 überträgt sich wie folgt auf die vorliegende Situation:

**2.1.5 Satz:** *Sei  $T$  ein endlicher  $A$ -Modul,  $\vartheta : \mathrm{Hom}(T, -) \rightarrow \mathrm{Ext}^i(K^\bullet, -)$  eine natürliche Transformation und  $(F^\bullet, d)$  die minimale freie Auflösung von  $K^\bullet$ . Dann gilt:*

i) *Es gibt einen Homomorphismus  $\gamma : \mathrm{coker } d^{-i-1} \rightarrow T$ , so dass*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{coker } d^{-i-1}, -) & \xrightarrow{\tilde{d}^{-i}} & \mathrm{Ext}^i(K^\bullet, -) \\ & \nwarrow \gamma^* & \uparrow \vartheta \\ & & \mathrm{Hom}(T, -) \end{array}$$

*kommutiert.*

ii) *Ist  $\vartheta$  surjektiv auf  $\mathbf{Coh}(A)$ , so gibt es eine Darstellung  $T \cong \mathrm{coker } d^{-i-1} \oplus T'$  für einen geeigneten Modul  $T' \in \mathbf{Coh}(A)$ .*

iii) *Ist  $\vartheta$  surjektiv auf  $\mathbf{Coh}(A)$  und injektiv für  $N = k$ , so gibt es einen (nicht-kanonischen) Isomorphismus  $\mathrm{coker } d^{-i+1} \xrightarrow{\sim} T$ .*

**2.1.6 Bemerkung:** Ist  $A$  vollständig bezüglich der  $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie, so gelten die Aussagen von Satz 2.1.5 auch dann, wenn  $\vartheta$  lediglich auf  $\mathbf{Art}(A)$  surjektiv ist. Dies folgt leicht aus 0.3.7.

In 0.4.10ff haben wir definiert, wann ein  $A$ -Modul endliche injektive, endliche projektive oder endliche flache Dimension hat. Für Komplexe endlicher  $A$ -Moduln definiert man allgemeiner:

**2.1.7 Definition:** Ein Komplex  $K^\bullet \in \mathbf{K}^+(A)$  hat *endliche injektive Dimension*, wenn er quasiisomorph ist zu einem *beschränkten* Komplex von injektiven Moduln. Analog sagt man, ein Komplex  $L^\bullet \in \mathbf{K}^-(A)$  hat *endliche projektive* resp. *endliche flache* Dimension, wenn  $L^\bullet$  quasiisomorph ist zu einem *beschränkten* Komplex projektiver resp. flacher Moduln.

Das folgende Lemma liefert Kriterien für die Endlichkeit der injektiven und projektiven Dimension eines Komplexes  $K^\cdot$ .

**2.1.8 Lemma:** *Ein Komplex endlich erzeugter  $A$ -Moduln  $K^\cdot \in \mathbf{K}^+(A)$  hat genau dann endliche injektive Dimension, wenn es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit*

$$\mathrm{Ext}^i(A/\mathfrak{m}_A, K^\cdot) = 0 \quad \forall i \geq n_0.$$

*Dual dazu hat ein Komplex endlicher  $A$ -Moduln  $L^\cdot \in \mathbf{K}^-(A)$  genau dann endliche projektive Dimension, wenn es ein  $m_0 \in \mathbb{N}$  gibt mit*

$$\mathrm{Ext}^j(L^\cdot, A/\mathfrak{m}_A) = 0 \quad \forall j \geq m_0.$$

Beweis: Zunächst bemerkt man, dass für alle  $i \in \mathbb{Z}$  der Funktor  $\mathrm{Ext}^i(-, K^\cdot)$  die Voraussetzungen von Lemma 1.2.16 erfüllt. Daher folgt die erste Behauptung leicht aus [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 7, Satz 7.20iii)<sub>c</sub>]. Die zweite Behauptung zeigt man mit Hilfe der minimalen freien Auflösung  $F^\cdot$  von  $L^\cdot$ : wegen 2.1.4 ist für jedes  $j \geq m_0$

$$0 = \mathrm{Ext}^j(L^\cdot, A/\mathfrak{m}_A) \cong \mathrm{Hom}(F^{-j}, A/\mathfrak{m}_A) = (F^{-j}/\mathfrak{m}_A F^{-j})^\vee.$$

Dann ist für  $i \leq -m_0$  auch  $F^i/\mathfrak{m}_A F^i = 0$ . Wegen dem Lemma von Nakayama ist daher  $F^\cdot$  ein Komplex endlicher freier Moduln mit  $F^i = 0 \quad \forall i \leq -m_0$ . Daraus folgt unmittelbar, dass  $L^\cdot$  endliche projektive Dimension besitzt, da  $F^\cdot$  minimale Auflösung von  $L^\cdot$  ist. Ist umgekehrt  $L^\cdot$  ein nach rechts beschränkter Komplex endlicher  $A$ -Moduln, der endliche projektive Dimension hat, so können wir annehmen, dass  $L^\cdot$  ein beidseitig beschränkter Komplex projektiver Moduln ist. Da über dem Noetherschen lokalen Ring  $A$  projektive Moduln stets frei sind, folgt aus der Definition der Ext-Moduln nun leicht, dass es ein  $m_0 \in \mathbb{N}$  mit der genannten Eigenschaft gibt.  $\square$

Definition 2.1.7 lässt sich direkt auf Komplexe von Garben übertragen.

**2.1.9 Definition:** Es sei  $X$  ein komplexer Raum. Ein Komplex  $\mathcal{K}^\cdot \in \mathbf{K}^+(X)$  hat *endliche injektive Dimension*, wenn es einen zu  $\mathcal{K}^\cdot$  quasiisomorphen beschränkten Komplex  $\mathcal{I}^\cdot$  injektiver  $\mathcal{O}_X$ -Moduln gibt. Ein Komplex  $\mathcal{L}^\cdot \in \mathbf{K}^-(X)$  hat *endliche flache Dimension*, wenn es einen beschränkten Komplex flacher Moduln  $\mathcal{F}^\cdot$  gibt, der quasiisomorph ist zu  $\mathcal{L}^\cdot$ .

**2.1.10 Bemerkung:** i) Da die Kategorie  $\mathbf{Mod}(X)$  im Allgemeinen nicht genügend Projektive besitzt, macht es zumeist keinen Sinn, von einem Komplex  $\mathcal{K}^\cdot \in \mathbf{K}^-(X)$  mit *endlicher projektiver Dimension* zu sprechen.

ii) In [Har66] wird ein Komplex  $\mathcal{L}^\cdot$  von endlicher flacher Dimension als Komplex mit *endlicher Tor-Dimension* bezeichnet. Da wir in der vorliegenden Arbeit auf die Einführung der Tor-Moduln verzichten wollen, werden solche Komplexe ausschließlich als Komplexe mit endlicher flacher Dimension bezeichnet.

Da die betrachteten komplexen Räume stets endliche Dimension haben, sind die in 2.1.9 definierten Dimensionsbegriffe lokaler Natur. Dies lässt sich wie folgt präzisieren:

**2.1.11 Lemma:** *Ein Komplex  $\mathcal{K} \in \mathbf{K}^+(X)$  hat genau dann endliche injektive Dimension, wenn  $\mathcal{K}_x$  für jedes  $x \in X$  endliche injektive Dimension hat. Ebenso hat ein Komplex  $\mathcal{L} \in \mathbf{K}^-(X)$  genau dann endliche flache Dimension, wenn  $\mathcal{L}_x$  für jedes  $x \in X$  von endlicher flacher Dimension ist.*

In [Har66] werden die punktweise definierten Eigenschaften jeweils mit „punktweise endliche injektive Dimension“ und „punktweise endliche Tor-Dimension“ bezeichnet. Ein Beweis des Lemmas ergibt sich im Wesentlichen daraus, dass ein  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{N}$  genau dann injektiv resp. flach ist, wenn in jedem Punkt  $x \in X$  der Halm  $\mathcal{N}_x$  diese Eigenschaft hat. Ein vollständiger Beweis ergibt sich aus [[Har66], Kapitel 5, Abschnitt 2, Korollar 2.3] und [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 4, Bemerkung nach Satz 4.2].

## 2.2 Ext-Funktor und Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden die globalen und relativen Ext-Moduln eingeführt und eine Dualitätsaussage aus [Fle81b] wiederholt. Diese ermöglicht einen Vergleich der globalen und relativen Ext-Moduln. Im Folgenden sei  $\pi : X \rightarrow S$  eine festgewählte Abbildung komplexer Räume.

**2.2.1 Definition:** Sei  $\mathcal{L} \in \mathbf{D}(X)$  ein festgewählter Komplex. Für  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}^+(X)$  definiere den  $i$ -ten Ext-Modul auf  $X$  durch

$$\mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{L}, \mathcal{K}) := R^i \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{K})$$

sowie den  $i$ -ten (zu  $\pi$ ) relativen Ext-Modul auf  $S$  durch

$$\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, \mathcal{K}) := R^i \pi_* R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{K}).$$

**2.2.2 Bemerkung:** Wählen wir  $X = S$  und  $\pi = \text{id}_X$ , so liefern die Definitionen für  $\mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  und  $\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  den gleichen  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Ist  $\pi : X \rightarrow S$  eigentlich, so gilt ferner:

- i) Die  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  sind für  $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_c^-(X)$  und  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^+(X)$  kohärent. Dies folgt direkt aus 0.4.6ii). Insbesondere bedeutet dies, dass für  $i \in \mathbb{Z}$  der Funktor  $\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, -)$  kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Moduln in kohärente Moduln auf  $S$  überführt.
- ii) Da die Identität  $X \xrightarrow{=} S$  eigentlich ist, sind für alle  $i \in \mathbb{Z}$  die Garben  $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})$  stets kohärent auf  $X$ .
- iii) Für  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{K}$  wie in i) sind die Ext-Moduln mit Restriktionen auf offenen Teilmengen verträglich, das heißt für eine offene Teilmenge  $U \subset S$  ist

$$\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, \mathcal{K})|_U \cong \mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}|_{\pi^{-1}(U)}, \mathcal{K}|_{\pi^{-1}(U)}),$$

wie man leicht nachrechnet. Wegen Beispiel 1.4.2 erfüllen die Funktoren  $\mathcal{E}xt_X^i(\mathcal{L}, -)$  und (für einen festen kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{M}$ )  $\mathcal{E}xt_\pi^i(\mathcal{L}, \mathcal{M} \otimes \pi^* -)$  das generische Prinzip.

Die in 0.4.6 betrachteten Funktoren sind auf natürliche Weise miteinander verträglich. In [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 5] findet man die wesentlichen Verträglichkeitssätze. Wir wollen ferner eine Dualitätsaussage aus [Fle81b] zitieren, welche die Handhabung der Funktoren  $R\mathcal{H}om$  erleichtert. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe [siehe [Har66], Kapitel 5, Abschnitt 2, Satz 2.1]:

**2.2.3 Definition:** Es sei  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^+(X)$  ein Komplex mit endlicher injektiver Dimension und  $D := R\mathcal{H}om(-, \mathcal{K})$ . Wir nennen  $\mathcal{K}$  einen *dualisierenden Komplex* für  $X$ , wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

- i)  $D(D(\mathcal{F})) \cong \mathcal{F}$  für alle  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c(X)$
- ii)  $D(D(\mathcal{F})) \cong \mathcal{F}$  für alle  $\mathcal{F} \in \mathbf{D}_c^b(X)$
- iii)  $D(D(\mathcal{M})) \cong \mathcal{M}$  für alle kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduln  $\mathcal{M}$
- iv)  $D(D(\mathcal{O}_X)) \cong \mathcal{O}_X$

In diesem Fall bezeichnen wir  $D_X := D = R\mathcal{H}om(-, \mathcal{K})$  als *dualisierenden Funktor* auf  $X$ .

Es sei kurz angemerkt, dass ein dualisierender Komplex nicht eindeutig bestimmt ist: mit  $\mathcal{K}$  ist auch für jede invertierbare Garbe  $\mathcal{L}$  und jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Komplex  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}[n]$  dualisierend auf  $X$  [[Har66], Kapitel 5, Abschnitt 3]. Da die betrachteten komplexen Räume endlichdimensional sind, ist *dualisierend* eine lokale Eigenschaft, das heißt ein Komplex  $\mathcal{K}$  ist genau dann dualisierend, wenn  $\mathcal{K}_x$  in jedem Punkt  $x \in X$  dualisierend ist [[Har66], Kapitel 5, Abschnitt 8, insbesondere Satz 8.2].

Wegen [RR70] besitzt jeder komplexe Raum einen dualisierenden Komplex. Für ein Noethersches Schema müssen wir zusätzlich die Existenz eines *punktweise dualisierenden* Komplexes fordern [siehe auch [Fle81b], Bemerkung 1.3 und Bemerkung 3.4(2)].

Sei  $\pi : X \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung und  $\mathcal{M}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul, der flach und eigentlich über  $S$  liegt. Wir wollen die *Ext*-Moduln auf  $X$  durch relative *Ext*-Moduln ausdrücken. Dazu betrachten wir den (von  $\mathcal{M}$  abhängigen) Funktor

$$L\pi_{\sharp}(\mathcal{L}) := L\pi_{\sharp(\mathcal{M})}(\mathcal{L}) := D_S R\pi_* R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{K}_S)$$

für  $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_c^-(X)$ .  $\mathcal{K}_S$  bezeichne dabei einen dualisierenden Komplex auf  $S$  und  $D_S$  den zugehörigen dualisierenden Funktor. Nach [[Fle81b], Abschnitt 2] ist der Funktor  $L\pi_{\sharp}$  wohldefiniert. Er hat folgende Eigenschaften:

**2.2.4 Satz:** i) Für  $\mathcal{L} \in \mathbf{D}_c^-(X)$  und  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^+(S)$  gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$R\pi_* R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{K}) \cong R\mathcal{H}om_S(L\pi_{\sharp} \mathcal{L}, \mathcal{K}).$$

ii)  $L\pi_{\sharp}$  ist mit beliebigem Basiswechsel  $S' \rightarrow S$  verträglich, das heißt für ein kartesisches Diagramm komplexer Räume

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ S' & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

gilt  $Lg^*L\pi_{\sharp} \cong L\pi'_{\sharp}Lg'^*$ , wobei  $L\pi'_{\sharp} : \mathbf{D}_c^-(X') \rightarrow \mathbf{D}_c^-(S')$  den zu  $\mathcal{M}' := g'^*(\mathcal{M})$  gehörigen Funktor bezeichnet.

iii) Ist  $\mathcal{N}$  ein weiterer Modul, welcher flach und eigentlich über  $S$  liegt, so induziert ein  $\mathcal{O}_X$ -Homomorphismus  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  stets eine natürliche Transformation von Funktoren

$$L\pi_{\sharp}(\mathcal{N}) \rightarrow L\pi_{\sharp}(\mathcal{M}),$$

welche mit den aus i) folgenden Isomorphismen verträglich ist.

iv) Ist  $\mathcal{L} \cdot \in \mathbf{D}_c^{\leq l_0}(X)$ , so ist auch  $L\pi_{\sharp}(\mathcal{L} \cdot) \in \mathbf{D}_c^{\leq l_0}(S)$ .

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen folgen aus [[Fle81b], Satz 2.1], die dritte aus [[Fle81b], Bemerkung 2.3(1)]. Behauptung iv) ist für  $l_0 = 0$  identisch mit [[Fle81b], Bemerkung 2.3(4)]. Nun ist aber  $L\pi_{\sharp}$  als Komposition von Funktoren definiert, die sämtlich mit dem Translationsfunktorkomplex  $[ ]$  verträglich sind [siehe Beispiel 0.4.6]. Daher gilt die Behauptung für beliebiges  $l_0 \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**2.2.5 Bemerkung:** i) Unter den genannten Voraussetzungen von 2.2.4 gibt es also stets einen (von  $\mathcal{M}$  abhängigen) Funktor  $L\pi_{\sharp}$  und für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  Isomorphismen

$$\mathcal{E}xt_{\pi}^i(\mathcal{L} \cdot, \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N}) \cong \mathcal{E}xt_S^i(L\pi_{\sharp}\mathcal{L} \cdot, \mathcal{N})$$

und

$$\mathrm{Ext}_X^i(\mathcal{L} \cdot, \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N}) \cong \mathrm{Ext}_S^i(L\pi_{\sharp}\mathcal{L} \cdot, \mathcal{N}),$$

die funktoriell in  $\mathcal{N}$  sind.

ii) Fordern wir in 2.2.4 lediglich, dass  $\mathcal{M}$  flach über  $S$  liegt, so lässt sich der Funktor  $L\pi_{\sharp}$  wenigstens für eine geeignete Unterkategorie von  $\mathbf{D}_c^-(X)$  definieren, nämlich für die Kategorie  $\mathbf{D}_{c,e}^-(X)$ . Diese besteht aus allen Komplexen  $\mathcal{K} \cdot$  derart, dass  $\mathrm{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{K} \cdot) \cap \mathrm{supp} \mathcal{M}$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  eigentlich über  $S$  liegt. Der Funktor  $L\pi_{\sharp} : \mathbf{D}_{c,e}^-(X) \rightarrow \mathbf{D}_c^-(S)$  hat dann die zu i) – iv) analogen Eigenschaften (siehe [[Fle81b], Bemerkung 2.3(2)]).

Ist  $\mathcal{L} \cdot \in \mathbf{D}^{\leq l_0}(X)$  ein nach rechts und  $\mathcal{K} \cdot \in \mathbf{D}^{\geq k_0}(X)$  ein nach links beschränkter Komplex, so verschwinden die relativen und globalen  $\mathcal{E}xt^i$ -Moduln für  $i < k_0 - l_0$ . Dies folgt leicht aus den Definitionen. Für  $i = k_0 - l_0$  gilt:

**2.2.6 Lemma:** Für  $\mathcal{L} \cdot \in \mathbf{D}^{\leq l_0}(X)$  sowie  $\mathcal{K} \cdot \in \mathbf{D}^{\geq k_0}(X)$  gilt:

$$i) \quad \mathrm{Ext}_X^{k_0-l_0}(\mathcal{L} \cdot, \mathcal{K} \cdot) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L} \cdot), \mathcal{H}^{k_0}(\mathcal{K} \cdot))$$

$$ii) \quad \mathcal{E}xt_X^{k_0-l_0}(\mathcal{L} \cdot, \mathcal{K} \cdot) \cong \mathcal{H}om_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L} \cdot), \mathcal{H}^{k_0}(\mathcal{K} \cdot))$$

$$iii) \quad \mathcal{E}xt_{\pi}^{k_0-l_0}(\mathcal{L} \cdot, \mathcal{K} \cdot) \cong \pi_* \mathcal{H}om_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L} \cdot), \mathcal{H}^{k_0}(\mathcal{K} \cdot))$$

Beweis: Nach Gradverschiebung kann man annehmen, dass  $k_0 = l_0 = 0$ . Wir betrachten die zweite exakte Sequenz von Komplexen aus 0.4.3, i.e.

$$0 \longrightarrow \sigma_{<0}(\mathcal{L} \cdot) \longrightarrow \mathcal{L} \cdot \longrightarrow \sigma_{\geq 0}(\mathcal{L} \cdot) \longrightarrow 0.$$

Schritt 1: Es ist  $\text{Ext}^0(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot) \cong \text{Ext}^0(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot)$ .

Die lange exakte Ext-Sequenz liefert für jeden Komplex  $\mathcal{K}^\cdot$

$$\text{Ext}^{-1}(\sigma_{<0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot) \rightarrow \text{Ext}^0(\sigma_{\geq 0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot) \rightarrow \text{Ext}^0(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot) \rightarrow \text{Ext}^0(\sigma_{<0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot)$$

Per Konstruktion ist  $\mathcal{H}^j(\sigma_{<0}(\mathcal{L}^\cdot)) = 0$  für  $j \geq 0$ . Daher verschwinden die äußeren Ext-Moduln in der obigen exakten Sequenz. Da ferner  $\mathcal{L}^\cdot$  in Graden  $\leq 0$  konzentriert ist, ergibt sich aus der Definition des abgeschnittenen Komplexes unmittelbar  $\sigma_{\geq 0}(\mathcal{L}^\cdot) = \mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot)$ .

Schritt 2:  $\text{Ext}^0(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot) \cong \text{Hom}(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{H}^0(\mathcal{K}^\cdot))$

Wir können annehmen, dass  $\mathcal{K}^\cdot$  ein Komplex injektiver  $\mathcal{O}_X$ -Moduln ist. Dann lässt sich  $\text{Ext}^0(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot)$  berechnen als Kern des Homomorphismus

$$\text{Hom}(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^0) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{K}^\cdot}^0} \text{Hom}(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^1).$$

Da aber  $\text{Hom}(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), -)$  ein linksexakter Funktor ist, ergibt sich daraus

$$\text{Ext}^0(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{K}^\cdot) \cong \ker \partial_{\mathcal{K}^\cdot}^0 \cong \text{Hom}(\mathcal{H}^0(\mathcal{L}^\cdot), \text{Ker } \partial_{\mathcal{K}^\cdot}^0)$$

Die Behauptung folgt nun aus  $\text{Ker } \partial_{\mathcal{K}^\cdot}^0 = \mathcal{H}^0(\mathcal{K}^\cdot)$ . Aus Schritt 1 und 2 folgt die erste Behauptung des Lemmas.

Schritt 3: Wiederholt man Schritt 1 und 2 mit dem Funktor  $\mathcal{E}xt^0(-, -)$  anstelle von  $\text{Ext}^0(-, -)$ , so folgt daraus Behauptung ii)

Schritt 4: Zu zeigen bleibt iii). Es ist  $\mathcal{E}xt_\pi^0(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot) = R^0\pi_* R\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$ . Ohne Einschränkung sei  $\mathcal{K}^\cdot$  ein Komplex von Injektiven. Dann ist  $R\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot) = \mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$ . Zur Berechnung von  $R\pi_* R\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$  betrachten wir daher eine injektive Auflösung  $(\mathcal{J}^\cdot, \partial_{\mathcal{J}^\cdot})$  von  $\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$ . Damit gilt:

$$R^0\pi_* R\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot) = \mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{J}^\cdot).$$

Mit den Voraussetzungen an  $\mathcal{L}^\cdot$  und  $\mathcal{K}^\cdot$  ist  $\mathcal{J}^\cdot \in \mathbf{D}_c^{\geq 0}(X)$  und somit  $\pi_* \mathcal{J}^\cdot \in \mathbf{D}^{\geq 0}(S)$ . Also ist  $\mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{J}^\cdot) \cong \text{Ker}(\pi_* \partial_{\mathcal{J}^\cdot}^0)$ . Da  $\pi_*$  linksexakt ist, ergibt sich unmittelbar die Verträglichkeit mit Kernen von Homomorphismen:

$$\mathcal{H}^0(\pi_* \mathcal{J}^\cdot) \cong \text{Ker}(\pi_* \partial_{\mathcal{J}^\cdot}^0) \cong \pi_* \text{Ker}(\partial_{\mathcal{J}^\cdot}^0) \cong \pi_* \mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\cdot)$$

Weil  $\mathcal{J}^\cdot$  eine injektive Auflösung von  $\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$  ist, ergibt sich ferner

$$\mathcal{H}^0(\mathcal{J}^\cdot) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)) \cong \mathcal{E}xt^0(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{K}^\cdot)$$

Behauptung iii) folgt daher aus ii). □

**2.2.7 Korollar:** Aus 2.2.6 ergeben sich speziell für  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(X)$  Isomorphismen

$$\text{Ext}_X^{-l_0}(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{N}),$$

$$\mathcal{E}xt_X^{-l_0}(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{N}),$$

und

$$\mathcal{E}xt_\pi^{-l_0}(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{N}) \cong \pi_* \mathcal{H}om_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{N}),$$

Diese sind sämtlich funktoriell in  $\mathcal{N}$ .

Im Allgemeinen ist es nicht leicht, für gegebenes  $\mathcal{L}^\cdot \in \mathbf{D}_c^-(S)$  den Komplex  $L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot)$  explizit zu bestimmen. Da später jedoch die nullte und erste Kohomologie dieses Komplexes für die Berechnung des Kotangentialmoduls  $\Omega_S^1$  benötigt werden, wollen wir uns im Folgenden überlegen, in welchen Fällen  $L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot)$  eine einfache Form hat. Aus 2.2.6 ergibt sich leicht

**2.2.8 Korollar:** *Seien  $\mathcal{M}$  und  $L\pi_\#$  wie in 2.2.4. Dann gilt für  $\mathcal{L}^\cdot \in \mathbf{D}_{c,e}^{\leq l_0}(X)$ :*

$$L^{l_0}\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot) \cong L^0\pi_\#(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot)).$$

Beweis: Wir berechnen den  $-l_0$ -ten relativen  $\mathcal{E}xt$ -Modul für den Fall, dass  $\mathcal{K}^\cdot$  im Grad Null konzentriert ist mit  $\mathcal{K}^0 := \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N}$  für einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$ . In dem Fall folgt aus 2.2.7

$$\mathcal{E}xt_\pi^{-l_0}(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N}) \cong \pi_*\mathcal{H}om(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N})$$

Nun ist  $\text{supp } \mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot) \cap \text{supp } \mathcal{M}$  eigentlich über  $S$ ; daraus folgt leicht

$$\pi_*\mathcal{H}om_X(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{M} \otimes \pi^*\mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om_S(L^0\pi_\#(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot)), \mathcal{N}),$$

vgl. [[Fle81b], Satz 3.1]. Zusammen mit 2.2.5i) ergibt sich ein Isomorphismus

$$\mathcal{H}om_S(L^0\pi_\#(\mathcal{H}^{l_0}(\mathcal{L}^\cdot)), \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(L^{l_0}\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot), \mathcal{N}),$$

welcher natürlich in  $\mathcal{N}$  ist. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**2.2.9 Bemerkung:** Um den Funktor  $L\pi_\#$  weiter zu verstehen, wollen wir uns den Fall  $\pi = \text{id}_X$  ansehen. Der kohärente Modul  $\mathcal{M}$  ist dann flach und eigentlich über  $X = S$  und somit insbesondere lokal frei. Aus der Definition von  $L\text{id}_\#$  ergibt sich zunächst

$$L\text{id}_\#(\mathcal{L}^\cdot) = D_X R\text{id}_* R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{M} \otimes \text{id}^* \mathcal{K}_X) = D_X R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{M} \otimes \mathcal{K}_X).$$

Aus [[Har66], Kapitel 2, Abschnitt 5, Satz 5.16], der Definition von  $D_X$  und der Eigenschaft i) aus 2.2.3 ergibt sich ferner

$$\begin{aligned} L\text{id}_\#(\mathcal{L}^\cdot) &= D_X R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{M} \otimes \mathcal{K}_X) \\ &\cong D_X R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\cdot \otimes \mathcal{M}^\vee, \mathcal{K}_X) \\ &= D_X D_X(\mathcal{L}^\cdot \otimes \mathcal{M}^\vee) \\ &\cong \mathcal{M}^\vee \otimes \mathcal{L}^\cdot \end{aligned}$$

Ist speziell  $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ , so folgt  $L\text{id}_\#(\mathcal{L}^\cdot) \cong \mathcal{L}^\cdot$ .

Falls die Abbildung  $\pi : X \rightarrow S$  glatt und eigentlich ist, lässt sich der Funktor  $L\pi_\#$  aus 2.2.4 zumindest für beschränkte Komplexe  $\mathcal{L}^\cdot$  explizit berechnen. Dazu benötigen wir ein paar Vorbereitungen. Sei zunächst  $\pi : X \rightarrow S$  eine beliebige Abbildung komplexer Räume und  $\mathcal{M}$  ein beliebiger kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Wir betrachten auf der derivierten Kategorie  $\mathbf{D}_c^-(S)$  den Funktor

$$LG : \mathbf{D}_c^-(S) \rightarrow \mathbf{D}_c^-(X), \quad \mathcal{L}^\cdot \mapsto \mathcal{M} \otimes (L\pi^* \mathcal{L}^\cdot)$$

und auf  $\mathbf{K}_c^-(S)$  den Funktor

$$F : \mathbf{K}_c^-(S) \rightarrow \mathbf{K}_c^-(X), \quad \mathcal{L}^\cdot \mapsto \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{L}^\cdot.$$

Diese Funktoren haben folgende Eigenschaften:

**2.2.10 Lemma:** i)  $F$  ist rechtsexakt und hat einen linksderivierten Funktor  $LF : \mathbf{D}_c^-(S) \rightarrow \mathbf{D}_c^-(X)$ .

ii) Es gibt einen kanonischen Funktorisomorphismus  $LF \cong LG$ .

iii) Liegt  $\mathcal{M}$  flach über  $S$ , so ist  $F$  exakt; insbesondere ist dann  $LF \cong F$ .

Beweis: Man prüft leicht nach, dass Komplexe von flachen Moduln  $F$ -azyklisch sind. Daraus folgt i). Die zweite Behauptung folgt direkt aus dem Composition Theorem 0.4.7, da  $\pi^*$ - flache Moduln auf  $S$  in flache Moduln auf  $X$  überführt. Die dritte Aussage ergibt sich leicht aus der Definition der  $S$ -Flachheit eines kohärenten  $\mathcal{O}_X$ -Moduls.  $\square$

Wir benötigen noch die folgenden Hilfsaussagen.

**2.2.11 Lemma:** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein lokaler Homomorphismus von Noetherschen lokalen Ringen derart, dass  $B$  ein flacher  $A$ -Modul ist und  $\bar{B} := B/\mathfrak{m}_A B$  ein regulärer lokaler Ring von Dimension  $d := \dim(\bar{B})$ . Dann gilt:

i) Für jeden endlichen  $B$ -Modul  $M$ , der flach über  $A$  ist, gilt

$$\mathrm{fd}_B(M) \leq d.$$

Insbesondere hat  $M$  aufgefasst als Komplex in  $\mathbf{D}_c^b(B)$  endliche flache Dimension.

ii) Hat  $K^\cdot$  endliche injektive Dimension über  $A$ , so hat auch  $\varphi^* K^\cdot := K^\cdot \otimes_A B$  endliche injektive Dimension über  $B$ .

Beweis: i) Da  $M$  ein endlicher  $B$ -Modul ist, gilt  $\mathrm{fd}_B(M) = \mathrm{pd}_B(M)$ . Im Folgenden bezeichne  $k$  den Restekörper von  $A$ . Nach Voraussetzung ist  $M$  ein flacher  $A$ -Modul und  $\varphi$  ein flacher Ringhomomorphismus. Daher liefert [[Gro65], Kapitel 4, Abschnitt 6, Satz 6.2.3] die Gleichung

$$\mathrm{pd}_B(M) = \mathrm{pd}_{B \otimes_A k}(M \otimes_A k) = \mathrm{pd}_{\bar{B}}(M/\mathfrak{m}_A M).$$

Nach Voraussetzung ist  $\bar{B}$  regulär; ferner ist offensichtlich  $\bar{M} := M/\mathfrak{m}_A M$  ein endlicher  $\bar{B}$ -Modul. Nach dem Theorem von Auslander-Buchsbaum-Serre 0.4.15 ist daher  $\mathrm{pd}_{\bar{B}}(\bar{M})$  endlich und es gilt

$$\mathrm{pd}_{\bar{B}}(\bar{M}) \leq \dim(\bar{B}) = d.$$

ii) Wegen 2.1.8 gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\mathrm{Ext}_A^i(k, K^\cdot) = 0$  für  $i \geq n_0$ . Da  $k$  insbesondere ein endlicher  $A$ -Modul und  $\varphi$  flach ist, folgt daraus

$$\mathrm{Ext}_B^i(k \otimes_A B, K^\cdot \otimes_A B) \cong \mathrm{Ext}_A^i(k, K^\cdot) \otimes_A B = 0 \quad \forall i \geq n_0 \quad (*)$$

Wir wollen zeigen, dass auch  $\mathrm{Ext}_B^i(B/\mathfrak{m}_B, \varphi^* K^\cdot)$  verschwindet für genügend große  $i$ . Dazu betrachten wir die Koszulauflösung von  $k_B := B/\mathfrak{m}_B$ :

$$0 \rightarrow \bar{B}^{i_n} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{B}^{i_0} \rightarrow \bar{B} \rightarrow k_B \rightarrow 0.$$

Wir zerlegen diese exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen von  $\bar{B}$ -Moduln

$$0 \rightarrow K_0 \rightarrow \bar{B} \rightarrow k_B \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow K_{j+1} \rightarrow \bar{B}^{i_j} \rightarrow K_j \rightarrow 0, 0 \leq j < n$$

Für  $j = 0, \dots, n-1$  erhalten wir aus den langen exakten Ext-Sequenzen wegen (\*) Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}_B^i(K_{j+1}, \varphi^* K^\cdot) \cong \mathrm{Ext}_B^{i+1}(K_j, \varphi^* K^\cdot) \quad \forall i \geq n_0.$$

Für  $i \geq n_0$  ergibt sich aus (\*) ferner

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Ext}_B^i(\bar{B}^{i_n}, \varphi^* K^\cdot) \\ &\cong \mathrm{Ext}_B^i(K_n, \varphi^* K^\cdot) \\ &\cong \mathrm{Ext}_B^{i+1}(K_{n-1}, \varphi^* K^\cdot) \\ &\cong \dots \\ &\cong \mathrm{Ext}_B^{i+n}(K_0, \varphi^* K^\cdot) \end{aligned}$$

Aus der langen exakten Ext-Sequenz zu  $0 \rightarrow K_0 \rightarrow \bar{B} \rightarrow k_B \rightarrow 0$  folgt schließlich

$$\mathrm{Ext}_B^{i+n+1}(k_B, \varphi^* K^\cdot) \cong \mathrm{Ext}_B^{i+n}(K_0, \varphi^* K^\cdot) = 0 \quad \forall i \geq n_0.$$

Wegen 2.1.8 hat daher auch  $\varphi^* K^\cdot$  endliche injektive Dimension.  $\square$

Wir können nun die folgende Aussage zeigen:

**2.2.12 Satz:** Sei  $\pi : X \rightarrow S$  eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$  und  $\mathcal{M}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul, welcher flach und eigentlich über  $S$  liegt.  $L\pi_\#$  sei der (von  $\mathcal{M}$  abhängige) Funktor aus 2.2.4. Dann ist für alle  $\mathcal{L}^\cdot \in \mathbf{D}_c^b(X)$

$$L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot) \cong R\pi_* R\mathcal{H}om^\cdot(\mathcal{M}, \mathcal{L}^\cdot \otimes \omega_{X/S})[d],$$

wobei  $\omega_{X/S} = \bigwedge^d \Omega_{X/S}$  die relative kanonische Garbe auf  $X$  bezeichnet. Insbesondere ist dann

$$L^i \pi_\#(\mathcal{L}^\cdot) \cong \mathrm{Ext}_\pi^{d+i}(\mathcal{M}, \mathcal{L}^\cdot \otimes \omega_{X/S}).$$

**2.2.13 Bemerkung:** Für den Spezialfall  $\mathcal{M} := \mathcal{O}_X$  vereinfacht sich der Isomorphismus in 2.2.12 zu

$$L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot) \cong R\pi_*(\mathcal{L}^\cdot \otimes \omega_{X/S})[d].$$

In diesem Fall ist die  $i$ -te Kohomologie von  $L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot)$  gegeben durch das  $(d+i)$ -te höhere Bild von  $\mathcal{L}^\cdot \otimes \omega_{X/S}$  unter  $\pi$ .

Beweis von 2.2.12: Es sei  $\mathcal{K}_S$  ein dualisierender Komplex auf  $S$ ,  $D_S$  der zugehörige dualisierende Funktor und  $D_X$  der dualisierende Funktor zu  $\mathcal{K}_X := \pi^* \mathcal{K}_S \otimes \omega_{X/S}[d]$ . Dies ist ein dualisierender Komplex auf  $X$ , da  $\pi$  glatt und eigentlich ist [[Har66], Kapitel 5, Theorem 8.3]. Für den Beweis des Satzes wollen wir die Dualitätsaussage aus [Har66] resp. [RR74] für eigentliche glatte Morphismen verwenden. Diese besagt, dass es auf  $\mathbf{D}_c^-(X)$  einen Isomorphismus von Funktoren

$$D_S R\pi_* \cong R\pi_* D_X$$

gibt. Für einen Beweis sei auf [[Har66], Kapitel 7, Abschnitt 4, Korollar 4.3 und [RR74]] verwiesen. Damit die Dualität auf

$$L\pi_\#(\mathcal{L}^\cdot) = D_S R\pi_* R\mathcal{H}om_X(\mathcal{L}^\cdot, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{K}_S)$$

anwendbar ist, muss der Komplex

$$\mathcal{R} := R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{K}_S)$$

nach rechts beschränkt sein. Da  $\pi$  glatt ist und somit insbesondere flach, ist der Funktor  $\pi^* -$  exakt; weil  $\mathcal{M}$  endliche flache Dimension hat [vgl. 2.2.11i)], ergibt sich aus Lemma 2.2.10ii)+iii) und [[Har66], Kapitel 2, Satz 5.14] daher

$$\mathcal{R} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{M} \otimes \pi^* \mathcal{K}_S) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \pi^* \mathcal{K}_S) \otimes \mathcal{M}.$$

Dieser Komplex ist sogar beidseitig beschränkt: wegen 2.1.11 folgt aus 2.2.11i), dass  $\mathcal{M}$  endliche flache Dimension besitzt; desweiteren garantiert 2.2.11ii), dass der Komplex  $\pi^* \mathcal{K}_S$  endliche injektive Dimension auf  $S$  hat. Wir können also annehmen, dass  $\pi^* \mathcal{K}_S$  ein beschränkter Komplex injektiver Moduln ist und  $\mathcal{M} \cong \mathcal{F}$  ein beschränkter Komplex von flachen Moduln. Ist nun  $\mathcal{L}$  ebenfalls beschränkt, so offensichtlich auch

$$\mathcal{R} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \pi^* \mathcal{K}_S) \otimes \mathcal{M} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \pi^* \mathcal{K}_S) \otimes \mathcal{F};$$

insbesondere ist  $\mathcal{R} \in \mathbf{D}_c^-(X)$ . Wir wollen  $\mathcal{R}$  weiter vereinfachen. Da  $\omega_{X/S}$  lokal frei vom Rang 1 ist, folgt aus [[Har66], Kapitel 2, Satz 5.16] und der Wahl von  $D_X$

$$R\mathcal{H}om(\mathcal{L}, \pi^* \mathcal{K}_S) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d], \pi^* \mathcal{K}_S \otimes \omega_{X/S}[d]) = D_X(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d]).$$

Also hat  $\mathcal{R}$  die Darstellung

$$\mathcal{R} \cong D_X(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d]) \otimes \mathcal{M} \quad (**).$$

Nun ergibt sich die Behauptung des Satzes aus der folgenden Kette von Isomorphismen:

$$\begin{aligned} L\pi_*(\mathcal{L}) &= D_S R\pi_* \mathcal{R} \\ &\cong D_S R\pi_*(D_X(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d]) \otimes \mathcal{M}) \\ &\cong R\pi_* D_X(D_X(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d]) \otimes \mathcal{M}) \\ &\cong R\pi_* R\mathcal{H}om(\mathcal{M}, D_X^2(\mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d])) \\ &\cong R\pi_* R\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{L} \otimes \omega_{X/S}[d]). \end{aligned}$$

Sie folgen der Reihe nach aus (\*\*), [[Har66], Kapitel 7, Abschnitt 4, Korollar 4.3], [[Har66], Kapitel 5, Satz 2.6b)] und Definition 2.2.3i).  $\square$

**2.2.14 Bemerkung:** Die im Beweis von 2.2.12 angewandten Sätze aus [Har66] gelten mit den entsprechenden Anpassungen genauso für komplexe Räume. Die Dualitätsaussage für eigentliche Morphismen wurde in [RR74] speziell für den analytischen Fall gezeigt. Aus [RR74] und [RR70] folgen auch die anderen im Beweis verwendeten Aussagen für Morphismen komplexer Räume.

## 2.3 Der Kotangentenkomplex

In diesem Abschnitt wollen wir die wesentlichen Existenzaussagen und Eigenschaften über den sogenannten *Kotangentenkomplex* für komplexe Räume wiederholen, die in dieser Arbeit verwendet werden. Die Darstellung beschränkt

sich dabei auf die Eigenschaften des Kotangentenkomplexes, da für die Konstruktion Aussagen über simpliziale Schemata steinscher Kompakta und der Begriff der *Resolvente* eines gegebenen Morphismus komplexer Räume benötigt werden, auf die in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen wird.

Im Folgenden sei  $f : X \rightarrow S$  ein (fest gewählter) Morphismus komplexer Räume. Der Kotangentenkomplex  $\mathbb{L}_{X/S}$  von  $X$  über  $S$  ist qualitativ eine (bis auf Quasi-Isomorphie eindeutige) Auflösung des Kotangentialmoduls  $\Omega_{X/S}^1$ . Für die Konstruktion von  $\mathbb{L}_{X/S}$  sei auf [[Fle78], Kapitel 1, Paragraph 2] verwiesen. Wir erinnern daran, dass  $\mathbb{L}_{X/S} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(X)$  ein nach rechts beschränkter Komplex mit kohärenter Kohomologie ist und dass man  $\mathbb{L}_{X/S}$  durch einen Komplex flacher Moduln repräsentieren kann [siehe auch [BF03], Abschnitt 2, 2.38]. Einleitend sei das folgende Beispiel gegeben.

**2.3.1 Beispiel:** Ist  $\pi : X \rightarrow S$  glatt, so ist der Kotangentialmodul  $\Omega_{X/S}^1$  selbst bereits ein Repräsentant für den Kotangentenkomplex  $\mathbb{L}_{X/S}$ , i.e.  $\mathbb{L}_{X/S} \in \mathbf{D}_c^-(X)$  wird repräsentiert durch einen im Grad 0 konzentrierten Komplex  $\mathcal{K}$  mit  $\mathcal{K}^0 \cong \Omega_{X/S}^1$ . Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass für einen glatten Morphismus die Resolvente trivial gewählt werden kann [vgl. [Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 1, Teil C, Beweis von Satz 1.15 und Abschnitt 2, Teil C, insbesondere Satz 2.21].

**2.3.2 Satz:** *Der Kotangentenkomplex  $\mathbb{L}_{X/S}$  ist bis auf Isomorphie in  $\mathbf{D}(X)$  eindeutig bestimmt. Die Konstruktion ist ferner funktoriell bezüglich Abbildungen komplexer Räume, das heißt*

i) *zu jedem kommutativen Diagramm der Form*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

*gibt es eine kanonische Abbildung*

$$\mathbb{L}_g : Lg^*(\mathbb{L}_{X/S}) \longrightarrow \mathbb{L}_{X'/S'},$$

ii) *ist*

$$\begin{array}{ccc} X'' & \xrightarrow{h} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'' & \longrightarrow & S' \end{array}$$

*ein weiteres kommutatives Diagramm und bezeichnen  $\mathbb{L}_h$  und  $\mathbb{L}_{g \circ h}$  die induzierten kanonischen Abbildungen, so gilt*

$$\mathbb{L}_h \circ h^*(\mathbb{L}_g) = \mathbb{L}_{g \circ h}.$$

*Die in i) gegebene induzierte Abbildung ist wie folgt mit Faserprodukten verträglich: ist  $X' = X \times_S S'$  das Faserprodukt von  $X$  und  $S' \rightarrow S$  und ist eine der Abbildungen  $X \rightarrow S$ ,  $S' \rightarrow S$  flach, so ist die zur ersten Projektion  $\pi_X$  gehörige Abbildung  $\mathbb{L}_{\pi_X}$  ein Quasiisomorphismus.*

Beweis: Der erste Teil ist genau [[Fle78], Abschnitt 2, Teil C, Satz 2.17]. Die Verträglichkeit mit Faserprodukten folgt aus [[Fle78], Abschnitt 2, Teil C, Satz 2.26].  $\square$

Mit dem Kotangentenkomplex können wir nun die sogenannten *Kotangentenfunkto-*  
*ren* definieren.

**2.3.3 Definition:** Sei  $X \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume und  $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(X)$ . Dann definiert man

$$\mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}) := \mathrm{Ext}^i(\mathbb{L}_{X/S}, \mathcal{F})$$

$$\mathcal{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}) := \mathcal{E}xt^i(\mathbb{L}_{X/S}, \mathcal{F})$$

Aus den Definitionen folgt sofort, dass die Kotangentenfunkto-  
ren  $\mathbb{T}_{X/S}^i(-)$  für eine exakte Sequenz von  $\mathcal{O}_X$ -Moduln

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\dots \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}') \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}'') \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^{i+1}(\mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

induzieren. Dies gilt analog für die Funkto-  
ren  $\mathcal{T}_{X/S}^i(-)$ .

Im Folgenden seien die wichtigsten Eigenschaften des Kotangentenkomplexes  
und der Kotangentenfunkto-  
ren zusammengefasst.

**2.3.4 Satz:** *i) Man hat kanonische Isomorphismen*

$$\mathbb{T}_{X/S}^0(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{F}) \text{ und } \mathcal{T}_{X/S}^0(\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}om_X(\Omega_{X/S}^1, \mathcal{F}).$$

*ii) Die Moduln  $\mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F})$  sind stets kohärent auf  $X$  und verschwinden für  $i < 0$ .*

*iii) Für einen glatten Morphismus  $X \rightarrow S$  ist  $\mathcal{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}) = 0$  für alle  $i \neq 0$ .*

*iv) Ist  $j : Z \rightarrow S$  eine abgeschlossene Einbettung und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_S$  die definierende Idealgarbe, so gilt*

$$\mathbb{T}_{Z/S}^1(\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{F}) \text{ und } \mathcal{T}_{Z/S}^1(\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}om_Z(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \mathcal{F})$$

und

$$\mathbb{T}_{Z/S}^0(\mathcal{F}) = 0 \text{ und } \mathcal{T}_{Z/S}^0(\mathcal{F}) = 0.$$

Beweis: Behauptungen i) – iii) findet man in [[Fle78], Abschnitt 2, Abschnitt C, Satz 2.21]. Der erste Teil der vierten Aussage wird dort ebenfalls bewiesen. Ebenso ergibt sich aus dem Beweis, dass auch der nullte Tangentenfunktor für abgeschlossene Einbettungen verschwindet: nach [[Fle78], Kapitel 1, Satz 2.21(6)] ist halmweise  $\mathcal{H}^0(\mathbb{L}_{Z/X_S}) = 0$ . Wegen  $\mathbb{L}_{Z/S} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(Z)$  folgt mit 2.2.7 dann

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{Z/S}^0(\mathcal{F}) &= \mathrm{Ext}_Z^0(\mathbb{L}_{Z/S}, \mathcal{F}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_Z(\mathcal{H}^0(\mathbb{L}_{Z/S}), \mathcal{N}) = 0. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Aussage für den Funktor  $\mathcal{T}_{Z/S}^0$ .  $\square$

Mit den Kotangentenfunktoren lassen sich die in Kapitel 1 definierten Automorphismen- und Erweiterungsmoduln beschreiben. Genauer gilt:

**2.3.5 Satz:** *Sei  $X \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Für die in Bemerkung 1.1.4 eingeführten Moduln  $\text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{F})$  und  $\text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{F})$  gibt es kanonische Isomorphismen*

$$\text{Aut}_\Sigma(S, \mathcal{F}) \cong \mathbb{T}_{X/S}^0(\mathcal{F}) \text{ und } \text{Ex}_\Sigma(S, \mathcal{F}) \cong \mathbb{T}_{X/S}^1(\mathcal{F})$$

*Die angegebenen Isomorphismen sind funktoriell in  $\mathcal{F}$ . Desweiteren wird durch*

$$\text{Ob}_\Sigma(S, \mathcal{F}) := \mathbb{T}_{X/S}^2(\mathcal{F})$$

*eine Obstruktionstheorie der Deformationstheorie für komplexe Räume aus Beispiel 1.1.7i) definiert.*

Beweis: Dies ergibt sich aus [[Fle78], Abschnitt 3, Teil C, Satz 3.11 und Satz 3.16] mit  $f = \text{id}$ .  $\square$

Abschließend wollen wir die Kotangentenkomplexe vergleichen, die sich bei einer Kette von holomorphen Abbildungen  $X \rightarrow S \rightarrow \Sigma$  ergeben.

**2.3.6 Satz:** *Seien  $X \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} \Sigma$  holomorphe Abbildungen komplexer Räume. Dann gibt es für geeignete Repräsentanten der Kotangentenkomplexe eine exakte Sequenz von Komplexen*

$$0 \rightarrow Lf^*(\mathbb{L}_{S/\Sigma}) \rightarrow \mathbb{L}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbb{L}_{X/S} \rightarrow 0$$

*Diese Sequenz induziert für jeden  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{F}$  eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{T}_{X/\Sigma}^i(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Ext}^i(Lf^*(\mathbb{L}_{S/\Sigma}), \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{T}_{X/S}^{i+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \dots,$$

*analog für die Funktoren  $\mathcal{T}^i$  und  $\text{Ext}^i$ .*

Beweis: [[Fle78], Abschnitt 2, Teil C, Satz 2.25].  $\square$

## 2.4 $S$ -Auflösungen und darstellbare Deformationen

In diesem Abschnitt wird nun der Begriff der  $S$ -Auflösung eines gegebenen Objekts  $a \in \mathbf{F}(S)$  definiert. Eine  $S$ -Auflösung ist von zentraler Bedeutung für die expliziten Berechnungen einiger Kotangentialmoduln, die später betrachtet werden. Es sei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine globale Deformationstheorie und  $a$  ein Objekt über einem komplexen Raum  $S$ .

**2.4.1 Definition:** Ein Objekt  $a$  über  $S := p(a)$  heißt *darstellbar über  $S$* , wenn es einen Komplex  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(S)$  gibt zusammen mit Funktorisomorphismen

$$(RA) \quad \text{Aut}_\Sigma(a/S, -) \cong \text{Ext}_S^0(\mathcal{K}, -)$$

und

$$(RE) \quad \mathcal{E}x_{\Sigma}(a/S, -) \cong \mathcal{E}xt_S^1(\mathcal{K}, -).$$

von Funktoren auf  $\mathbf{Coh}(S)$ , die mit Restriktionen auf  $\mathbb{Z}$ -offenen Mengen  $U \subset S$  verträglich sind. Jeden solchen Komplex  $\mathcal{K}$  bezeichnet man auch als *S-Auflösung von a*. Wird ferner durch

$$(RO) \quad \mathcal{O}b_{\Sigma}(a/S, -) := \mathcal{E}xt_S^2(\mathcal{K}, -),$$

eine Obstruktionstheorie im Sinne von 1.4.3 und 1.4.4 definiert, so nennt man  $\mathcal{K}$  eine *mit Obstruktionen verträgliche S-Auflösung* oder kurz eine *obstruierende S-Auflösung von a*.

**2.4.2 Bemerkung:** i) Die Forderung, dass die Isomorphismen mit Restriktionen verträglich sein sollen, bedeutet explizit, dass für jede Inklusion  $V \subset U$  von offenen Teilmenge von  $S$  die Restriktionsabbildungen  $\rho_{UV}$  ein kommutatives Diagramm von natürlichen Transformationen wie folgt induzieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}ut_{\Sigma}(a|_U/U, -) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}xt_U^0(\mathcal{K}|_U, -) \\ \rho_{UV} \downarrow & & \rho_{UV} \downarrow \\ \mathcal{A}ut_{\Sigma}(a|_V/V, -) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}xt_V^0(\mathcal{K}|_V, -). \end{array}$$

Ein analoges Diagramm ergibt sich für  $\mathcal{E}x_{\Sigma}(a/S, -)$  und  $\mathcal{O}b_{\Sigma}(a/S, -)$ .

ii) Aus i) folgt unmittelbar, dass sich die Isomorphismen  $(RA)$ ,  $(RE)$  auf die Funktoren  $\mathcal{A}ut_{\Sigma}(a/S, -)$  und  $\mathcal{E}x_{\Sigma}(a/S, -)$  übertragen; dies liefert für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  Garbenisomorphismen

$$(RA) \quad \mathcal{A}ut_{\Sigma}(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathcal{E}xt_S^0(\mathcal{K}, \mathcal{N})$$

und

$$(RE) \quad \mathcal{E}x_{\Sigma}(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathcal{E}xt_S^1(\mathcal{K}, \mathcal{N}),$$

die funktoriell bezüglich  $\mathcal{N}$  sind. Ferner definiert

$$(RO) \quad \mathcal{O}b_{\Sigma}(a/S, -) := \mathcal{E}xt_S^2(\mathcal{K}, -)$$

eine Obstruktionstheorie im Sinne von 1.4.3, falls  $\mathcal{K}$  eine obstruierende *S-Auflösung* ist.

iii) Später werden für viele Beispiele explizit *S-Auflösungen* konstruiert. Ein allgemeines Kriterium für die Existenz einer *S-Auflösung* gibt es jedoch nicht. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass eine *S-Auflösung*  $\mathcal{K}$  eines gegebenen Objekts  $a \in \mathbf{F}(S)$ , sofern sie existiert, nicht eindeutig ist.

Wir wollen aus bereits bekannten Eigenschaften der  $\mathcal{E}xt$ -Funktoren einige Eigenschaften für *S-Auflösungen* herleiten. Als sehr nützlich erweist sich der 0-te Kohomologie-Modul  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$ : den Träger dieses  $\mathcal{O}_S$ -Moduls bilden genau die Punkte  $s$ , für die  $a_s$  nichttriviale infinitesimale Automorphismen besitzt. Es bezeichne  $A_a := \{s \in S \mid \mathcal{A}ut_{(\Sigma, 0)}(a_s, \mathbb{C}) \neq 0\}$ .

**2.4.3 Satz:** Ist  $\mathcal{K}$  eine  $S$ -Auflösung von  $a \in \mathbf{F}(S)$  und  $\mathcal{N}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_S$ -Modul, so gilt:

i)  $A_a = \text{supp } \mathcal{H}^0(\mathcal{K})$ . Insbesondere ist  $U := S \setminus A_a$  eine Zariski-offene Teilmenge von  $S$ .

ii) Es gibt in  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$  funktorielle Isomorphismen

$$\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N})$$

und

$$\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N}).$$

iii) Auf  $U := S \setminus A_a$  ist  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})|_U \cong \text{Hom}_U(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})|_U, \mathcal{N}|_U)$ .

iv)  $\text{supp } \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \subset A_a$

v)  $\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N})$  ist kohärent.

Beweis: Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus 2.2.7. Weiter folgt iii) aus i), da auf  $U$  die Kohomologiemoduln  $\mathcal{H}^i(\mathcal{K})$  für alle  $i \geq 0$  verschwinden. Um iv) zu zeigen, betrachten wir ein  $s \in U = S \setminus A_a$ . Dann ist aber wegen i)  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s = 0$  und aus ii) folgt

$$\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})_s \cong \text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N})_s \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s, \mathcal{N}_s) = 0.$$

Aussage v) folgt aus der Kohärenz von  $\mathcal{E}xt_S^i(\mathcal{K}, \mathcal{N})$  und der Kodaira-Spencer-Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{D}er_\Sigma(S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$$

Nun bleibt Aussage i) zu zeigen. Dazu sei zunächst  $s \in S$  ein beliebiger Punkt in  $S$ . Aus ii) folgt für den Halm in  $s$ :

$$\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})_s \cong \text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N})_s \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s, \mathcal{N}_s).$$

Andererseits ist nach Bemerkung 1.2.4ii)

$$\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})_s \cong \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}((a, s)/(S, s), \mathcal{N}_s)$$

Sei nun  $\mathcal{N} := \mathbb{C}_s$ . Zusammen mit 1.2.12 folgt dann

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(a_s, \mathbb{C}) &\cong \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}((a, s)/(S, s), \mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s, \mathbb{C}) \\ &= (\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s \otimes \mathbb{C})^\vee = (\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s \otimes \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s)^\vee \cong (\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s/\mathfrak{m}_s)^\vee \end{aligned}$$

Behauptung i) folgt nun leicht aus dem Lemma von Nakayama.  $\square$

**2.4.4 Bemerkung:** Aus 2.4.3ii) folgt leicht, dass eine  $S$ -Auflösung zumindest im Grad 0 bis auf Quasiisomorphie eindeutig bestimmt ist: sind  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  zwei  $S$ -Auflösungen, so ist nämlich

$$\text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}_1), \mathcal{N}) \cong \text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}_2), \mathcal{N}).$$

Dies impliziert  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K}_1) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{K}_2)$ .

**2.4.5 Bemerkung:** Besitzt  $a$  eine globale obstruierende  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$ , so gilt stets die Offenheit der Versalität für  $a$ . Dies folgt unmittelbar daraus, dass die Funktoren  $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{K}, -)$  kohärenzerhaltend sind und das generische Prinzip erfüllen [siehe Bemerkung 2.2.2].

Als nächstes soll der Begriff der  $S$ -Auflösung auf formale und lokale Deformationstheorien übertragen werden. Dazu betrachten wir die folgende Situation:  $p : \widehat{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma, 0)}$  sei eine formale Deformationstheorie und  $\bar{a} \in \mathbf{F}(\bar{S})$  ein Objekt über dem formalen Raumkeim  $\bar{S}$ . Mit  $\mathbf{D}_c^{\leq b}(\bar{S})$  bezeichnen wir die derivierte Kategorie von  $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\bar{S}})$ , dessen Komplexe  $\bar{K}$  endlich erzeugte Kohomologiemoduln  $H^i(K)$  haben, die für  $i > b$  verschwinden. Wegen 0.4.11 können wir stets annehmen, dass die Komplexe in  $\mathbf{D}_c^{\leq b}(\bar{S})$  Komplexe endlich erzeugter  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln sind.

**2.4.6 Definition:** Ein Komplex  $\bar{K} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(\bar{S})$  endlicher  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln heißt (*formale*)  $\bar{S}$ -*Auflösung* von  $\bar{a}$ , wenn es auf der Kategorie  $\mathbf{Art}(\mathcal{O}_{\bar{S}})$  der Artinschen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln Funktorisomorphismen  $(RA)$  und  $(RE)$  wie in Definition 2.4.1 gibt für  $\bar{a}$ ,  $\bar{S}$  und  $\bar{K}$  anstelle von  $a$ ,  $S$  und  $\mathcal{K}$ . In diesem Fall nennt man  $\bar{a}$  (*formal*)  $\bar{S}$ -*darstellbar* oder kurz *formal darstellbar*. Ist ferner durch

$$(RO) \quad \text{Ob}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}/\bar{S}, N) := \text{Ext}^2(\bar{K}, N)$$

für Artinsche Moduln  $N$  eine Obstruktionstheorie für  $\bar{a}$  definiert, so bezeichnet man  $\bar{K}$  als eine *mit Obstruktionen verträgliche formale  $\bar{S}$ -Auflösung* oder kurz als eine *obstruierende (formale)  $\bar{S}$ -Auflösung* von  $\bar{a}$ .

**2.4.7 Bemerkung:** Unter einer  $\bar{S}$ -*Auflösung* einer formalen Deformationen  $\bar{a} \in \widehat{\mathbf{F}}(\bar{S})$  von  $a_0$  wollen wir im Folgenden stets eine formale  $\bar{S}$ -Auflösung des Objektes  $\bar{a}$  über  $\bar{S}$  verstehen. Später werden wir zeigen, dass solche  $\bar{S}$ -Auflösungen stets mit den durch  $a_0 \hookrightarrow \bar{a}$  induzierten Abbildungen auf den Aut- und Ex-Funktoren verträglich sind [vgl. Satz 2.4.9].

Aus der Definition ersieht man sofort, dass  $\bar{S}$ -Auflösungen nicht eindeutig bestimmt sind. Lediglich im Grad 0 sind sie (bis auf Quasiisomorphie) eindeutig bestimmt; dies folgt aus dem gleichen Argument wie in 2.4.4. Da die Ext-Moduln nur von der Quasiisomorphieklasse der  $\bar{S}$ -Auflösung  $\bar{K}$  abhängen, können wir zur Berechnung der Aut und Ex-Moduln stets die minimale freie Auflösung von  $\bar{K}$  aus Definition 0.4.12 betrachten. Da es zu einem Objekt  $\bar{a}$  jedoch keine eindeutige  $\bar{S}$ -Auflösung gibt, kann es im Allgemeinen auch mehrere minimale  $\bar{S}$ -Auflösungen für  $\bar{a}$  geben. Wir wollen die minimalen Auflösungen zu einem vorgegebenen Objekt  $\bar{a}$  vergleichen.

**2.4.8 Satz:** Seien  $(\bar{M}_1, \partial_1)$  und  $(\bar{M}_2, \partial_2)$  zwei minimale  $\bar{S}$ -Auflösungen eines Objektes  $\bar{a} \in \widehat{\mathbf{F}}(\bar{S})$ . Dann gilt für  $i = 0, -1$ :

- i) Die Moduln  $\bar{M}_1^i$  und  $\bar{M}_2^i$  sind isomorph als abstrakte  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln. Insbesondere ist  $\text{rk } \bar{M}_1^i = \text{rk } \bar{M}_2^i$ .
- ii) Es gibt (nichtkanonische) Isomorphismen  $\text{coker}(\partial_1^{i-1}) \cong \text{coker}(\partial_2^{i-1})$ .

Beweis: i) Da  $\bar{M}_1$  und  $\bar{M}_2$   $\bar{S}$ -Auflösungen sind, ist für jeden Artinschen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modul  $N$

$$\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, N) \cong \mathrm{Ext}^0(\bar{M}_1, N) \cong \mathrm{Ext}^0(\bar{M}_2, N)$$

und analog

$$\mathrm{Ext}^1(\bar{M}_1, N) \cong \mathrm{Ext}^1(\bar{M}_2, N).$$

Da die  $\bar{S}$ -Auflösungen minimal sind, folgt mit 2.1.4 weiter

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{M}_1^i, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_1, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{M}_2^i, \mathbb{C}).$$

Dies impliziert insbesondere, dass die  $\mathbb{C}$ -Vektorräume  $\bar{M}_1^i \otimes \mathbb{C}$  und  $\bar{M}_2^i \otimes \mathbb{C}$  isomorph sind. Weil die Moduln  $\bar{M}_j^i$  frei vom endlichen Rang sind, gilt  $\mathrm{rk} \bar{M}_j^i = \dim_{\mathbb{C}} \bar{M}_j^i \otimes \mathbb{C}$ . Daraus folgt die Behauptung.

ii) Wir betrachten die folgende Komposition natürlicher Transformationen:

$$\varphi : \mathrm{Hom}(\mathrm{coker} \partial_2^{i-1}, -) \xrightarrow{\tilde{\partial}_2^i} \mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_2, -) \cong \mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_1, -).$$

$\tilde{\partial}_2^i$  bezeichnet dabei die durch  $\partial_2^i$  induzierte Abbildung aus 2.1.4; der Isomorphismus der  $\mathrm{Ext}^{-i}$ -Funktoren ergibt sich wie in i) aus der Definition der  $\bar{S}$ -Auflösung. Da  $\mathrm{coker} \partial_2^{i-1}$  ein semidarstellender Modul ist für  $\mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_2, -)$ , ist  $\varphi(N)$  surjektiv für jeden Artinschen  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modul  $N$  und injektiv für  $N = \mathbb{C}$ . Weil aber  $\mathrm{Ext}^{-i}(\bar{M}_1, -)$  durch  $\mathrm{coker} \partial_1^{i-1}$  semidargestellt wird, folgt die Behauptung aus Satz 2.1.5iii) und Bemerkung 2.1.6.  $\square$

Als Nächstes wollen wir untersuchen, wie formale Auflösungen von Deformationen eines Objekts  $a_0$  mit Abbildungen formaler Deformationen  $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$  verträglich sind.

**2.4.9 Satz:** *Ist  $f : \bar{a} \rightarrow \bar{b}$  eine Abbildung von Deformationen von  $a_0$  und ist  $(\bar{L}, \bar{h})$  eine  $\bar{T}$ -Auflösung von  $\bar{b}$  über  $\bar{T}$ , so ist  $f^* \bar{L} := \bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}}$  eine  $\bar{S}$ -Auflösung von  $\bar{a}$ . Eine minimale  $\bar{T}$ -Auflösung  $\bar{L}$  wird dabei in eine minimale  $\bar{S}$ -Auflösung  $f^* \bar{L}$  überführt.*

Beweis: Aus der Definition des derivierten Tensorprodukts folgt unmittelbar  $f^* \bar{L} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(\bar{S})$ . Es ist zu zeigen, dass es Funktorisomorphismen

$$\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, -) \cong \mathrm{Ext}^0(f^* \bar{L}, -)$$

und

$$\mathrm{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, -) \cong \mathrm{Ext}^1(f^* \bar{L}, -)$$

gibt auf  $\mathbf{Art}(\mathcal{O}_{\bar{S}})$ . Wir beschränken uns für den Beweis auf die erste Isomorphie; die zweite Isomorphie zeigt man völlig analog.

Sei zunächst  $N$  ein beliebiger Artinscher  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modul. Wegen 1.2.14 gibt es eine Bijektion

$$\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, N) \cong \mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{b}/\bar{T}, N)$$

Nach Voraussetzung ist nun  $\bar{L}$  eine  $\bar{T}$ -Auflösung von  $\bar{b}$  und somit gilt

$$\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{b}/\bar{T}, N) \cong \mathrm{Ext}^0(\bar{L}, N)$$

Betrachten wir zunächst für beliebiges  $i \in \mathbb{Z}$  den Modul  $\text{Ext}^i(\bar{L}, N)$ . Ist  $\bar{F} \rightarrow \bar{L}$  eine freie Auflösung von  $\bar{L}$ , so gilt

$$\text{Ext}^i(\bar{L}, N) \cong H^i(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{T}}}(\bar{F}, N)).$$

Ferner gilt die Adjunktionsformel  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{T}}}(\bar{F}, N) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{F} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}, N)$ . Da  $\bar{F}$  eine freie Auflösung von  $\bar{L}$  ist, liefert  $\bar{F} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}$  eine freie Auflösung von  $\bar{L} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}$ . Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}/\bar{S}, N) &\cong \text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{b}/\bar{T}, N) \\ &\cong \text{Ext}^0(\bar{L}, N) \\ &\cong H^0(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{T}}}(\bar{F}, N)) \\ &\cong H^0(\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}(\bar{F} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}, N)) \\ &\cong \text{Ext}^0(\bar{L} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}, N) \end{aligned}$$

Man prüft nun leicht nach, dass diese Isomorphismen sowohl mit der  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Modulstruktur von  $N$  als auch mit Abbildungen  $N \rightarrow N'$  verträglich sind. Daher ist

$$\text{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\bar{a}/\bar{S}, N) \cong \text{Ext}^0(\bar{L} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}, N)$$

ein in  $N$  natürlicher  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Isomorphismus und somit die erste Behauptung bewiesen.

Sei nun  $\bar{L}$  eine minimale  $\bar{T}$ -Auflösung. Dann ist  $\bar{L}$  ein Komplex endlicher freier  $\mathcal{O}_{\bar{T}}$ -Moduln und somit  $\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}} = \bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}}$ . Ferner ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Tensorprodukts die Gleichheit

$$(\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}})^i = \bar{L}^i \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}};$$

insbesondere ist  $\text{rk}_{\mathcal{O}_{\bar{T}}}(\bar{L}^i) = \text{rk}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}((\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}})^i)$ . Um die Minimalität nachzuweisen, betrachten wir die Randabbildungen von  $f^*\bar{L}$ . Sei  $(\bar{h} \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}})^i$  eine solche Randabbildung. Nach Voraussetzung ist  $\bar{L}$  minimal; daher ist die  $i$ -te Randabbildung von  $\bar{L}$  durch eine Matrix  $(x_{kl})$  gegeben mit  $x_{kl} \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{\bar{T}}}$ . Aus der Definition des Tensorprodukts von Komplexen ergibt sich für die  $i$ -te Randabbildung von  $f^*\bar{L}$  nun

$$(\bar{h} \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}})^i = \bar{h}^i \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}}.$$

Bezeichnet nun  $f^* : \mathcal{O}_{\bar{T}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}$  den induzierten Homomorphismus analytischer Algebren, so ist die zu  $(\bar{h} \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}})^i$  gehörige Matrix gegeben durch

$$(x_{kl} \otimes 1)_{kl} = (1 \otimes f^*(x_{kl}))_{kl} = (f^*(x_{kl}))_{kl}.$$

Da  $f^*$  ein lokaler Ringhomomorphismus lokaler Noetherscher Ringe ist, liegen somit auch sämtliche Einträge der Matrix  $(f^*(x_{kl}))_{kl}$  im maximalen Ideal von  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ . Da  $i$  beliebig gewählt war, gilt dies für alle Randabbildungen von  $f^*\bar{L}$  und es folgt die behauptete Minimalität.  $\square$

**2.4.10 Satz:** *Ist in 2.4.9  $(\bar{L}, \bar{h})$  eine obstruierende  $\bar{T}$ -Auflösung von  $\bar{b}$ , so ist auch  $f^*\bar{L}$  eine mit Obstruktionen verträgliche  $\bar{S}$ -Auflösung, das heißt durch*

$$\text{Ob}(\bar{a}/\bar{S}, N) := \text{Ext}^2(\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}}, N)$$

*wird eine Obstruktionstheorie für  $\bar{a}$  definiert.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ex}(\bar{a}, N) & \xrightarrow{p_{\bar{S}}} & \mathrm{Ex}(\bar{S}, N) & \xrightarrow{ob_{\bar{S}}} & \mathrm{Ob}(\bar{a}/\bar{S}, N) := \mathrm{Ext}^2(\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}}, N) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \cong \\
\mathrm{Ex}(\bar{b}, N) & \xrightarrow{p_{\bar{T}}} & \mathrm{Ex}(\bar{T}, N) & \xrightarrow{ob_{\bar{T}}} & \mathrm{Ob}(\bar{b}/\bar{T}, N) = \mathrm{Ext}^2(\bar{L}, N)
\end{array}$$

die obere Zeile eine exakte Sequenz darstellt. Dabei bezeichnet  $f_*$  die durch  $f$  induzierten Abbildungen auf  $\mathrm{Ex}(\bar{a}, N)$  und  $\mathrm{Ex}(\bar{S}, N)$  aus 1.2.13. Diese sind mit den kanonischen Abbildungen  $p_{\bar{S}}$  und  $p_{\bar{T}}$  verträglich. Wegen

$$\mathrm{Ob}(\bar{a}/\bar{S}, N) := \mathrm{Ext}^2(\bar{L} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}}, N) \cong \mathrm{Ext}^2(\bar{L}, N),$$

folgt unmittelbar die Kommutativität des obigen Diagramms. Nach Voraussetzung ist  $\bar{L}$  obstruierend und somit die untere Zeile des Diagramms exakt. Per Diagrammjagd folgt leicht  $\mathrm{im} p_{\bar{S}} \subset \ker ob_{\bar{S}}$ .

Sei umgekehrt  $[S'] \in \mathrm{Ex}(\bar{S}, N)$  mit  $ob_{\bar{S}}([S']) = 0$ . Aus der Kommutativität des obigen Diagramms folgt dann  $[\bar{T}'] := f_*([S']) \in \ker ob_{\bar{T}}$ . Wegen der Exaktheit gibt es also ein  $[\bar{b}'] \in \mathrm{Ex}(\bar{b}, N)$  mit  $p_{\bar{T}}([\bar{b}']) = [\bar{T}']$ . Ferner ist per Definition  $[\bar{T}'] = f_*([S']) = [\bar{S}' \amalg_{\bar{S}} \bar{T}]$ . Es bezeichne  $\gamma : \bar{S}' \rightarrow \bar{T}'$  die kanonische Abbildung. Wir wollen nun zeigen, dass in dieser Situation  $\bar{a}' := \gamma^*(\bar{b}')$  ein gemeinsames Urbild von  $[S']$  unter  $p_{\bar{S}}$  und von  $[\bar{b}']$  unter  $f_*$  ist. Dazu betrachten wir das folgende würfelförmige Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
& & \bar{b} & \xrightarrow{\quad} & \bar{b}' \\
& \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{a} & & & & \bar{a}' \\
& \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
& & \bar{T} & \xrightarrow{\quad \epsilon \quad} & \bar{T}' \cong \bar{S}' \amalg_{\bar{S}} \bar{T} \\
& \nearrow \wr & \downarrow & \nearrow \wr & \\
& & \bar{S} & \xrightarrow{\quad g \quad} & \bar{S}'
\end{array}$$

Das untere Quadrat ist per Konstruktion kommutativ; ferner sind in der gegebenen Situation die übrigen Quadrate sämtlich kartesisch, da bei einer Deformationstheorie alle Morphismen kartesisch sind. Es reicht nun zu zeigen, dass  $\bar{a} \cong g^* \bar{a}'$  ist, denn dann ist sowohl  $p_{\bar{S}}([\bar{a}']) = [S']$  als auch  $f_*([\bar{a}']) = [\bar{a}' \amalg_{\bar{a}} \bar{b}] = [\bar{b}']$ . Dies folgt aber leicht aus der Kommutativität des unteren Quadrates im Diagramm; daraus ergibt sich nämlich

$$\bar{a} \cong f^* \bar{b} \cong f^* \epsilon^* \bar{b}' \cong (\epsilon \circ f)^* \bar{b}' \cong (\gamma \circ g)^* \bar{b}' \cong g^* \gamma^* \bar{b}' \cong g^* \bar{a}'.$$

Somit ist auch  $\ker ob_{\bar{S}} \subset \mathrm{im} p_{\bar{S}}$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

Im Folgenden sei eine kurze Zusammenfassung der entsprechenden Aussagen für lokale Deformationen gegeben. Dazu sei ab jetzt  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma, 0)}$  eine lokale Deformationstheorie und  $a \in \mathbf{F}(S)$  ein Objekt über dem Raumkeim  $S := (S, 0)$ .

**2.4.11 Definition:** Ein Komplex  $K^\cdot \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(S)$  heißt *(lokale)  $S$ -Auflösung* von  $a$  und  $a$  heißt  *$S$ -darstellbar*, wenn es Funktorisomorphismen  $(RA)$  und  $(RE)$  wie in Definition 2.4.1 für den Komplex  $K^\cdot$  von endlichen  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Moduln,  $a = (a, 0)$  und  $S$  gibt. Eine  $S$ -Auflösung  $K^\cdot$  heißt *mit Obstruktionen verträglich*, falls für  $K^\cdot$ ,  $a$  und  $S$  zusätzlich durch  $(RO)$  eine Obstruktionstheorie für  $a$  definiert wird.

**2.4.12** Sei  $S := (S, 0)$  ein Raumkeim,  $a \in \mathbf{F}(S)$  eine lokale Deformation von  $a_0$  und  $K^\cdot$  eine  $S$ -Auflösung von  $a$ . Dann gilt:

- i) Aus den Definitionen für lokale und globale  $S$ -Auflösungen und Bemerkung 1.2.4ii) folgt unmittelbar, dass für einen beliebigen Punkt  $s \in S$  der Halm  $\mathcal{K}_s$  einer globalen (obstruierenden)  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}^\cdot$  eine (obstruierende)  $(S, s)$ -Auflösung ist.
- ii)  $\hat{K}^\cdot$  ist eine  $\hat{S}$ -Auflösung von  $\hat{a}$ . Dies folgt unmittelbar aus der Isomorphie

$$(\mathrm{Ext}^i(K^\cdot, N))^\wedge \cong \mathrm{Ext}^i(\hat{K}^\cdot, \hat{N}) \quad \forall N \in \mathbf{Coh}(S)$$

und der Tatsache, dass die Funktoren  $\mathrm{Aut}(a/S, -)$  und  $\mathrm{Ex}(a/S, -)$  mit Komplettieren verträglich sind. Der oben angegebene Isomorphismus ist funktoriell in  $N$ , dass heißt ist  $f : N' \rightarrow N$  ein Homomorphismus von  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Moduln, so induziert dieser eine eindeutige Abbildung  $\hat{f} : \mathrm{Ext}^i(\hat{K}^\cdot, \hat{N}') \rightarrow \mathrm{Ext}^i(\hat{K}^\cdot, \hat{N})$ . Nun ergibt sich die Behauptung leicht aus den Definitionen für lokale und formale Auflösungen. Ferner ist  $\hat{K}^\cdot$  mit Obstruktionen verträglich, falls bereits  $K^\cdot$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung ist. Ebenso induziert eine minimale  $S$ -Auflösung  $K^\cdot$  von  $a$  eine minimale  $\hat{S}$ -Auflösung  $\hat{K}^\cdot$  von  $\hat{a}$ .

- iii) Mit den offensichtlichen Anpassungen gilt Satz 2.4.8 analog für lokale Deformationen  $a$  von  $a_0$ .
- iv)  $S$ -Auflösungen sind mit *endlichen* Abbildungen von lokalen Deformationen verträglich: ist  $f : a' \rightarrow a$  ein Morphismus über einer endlichen Abbildung komplexer Raumkeime  $S' := (S', 0) \rightarrow S$ , so ist  $K^\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{S'}}^\mathbb{L}$  eine  $S'$ -Auflösung von  $a'$ . Die Aussagen von Satz 2.4.9 und Satz 2.4.10 übertragen sich mit den entsprechenden Anpassungen auf den lokalen Fall.

## Kapitel 3

# Beweis des Hauptsatzes und Anwendungen

In diesem Kapitel wird der Darstellungssatz für Kotangententialmoduln verseller Basen formuliert und bewiesen. Zunächst wird der Satz für formale Deformationstheorien gezeigt und dann auf die lokale und globale Situation übertragen. In weiteren Abschnitten soll das Ergebnis auf verschiedene Beispiele angewandt werden. Der Satz liefert beispielsweise eine globale Darstellung des Kotangententialmoduls des Douady- und des Quotraums (mit den entsprechenden Anpassungen ebenso für das Hilbert- und Quotschema im algebraischen Fall). Desweiteren werden wir Deformationen von Moduln betrachten. Für die meisten Familien von Moduln gibt es keinen Modulraum; wir werden unter anderem die Familie der einfachen Moduln auf kompakten Räumen untersuchen. Es ist bekannt, dass diese Familie zumindest einen groben Modulraum besitzt. Der Hauptsatz erlaubt uns, eine lokale Aussage über die Kotangententialgarbe dieses Modulraums zu machen.

Weitere Beispiele sind gegeben durch die Deformation komplexer Räume und komplexer Mannigfaltigkeiten. Da in diesen Fällen die Konstruktion eines Modulraums aussichtslos ist, werden wir hier allgemeiner den Kotangententialmodul der semiuniversellen Basis  $S'$ , i.e. der Basis des semiuniversellen Objekts  $a'$ , untersuchen. Dies ermöglicht uns, Aussagen über die Glattheit von  $S'$  zu machen.

### 3.1 Lokaler Fall

In diesem Abschnitt sei  $\bar{p} : \bar{\mathbf{F}} \rightarrow \widehat{\mathbf{An}}_{(\Sigma,0)}$  eine formale Deformationstheorie und  $\bar{a}$  über  $\bar{S} := \bar{p}(\bar{a})$  stets eine formal verselle Deformation eines vorgegebenen Objektes  $a_0 \in F(S_0)$ . Mit  $\Sigma$  wird im Folgenden der Basiskeim  $(\Sigma, 0)$  bezeichnet. Ziel dieses Abschnittes ist, die folgende Aussage zu beweisen:

**3.1.1 Theorem:** *Ist  $\bar{a}$  darstellbar über  $\bar{S}$  und  $(\bar{K}, \bar{h})$  eine minimale Auflösung von  $\bar{a}$ , so ist die verselle Überschussdimension von  $\bar{a}$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} d &= \dim_{\mathbb{C}} T_0(\bar{S}) - \dim_{\mathbb{C}} (\bar{K}^{-1}/\mathfrak{m}_{\bar{S}}\bar{K}^{-1}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}} (\bar{K}^0/\mathfrak{m}_{\bar{S}}\bar{K}^0) \end{aligned}$$

und für den Kotangentenmodul gilt

$$\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \cong \text{coker } \bar{h}^{-2} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d.$$

Für den Beweis benötigen wir zwei Lemmata. In einer ersten Hilfsaussage werden die infinitesimalen Automorphismen und Erweiterungen  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  und  $\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  berechnet. Desweiteren wird in Lemma 3.1.3 die Darstellung des Kotangentenmoduls modulo dem freien direkten Summanden  $\mathcal{O}_{\bar{S}}^d$  bewiesen.

**3.1.2 Lemma:** *i) Mit den Voraussetzungen und Notationen von 3.1.1 gilt*

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(H^0(\bar{K}^\cdot), \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\text{coker } \bar{h}^{-1}, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\bar{K}^0, \mathbb{C})$$

und

$$\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\text{coker } \bar{h}^{-2}, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(\bar{K}^{-1}, \mathbb{C}).$$

Die vorgenannten Abbildungen sind Isomorphismen von  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln. Sie induzieren insbesondere  $\mathbb{C}$ -Vektorraumisomorphismen

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) \cong (\bar{K}^0/\mathfrak{m}_{\bar{S}}\bar{K}^0)^\vee \text{ und } \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) \cong (\bar{K}^{-1}/\mathfrak{m}_{\bar{S}}\bar{K}^{-1})^\vee.$$

Dabei bezeichnet  $^\vee$  das  $\mathbb{C}$ -Dual.

ii) Besitzt ein Objekt  $a_0$  eine  $\bar{S}$ -darstellbare Deformation  $\bar{a} \in \bar{\mathbf{F}}(\bar{S})$ , so sind die infinitesimalen Automorphismen und Erweiterungen  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  und  $\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$  endlich-dimensional.

Beweis: Zunächst beachte man, dass ii) eine unmittelbare Konsequenz aus i) ist, da eine minimale Auflösung aus endlichen freien Moduln besteht und somit insbesondere sämtliche  $\bar{K}^i/\mathfrak{m}_{\bar{S}}\bar{K}^i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$  endliche  $\mathbb{C}$ -Vektorräume sind. Wegen 1.2.15 können wir für den verbleibenden Beweis ohne Einschränkung die Moduln  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C})$  und  $\text{Ex}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C})$  betrachten. Sei  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$  zunächst eine beliebige  $\bar{S}$ -Auflösung. Dann ist  $\bar{K}^\cdot \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(\bar{S})$  und wegen 2.2.6 somit

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\bar{a}/\bar{S}, \mathbb{C}) \cong \text{Ext}^0(\bar{K}^\cdot, \mathbb{C}) \cong \text{Hom}(H^0(\bar{K}^\cdot), \mathbb{C}).$$

Der erste Isomorphismus gilt also für jede  $\bar{S}$ -Auflösung von  $\bar{a}$ . Alle weiteren  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Isomorphismen in Behauptung i) gelten nur für minimale Auflösungen  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$ . Sie folgen unmittelbar aus 2.1.4. Die Isomorphismen über  $\mathbb{C}$  ergeben sich nun leicht daraus, dass  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  insbesondere eine analytische  $\mathbb{C}$ -Algebra ist.  $\square$

**3.1.3 Lemma:** Seien  $\bar{a}$ ,  $\bar{S}$  und  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$  wie in 3.1.1 und  $\bar{b}$  über  $\bar{T}$  die formal semiuniverselle Deformation von  $a_0$ . Dann gibt es einen Isomorphismus von  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$ -Moduln

$$\text{coker } \bar{h}^{-2} \cong \Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}.$$

Beweis: Da  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$  eine minimale  $\bar{S}$ -Auflösung von  $\bar{a}$  ist, gibt es eine natürliche Abbildung

$$\text{Hom}(\text{coker } \bar{h}^{-2}, N) \rightarrow \text{Ex}(\bar{a}/\bar{S}, N),$$

die funktoriell ist in  $N$ . Ferner ist diese surjektiv für  $N \in \mathbf{Art}(\bar{S})$  und injektiv für  $N = \mathcal{O}_{S_0} = \mathbb{C}$ . Sei nun zunächst  $\bar{a} \cong \bar{b}$  formal semiuniversell. In dem Fall liefert die Kodaira-Spencer-Abbildung eine in  $N$  funktorielle Abbildung

$$\text{Hom}(\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1, N) \rightarrow \text{Ex}(\bar{a}/\bar{S}, N),$$

welche wegen der Semiuniversalität ebenfalls surjektiv ist auf  $\mathbf{Art}(\bar{S})$  und injektiv für  $N = \mathbb{C}$ . Die Behauptung folgt dann aus 2.1.6.

Für den allgemeinen Fall betrachten wir eine beliebige formal verselle Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$ . Wegen 3.1.2ii) und dem Satz von Schlessinger besitzt  $a_0$  eine formal semiuniverselle Deformation  $\bar{b}$ . Aus der formalen Versalität von  $\bar{a}$  ergibt sich ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{a} & \xrightarrow{\quad} & \bar{b} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \bar{a} & \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} \bar{S} & \xrightarrow{\quad} & \bar{T} \\ & \searrow & \nearrow \\ & \bar{S} & \end{array} .$$

Daraus folgt insbesondere, dass die Identität von  $\mathcal{O}_{\bar{S}}$  über  $\mathcal{O}_{\bar{T}}$  faktorisiert. Nach 2.4.9 ist nun  $\bar{K} \otimes \mathcal{O}_{\bar{T}}$  eine minimale  $\bar{T}$ -Auflösung von  $\bar{b}$ . Daher ist nach dem bereits Gezeigten

$$\Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \cong \text{coker}(\bar{h} \otimes \text{id})^{-2}.$$

Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts ist das Bilden von Kokernen mit Tensorprodukten verträglich. Folglich ist  $\text{coker}(\bar{h} \otimes \text{id})^{-2} \cong \text{coker} \bar{h}^{-2} \otimes \mathcal{O}_{\bar{T}}$ . Zusammen mit der Zerlegung der Identität  $\text{id}_{\mathcal{O}_{\bar{S}}} : \mathcal{O}_{\bar{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{T}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}$  folgt nun

$$\Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}} \cong (\text{coker} \bar{h}^{-2} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{S}}} \mathcal{O}_{\bar{T}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{T}}} \mathcal{O}_{\bar{S}} \cong \text{coker} \bar{h}^{-2}. \quad \square$$

Beweis von Theorem 3.1.1: Da  $\bar{a}$  eine  $\bar{S}$ -Auflösung besitzt, gibt es nach 0.4.12 stets eine minimale  $\bar{S}$ -Auflösung  $(\bar{K}, \bar{h})$ . Nach 3.1.2ii) haben die  $\mathbb{C}$ -Vektorräume

$$\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \text{Ex}_{(\Sigma,0)}(a_0, \mathbb{C})$$

endliche Dimension. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.3.13 erfüllt. Dieser liefert zusammen mit Lemma 3.1.2i) die Formeln für die Überschussdimension  $d$  und zusammen mit Lemma 3.1.3 die Darstellung

$$\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \cong \Omega_{\bar{T}/\Sigma}^1 \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d \cong \text{coker} \bar{h}^{-2} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Zahl  $d$  und die Darstellung des Kotangentialmoduls nicht von der Wahl der minimalen Auflösung abhängen. Dies ist aber eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 2.4.8.  $\square$

**3.1.4 Bemerkung:** i) Aus 1.3.8 und 2.4.9 folgt unmittelbar: gibt es eine formal verselle darstellbare Deformation  $\bar{a}$  von  $a_0$ , so ist *jede* formale Deformation  $\bar{a}'$  über  $\bar{S}'$  darstellbar. Dies bedeutet aber, dass die Aussage von 3.1.1 für jede formal verselle Deformation von  $a_0$  gilt, sobald  $a_0$  eine einzige formal verselle  $\bar{S}$ -*darstellbare* Deformation  $\bar{a}$  besitzt. Man beachte, dass sich die Darstellungen der Kotangentialmoduln (bis auf Basiswechsel) nur um einen direkten freien Summanden unterscheiden.

ii) Aus einer gegebenen minimalen  $\bar{S}$ -Darstellung  $(\bar{K}, \bar{h})$  und der Überschussdimension  $d$  lässt sich eine Abbildung  $\tilde{h}$  konstruieren mit  $\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1 \cong \text{coker} \tilde{h}$ . Offensichtlich leistet

$$\tilde{h} := \bar{h}^{-2} \times 0 : \bar{K}^{-2} \rightarrow \bar{K}^{-1} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d$$

das Gewünschte. Es ist sogar möglich, einen Funktor  $\mathbf{K}_c^-(\bar{S}) \rightarrow \mathbf{K}_c^-(\bar{S})$  zu definieren, so dass die gegebene minimale  $\bar{S}$ -Auflösung  $\bar{K}^\cdot$  auf einen Komplex geworfen wird, dessen Kokern im Grad  $-2$  isomorph ist zu  $\Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1$ . Dazu betrachten wir die direkte Summe der Komplexe  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$  und

$$(\bar{F}^\cdot, f) : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \bar{F}^{-1} := \mathcal{O}_{\bar{S}}^d \xrightarrow{id} \bar{F}^0 := \mathcal{O}_{\bar{S}}^d \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

Die Randabbildungen sind durch die Nullabbildung und der Identität  $id : F^{-1} \rightarrow F^0$  gegeben. Es ist wohlbekannt, dass diese Zuordnung funktoriell ist in  $\bar{K}^\cdot$ . Der resultierende Komplex erfüllt nun per Konstruktion

$$\text{coker}((\bar{h} \times f)^{-2}) = \text{coker}(\bar{h}^{-2} \times 0) \cong \text{coker } \bar{h}^{-2} \oplus \mathcal{O}_{\bar{S}}^d \cong \Omega_{\bar{S}/\Sigma}^1.$$

Aus 3.1.1 folgt unmittelbar eine analoge Aussage für lokale Deformationstheorien:

**3.1.5 Korollar:** *Ist  $p_0 : \mathbf{F}_0 \rightarrow \mathbf{An}_{(\Sigma,0)}$  eine lokale Deformationstheorie und  $a_0$  ein Objekt über dem reduzierten Punkt  $S_0 := (0, \mathbb{C}_0)$ , so gelten die Aussagen von Theorem 3.1.1 für jede darstellbare verselle Deformation  $a := (a, 0)$  über  $S := (S, 0) := p(a)$  anstelle von  $\bar{a}$  und jeder minimalen  $S$ -Auflösung  $(K^\cdot, h)$  anstelle von  $(\bar{K}^\cdot, \bar{h})$ . Insbesondere gibt es eine Darstellung des Kotangentialmoduls*

$$\Omega_{S/\Sigma}^1 \cong \text{coker } h^{-2} \oplus \mathcal{O}_S^d,$$

wobei  $d$  die verselle Überschussdimension von  $a$  bezeichnet.

Beweis: Wir betrachten die Komplettierung  $\hat{a} \in \hat{\mathbf{F}}_0(\hat{S})$  von  $a$ . Mit den Voraussetzungen an  $a$  erfüllt nun  $\hat{a}$  die Voraussetzungen von 3.1.1. Wegen 2.4.12ii) ist ferner  $(\hat{K}^\cdot, \hat{h})$  eine minimale Auflösung von  $\hat{a}$ . Für die verselle Überschussdimension  $d$  von  $a$  gilt nach Theorem 3.1.1

$$\begin{aligned} d = d(\hat{a}) &= \dim_{\mathbb{C}} T_0(\hat{S}) - \dim_{\mathbb{C}}(\hat{K}^{-1}/\mathfrak{m}_0 \hat{K}^{-1}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(\hat{a}, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}}(\hat{K}^0/\mathfrak{m}_0 \hat{K}^0) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\hat{\cdot}$  die Komplettierung bezüglich des maximalen Ideals  $\mathfrak{m}_0$  von  $\mathcal{O}_{S,0}$ . Da für jeden endlich erzeugten  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modul  $M$  die induzierten Moduln  $M/\mathfrak{m}_0 M$  und  $\hat{M}/\hat{\mathfrak{m}}_0 \hat{M}$  isomorph sind, ergibt sich mit  $M := \Omega_{S/\Sigma}^1$  leicht, dass auch  $T_0(\hat{S})$  und  $T_0(S)$  isomorph sind. Da  $K^\cdot$  aus endlichen freien  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Moduln besteht, ist ferner  $\hat{K}^i/\hat{\mathfrak{m}}_0 \hat{K}^i \cong K^i/\mathfrak{m}_0 K^i$  für jedes  $i \in \mathbb{Z}$ . Für  $d$  gilt daher

$$d = \dim_{\mathbb{C}} T_0(\hat{S}) - \dim_{\mathbb{C}}(\hat{K}^{-1}/\mathfrak{m}_0 \hat{K}^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} T_0(S) - \dim_{\mathbb{C}}(K^{-1}/\mathfrak{m}_0 K^{-1}).$$

Wie im Beweis von 1.3.13 folgt nun aus der Kodaira-Spencer-Sequenz für  $a$  mit  $N := \mathbb{C}$  leicht, dass auch die zweite Gleichung

$$d = \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a, \mathbb{C}) - \dim_{\mathbb{C}}(K^0/\mathfrak{m}_0 K^0)$$

erfüllt ist. Die Formeln für  $d$  aus 3.1.1 gelten also für  $a$  anstelle von  $\bar{a}$  und  $K^\cdot$  anstelle von  $\bar{K}^\cdot$ . Zu zeigen bleibt die Darstellung des Kotangentialmoduls  $\Omega_{S/\Sigma}^1$ . Dazu betrachten wir den Kotangentialmodul von  $\Omega_{\hat{S}/\Sigma}^1$ . Theorem 3.1.1 und 0.2.2 liefern

$$(\Omega_{S/\Sigma}^1)^\wedge \cong \Omega_{\hat{S}/\Sigma}^1 \cong \text{coker } (\hat{h}^{-2}) \oplus \hat{\mathcal{O}}_{S,0}^{d(s)}.$$

Da  $\text{coker } h^{-2}$  ein endlicher  $\mathcal{O}_{S,0}$ -Modul ist, folgt  $\text{coker } \hat{h}^{-2} \cong (\text{coker } h^{-2})^\wedge$ . Insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus von  $\hat{\mathcal{O}}_{S,0}$ -Moduln

$$(\Omega_{S/\Sigma}^1)^\wedge \cong (\text{coker } h^{-2} \oplus \mathcal{O}_{S,0}^{d(s)})^\wedge.$$

Nun folgt die Behauptung für die Kotangentialgarbe aus 0.3.8.  $\square$

**3.1.6 Bemerkung:** Mit den offensichtlichen Anpassungen gelten die Aussagen von Bemerkung 3.1.4 auch für lokale Deformationen  $a$  von  $a_0$ , die über  $S := p(a)$  darstellbar sind.

In der Situation von Korollar 3.1.5 lässt sich der Isomorphismus stets auf eine Umgebung  $U \subset S$  liften.

**3.1.7 Korollar:** *Ist  $S$  ein komplexer Raum und  $(S, s)$  der komplexe Raumkeim von  $S$  in einem Punkt  $s$  derart, dass für  $(a, s)$  die Voraussetzungen von 3.1.5 erfüllt sind, so lässt sich der Isomorphismus auf eine Umgebung von  $s$  fortsetzen, das heißt es gibt eine offene Teilmenge  $U \subset S$  mit  $s \in U$  und eine Abbildung  $\tilde{h}^{-2}$  zweier kohärenter freier Moduln auf  $U$  mit*

$$\Omega_{S/\Sigma|_U}^1 \cong \text{Coker } \tilde{h}^{-2} \oplus \mathcal{O}^d.$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{O}$  die kohärente Garbe  $\mathcal{O}_{S|_U}$  und  $d = \text{odim}(s)$  die Überschussdimension im Punkte  $s$ .

Beweis: Per Konstruktion ist jede minimale Auflösung  $(K^\cdot, h)$  von  $(a, s)$  ein Komplex von endlichen freien Moduln. Daher ist  $h^{-2} : \mathcal{O}_{S,s}^q \rightarrow \mathcal{O}_{S,s}^r$  eine Abbildung zweier endlicher freier  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Moduln. Nach 0.1.4 gibt es eine Umgebung  $V$  von  $s$  und eine Abbildung  $\tilde{h}^{-2} : \mathcal{O}_{S|_V}^q \rightarrow \mathcal{O}_{S|_V}^r$  mit  $\tilde{h}_s^{-2} = h^{-2}$ . Daher ist aber auch  $(\text{Coker } \tilde{h}^{-2})_s \cong \text{coker } h^{-2}$ . Wegen  $(\mathcal{O}_{S|_V})_s \cong \mathcal{O}_{S,s}$  folgt nun aus 3.1.5, dass  $\Omega_{S/\Sigma|_V}^1$  und  $\text{Coker } \tilde{h}^{-2} \oplus \mathcal{O}_{S|_V}^d$  zwei kohärente  $\mathcal{O}_{S|_V}$ -Moduln sind, die in  $s \in V$  übereinstimmen. Wegen 0.1.14 stimmen sie dann aber auf einer Umgebung  $U \subset V$  von  $s$  überein. Daher ist  $U \subset S$  eine Umgebung von  $s$  mit den behaupteten Eigenschaften.  $\square$

**3.1.8 Bemerkung:** i) Aus dem Beweis folgt sofort, dass es für ein Objekt  $a \in \mathbf{F}(S)$ , das in jedem Punkt  $s \in S$  versell ist und eine globale  $S$ -Auflösung  $(\mathcal{K}^\cdot, \partial)$  besitzt, zu jedem  $s \in S$  eine Umgebung  $U_s$  gibt, auf welcher  $\Omega_{S/\Sigma|_{U_s}}^1$  eine Darstellung wie in 3.1.7 besitzt. Es ist allerdings im Allgemeinen nicht möglich, diese lokalen Darstellungen des Kotangentialmoduls zu einer globalen Darstellung zu verkleben. Auf diese Problematik werden wir im nächsten Abschnitt näher eingehen. Dort wird ein Kriterium für die Existenz von globalen Darstellungen hergeleitet.

ii) Das Argument 3.1.4ii) können wir ebenfalls auf die Situation von 3.1.7 übertragen, indem man die auftretenden Abbildungen wie im Beweis von 3.1.7 auf geeignete Umgebungen  $V$  von  $s$  liftet. Dies liefert lokal eine explizite Gestalt des Kotangentialmoduls als Kokern zweier kohärenter freier Moduln.

- iii) An dem Beweis von 3.1.7 sieht man, dass die lokalen Darstellungen in i) und ii) für praktische Berechnungen ungeeignet sind. Um beispielsweise für ein  $s \in S$  den Kotangentialmodul  $\Omega_{S/\Sigma|_{U_s}}^1$  in i) zu bestimmen, muss zunächst eine minimale Auflösung  $(M, \lambda)$  von  $\mathcal{K}_s$  berechnet und dann für geeignetes  $U \subset S$  aus  $\lambda^{-2}$  eine Abbildung

$$\tilde{h}^{-2} : \mathcal{O}_U^m \rightarrow \mathcal{O}_U^n$$

wie im Beweis konstruiert werden. In die lokale Darstellung des Kotangentialmoduls geht dann der Kokern dieser Abbildung ein. Die vorliegende Situation verleitet schnell dazu, eine Darstellung der Kotangentialgarbe auf  $U_s$  durch den Kokern von  $\partial_{|_{U_s}}^{-2}$  anzunehmen. Die vorstehende Konstruktion von  $\tilde{h}^{-2}$  zeigt, dass dies im Allgemeinen jedoch nicht möglich ist.

## 3.2 Der globale Fall

In diesem Abschnitt bezeichne  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  stets eine globale Deformationstheorie und  $a$  ein Objekt über einem komplexen Raum  $S$ . Es soll eine globale Variante von 3.1.1 gezeigt werden. Dazu nehmen wir an, dass  $a$  stets eine globale *obstruierende*  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$  besitzt. In 2.4.3 haben wir bereits gesehen, dass der Träger des Moduls  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  aus den Punkten  $s \in S$  besteht, in der das induzierte Objekt  $a_s$  nichttriviale infinitesimale Automorphismen besitzt. Fordern wir, dass  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  ein lokal freier Modul auf  $S$  ist, so erhalten wir zumindest auf der Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a$  von  $a$  eine Darstellung des Kotangentialmoduls  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  durch den Kohomologiemodul  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})$ . Genauer gilt:

**3.2.1 Theorem:** *Ist  $a \in \mathbf{F}(S)$  ein Objekt mit einer globalen obstruierenden  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$ , dessen nullter Kohomologiemodul  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei ist, so gilt:*

- i) *Die Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a$  ist  $Z$ -offen in  $S$*
- ii) *Auf  $S_a$  gibt es einen Isomorphismus  $\Omega_{S/\Sigma|_{S_a}}^1 \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})|_{S_a}$*

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen. Das erste Hilfslemma liefert gewisse lange exakte Ext-Sequenzen, die im Folgenden wichtig sind.

**3.2.2 Lemma:** *Ist  $\mathcal{K} \in \mathbf{D}_c^{\leq 0}(S)$  ein Komplex und bezeichnet  $\mathcal{K}_0$  den Komplex*

$$\mathcal{K}_0 : \dots \longrightarrow \mathcal{K}^{-2} \longrightarrow \mathcal{K}^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} \mathcal{I}m \partial^{-1} \longrightarrow 0,$$

*so gibt es kanonische Abbildungen von Komplexen, so dass*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{K}) \longrightarrow 0$$

*eine exakte Sequenz ist. Insbesondere gibt es für jeden  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  lange exakte Kohomologiesequenzen der Form*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \mathcal{E}xt^{i-1}(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}xt^i(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}xt^i(\mathcal{K}, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{E}xt^i(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}) \\ \rightarrow \mathcal{E}xt^{i+1}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \operatorname{Ext}^{i-1}(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}) \rightarrow \operatorname{Ext}^i(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}^\cdot), \mathcal{N}) \rightarrow \operatorname{Ext}^i(\mathcal{K}^\cdot, \mathcal{N}) \rightarrow \operatorname{Ext}^i(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}) \\ \rightarrow \operatorname{Ext}^{i+1}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}^\cdot), \mathcal{N}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus der zweiten exakten Sequenz in 0.4.3, da offensichtlich  $\mathcal{K}_0 = \sigma_{<-1}(\mathcal{K}^\cdot)$  ist. Wegen  $\partial^0 = 0$  ist dabei

$$\sigma_{\geq -1}(\mathcal{K}^\cdot) \cong \operatorname{Coker} \partial^{-1} \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{K}^\cdot). \quad \square$$

Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{K}^\cdot$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a$ ; insbesondere ist die Menge der versellen Punkte  $V_a$   $Z$ -offen in  $S$ . Wir wollen im Folgenden stets solche Situationen betrachten, für die die Objekte  $a$  in jedem Punkt versell sind, für die also der Keim  $(a, s)$  eine verselle Deformationen von  $a_s$  ist für alle  $s \in S$ . Daher ist für den Rest dieses Abschnittes  $S = V_a$ . Es sei angemerkt, dass jedes  $a \in \mathbf{F}(S)$  via Restriktion auf  $V_a$  ein solches Objekt induziert [vgl. 1.4.9ii)]. Ferner sind universelle Objekte per Definition stets von dieser Art.

Für den Rest des Abschnitts sei  $a \in \mathbf{F}(S)$  stets ein Objekt mit  $S = V_a$ . Wie eingangs erwähnt, wollen wir untersuchen, welche Information eine globale  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}^\cdot$  für das Objekt  $a$  bereitstellt. Neben der nullten Kohomologie von  $\mathcal{K}^\cdot$  hat auch  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^\cdot)$  wichtige Eigenschaften, wie der nächste Satz zeigt.

**3.2.3 Satz:** *Ist  $\mathcal{K}^\cdot$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a$ , so gibt es stets einen Garbenhomomorphismus  $\lambda : \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^\cdot) \rightarrow \Omega_S^1$  und eine natürliche Transformation*

$$\rho : \operatorname{Ex}_\Sigma(a/S, -) \rightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^\cdot), -)$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(\Omega_S^1, \mathcal{N}) & \xrightarrow{d_{KS}} & \operatorname{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \\ & \searrow \lambda^* & \downarrow \rho \\ & & \operatorname{Hom}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^\cdot), \mathcal{N}) \end{array}$$

für alle  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$  kommutiert.

Beweis: Da  $\mathcal{K}^\cdot$  eine  $S$ -Auflösung ist, gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{Ex}_\Sigma(a/S, -) \cong \operatorname{Ext}_S^1(\mathcal{K}^\cdot, -).$$

Wir betrachten für  $\mathcal{K}^\cdot$  die lange exakte Ext-Sequenz aus Lemma 3.2.2. Diese liefert insbesondere eine natürliche Abbildung

$$\operatorname{Ext}_S^1(\mathcal{K}^\cdot, \mathcal{N}) \rightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}).$$

Per Konstruktion ist nun  $\mathcal{K}_0 \in \mathbf{D}^{\leq -1}(S)$ . Wegen 2.2.6 ist daher  $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{K}_0, \mathcal{N}) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}_0), \mathcal{N})$ . Ferner ist per Konstruktion von  $\mathcal{K}_0$  offensichtlich

$$\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}_0) \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^\cdot).$$

Die vorgenannten Isomorphismen sind natürlich in  $\mathcal{N}$ ; insgesamt erhalten wir also eine natürliche Transformation

$$\rho : \text{Ex}_\Sigma(a/S, -) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), -).$$

Zusammen mit der Kodaira-Spencer-Abbildung  $d_{KS}$  erhält man eine Transformation von Hom-Funktoren

$$\rho' := \rho \circ d_{KS} : \text{Hom}(\Omega_S^1, -) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), -).$$

Aus der Konstruktion von  $\rho'$  folgt nun unmittelbar, dass  $\lambda := \rho'(\Omega_S^1)(\text{id}_{\Omega_S^1})$  ein Garbenhomomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften ist.  $\square$

**3.2.4 Korollar:** *Es sei  $\mathcal{K}$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a$  und  $\lambda$  der Garbenhomomorphismus aus 3.2.3. Dann gilt:*

i) *Es gibt eine natürliche Transformation*

$$\tilde{\rho} : \text{Ex}_\Sigma(a/S, -) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), -),$$

*so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\Omega_S^1, \mathcal{N}) & \xrightarrow{\partial_{KS}} & \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \\ & \searrow \lambda^* & \downarrow \tilde{\rho} \\ & & \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N}) \end{array}$$

*für alle  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$  kommutiert.*

ii) *Ist  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei, so ist  $\lambda$  injektiv.*

Beweis: i) Aus der  $\text{Ext}$ -Sequenz in 3.2.2 ergibt sich zunächst genau wie im Beweis von 3.2.3 die Transformation  $\tilde{\rho}$ ; dass die durch  $\tilde{\rho} \circ \partial_{KS}$  gegebene Transformation mit  $\lambda^*$  übereinstimmt, folgt leicht aus der Definition der  $\mathcal{H}om$ -Moduln und Satz 3.2.3.

ii) Ist  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei, so liefert die lange exakte  $\text{Ext}$ -Sequenz aus 3.2.2 Isomorphismen

$$\text{Ext}^i(\mathcal{K}, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^i(\mathcal{K}_0, \mathcal{N})$$

für alle  $i > 0$ . Mit 2.2.6 ergibt sich für  $i = 1$  speziell

$$\text{Ext}^1(\mathcal{K}, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}_0), \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N}).$$

Dies bedeutet, dass der Halm von  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})$  in jedem Punkt  $s \in S$  sogar ein darstellender Modul für den Funktor  $\text{Ext}^1(\mathcal{K}_s, -)$  und damit insbesondere auch semidarstellend ist. Ferner ist durch die Kodaira-Spencer-Abbildung in jedem Punkt eine surjektive Transformation

$$\partial_{KS,s} : \text{Hom}(\Omega_{S,s}^1, N) \rightarrow \text{Ex}_{(\Sigma,0)}((a,s)/(S,s), N) \cong \text{Ext}^1(\mathcal{K}_s, N)$$

definiert. Aus 0.3.6 folgt dann, dass  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})$  halmweise ein direkter Summand von  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  ist. Insbesondere ist die Abbildung  $\lambda : \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_{S/\Sigma}^1$  halmweise injektiv und somit auch injektiv als Homomorphismus von Garben.  $\square$

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, eine globale Darstellung von  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  zu konstruieren. In 3.1.8 haben wir gesehen, dass es stets lokale Darstellungen für den Kotangententialmodul gibt. Wenn  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei ist, können diese lokalen Darstellungen zu einer exakten Sequenz zusammengefasst werden.

**3.2.5 Satz:** Sei  $\mathcal{K}$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a$ ,  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei,  $\lambda : \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_{S/\Sigma}^1$  die Injektion aus 3.2.3 und  $\mathcal{E} := \text{Coker } \lambda$ . Für die kanonische exakte Sequenz kohärenter Moduln

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}) \rightarrow \Omega_{S/\Sigma}^1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$$

gilt dann:

i)  $\mathcal{E}$  ist lokal frei und für  $s \in S$  ist  $\text{rk } \mathcal{E}_s = \text{odim}(s)$ .

ii) Die Sequenz  $(*)$  spaltet halmweise, i.e.  $\Omega_{S,s}^1 \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})_s \oplus \mathcal{E}_s \quad \forall s \in S$ .

Beweis: Sei  $s \in S$  ein beliebiger Punkt. Bezeichnet  $d := \text{odim}(s)$  die Überschussdimension im Punkte  $s$  und  $h^{-2}$  die Randabbildung im Grad  $-2$  einer minimalen Auflösung von  $\mathcal{K}_s$ , so ist nach 3.1.5

$$\Omega_{S,s}^1 \cong \text{coker } h^{-2} \oplus \mathcal{O}_{S,s}^d.$$

Aus dem Beweis von 3.2.4 ergibt sich, dass  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})_s$  ein semidarstellender Modul für  $\text{Ext}^1(\mathcal{K}_s, -)$  ist; wegen Satz 2.1.5iii) ist dann  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})_s \cong \text{coker } h^{-2}$ . Die Behauptungen folgen nun leicht, wenn man die Sequenz  $(*)$  im Halm  $s$  betrachtet und mit der spaltenden Sequenz

$$0 \rightarrow \text{coker } h^{-2} \rightarrow \Omega_{S,s}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{S,s}^d \rightarrow 0$$

vergleicht. □

Beweis von Theorem 3.2.1: Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{K}$  obstruierend und damit die Menge der versellen Punkte  $V_a$   $\mathbb{Z}$ -offen in  $S$  [siehe Bemerkung 2.4.5]. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, dass  $S = V_a$  ist. Wegen 1.3.11 und Satz 3.2.5i) gilt nun für die Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a$ :

$$\begin{aligned} S_a &= \{s \in S \mid \text{odim}(s) = 0\} \\ &= \{s \in S \mid \mathcal{E}_s = 0\} \\ &= S \setminus \text{supp } \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Wegen der Kohärenz von  $\mathcal{E}$  folgt daraus Behauptung i). Die zweite Behauptung folgt nun unmittelbar aus der exakten Sequenz  $(*)$  in 3.2.5 und der Tatsache, dass  $\mathcal{E}$  auf  $S_a$  verschwindet. □

**3.2.6 Bemerkung:** i) Ist in der Situation von 3.2.5  $S$  zusammenhängend, so ist die verselle Überschussfunktion konstant auf  $S$  und somit  $a$  äquiversell. In dieser Situation ist insbesondere  $(a, s)$  genau dann semiuniversell für alle  $s \in S$ , wenn es einen Punkt  $s^*$  gibt mit  $\text{odim}(s^*) = 0$ . Die Behauptungen folgen unmittelbar aus der Tatsache, dass die Garbe  $\mathcal{E}$  in 3.2.5 lokal frei ist.

ii) Die Sequenz  $(*)$  in 3.2.5 spaltet im Allgemeinen *nicht* global, das heißt es gibt im Allgemeinen keine Darstellung  $\Omega_S^1 \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}) \oplus \mathcal{E}$ . Aus dem Beweis von 3.2.5 folgt, dass in jedem Punkt  $s \in S$  der Modul  $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})_s$  isomorph ist zum Kokern der  $-2$ -ten Randabbildung einer minimalen Auflösung von  $\mathcal{K}_s$ . Daher liefert die Sequenz  $(*)$  halmweise die Darstellung 3.1.5 und mit den Argumenten aus Bemerkung 3.1.8 auch die dort beschriebenen lokalen Darstellungen der Kotangentialgarbe.

Im Folgenden werden Beispiele für  $S$ -Auflösungen  $\mathcal{K}$  gegeben mit lokal freiem Modul  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$ . Das einfachste Beispiel ist offenbar  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K}) = 0$ .

**3.2.7 Beispiel:** Ist  $\mathcal{K}$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung mit  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K}) = 0$ , so erfüllt  $\mathcal{K}$  offensichtlich die Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 und es gelten die Aussagen dieses Abschnittes. In diesem speziellen Fall ist die Menge  $A_a$  aus 2.4.3 leer; dies hat folgende Konsequenzen:

- i)  $A_a = \emptyset$  bedeutet, dass für jedes  $s \in S$  der Modul  $\text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_s, \mathbb{C})$  der Nullmodul ist. Wegen 1.3.19 ist dann jede semiuniverselle Deformation  $(a, s)$  bereits universell, das heißt es ist  $S_a = U_a$ . Umgekehrt ist für jedes universelle Objekt  $a$ , wenn es eine obstruierende  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$  besitzt, stets  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K}) = 0$ . Das Verschwinden von  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  ist also ein notwendiges Kriterium für die Universalität des gegebenen Objektes  $a$ .
- ii) Für jeden kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  ist  $\mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N})$ . Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus 2.4.3iii). Aus der langen exakten Ext-Sequenz in 3.2.2 folgt, dass auch die natürliche Transformation  $\rho : \mathcal{E}x_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N})$  aus 3.2.3 ein Isomorphismus ist. Beide Isomorphismen sind offensichtlich funktoriell in  $\mathcal{N}$ .
- iii)  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N}) = 0$ ; analog ist  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) = 0$ . Zusammen mit ii) ergibt sich aus der Kodaira-Spencer-Sequenz die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{H}om(\Omega_{S/\Sigma}^1, \mathcal{N}) \xrightarrow{\partial_{KS}} \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N}) \rightarrow 0.$$

Dabei haben wir mit  $\partial_{KS}$  die Verknüpfung der Kodaira-Spencer-Abbildung mit dem Isomorphismus aus ii) bezeichnet. Diese Notation werden wir im Folgenden beibehalten, solange keine Verwechslung mit der Kodaira-Spencer-Abbildung selbst möglich ist.

- iv) Analog zu iii) erhalten wir eine exakte Sequenz von  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ -Moduln

$$0 \rightarrow \text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{H}om(\Omega_{S/\Sigma}^1, \mathcal{N}) \xrightarrow{d_{KS}} \mathcal{H}om(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}), \mathcal{N}).$$

Die beiden rechten Terme in dieser Sequenz stimmen überein mit den entsprechenden Termen der Sequenz  $\mathcal{H}om((*), \mathcal{N})$ ; diese ergibt sich durch Anwenden des Funktors  $\mathcal{H}om(-, \mathcal{N})$  auf die exakte Sequenz  $(*)$  aus 3.2.5. Aus der Konstruktion der Abbildung  $\lambda$  folgt nun leicht

$$\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{N}).$$

Entsprechend ergibt sich auch eine Darstellung  $\text{Aut}_\Sigma(a, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{N})$ . Dies bedeutet, dass für Objekte  $a$  mit obstruierender  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$ , deren nullte Kohomologie verschwindet, auch die Funktoren  $\text{Aut}_\Sigma(a, -)$  und  $\text{Aut}_\Sigma(a, -)$  darstellbar sind. Explizite Beispiele für solche  $S$ -Auflösungen werden wir im folgenden Abschnitt bei den sogenannten eingebetteten Deformationen und bei der Deformation von Quotienten kennenlernen [siehe Satz 3.3.5 und Satz 3.3.13].

**3.2.8 Beispiel:** Sei wieder  $\mathcal{K}$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung eines gegebenen Objektes  $a$  und  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei.

- i) Mit  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  ist auch  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})^\vee = \mathcal{H}om(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{O}_S)$  lokal frei. Zusammen mit Satz 2.4.3 folgt daher für  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$

$$\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}om_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), \mathcal{N}) \cong \mathcal{H}^0(\mathcal{K})^\vee \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{N}.$$

Dies zeigt, dass  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, -)$  ein exakter Funktor auf  $\mathbf{Coh}(S)$  ist, wenn  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  lokal frei ist. Es gilt auch die Umkehrung: ist  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, -)$  exakt, so ist für jedes  $s \in S$  der Funktor

$$\mathcal{H}om_S(\mathcal{H}^0(\mathcal{K}), -)_s = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s, -)$$

exakt auf der Kategorie der endlichen  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Moduln. Daher ist  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s$  ein projektiver  $\mathcal{O}_{S,s}$ -Modul und somit frei. Ist also  $\mathcal{A}ut_\Sigma(a/S, -)$  exakt auf  $\mathbf{Coh}(S)$ , so gibt es auf  $S_a$  eine Darstellung der Kotangentialgarbe wie in 3.2.1.

- ii) Ist  $S$  ein *reduzierter* komplexer Raum, so ist  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  genau dann lokal frei, wenn die Funktion

$$\varphi(s) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_s, \mathbb{C})$$

lokal konstant (i.e. auf jeder Zusammenhangskomponente von  $S$  konstant) ist: aus dem Beweis von 2.4.3 folgt

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_s, \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s / \mathfrak{m}_s \mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s)^\vee.$$

Da für einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  die Dimension mit der Dimension des Dualraumes  $V^\vee$  übereinstimmt, ist  $\varphi(s)$  gegeben durch  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s / \mathfrak{m}_s \mathcal{H}^0(\mathcal{K})_s$ . Diese Funktion ist aber lokal konstant für lokal freies  $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$ ; da  $S$  reduziert ist, gilt auch die Umkehrung.

- iii) Aus i) und ii) folgt insbesondere, dass für einen *zusammenhängenden reduzierten* komplexen Raum  $S$  die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- $\alpha)$   $\mathcal{H}^0(\mathcal{K})$  ist ein lokal freier  $\mathcal{O}_S$ -Modul.
- $\beta)$   $\mathcal{A}ut(a/S, -)$  ist exakt auf  $\mathbf{Coh}(S)$ .
- $\gamma)$  Die Zuordnung  $s \mapsto \dim_{\mathbb{C}} \text{Aut}_{(\Sigma,0)}(a_s, \mathbb{C})$  liefert eine konstante Funktion auf  $S$ .

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so sind die Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 erfüllt und es gibt eine Darstellung  $\Omega_{S|S_a}^1 \cong \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K})|_{S_a}$ .

### 3.3 Anwendung auf den Fall feiner Modulräume

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe der Resultate aus den vorigen Kapiteln für explizite Beispiele die Kotangentialgarbe berechnen. Für Basisräume  $S$  von Objekten  $a$  mit einer  $S$ -Auflösung, die den Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 genügen, erhalten wir eine entsprechende Darstellung durch den  $-1$ -ten Kohomologiemodul der  $S$ -Auflösung. Beispiele für solche Basisräume sind der Douady- und der Quot-Raum.

Diese beiden Beispiele sind insofern interessant, als dass sie (feine) Modulräume bestimmter Familien sind. Wir werden sehen, dass in beiden Fällen der Kotangententialmodul mit Hilfe von Theorem 3.2.1 bestimmt werden kann.

Sind die Voraussetzungen von 3.2.1 nicht erfüllt, so können wir zu einer globalen Deformationstheorie  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ , welche zumindest in einem Punkt  $s \in S$  eine  $(S, s)$ -Auflösung besitzt, lediglich eine lokale Beschreibung des Kotangententialmoduls von  $S$  angeben, falls der Keim  $(a, s)$  versell ist. Solche Beispiele ergeben sich bei der Deformation von kompakten komplexen Räumen oder bei der Deformation von Moduln.

In jedem Fall ist es nötig, die Räume als Basen von geeigneten Objekten  $a \in \mathbf{F}$  zu realisieren, wobei  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  eine geeignete Deformationstheorie ist. Wir werden daher im Folgenden verschiedene Deformationstheorien betrachten, bei denen interessante Räume  $S$  als Basen von Objekten  $a \in \mathbf{F}(S)$  auftreten. Damit die Hauptsätze überhaupt anwendbar sind, müssen diese Objekte  $S$ -darstellbar sein. Wir werden für jedes der behandelten Beispiele eine  $S$ -Auflösung angeben und damit eine Darstellung von  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  berechnen.

Bevor wir mit den ersten Beispielen beginnen, wiederholen wir kurz ein paar Begriffe aus der Theorie der Modulräume. Ein Modulraum ist qualitativ ein komplexer Raum, dessen Punkte eine bestimmte Familie von anderen Objekten parametrisieren. In diesem Zusammenhang betrachtet man stets einen sogenannten *Modulfunktor*

$$\mathbf{F} : \mathbf{An}^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen},$$

der einem komplexen Raum eine gewisse Äquivalenzklasse von Objekten zuordnet. Dieser Funktor hängt von der zu parametrisierenden Familie ab. Wir wollen in dieser Arbeit auf eine axiomatische Einführung solcher Modulfunktoren verzichten und verweisen dafür auf [Vie95], [New78] und [Muk03]. Die in 1.1.2 konstruierten Funktoren  $[F_p]$  sind Beispiele für solche Modulfunktoren, wenn  $p$  etwa die Deformationstheorie für komplexe Räume oder für Moduln aus Beispiel 1.1.7 ist.

Zu einem gegebenen Modulfunktor gibt es den Begriff des *Modulraums*. Man unterscheidet dabei zwei Arten von Modulräumen:

**3.3.1 Definition:** Ein komplexer Raum  $\mathbb{M} \in \mathbf{An}$  heißt *feiner Modulraum* für  $\mathbf{F}$ , falls  $\mathbb{M}$  den Funktor  $\mathbf{F}$  darstellt, i.e. falls

$$\mathbf{F}(-) \cong \mathrm{Hom}(-, \mathbb{M}).$$

$\mathbb{M}$  bezeichnet man als *groben Modulraum* für  $\mathbf{F}$ , falls es eine natürliche Transformation von Funktoren

$$\vartheta : \mathbf{F} \rightarrow \mathrm{Hom}(-, \mathbb{M})$$

gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $\vartheta(\mathbb{C}) : \mathbf{F}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{M})$  ist bijektiv
- ii) Ist  $\mathbb{M}'$  ein komplexer Raum und  $\vartheta' : \mathbf{F} \rightarrow \mathrm{Hom}(-, \mathbb{M}')$  eine weitere natürliche Transformation, so gibt es eine eindeutig bestimmte Transformation

$$\psi : \mathrm{Hom}(-, \mathbb{M}) \rightarrow \mathrm{Hom}(-, \mathbb{M}')$$

$$\text{mit } \vartheta' = \psi \circ \vartheta.$$

Wenn es zu einem Funktor  $F$  einen feinen Modulraum  $\mathbb{M}$  gibt, so existiert zu dem stets ein *universelles Objekt*  $\mathbf{m}$  für das betrachtete Modulproblem.  $\mathbf{m}$  ist gegeben durch das (eindeutig bestimmte!) Urbild der Identität auf  $\mathbb{M}$  unter dem Isomorphismus

$$\vartheta : F(\mathbb{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathbb{M}, \mathbb{M}), \quad \mathbf{m} := \vartheta^{-1}(\mathrm{id}_{\mathbb{M}}).$$

Betrachten wir die zu  $F$  gehörige Deformationstheorie  $p_F : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}$  aus Beispiel 1.1.2, so ist  $\mathbf{m}$  ein universelles Objekt in  $\mathbf{F}$ ; per Konstruktion liegt  $\mathbf{m}$  über dem Modulraum  $\mathbb{M}$ .

In den meisten Fällen existiert für einen gegebenen Modulfunktor  $F$  *kein* feiner Modulraum; auch die Konstruktion eines groben Modulraums erweist sich oftmals als problematisch. Wenn es einen groben Modulraum für  $F$  gibt, so folgt unmittelbar aus der Definition, dass kein ausgezeichnetes universelles Objekt wie bei der Existenz eines feinen Modulraumes existiert. Allerdings gibt es lokal universelle Objekte:

**3.3.2 Satz:** *Ist  $\mathbb{M}$  ein grober Modulraum für einen Modulfunktor  $F$ , so gibt es zu jedem Punkt  $t \in \mathbb{M}$  eine Umgebung  $U_t$  von  $t$  zusammen mit einem universellen Objekt  $\mathbf{m}_t$ , i.e. bezeichnet  $p_F : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}$  die zu  $F$  gehörige Deformationstheorie, so ist  $\mathbf{m}_t \in \mathbf{F}(U_t)$  ein universelles Objekt in  $\mathbf{F}$  über  $U_t$ .*

Beweis: Ist  $\mathbb{M}$  ein grober Modulraum, so sind die Eigenschaften (1) – (4) von [[FL02], Theorem 4.3] für  $\tilde{F}$  erfüllt. Die Behauptung ergibt sich dann aus [[Fle78], Kapitel 3, Abschnitt 9, Teil A, Lemma 9.2].  $\square$

Wie bereits erwähnt ist die Konstruktion eines feinen Modulraums zu einem gegebenen Modulfunktor  $F$  nur in äußerst seltenen Fällen möglich. Als Beispiele werden in den folgenden beiden Abschnitten die klassischen Fälle des Douady-Raumes und des Quotraumes behandelt.

### 3.3.1 Der Douady-Raum

Das erste interessante Beispiel ist der relative Douady-Raum  $\mathbb{H}_{X/\Sigma}$  von  $X$ , das analytische Analogon zum Hilbert-Schema in der algebraischen Geometrie.  $\mathbb{H}_{X/\Sigma}$  ist ein komplexer Raum über  $\Sigma$  und stellt den Hilbertfunktor  $\mathrm{Hilb}_{X/\Sigma} : \mathbf{An}_{\Sigma} \rightarrow \mathbf{Mengen}$  dar, welcher wie folgt definiert ist: sei  $S$  ein gegebener komplexer  $\Sigma$ -Raum. Ist  $Z \subset X_S := X \times_{\Sigma} S$  ein komplexer Unterraum, der flach und eigentlich über  $S$  liegt, so bezeichnen wir  $Z$  als eine (durch  $S$  parametrisierte) *Familie kompakter Unterräume*. Die Menge  $\mathrm{Hilb}_{X/\Sigma}(S)$  ist nun definiert als die Menge der durch  $S$  parametrisierten Familien kompakter Unterräume, das heißt

$$\mathrm{Hilb}_{X/\Sigma}(S) := \{Z \subset X_S \mid Z \text{ ist eine Familie kompakter Unterräume}\}.$$

Die Darstellbarkeit dieses Funktors wurde in [Pou69] gezeigt. Ist  $\Sigma = 0$  ein reduzierter Punkt, so liefert die vorgenannte Konstruktion den absoluten Hilbertfunktor  $\mathrm{Hilb}_X$ , welcher durch  $\mathbb{H}_{X/\Sigma} = \mathbb{H}_X$  dargestellt wird.  $\mathbb{H}_X$  ist also ein feiner Modulraum für  $\mathrm{Hilb}_X$  im Sinne von Definition 3.3.1.

Ist  $T \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume, so erhält man durch Basiswechsel einen Unterraum  $Z \times_S T \subset X_T$ , und die Projektion auf  $T$  ist wieder flach. Somit ist  $\mathrm{Hilb}_{X/\Sigma} : \mathbf{An}_{\Sigma}^{\mathrm{opp}} \rightarrow \mathbf{Mengen}$  ein Mengen-wertiger Funktor, und analog zu

Beispiel 1.1.2 gibt es eine Faserung in Gruppoide  $p : \mathbf{Hilb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ . Wir wollen diese Faserung genauer betrachten.

**3.3.3 Deformationstheorie für eingebettete Deformationen** In der Kategorie  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$  ist ein Objekt  $a = Z$  über  $S$  gegeben durch einen abgeschlossenen Unterraum  $Z \subset X_S$ , welcher flach und eigentlich über  $S$  liegt. Ein Morphismus  $Z' \rightarrow Z$  ist gegeben durch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z' & \xrightarrow{\tilde{g}} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{S'} & \xrightarrow{id_X \times g} & X_S \end{array}$$

wobei  $g : S' \rightarrow S$  eine holomorphe Abbildung ist. Der Funktor  $p : \mathbf{Hilb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  ordnet einem Objekt  $a = Z$  den zugehörigen komplexen Raum  $S$  zu und einem Morphismus  $Z' \rightarrow Z$  den zugehörigen Morphismus komplexer Räume  $S' \rightarrow S$ . Wegen [Sch70] ist  $p$  eine homogene Faserung in Gruppoide.

**3.3.4 Bemerkung:** i) Ein Morphismus  $a \rightarrow b$  in  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$  ist eindeutig durch den Morphismus  $p(a) \rightarrow p(b)$  bestimmt. Dies folgt sofort aus der Definition der Morphismen in  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$ .

ii) Da der Funktor  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$  darstellbar ist durch den Douady-Raum  $\mathbb{H}_{X/\Sigma}$ , gibt es ein ausgezeichnet Element  $a = Z_{X/\Sigma}$  in der Menge

$$\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}(\mathbb{H}_{X/\Sigma}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{H}_{X/\Sigma}, \mathbb{H}_{X/\Sigma}),$$

welches durch die Identität auf dem Douadyraum gegeben ist. Für den Funktor  $p : \mathbf{Hilb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  folgt aus der Darstellbarkeit, dass dieses Objekt  $Z_{X/\Sigma}$  universell ist in  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$ , das heißt insbesondere, dass  $Z_{X/\Sigma}$  in jedem Punkt  $[Z] \in \mathbb{H}_{X/\Sigma}$  eine universelle Deformation induziert. Für einen detaillierten Beweis der Darstellbarkeit und der Existenz von  $a = Z_{X/\Sigma}$  sei auf [[Dou66], Abschnitt 7, Theorem 1] für den absoluten Fall und auf [Pou69] für den relativen Fall verwiesen.

Wir wollen nun eine  $S$ -Auflösung für eine gegebene Familie kompakter Unterräume  $a = Z \subset X_S$  konstruieren. Dazu benötigen wir den in Abschnitt 2.3 eingeführten Kotangentenkomplex  $\mathbb{L}_{Z/X_S}$  und den Funktor  $L\pi_{2\#}$  aus 2.2.4. Im Folgenden bezeichne  $L\pi_{2\#}$  stets den Funktor  $L\pi_{2\#}(\mathcal{O}_Z)$ .

**3.3.5 Satz:** Sei  $p : \mathbf{Hilb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  wie in 3.3.3 und  $Z$  eine Familie kompakter Unterräume von  $X$ . Bezeichnet  $\pi_2 : Z \rightarrow S$  die Projektion auf  $S$ , so ist  $L\pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_S})$  eine  $S$ -Auflösung von  $Z$ . Ist  $X \rightarrow S$  flach, so ist diese  $S$ -Auflösung obstruierend.

Für den Beweis benötigen wir das folgende bekannte

**3.3.6 Lemma:** Ist  $a = Z$  über  $S$  eine Familie kompakter Unterräume und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_S}$  die  $Z$  definierende Idealgarbe, so gilt für alle kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathcal{N}$

$$\mathrm{Aut}_\Sigma(Z/S, \mathcal{N}) = 0 \text{ und } \mathrm{Ex}_\Sigma(Z/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2, \pi_2^* \mathcal{N}).$$

Ist  $X \rightarrow \Sigma$  flach, so ist ferner durch

$$\mathrm{Ob}_\Sigma(Z/S, \mathcal{N}) := \mathbb{T}_{Z/X_S}^2(\pi_2^* \mathcal{N})$$

eine Obstruktionstheorie für  $a = Z/S$  gegeben.

Beweis: [[BF03], Abschnitt 7.2].  $\square$

Beweis von Satz 3.3.5: Wegen 2.2.5 gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{T}_{Z/X_S}^k(\pi_2^* \mathcal{N}) = \mathrm{Ext}_Z^k(\mathbb{L}_{Z/X_S}, \pi_2^* \mathcal{N}) \cong \mathrm{Ext}_S^k(L\pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_S}), \mathcal{N}).$$

Aus der Konstruktion der Kotangentenfunkoren ergibt sich unmittelbar, dass die angegebenen Isomorphismen mit Restriktionen auf  $Z$ -offenen Teilmengen von  $S$  verträglich sind. Daher folgt die Behauptung aus Lemma 3.3.6 und Satz 2.3.4iv).  $\square$

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich nun leicht der Kotangentialmodul des Douadyraumes  $\mathbb{H}_{X/\Sigma}$  berechnen.

**3.3.7 Theorem:** Sei  $p : \mathbf{Hilb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  wie in 3.3.3 und  $a = Z = Z_{X/\Sigma}$  das universelle Objekt aus Bemerkung 3.3.4ii). Bezeichnet  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{X/\Sigma}$  den Douady-Raum und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X \times_\Sigma \mathbb{H}}$  die zu  $Z$  gehörige Idealgarbe, so ist

$$\Omega_{\mathbb{H}/\Sigma}^1 \cong L^0 \pi_{2\#}(\mathcal{O}_Z)(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2),$$

wobei  $\pi_2$  die Projektion  $Z \rightarrow \mathbb{H}$  bezeichnet. Ist diese glatt von relativer Dimension  $d$ , so gilt

$$\Omega_{\mathbb{H}/\Sigma}^1 \cong R^d \pi_{2*}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \omega_{Z/\mathbb{H}})$$

Beweis: Aufgrund der Universalität ist  $a = Z$  in jedem Punkt universell, das heißt es ist  $\mathbb{H} = U_a$ . Aus 2.2.8 ergibt sich unmittelbar

$$L^{-1} \pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_{\mathbb{H}}}) \cong L^0 \pi_{2\#}(\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{L}_{Z/X_{\mathbb{H}}})) \cong L^0 \pi_{2\#}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2).$$

Aus Lemma 3.3.6 ergibt sich  $L^0 \pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_{\mathbb{H}}}) = 0$ . Die Behauptungen folgen daher aus Theorem 3.2.1 und Bemerkung 2.2.13. Man beachte, dass wegen der Universalität von  $a$  die  $\mathbb{H}$ -Auflösung  $L\pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_{\mathbb{H}}})$  nicht obstruierend sein muss.  $\square$

**3.3.8 Bemerkung:** Ist  $X \rightarrow \Sigma$  flach, so hat man allgemeiner für jede Familie kompakter Unterräume  $a = Z$  über  $S$  eine Darstellung des Kotangentialmoduls von  $S$  auf der Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a$ . Bezeichnet  $\mathbb{L}_{Z/X_S}$  den Kotangentenkomplex von  $Z$  über  $X_S$  und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_S}$  die zu  $Z$  gehörige Idealgarbe, so gilt genauer

$$\Omega_{S/\Sigma|_{S_a}}^1 \cong L^0 \pi_{2\#}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)|_{S_a}.$$

Wegen der Flachheit von  $X \rightarrow \Sigma$  liefert  $L\pi_{2\#}(\mathbb{L}_{Z/X_S})$  nach Satz 3.3.5 eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a = Z$ . Genau wie im Beweis von 3.3.7 sieht man, dass diese  $S$ -Auflösung verschwindende nullte Kohomologie hat; die behauptete Darstellung des Kotangentialmoduls folgt daher wieder aus 3.2.1. Ebenso gibt es für jedes  $Z$  über  $S$  eine Darstellung der Kotangentialgarbe auf  $S_a$  durch die  $d$ -te höhere Bildgarbe von  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \otimes \omega_{Z/S}$ , wenn  $Z \rightarrow S$  glatt von relativer Dimension  $d$  ist. Der Beweis verläuft analog zu dem von 3.3.7.

**3.3.9 Bemerkung:** Mit den üblichen Anpassungen gelten die Aussagen dieses Abschnitts auch in der algebraischen Situation. Insbesondere liefert 3.3.7 eine explizite globale Darstellung für den Kotangentenmodul des relativen Hilbertschemas.

### 3.3.2 Der Quot-Raum

Als nächstes wollen wir den Kotangentenmodul für den relativen Quot-Raum berechnen. In manchen Quellen wird dieser auch als Douady-Raum bezeichnet. In Analogie zur algebraischen Situation und dem sogenannten Quot-Schema wollen wir den Namen Quot-Raum verwenden und damit Verwechslungen mit dem Douady-Raum des vorherigen Abschnitts verhindern.

**3.3.10** Wir betrachten die folgende Situation: es sei  $f : X \rightarrow \Sigma$  eine holomorphe Abbildung und  $\mathcal{F}$  eine kohärente Garbe auf  $X$ . Für einen komplexen Raum  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  sei ein  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotient über  $S$  ein Quotient  $\mathcal{Q}$  von  $\mathcal{F}_S := \pi_1^* \mathcal{F}$ , der flach und eigentlich über  $S$  liegt.  $\pi_1 : X \times_\Sigma S \rightarrow X$  bezeichne dabei die Projektion auf den ersten Faktor. Mit dieser Bezeichnung ist der sogenannte *Quot-Funktor* gegeben durch

$$\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}(S) := \{\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \text{ ist ein kohärenter } \mathcal{F}/\Sigma\text{-Quotient über } S\}.$$

$\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotienten sind mit holomorphen Abbildungen verträglich: ist  $f : T \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume, so ist  $(id_X \times f)^* \mathcal{Q}$  ein  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotient über  $T$ . Daher ist  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma} : \mathbf{An}_\Sigma^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen}$  ein Mengen-wertiger Funktor und die assoziierte Faserung  $p : \mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  liefert wieder eine Faserung in Gruppoide [vgl. Beispiel 1.1.2].

Analog zum Hilbert-Funktor ist auch der Quot-Funktor darstellbar durch einen komplexen Raum  $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$ . Beweise findet man in [[Dou66], Abschnitt 7, Theorem 1] und [Pou69] für den relativen Fall.  $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  wird als *relativer Quot-Raum* von  $\mathcal{F}$  über  $\Sigma$  bezeichnet. Ist  $\Sigma = 0$  ein reduzierter Punkt, so ist der absolute Quot-Raum  $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}} = \mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  ein feiner Modulraum für  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}}$  im Sinne von 3.3.1.

**3.3.11 Deformationstheorie für Deformation von Quotienten** Wir wollen die Kategorie  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  näher beschreiben: die Objekte sind gegeben durch  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotienten  $a = (S, \mathcal{Q})$ ; ein Morphismus  $(T, \mathcal{R}) = b \rightarrow a$  in  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  besteht aus einem Paar von Morphismen  $(f, \varphi)$ , wobei  $f : T \rightarrow S$  ein Morphismus komplexer Räume und  $\varphi : (id_X \times f)^* \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$  ein Isomorphismus ist.

Man sieht leicht, dass die folgende Beschreibung zu der vorigen äquivalent ist: ein Objekt ist gegeben durch ein Paar  $a = (S, \mathcal{K})$ , wobei  $\mathcal{K} \subset \pi_1^* \mathcal{F}$  ein kohärenter Untermodul ist mit der Eigenschaft, dass  $\pi_1^* \mathcal{F}/\mathcal{K}$  eigentlich und flach über  $S$  liegt. Ein Morphismus  $(T, \mathcal{J}) = b \rightarrow a$  ist dann gegeben durch ein Paar  $(f, \varphi)$ , wobei hier  $f : T \rightarrow S$  wie in der ersten Beschreibung ein Morphismus komplexer Räume und  $\varphi : (id_X \times f)^* \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  ein Isomorphismus ist.

**3.3.12 Bemerkung:** i) Für kohärente  $\mathcal{O}_X$ -Moduln  $\mathcal{F}$ , die eigentlich und flach über  $\Sigma$  sind, ergibt sich sogar die Äquivalenz

$$\mathcal{Q} \text{ ist } \mathcal{F}/\Sigma\text{-Quotient} \iff \mathcal{K} \text{ ist kohärent und flach und eigentlich über } S.$$

$\mathcal{K}$  bezeichnet dabei den Kern der kanonischen Surjektion  $\mathcal{F}_S \rightarrow \mathcal{Q}$ .

- ii) Wählt man für  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$  die Strukturgarbe des fixierten Raumes  $X$ , so folgt aus der zweiten Beschreibung in 3.3.11 unmittelbar, dass die Funktoren  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{O}_X/\Sigma}$  und  $\mathbf{Hilb}_{X/\Sigma}$  isomorph sind. Sie induzieren daher äquivalente Deformationstheorien. In dieser Hinsicht ist der Hilbertsche Modulfunktor ein Spezialfall des Quot-Funktors, und die eingebetteten Deformationen sind genau die Deformationen von Quotienten von  $\mathcal{O}_X$ .

Wir werden später sehen, dass sich Familien kompakter Unterräume und  $\mathcal{O}_X/\Sigma$ -Quotienten eineindeutig entsprechen. Durch diese Zuordnung erhalten wir dann verschiedene, also nicht-quasiisomorphe  $S$ -Auflösungen einer Familie  $Z$  resp. eines Quotienten  $\mathcal{Q}$  [siehe 3.3.18].

- iii) Aus der Konstruktion 3.3.11 folgt sofort, dass ein Morphismus in  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  eindeutig durch den zugrundeliegenden Morphismus komplexer Räume  $f : S \rightarrow T$  bestimmt ist.
- iv) Aus der Darstellbarkeit des Quot-Funktors folgt, dass es ein universelles Objekt  $a = \mathcal{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  in  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  gibt, welches über dem Quot-Raum  $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  liegt. Dieses Objekt entspricht wie im Fall des Hilbertschen Modulfunktors der Identität  $\text{id} \in \text{Hom}(\mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}, \mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma})$ .

Wir wollen nun für einen beliebigen  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotienten  $a = \mathcal{Q} \in \mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}(S)$  eine  $S$ -Auflösung konstruieren. Dazu beweisen wir die folgende Aussage:

**3.3.13 Satz:** *Sei  $p : \mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$  wie in 3.3.11 und  $a = \mathcal{Q}$  ein  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotient. Bezeichnen  $\pi_1 : X_S \rightarrow X$  und  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  die Projektionen und  $\mathcal{K} := \text{Ker}(\pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q})$  den Kern der kanonischen Abbildung, so ist  $L\pi_{2*}(\mathcal{K}[1])$  eine  $S$ -Auflösung von  $\mathcal{Q}$ . Ist ferner  $\mathcal{F}$  flach über  $\Sigma$ , so ist die  $S$ -Auflösung obstruierend.*

[1] bezeichnet den Translationsfunktork aus 0.4.2. Es sei daran erinnert, dass der Komplex  $\mathcal{K}[1]$  im Grad  $-1$  konzentriert ist und in den anderen Graden verschwindet. Dem Beweis des Satzes wird das folgende Lemma vorausgeschickt.

**3.3.14 Lemma:** *Mit den Bezeichnungen von 3.3.13 gilt für alle kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\mathcal{N}$*

$$\text{Aut}_{\Sigma}(\mathcal{Q}/S, \mathcal{N}) = 0 \text{ und } \text{Ex}_{\Sigma}(\mathcal{Q}/S, \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_{X_S}(\mathcal{K}, \mathcal{Q} \otimes \pi_2^* \mathcal{N}).$$

*Falls  $\mathcal{F}$  flach über  $\Sigma$  liegt, so ist zusätzlich*

$$\text{Ob}_{\Sigma}(\mathcal{Q}/S, \mathcal{N}) := \text{Ext}_{X_S}^1(\mathcal{K}, \mathcal{Q} \otimes \pi_2^* \mathcal{N})$$

*eine Obstruktionstheorie für  $a = \mathcal{Q}$ .*

Beweis: Die erste Aussage folgt aus der Tatsache, dass Morphismen in  $\mathbf{Quot}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  durch die zugrundeliegenden Morphismen komplexer Räume eindeutig bestimmt sind [vgl. 3.3.12ii)]. Die zweite Behauptungen ist wohlbekannt [siehe [BF03], Lemma 7.12] und die dritte ergibt sich aus [[BF03], Satz 7.14]. Man prüft leicht nach, dass die angegebenen Isomorphismen und Definitionen mit Restriktionen auf  $Z$ -offenen Teilmengen von  $S$  verträglich sind.  $\square$

Beweis von 3.3.13: Im Folgenden bezeichne  $L\pi_{2\sharp}$  stets den Funktor  $L\pi_{2\sharp(\mathcal{Q})}$ . Es ist zu zeigen, dass für  $\mathcal{K} := L\pi_{2\sharp}(\mathcal{K}[1])$  die Isomorphismen  $(RA)$  und  $(RE)$  aus 2.4.1 erfüllt sind und dass durch  $(RO)$  eine Obstruktionstheorie für  $a$  definiert wird, falls  $\mathcal{F}$  flach über  $\Sigma$  ist. Wegen 2.2.5 ist aber für jedes  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Ext}_S^k(\mathcal{K}, \mathcal{N}) &= \text{Ext}_S^k(L\pi_{2\sharp}(\mathcal{K}[1]), \mathcal{N}) \\ &\cong \text{Ext}_{X_S}^k(\mathcal{K}[1], \mathcal{Q} \otimes \pi_2^* \mathcal{N}) \\ &\cong \text{Ext}_{X_S}^{k-1}(\mathcal{K}, \mathcal{Q} \otimes \pi_2^* \mathcal{N}) \end{aligned}$$

Der letzte Isomorphismus ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Ext-Moduln. Ebenso folgt aus der Konstruktion der Ext-Moduln, dass die angegebenen Isomorphismen mit Restriktionen auf  $\mathbb{Z}$ -offenen Teilmengen  $U \subset S$  verträglich sind. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 3.3.14.  $\square$

Für den Quot-Raum  $\mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  können wir nun leicht den Kotangentialmodul berechnen.

**3.3.15 Theorem:** *Sei  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul,  $a = \mathcal{Q}^*$  das universelle Objekt aus Bemerkung 3.3.12iii) und  $\mathbb{Q} := \mathbb{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  der Quot-Raum. Ist nun  $\mathcal{K}^* := \text{Ker}(\pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q}^*)$  der Kern der zugehörigen kanonischen Abbildung, so gibt es einen  $\mathbb{Q}$ -Isomorphismus*

$$\Omega_{\mathbb{Q}/\Sigma}^1 \cong L^0 \pi_{2\sharp(\mathcal{Q}^*)}(\mathcal{K}^*).$$

Ist  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$ , so ist

$$\Omega_{\mathbb{Q}/\Sigma}^1 \cong \mathcal{E}xt_{\pi_2}^d(\mathcal{Q}^*, \mathcal{K}^* \otimes \pi_1^* \omega_{X/\Sigma}).$$

Beweis: Nach 3.3.13 ist  $L\pi_{2\sharp}(\mathcal{K}^*[1])$  eine  $\mathbb{Q}$ -Auflösung von  $\mathcal{Q}^*$ . Wegen 2.2.8 ergibt sich genau wie im Beweis von 3.3.7

$$L^{-1} \pi_{2\sharp}(\mathcal{K}^*[1]) \cong L^0 \pi_{2\sharp}(\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{K}^*[1])) \cong L^0 \pi_{2\sharp}(\mathcal{K}).$$

Der erste Teil des Theorems folgt somit aus 3.2.1. Man beachte, dass wegen der Universalität von  $\mathcal{Q}^*$  wieder  $\mathbb{Q} = U_a$  gilt und somit insbesondere ohne weitere Forderungen an die obige  $\mathbb{Q}$ -Auflösung die Offenheit der Versalität gilt. Ist  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$ , so betrachten wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\Sigma} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \longrightarrow & \Sigma \end{array}$$

Diesem entnehmen wir, dass auch  $X \times_{\Sigma} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$  ist und

$$\omega_{X \times_{\Sigma} \mathbb{Q}/\mathbb{Q}} \cong \pi_1^* \omega_{X/\Sigma}.$$

Nun folgt die zweite Behauptung aus 2.2.12.  $\square$

**3.3.16 Bemerkung:** Ist  $\mathcal{F}$  ein kohärenter Modul auf  $X$ , der flach über  $\Sigma$  liegt, so gibt es auf der Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a$  für *jeden*  $\mathcal{F}/\Sigma$ -Quotient  $\mathcal{Q}$  über  $S$  eine Darstellung für  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  wie in 3.3.15: bezeichnet  $\mathcal{K} := \text{Ker}(\pi_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q})$  den Kern der kanonischen Abbildung, so gilt

$$\Omega_{S/\Sigma|_{S_a}}^1 \cong L^0 \pi_{2\#}(\mathcal{K})|_{S_a}$$

Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von 3.3.15. Details seien dem Leser überlassen.

**3.3.17 Bemerkung:** Mit den üblichen Anpassungen gelten die Aussagen dieses Abschnittes auch in der algebraischen Situation. Insbesondere liefert 3.3.15 eine globale Darstellung für die Kotangentialgarbe des Quot-Schemas. Es sei angemerkt, dass für eine projektive glatte Abbildung  $X \rightarrow \Sigma$  eine solche Darstellung des Kotangentialmodul von  $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}/\Sigma}$  bereits von M. Lehn in [Leh98] gezeigt wurde.

**3.3.18 Bemerkung:** Es sei  $j : Z \rightarrow X_S$  eine abgeschlossene Einbettung und  $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_S}$  die definierende kohärente Idealgarbe von  $Z$ . Ferner sei  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  die kanonische Projektion und  $\pi := \pi_2 \circ j$  die Projektion von  $Z$  auf  $S$ . Diese sei flach und eigentlich, so dass wir  $Z$  als eine durch  $S$  parametrisierte Familie abgeschlossener Unterräume auffassen können. Ferner sei auch  $X \rightarrow \Sigma$  und somit  $\pi_2$  flach und eigentlich, so dass  $\mathcal{Q}_Z := \mathcal{O}_{X_S}/\mathcal{J}$  ein  $\mathcal{O}_X/\Sigma$ -Quotient über  $S$  ist. Aus 3.3.5 erhalten wir nun die  $S$ -Auflösung  $L\pi_{\#}(\mathcal{O}_Z)(\mathbb{L}_{Z/X_S})$  und aus 3.3.13 die  $S$ -Auflösung  $L\pi_{2\#}(\mathcal{Q}_Z)(\mathcal{J}[1])$ . Diese Komplexe sind in der Regel nicht quasi-isomorph: gäbe es einen Isomorphismus in  $\mathbf{D}(S)$  zwischen diesen beiden Komplexen, so wäre auch

$$R\text{Hom}^\bullet(L\pi_{\#}(\mathbb{L}_{Z/X_S}), \mathcal{N}) \cong R\text{Hom}^\bullet(L\pi_{2\#}(\mathcal{J}[1]), \mathcal{N})$$

ein Isomorphismus. Zusammen mit 2.2.4 folgt dann aber

$$\mathbb{T}_{Z/X_S}^i(\pi^* \mathcal{N}) = \text{Ext}^i(\mathbb{L}_{Z/X_S}, \pi^* \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^{i-1}(\mathcal{J}, \pi_2^* \mathcal{N})$$

für alle  $i \in \mathbb{Z}$ . Dies steht im Widerspruch zu folgender Tatsache: für einen vollständigen Durchschnitt  $Z \subset X_S$  der Dimension 0 verschwindet  $\mathbb{T}_{Z/X_S}^2(\pi^* \mathcal{N})$  beispielsweise für  $\mathcal{N} = \mathcal{O}_S$ , aber es ist

$$\text{Ext}_{X_S}^1(\mathcal{J}, \pi_2^* \mathcal{O}_S) \cong \text{Ext}_{X_S}^1(\mathcal{J}, \mathcal{O}_{X_S}) \cong \Gamma(Z, \wedge^2 \mathcal{N}_{Z/X}) \neq 0.$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{N}_{Z/X} := \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  die Normalengarbe auf  $Z$ .

Dies bedeutet insbesondere, dass  $L\pi_{\#}(\mathcal{O}_Z)(\mathbb{L}_{Z/X_S})$  und  $L\pi_{2\#}(\mathcal{Q}_Z)(\mathcal{J}[1])$  zwei  $S$ -Auflösungen von  $a = Z$  sind, die nicht quasi-isomorph sind und die unterschiedliche Obstruktionstheorien für  $a$  induzieren. Die Darstellung des Kotangentialmoduls von  $S$  ist unabhängig von der  $S$ -Auflösung: schreiben wir  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  als  $j^* \mathcal{J}$ , so folgt

$$\text{Hom}_Z(j^*(\mathcal{J}), \pi^* \mathcal{N}) \cong \text{Hom}_{X_S}(\mathcal{J}, j_* \pi^* \mathcal{N})$$

Nun ist  $\pi = \pi_2 \circ j$  und somit  $\pi^* = j^* \pi_2^*$ ; die Projektionsformel aus 0.4.8 liefert daher

$$j_* \pi^* \mathcal{N} \cong j_* j^* \pi_2^* \mathcal{N} \cong \pi_2^* \mathcal{N} \otimes j_* \mathcal{O}_Z$$

Da  $j$  die abgeschlossene Einbettung von  $Z$  in  $X_S$  ist, ist per Definition  $\mathcal{Q}_Z = j_*\mathcal{O}_Z$ . Insgesamt erhalten wir also einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_Z(j^*(\mathcal{J}), \pi^*\mathcal{N}) \cong \mathrm{Hom}_{X_S}(\mathcal{J}, (\pi_2^*\mathcal{N}) \otimes \mathcal{Q}_Z).$$

Die linke Seite ist nach Lemma 3.3.6 isomorph zu  $\mathrm{Ex}_\Sigma(Z/S, \mathcal{N})$  und wegen 3.3.14 die rechte Seite zu  $\mathrm{Ex}_\Sigma(\mathcal{Q}_Z/S, \mathcal{N})$ . Ebenso liefern diese Lemmata, dass beide zu Beginn genannten  $S$ -Auflösungen verschwindende nullte Kohomologie haben; daher ergibt sich aus Beispiel 3.2.7ii) und 2.2.8

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(L^0\pi_{\sharp(\mathcal{O}_Z)}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2), \mathcal{N}) &\cong \mathrm{Ex}_\Sigma(Z/S, \mathcal{N}) \\ &\cong \mathrm{Ex}_\Sigma(\mathcal{Q}_Z/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Hom}(L^0\pi_{2\sharp(\mathcal{Q}_Z)}(\mathcal{J}), \mathcal{N}). \end{aligned}$$

Da die vorgenannten Isomorphismen funktoriell in  $\mathcal{N}$  sind, erhalten wir daraus  $L^0\pi_{\sharp(\mathcal{O}_Z)}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \cong L^0\pi_{2\sharp(\mathcal{Q}_Z)}(\mathcal{J})$ . Wegen Bemerkung 3.3.8 und Bemerkung 3.3.16 zeigt dies, dass der Kotangentenmodul auf  $S_a$  unabhängig ist von der betrachteten  $S$ -Auflösung.

### 3.4 Deformation von Moduln

In diesem Abschnitt werden ganz allgemein Deformationen eines gegebenen kohärenten Moduls  $\mathcal{F}$  auf einem komplexen Raum  $X$  betrachtet. Diese lassen sich durch die Deformationstheorie  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  aus Beispiel 1.1.7 beschreiben. Aussagen über den Kotangentenmodul der Form 3.3.8 und 3.3.16 oder 3.3.7 und 3.3.15, gibt es, zumindest ohne weitere Voraussetzung, bei der Deformation von Moduln nicht. Zum einen findet man im Allgemeinen keine  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$ , die im Grad Null lokal frei ist, zum anderen ist die Klasse aller Objekte einer Faser  $\mathbf{F}(S)$  über einen  $\Sigma$ -Raum  $S$  in der Regel zu groß.

Die auftretenden Probleme beginnen bereits bei dem Versuch, einen Modulraum für die Modulfunktor der jeweiligen Familien zu konstruieren. Für die Familie aller kohärenten Moduln existiert nichtmal ein grober Modulraum. Es lassen sich allerdings interessante Familien von Moduln mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften betrachten, für die es zumindest einen groben Modulraum gibt. Eine wichtige Klasse bilden die *einfachen* Moduln, also solche mit trivialer Automorphismengruppe. Für einfache Moduln gibt es eine  $S$ -Auflösung  $\mathcal{K}$ , deren nullter Kohomologiemodul lokal frei ist. Ferner besitzt die Familie einfacher Moduln einen groben Modulraum. Weitere interessante Familien von Moduln sind die einfachen *kogerahmten* Moduln und einfache lokal freie Moduln, i.e. Familien von *Vektorbündeln*.

Diese Spezialfälle von Familien kohärenter Moduln werden im Folgenden genauer betrachtet. Wir werden lokal eine zu 3.2.1 analoge Darstellung für den Kotangentenmodul der jeweiligen Modulräume zeigen, das heißt wir zeigen, dass der Isomorphismus in 3.2.1 zumindest für eine geeignete offene Teilmenge von  $S_a$  gilt.

Bevor wir diese verschiedenen Familien von Moduln untersuchen, wollen wir zunächst die Grundsituation für alle vorgenannten Beispiele festlegen und dazu nochmal an die Deformationstheorie von Moduln erinnern.

**3.4.1 Deformationstheorie für Familien kohärenter Moduln** Sei im Folgenden  $X \rightarrow \Sigma$  eine festgewählte Abbildung komplexer Räume. Für einen komplexen Raum  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$  bezeichne  $\mathbf{Coh}(X_S)$  wie üblich die Kategorie der kohärenten Moduln auf  $X_S := X \times_\Sigma S$  und  $\mathbf{Flat}(S) \subset \mathbf{Coh}(X_S)$  diejenige Unterkategorie, die aus den Moduln besteht, welche flach über  $S$  liegen. Fixieren wir den komplexen Raum  $S$  nicht, so erhalten wir die Kategorie  $\mathbf{Flat} := \mathbf{Flat}_{X/\Sigma}$  aller Moduln, die auf einem geeigneten Produktraum  $X_S$  kohärent sind und flach über  $S$  liegen. Objekte dieser Kategorie werden stets als Tupel  $(S, \mathcal{F})$  geschrieben. Sind  $a := (S, \mathcal{F}_1)$  und  $b := (T, \mathcal{F}_2)$  zwei Objekte in  $\mathbf{Flat}$ , so ist ein Morphismus  $a \rightarrow b$  gegeben durch einen Morphismus komplexer Räume  $f : S \rightarrow T$  über  $\Sigma$  und einem Isomorphismus von  $\mathcal{O}_S$ -Moduln  $\varphi : (\mathrm{id}_X \times_\Sigma f)^* \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1$ . Da die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_S & \longrightarrow & X_T \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & T \end{array}$$

stets kartesisch sind, werden  $T$ -flache Moduln in  $S$ -flache Moduln überführt. Durch den Funktor  $p : \mathbf{Flat} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ , welcher einem Objekt den zugrundeliegenden Raum  $S$  und einem Morphismus den zugehörigen Morphismus komplexer Räume zuordnet, wird eine Deformationstheorie definiert [vgl. Beispiel 1.1.7].

Die in 3.4.1 definierte Deformationstheorie wird im Folgenden mit  $p_{\mathbf{Flat}}$  bezeichnet. Um diese Deformationstheorie zu verstehen, wollen wir für ein Objekt  $a = (S, \mathcal{F}) \in \mathbf{Flat}$  und einen kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Modul  $\mathcal{N}$  die Moduln

$$\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{N}) := \mathrm{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) \text{ und } \mathrm{Ex}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{N}) := \mathrm{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$$

berechnen. Im Folgenden bezeichne  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  die Projektion auf  $S$ .

**3.4.2 Lemma:** *Es sei  $X \rightarrow \Sigma$  eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann gibt es Isomorphismen*

$\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Hom}_{X_S}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{N})$  und  $\mathrm{Ex}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{N}) \cong \mathrm{Ext}_{X_S}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{N})$ ,  
die funktoriell in  $\mathcal{N}$  sind. Ist ferner  $X \rightarrow \Sigma$  flach, so wird durch

$$\mathrm{Ob}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{N}) := \mathrm{Ob}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) := \mathrm{Ext}_{X_S}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{N})$$

eine Obstruktionstheorie für  $a$  im Sinne von 1.4.4iii) definiert.

Beweis: Folgt aus [[Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 4, Teil E] und [[BF03], Abschnitt 7.1].  $\square$

Ist  $\mathcal{F}_0$  ein kohärenter Modul auf der Faser  $X_0 := X \times_\Sigma 0$ , so ist durch jeden Modul  $\mathcal{F}' \in \mathbf{Coh}(X_S)$  mit  $\mathcal{F}'(s) \cong \mathcal{F}_0$  für ein  $s \in S$  eine Deformation von  $\mathcal{F}_0$  gegeben. Wegen dem Satz von Schlessinger besitzt  $\mathcal{F}_0$  eine formal semiuniverselle Deformation, falls

$$\mathrm{Ex}_\Sigma(\mathcal{F}_0, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Ext}_{X_0}^1(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0)$$

als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum endliche Dimension hat. Dies ist beispielsweise erfüllt, wenn  $\mathrm{supp} \mathcal{F}_0 \subset X_0$  kompakt ist. Ein tiefes Resultat von Trautmann-Siu [ST81] zeigt, dass dann sogar eine konvergente semiuniverselle Deformation von  $\mathcal{F}_0$  existiert.

**3.4.3 Theorem:** *Es sei  $\pi : X \rightarrow \Sigma$  eine holomorphe Abbildung,  $X_0 = X(0)$  die Faser von  $\pi$  über einem Punkt  $0 \in \Sigma$  und  $a_0 := (0, \mathcal{F}_0)$  ein kohärenter Modul über  $X_0$ . Hat  $\mathcal{F}_0$  kompakten Träger in  $X_0$ , so gibt es eine semiuniverselle Deformation von  $a_0$ .*

Insbesondere impliziert diese Aussage, dass es Moduln mit *konvergenten* versellen und semiuniversellen Deformationen gibt. Diese liegen dann flach über einem komplexen Raum  $S$ .

**3.4.4 Beispiel:** Ist  $X$  ein komplexer Raum, so können wir für einen Punkt  $x \in X$  den Modul  $\mathcal{M}_0 = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}_x$  als Modul auf  $X$  betrachten, i.e.  $\mathcal{M}_0 := \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$ . Bezeichnet  $\mathcal{J} \in \mathcal{O}_{X \times X}$  die Idealgarbe zur Diagonalen  $\Delta \subset X \times X$ , so ist der Quotient  $\mathcal{M} := \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{J}$  die semiuniverselle Deformation von  $\mathcal{M}_0$ . Die Basis der semiuniversellen Deformation ist genau der komplexe Raumkeim  $(X, x)$ .

Im Folgenden soll für ein Objekt  $a = (S, \mathcal{F})$  eine  $S$ -Auflösung konstruiert werden; wir nehmen dabei an, dass die Abbildung  $X \rightarrow \Sigma$  stets eigentlich ist. Bezeichnen  $\pi_1 : X_S \rightarrow X$  und  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  die jeweiligen Projektionen, so gilt:

**3.4.5 Satz:** *Es sei  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich,  $a = (S, \mathcal{F})$  ein Objekt aus **Flat** und  $L\pi_{2\#}(\mathcal{F}) := L\pi_{2\#}(\mathcal{F})$  der Funktor aus 2.2.4. Dann gilt:*

- i)  $L\pi_{2\#}(\mathcal{F})$  ist eine  $S$ -Auflösung von  $a$
- ii) Ist  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich und flach, so ist die  $S$ -Auflösung mit Obstruktionen verträglich
- iii) Ist zusätzlich  $X \rightarrow \Sigma$  glatt von relativer Dimension  $d$ , so gilt

$$L\pi_{2\#}(\mathcal{F}) \cong R\pi_{2*} R\mathcal{H}om^*(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_1^* \omega_{X/\Sigma})[d].$$

Beweis: Zunächst sei angemerkt, dass die Isomorphismen und die Definition der Obstruktionstheorie in Lemma 3.4.2 mit Restriktionen auf  $Z$ -offenen Teilmengen von  $S$  verträglich sind. Daher folgen die ersten beiden Behauptungen aus 3.4.2 und Bemerkung 2.2.5. Man beachte, dass  $\mathcal{F}$  eigentlich über  $S$  liegt, da mit  $X \rightarrow \Sigma$  auch  $X_S \rightarrow S$  eigentlich ist. Die dritte Behauptung ergibt sich leicht aus 2.2.12, da Glattheit mit Basiswechsel verträglich und somit auch  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  glatt von relativer Dimension  $d$  ist. Die kanonische Garbe auf  $X_S$  ist in dem Fall gegeben durch  $\omega_{X_S/S} \cong \pi_1^* \omega_{X/\Sigma}$ .  $\square$

Ist  $X \rightarrow \Sigma$  flach und eigentlich, so können wir für eine verselle Deformation  $\mathcal{F}'$  eines kohärenten Moduls  $\mathcal{F}_0$  über der Faser  $X_0$  den Kotangentialmodul der Basis von  $\mathcal{F}'$  zumindest lokal berechnen mit Hilfe von Korollar 3.1.7 und der  $S$ -Auflösung  $L\pi_{2\#}(\mathcal{F}')$ . Allerdings haben wir bereits in 3.1.8iii) angemerkt, dass diese Darstellung wegen der recht umständlichen Konstruktion der für die Berechnung benötigten Abbildung  $\tilde{h}^{-2}$  nicht zufriedenstellend ist. Im Wesentlichen erhalten wir (lokal) eine Darstellung von  $\Omega_{S'/\Sigma}^1$  als Kokern eines Morphismus von zwei freien Moduln; eine solche folgt aber direkt aus der Kohärenz von  $\Omega_{S'/\Sigma}^1$ .

Wegen Theorem 3.4.3 gibt es zu  $\mathcal{F}_0$  eine konvergente semiuniverselle Deformation  $\mathcal{F}$  über  $S$ . Falls nun  $L^0\pi_{2\#}(\mathcal{F})$  lokal frei ist, können wir 3.2.1 anwenden und erhalten eine globale Darstellung wie bei den Beispielen aus Abschnitt 3.3. Aus 3.2.1 ergibt sich mit Satz 3.4.5 unmittelbar:

**3.4.6 Satz:** Für  $a = (S, \mathcal{F}) \in \mathbf{Flat}$  hat  $\Omega_{S/\Sigma}^1$  eine Darstellung auf der Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a \subset S$  wie in 3.2.1, falls eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

- i)  $X \rightarrow \Sigma$  ist eigentlich und flach und  $L^0\pi_{2\sharp}(\mathcal{F})$  ist lokal frei auf  $S$
- ii)  $X \rightarrow \Sigma$  ist eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$  und

$$\mathcal{E}xt_{\pi_2}^d(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_1^* \omega_{X/\Sigma})$$

ist lokal frei. □

In den folgenden Abschnitten betrachten wir Klassen von Moduln, die diesen Voraussetzungen genügen.

### 3.4.1 Einfache Moduln

Eine wichtige Klasse sind die *einfachen* Moduln.

**3.4.7 Definition:** Ist  $X$  ein komplexer Raum über einem Basisraum  $\Sigma$  und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter Modul auf  $X$ , so heißt  $\mathcal{F}$  *einfach im Punkt*  $\sigma \in \Sigma$ , falls  $\mathcal{F}_\sigma$  ein flacher  $\mathcal{O}_{\Sigma, \sigma}$ -Modul ist und auf der Faser  $X(\sigma)$  der induzierte Modul  $\mathcal{F}(\sigma)$  nur die Identität als Automorphismus besitzt, das heißt, falls

$$\mathrm{Hom}_{X(\sigma)}(\mathcal{F}(\sigma), \mathcal{F}(\sigma)) \cong \mathbb{C}.$$

$\mathcal{F}$  heißt *einfach* oder *einfach über*  $\Sigma$ , falls  $\mathcal{F}$  in jedem Punkt von  $\Sigma$  einfach ist.

Aus der Definition folgt leicht, dass *Einfachheit* eines Moduls  $\mathcal{F}$  mit Basiswechsel verträglich ist, das heißt ist  $S$  ein weiterer  $\Sigma$ -Raum und  $\pi_1 : X_S \rightarrow X$  die Projektion auf  $X$ , so ist der Modul  $\pi_1^* \mathcal{F}$  einfach über  $S$ , falls  $\mathcal{F}$  einfach über  $\Sigma$  ist. Desweiteren ergibt sich die folgende wichtige Eigenschaft:

**3.4.8 Satz:** Ist  $X' \rightarrow S$  eine eigentliche holomorphe Abbildung und  $\mathcal{F}$  ein kohärenter Modul auf  $X'$ , der einfach über  $S$  liegt, so ist  $\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, -)$  ein exakter Funktor auf der Kategorie der kohärenten  $\mathcal{O}_S$ -Moduln. Insbesondere ist  $L^0\pi_{2\sharp}(\mathcal{F})$  ein lokal freier  $\mathcal{O}_S$ -Modul.

Beweis: Der Funktor  $\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, -)$  ist stets linksexakt. Für die Rechtsexaktheit genügt es nach [[Gro63], Kapitel 3, Teil 2, 7.5.2] zu zeigen, dass für jeden Punkt  $s \in S$  die folgende Abbildung surjektiv ist:

$$\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s).$$

Für ein beliebiges  $t \in S$  ist

$$\mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_t \cong \mathrm{Aut}_{(\Sigma, 0)}((\mathcal{F}, t)/(S, t), (\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_t).$$

Nun ist  $\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s$  eine Wolkenkratzergerabe auf  $S$ , die im Punkte  $s$  konzentriert ist. Für  $t \neq s$  ist obige Abbildung daher trivialerweise surjektiv. Ist  $t = s$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_\Sigma(\mathcal{F}/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_s &\cong \mathrm{Aut}_{(\Sigma, 0)}((\mathcal{F}, s)/(S, s), \mathbb{C}_s) \\ &\cong \mathrm{Aut}_{(\Sigma, 0)}(\mathcal{F}(s)/S_s, \mathbb{C}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{X'(s)}(\mathcal{F}(s), \mathcal{F}(s) \otimes \eta^* \mathbb{C}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{X'(s)}(\mathcal{F}(s), \mathcal{F}(s)). \end{aligned}$$

$\eta$  bezeichnet dabei die kanonische Projektion  $X'(s) \rightarrow \{s\}$ . Die Isomorphismen ergeben sich der Reihe nach aus 1.2.4ii), 1.2.13, 3.4.2 und der Tatsache, dass  $\mathbb{C}$  die Strukturgarbe auf  $\{s\}$  ist. Da nach Voraussetzung  $\mathcal{F}$  einfach über  $S$  ist, hat die betrachtete Abbildung der  $\mathcal{A}ut$ -Moduln im Halm  $s$  die Form

$$\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}((\mathcal{F},s)/(S,s), \mathcal{O}_{S,s}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Per Konstruktion ist aber  $\mathrm{Aut}_{(\Sigma,0)}((\mathcal{F},s)/(S,s), -)$  mit endlichen direkten Produkten verträglich. Da es ferner eine Zerlegung  $\mathcal{O}_{S,s} \cong \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}_s$  gibt, folgt die Behauptung nun leicht aus einem Längenargument.  $\square$

Für einen einfachen Modul  $\mathcal{F}$  über  $S$  ist also Voraussetzung i) in 3.4.6 erfüllt, falls  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich und flach ist. Analog ist im glatten Fall Voraussetzung ii) erfüllt. Wir können das gewonnene Ergebnis wie folgt zusammenfassen:

**3.4.9 Satz:** *Sei  $X \rightarrow \Sigma$  eine eigentliche flache holomorphe Abbildung und  $a = (S, \mathcal{F}) \in \mathbf{Flat}(S)$ , wobei  $\mathcal{F}$  einfach über  $S$  liege. Dann ist die Menge der semiuniversellen Punkte  $S_a \subset S$   $Z$ -offen und es gilt*

$$\Omega_{S/\Sigma|_{S_a}}^1 \cong L^{-1}\pi_{2\sharp}(\mathcal{F})|_{S_a}.$$

Ist  $X \rightarrow \Sigma$  zusätzlich glatt von relativer Dimension  $d$ , so erhalten wir eine Darstellung

$$\Omega_{S/\Sigma|_{S_a}}^1 \cong \mathcal{E}xt_{\pi_2}^{d-1}(\mathcal{F}, \mathcal{F} \otimes \pi_1^* \omega_{X/\Sigma})|_{S_a}. \quad \square$$

**3.4.10 Deformationstheorie für Familien einfacher Moduln** Wir wollen die Kategorie der einfachen Moduln betrachten: dabei betrachten wir diejenigen Objekte  $(S, \mathcal{F})$  aus  $\mathbf{Flat}$ , die einfach über  $S$  sind. Die Morphismen werden genauso wie in  $\mathbf{Flat}$  definiert; dies macht die Kategorie **Simple** der einfachen Moduln zu einer vollen Unterkategorie von  $\mathbf{Flat}$ .

Aus der Konstruktion ergibt sich leicht, dass die Deformationstheorie  $p_{\mathbf{Flat}}$  eine Deformationstheorie  $p_{\mathbf{Simple}}$  induziert. Ferner ist  $p_{\mathbf{Simple}}$  die homogene Faserung  $p_{\mathbf{F}}$  zu dem (relativen) Modulfunktor  $\mathbf{F} := \mathbf{Simple}_{X/\Sigma}$  für Familien von einfachen Moduln. Dieser ist definiert durch die Zuordnung

$$S \mapsto \mathbf{Simple}_{X/\Sigma}(S) := \{\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X_S) \mid \mathcal{F} \text{ liegt einfach über } S\}.$$

Wir wollen uns auf den absoluten Fall beschränken. Es sei  $X$  ein kompakter komplexer Raum, i.e. im Folgenden sei  $\Sigma = 0$  ein reduzierter Punkt. Man beachte, dass die triviale Abbildung  $X \rightarrow \Sigma = 0$  stets kohomologisch flach in Dimension 0 ist [siehe [FS92], (9.6)]. Wegen [[FS92], Theorem 9.8] gilt:

**3.4.11 Theorem:** *Es gibt einen groben Modulraum  $\mathbb{S}$  für  $\mathbf{Simple}_X$ .*

Da  $\mathbb{S}$  ein grober Modulraum ist, gibt es kein (globales) universelles Objekt über  $\mathbb{S}$ . Allerdings gibt es für jeden Punkt  $s \in \mathbb{S}$  eine Umgebung  $U_s$  zusammen mit einem universellen Objekt  $a(s)$  über  $U_s$ . Mit diesen Notation gilt:

**3.4.12 Theorem:** Ist  $X$  ein kompakter komplexer Raum und  $\mathbb{S}$  der Modulraum für  $\mathbf{Simple}_X$ , so gibt es eine Überdeckung  $\{U_s\}$  von  $\mathbb{S}$  zusammen mit kohärenten einfachen  $U_s$ -Moduln  $\mathcal{F}^s$ , so dass

$$\Omega_{U_s}^1 \cong L^{-1} \pi_{2\sharp(\mathcal{F}^s)}(\mathcal{F}^s).$$

Ist  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ , so gilt

$$\Omega_{U_s}^1 \cong \text{Ext}_{\pi_2}^{d-1}(\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^s \otimes \pi_1^* \omega_X).$$

Dabei bezeichnen  $\pi_1^s : X_{U_s} \rightarrow X$  und  $\pi_2^s : X_{U_s} \rightarrow U_s$  die jeweiligen Projektionen.

Beweis: Dass es eine Überdeckung  $\{U_s\}$  von  $\mathbb{S}$  zusammen mit kohärenten einfachen Moduln  $\mathcal{F}^s$  gibt, die universell über  $U_s$  liegen, folgt aus 3.3.2. Die  $\mathcal{F}^s$  liefern also universelle Objekte  $a(s) = (U_s, \mathcal{F}^s) \in \mathbf{Simple}$ . Für ein solches  $a = a(s)$  ist wegen der Universalität  $S_a = U_a$ . Die Behauptung folgt daher mit  $S := U_a$  aus 3.4.9.  $\square$

### 3.4.2 Kogerahmte Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir Deformationen von *kogerahmten* Moduln untersuchen. Die Bezeichnungen und Notationen werden aus [FL02] übernommen. Eine einfache Familie kogerahmter Moduln auf einem kompakten komplexen Raum  $X$  besitzt stets einen groben Modulraum. Der zugehörige Kotangentenmodul hat eine lokale Darstellung wie in 3.4.12. Am Ende dieses Abschnitts wird der Beweis kurz skizziert.

Zunächst werden die verwendeten Begriffe eingeführt.

**3.4.13 Definition:** Sei  $X \rightarrow \Sigma$  eine eigentliche holomorphe Abbildung,  $\mathcal{R} \in \mathbf{Coh}(X)$  und  $S \in \mathbf{An}_\Sigma$ .

- i) Unter einer *Familie  $\mathcal{R}$ -kogerahmter Garben auf  $X$  über  $S$*  verstehen wir ein Tupel  $(\mathcal{F}, \varphi)$ , wobei  $\mathcal{F}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul, der flach über  $S$  liegt und  $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{F}$  ein Morphismus kohärenter Moduln ist.
- ii) Zwei  $\mathcal{R}$ -kogerahmte Moduln  $(\mathcal{F}, \varphi)$  und  $(\mathcal{F}', \varphi')$  über  $S$  sind *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus  $\alpha : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$  gibt mit  $\varphi' = \alpha \circ \varphi$ .

Sei nun  $X \rightarrow \Sigma$  ein eigentlicher Morphismus komplexer Räume und  $\mathcal{R}$  ein vorgegebener kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Wir wollen den Funktor  $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} : \mathbf{An}_\Sigma \rightarrow \mathbf{Mengen}$  betrachten, welcher einem  $\Sigma$ -Raum  $S$  die Menge

$$\{[(\mathcal{E}, \varphi)] \mid (\mathcal{E}, \varphi) \text{ ist eine einfache Familie } \mathcal{R}_S\text{-kogerahmter Moduln auf } X_S/S\}$$

zuordnet und einem  $\Sigma$ -Morphismus  $S \rightarrow S'$  die kanonische Abbildung von Mengen  $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}(S') \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{R}}(S)$ . Unter einer *einfachen Familie* wollen wir dabei ein solches Tupel  $(\mathcal{E}, \varphi)$  verstehen, für das  $\mathcal{E}$  ein einfacher Modul über  $S$  ist. Ferner bezeichne  $[(\mathcal{E}, \varphi)]$  die Isomorphieklasse von  $(\mathcal{E}, \varphi)$ ,  $X_S := X \times_\Sigma S$  das Faserprodukt und  $\mathcal{R}_S := \pi_2^* \mathcal{R}$  den Pullback von  $\mathcal{R}$  unter der Projektion  $\pi_2 : X_S \rightarrow X$ . Da  $\mathbf{P}_{\mathcal{R}}$  ein kontravarianter mengenwertiger Funktor ist, induziert er nach Beispiel 1.1.2 eine Faserung in Gruppoide, die im Folgenden kurz beschrieben wird.

**3.4.14 Deformationstheorie für Familien kogerahmter Moduln** Für einen festen  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{R}$  bezeichnet  $\mathcal{R}\text{-Coframe}$  die Kategorie der  $\mathcal{R}$ -kogerahmten Moduln. Objekte sind Tupel  $(S, \mathcal{F}, \varphi)$ , wobei  $S$  ein komplexer Raum über  $\Sigma$  ist,  $\mathcal{F}$  ein  $\mathcal{R}_S$ -kogerahmter Modul auf  $X_S$  und  $\varphi : \mathcal{R}_S \rightarrow \mathcal{F}$  ein Morphismus kohärenter Moduln. Die Morphismen sind gegeben durch solche Morphismen aus **Flat**, die mit den Kogerahmungsabbildungen verträglich sind. Für einen  $\Sigma$ -Raum  $S$  ist die Faser  $\mathcal{R}\text{-Coframe}(S)$  offensichtlich die Kategorie der  $\mathcal{R}_S$ -kogerahmten Moduln  $(\mathcal{F}, \varphi)$  auf  $X_S$  über  $S$ .

Wir wollen nochmal explizit einen Morphismus von  $(S, \mathcal{F}, \varphi) \rightarrow (S', \mathcal{F}', \varphi')$  in  $\mathcal{R}\text{-Coframe}$  angeben: er ist gegeben durch ein Paar  $(f, \alpha)$ , wobei  $f : S' \rightarrow S$  ein  $\Sigma$ -Morphismus komplexer Räume ist und  $\alpha : f^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$  ein Isomorphismus kohärenter Moduln derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{R}_S & \xrightarrow{f^*(\varphi)} & f^*\mathcal{F} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{R}_{S'} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathcal{F}' \end{array}$$

kommutiert.

Per Konstruktion ist  $\mathcal{R}\text{-Coframe}$  eine Unterkategorie von **Flat**. Eine Faserung in Gruppoide ist durch den Funktor  $p : \mathcal{R}\text{-Coframe} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  gegeben; einem Tupel  $(S, \mathcal{F}, \varphi)$  wird der komplexe Raum  $S$  zugeordnet und einem Morphismus in  $\mathcal{R}\text{-Coframe}$  die zugrundeliegende Abbildung der komplexen Räume. Man sieht leicht, dass der Funktor  $p$  aus der Deformationstheorie für Moduln hervorgeht, das heißt, dass das folgende Diagramm von Funktoren kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\text{-Coframe} & \xrightarrow{\text{can}} & \mathbf{Flat} \\ & \searrow p & \downarrow p_{\mathbf{Flat}} \\ & & \mathbf{An}_\Sigma \end{array}$$

Insbesondere folgt aus dem Diagramm leicht, dass auch die Faserung  $p$  eine Deformationstheorie ist.

**3.4.15 Bemerkung:** Die Konstruktion in 3.4.14 überträgt sich genauso auf die Kategorie der einfachen  $\mathcal{R}$ -kogerahmten Moduln  $\mathcal{R}\text{-SimpCoframe}$ . Diese ist dann eine Unterkategorie von **Simple** und die Deformationstheorie  $p_{\mathbf{Simple}}$  induziert wieder eine homogene Faserung  $p : \mathcal{R}\text{-SimpCoframe} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ .  $p$  ist offensichtlich die durch  $P_{\mathcal{R}}$  induzierte Faserung.

Ist die Abbildung  $X \rightarrow \Sigma$  eigentlich und flach oder eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$ , so gilt die Aussage von Satz 3.4.9 insbesondere für jeden einfachen *kogerahmten* Modul  $\mathcal{F}$ . Wegen [[FL02], Theorem 1.1] besitzt auch  $P_{\mathcal{R}}$  einen groben Modulraum. Wir beschränken uns wieder auf den absoluten Fall, das heißt  $\Sigma$  ist im Folgenden ein reduzierter Punkt.

**3.4.16 Theorem:** *Es gibt einen groben Modulraum  $\mathbb{K}$  zu  $P_{\mathcal{R}}$ .*

Beweis: Folgt aus dem Beweis von [[FL02], Theorem 1.1] und [[FS92], Satz 7.8].  $\square$

**3.4.17 Bemerkung:** Die in [[FL02], Theorem 1.1] behauptete Darstellbarkeit ist falsch. In dem Beweis werden die Darstellbarkeitskriterien von [[FL02], Theorem 4.3] nicht für den Funktor  $P$ , sondern für die Vergarbizifizierung  $\tilde{P}$  von  $P$  nachgeprüft. Diese ist gegeben durch  $\tilde{P}(T) := \Gamma(T, {}_T\tilde{P})$ , wobei  ${}_T\tilde{P}$  die zu  $T \supset U \mapsto P(U)$  assoziierte Garbe ist [siehe [FS92], Abschnitt 7]. Aus der Darstellbarkeit von  $\tilde{P}$  folgt die Existenz eines *groben* Modulraums für  $P$  [vgl. [FS92], Satz 7.8]. Es sei auch auf den Beweis von [[FS92], Theorem 9.8] verwiesen, in dem dieses Kriterium für die Existenz eines groben Modulraums verwendet wird. Ferner sei angemerkt, dass die vorgennannten Aussagen für komplexe Räume gelten, da diese genau die *graden* Komponenten  $X_{ev}$  von komplexen Superräumen sind.

Die Kotangentialgarbe des Modulraums  $\mathbb{K}$  hat lokal die folgende Gestalt:

**3.4.18 Theorem:** *Ist  $X$  ein kompakter komplexer Raum,  $\mathcal{R}$  ein kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul und  $\mathbb{K}$  der Modulraum für  $P_{\mathcal{R}}$ , so gibt es eine Überdeckung  $\{U_s\}$  von  $\mathbb{K}$  zusammen mit kohärenten einfachen  $\mathcal{R}_{U_s}$ -kogerahmten  $U_s$ -Moduln  $\mathcal{F}^s$ , so dass für  $\Omega_{U_s}^1$  die Darstellungen aus 3.4.12 gelten.*

Der Beweis verläuft analog zu dem von 3.4.12.

**3.4.19 Bemerkung:** In der dualen Situation der *einfachen Familien von  $\mathcal{R}$ -gerahmten Moduln*  $(\mathcal{F}, \varphi)$  muss für die Existenz eines groben Modulraums  $\mathbb{K}^\vee$  zusätzlich gefordert werden, dass  $\mathcal{R}$  flach über dem Basisraum  $\Sigma$  ist. Ein  $\mathcal{R}$ -gerahmter Modul  $(\mathcal{F}, \varphi)$  ist dabei ein kohärenter Modul über  $X$  zusammen mit einem Homomorphismus  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}$ . Der Beweis von 3.4.18 überträgt sich entsprechend auf den Modulraum  $\mathbb{K}^\vee$ . Im absoluten Fall existiert der Modulraum  $\mathbb{K}^\vee$  stets, da jeder kohärente Modul flach über einem reduzierten Punkt  $\Sigma = 0$  liegt.

### 3.4.3 Vektorbündel

Da Vektorbündel eineindeutig lokal freien Garben entsprechen, können wir die Deformationstheorie  $p_{\mathbf{Flat}}$  auch für die Deformation von Vektorbündeln verwenden. Dazu betrachten wir diejenige Unterkategorie  $\mathbf{Vb} = \mathbf{Vb}_{X/\Sigma}$  von  $\mathbf{Flat}$ , die aus kohärenten  $\mathcal{S}$ -flachen Moduln  $\mathcal{E} \in \mathbf{Flat}$  besteht, die zusätzlich lokal frei sind auf dem entsprechenden komplexen Raum  $X_{\mathcal{S}}$ . Der Funktor  $p_{\mathbf{Flat}}$  induziert genau wie im Fall der einfachen Moduln und der einfachen kogerahmten Moduln eine Deformationstheorie. Zur Unterscheidung wird diese mit  $p_{\mathbf{Vb}} : \mathbf{Vb} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$  bezeichnet.

Nicht jede Familie von Vektorbündeln besitzt einen Modulraum. Schon die Familie der Rang-2-Vektorbündel über einer Kurve liefern ein Beispiel für eine Familie, die nichtmal einen groben Modulraum besitzt [[Muk03], Kapitel 11, Abschnitt 2, Beispiel 11.32 (Das Sprungphänomen)]. Allerdings gibt es Modulräume für Familien sogenannter *stabiler Bündel* und allgemeiner sogar für Familien von *einfachen* Vektorbündeln [vgl. [Muk03], Kapitel 11, insbesondere Abschnitt 2 und Bemerkungen am Ende von Abschnitt 3 sowie [KO89]].

Im Allgemeinen können wir wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten nur eine lokale Darstellung für die Kotangentialmoduln erwarten. Die Aussagen 3.4.5 und 3.4.6 übertragen sich mit den offensichtlichen Anpassungen auf den Fall lokal freier Garben. Explizite Berechnungen erweisen sich aber auch unter

der zusätzlichen Bedingung, dass die betrachteten Moduln lokal frei sind, als schwierig. So ist beispielsweise  $L^0\pi_{2\#}(\mathcal{F})$  nicht notwendig lokal frei, auch wenn  $\mathcal{F}$  ein lokal freier Modul ist.

Fassen wir ein Vektorbündel  $\mathcal{E}$  auf als Objekt  $a = (S, \mathcal{E}) \in \mathbf{Vb}$ , so ergibt sich für die Automorphismen- und Extensionsmoduln das Gleiche wie in 3.4.2. Wir wollen für eine eigentliche holomorphe Abbildung  $X \rightarrow \Sigma$  die  $S$ -Auflösung für ein solches Objekt  $a$  angeben.

**3.4.20 Satz:** *Ist  $X \rightarrow \Sigma$  ein eigentlicher Morphismus komplexer Räume,  $a = (S, \mathcal{E}) \in \mathbf{Vb}(S)$  und  $\pi_2 : X_S \rightarrow S$  die Projektion auf  $S$ , so ist  $L\pi_{2\#}(\mathcal{E}) := L\pi_{2\#}(\mathcal{E})(\mathcal{E})$  eine  $S$ -Auflösung von  $a$ . Die Auflösung ist mit Obstruktionen verträglich, falls  $X \rightarrow \Sigma$  zusätzlich flach ist. Ist die Abbildung  $X \rightarrow \Sigma$  sogar glatt von relativer Dimension  $d$ , so ergibt sich*

$$L\pi_{2\#}(\mathcal{E}) \cong R\pi_{2*}(\mathcal{E}nd(\mathcal{E}) \otimes \pi_1^*\omega_{X/\Sigma})[d].$$

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen folgen aus 3.4.5. Ist  $X \rightarrow \Sigma$  glatt, so gilt nach 3.4.5iii)

$$L\pi_{2\#}(\mathcal{E}) \cong R\pi_{2*}R\mathcal{H}om^*(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \pi_1^*\omega_{X/\Sigma})[d].$$

Wegen

$$R\mathcal{H}om^*(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes \pi_1^*\omega_{X/\Sigma}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \otimes \pi_1^*\omega_{X/\Sigma}$$

folgt daraus die dritte Behauptung.  $\square$

Wir betrachten im Folgenden die Unterkategorie  $\mathbf{SimVb}_{X/\Sigma} \subset \mathbf{Vb}_{X/\Sigma}$  der einfachen Vektorbündel, i.e. die Kategorie der lokal freien  $\mathcal{O}_X$ -Moduln, die einfach über  $\Sigma$  sind. Auch hier wird durch den Funktor  $p_{\mathbf{Flat}}$  eine Deformationstheorie  $p : \mathbf{SimVb}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$  induziert. Da die Objekte in  $\mathbf{SimVb}_{X/\Sigma}$  insbesondere einfache Moduln sind, faktorisiert  $p$  auch über  $p_{\mathbf{Simple}}$ . Per Konstruktion ist  $p$  die von dem Modulfunktor

$$\mathbf{SimVb}_{X/\Sigma} : \mathbf{An}_{\Sigma}^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen}, S \mapsto \{\mathcal{E} \in \mathbf{SimVb}_{X/\Sigma}(S)\}$$

induzierte homogene Faserung. Aus der Tatsache, dass die Familie der einfachen Moduln einen groben Modulraum besitzen, folgt leicht, dass es ebenso einen groben Modulraum für die Familie der einfachen Vektorbündel gibt. Wir wollen uns wieder auf den absoluten Fall beschränken; in dem Fall genügt die folgende Aussage [siehe [KO89], Korollar 6.5]:

**3.4.21 Theorem:** *Ist  $X$  ein kompakter komplexer Raum, so gibt es einen groben Modulraum  $\mathbb{V}$  für  $\mathbf{SimVb}_X$ .*

Für  $\mathbb{V}$  ergibt sich nun wie zuvor für  $\mathbb{S}$  und  $\mathbb{K}$  eine Aussage der Form 3.4.12. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von 3.4.12.

**3.4.22 Theorem:** *Ist  $X$  ein kompakter komplexer Raum,  $p : \mathbf{SimVb}_X \rightarrow \mathbf{An}$  die Deformationstheorie für einfache lokal freie Moduln und  $\mathbb{V}$  der Modulraum für  $\mathbf{SimVb}_{X/\Sigma}$ , so gibt es eine Überdeckung  $\{U_s\}$  von  $\mathbb{V}$  zusammen mit einfachen lokal freien  $U_s$ -Moduln  $\mathcal{F}^s$ , so dass für  $\Omega_{U_s}^1$  die Darstellungen aus 3.4.12 gelten. Ist  $X$  eine kompakte komplexe  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, so hat*

die Darstellung die Form

$$\Omega_{U_s}^1 \cong R^{d-1}\pi_{2*}^s(\text{End}(\mathcal{F}^s) \otimes \pi_1^{s*}\omega_X). \quad \square$$

**3.4.23 Bemerkung:** Mit den Techniken dieses Abschnitts kann man ebenfalls für sämtliche Familien stabiler Vektorbündel den Kotangententialmodul der zugehörigen Modulräume berechnen, da stabile Bündel stets einfach sind [[Muk03], Kapitel 10, Abschnitt 1, Korollar 10.25]. Zu einigen Familien von stabilen Bündeln gibt es sogar einen feinen Modulraum; in diesen Fällen gilt offenbar eine Aussage der Form 3.3.7 und 3.3.15. Dies ist zum Beispiel möglich für die Familie der stabilen Rang-2-Vektorbündel von ungeradem Grad über einer Kurve [siehe [Muk03], Kapitel 11, Abschnitt 2(a)]. Dem Leser sei die Ausformulierung der einzelnen Aussagen über die Gestalt der Kotangententialmoduln der jeweiligen Modulräume überlassen.

### 3.4.4 Geradenbündel

Als Nächstes betrachten wir die Kategorie der *Geradenbündel*  $\mathbf{Pic}_{X/\Sigma}$ . Die Objekte sind gegeben durch solche  $(S, \mathcal{F}) \in \mathbf{Vb}_{X/\Sigma}$ , für die  $\mathcal{F}$  invertierbar auf  $X_S$  ist. Man prüft leicht nach, dass die Faserung  $p_{\mathbf{Flat}}$  wieder eine Deformationstheorie  $\mathbf{Pic}_{X/\Sigma} \rightarrow \mathbf{An}_{\Sigma}$  induziert. Für die Familie von Geradenbündeln gibt es sogar einen feinen relativen Modulraum, wenn der Strukturmorphismus  $X \rightarrow \Sigma$  *kohomologisch flach* in Dimension 0 ist.

**3.4.24 Definition:** Sei  $\varphi : X \rightarrow \Sigma$  ein eigentlicher flacher Morphismus komplexer Räume. Für einen Punkt  $\sigma \in \Sigma$  betrachten wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X(\sigma) & \xrightarrow{j'} & X \\ \downarrow \eta & & \downarrow \varphi \\ \{\sigma\} & \xrightarrow{j} & \Sigma \end{array}$$

$\varphi$  ist *kohomologisch flach* in Dimension 0, wenn die natürliche Abbildung

$$\varphi_*(\mathcal{O}_X)(\sigma) := j'^*\varphi_*\mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_*(\mathcal{O}_{X(\sigma)}) := \eta_*j'^*\mathcal{O}_X$$

surjektiv ist für alle Punkte  $\sigma \in \Sigma$ .

Man sieht leicht, dass kohomologische Flachheit eines Morphismus mit Basiswechsel verträglich ist. Ferner prüft man leicht die folgenden Aussagen:

**3.4.25 Lemma:** Sei  $\varphi : X \rightarrow \Sigma$  eine eigentliche flache holomorphe Abbildung, die kohomologisch flach in Dimension 0 ist und  $\mathcal{F} \in \mathbf{Coh}(X)$  einfach über  $\Sigma$ . Dann gilt:

- i)  $\varphi_*\mathcal{F}$  ist ein lokal freier  $\mathcal{O}_{\Sigma}$ -Modul.
- ii) Für  $S \in \mathbf{An}_{\Sigma}$  ist der durch Basiswechsel induzierte Morphismus komplexer Räume  $\varphi_S : X_S \rightarrow S$  kohomologisch flach in Dimension 0 und die induzierte Garbe  $\mathcal{F}_S$  auf  $X_S$  einfach über  $S$ .
- iii) Jede invertierbare Garbe  $\mathcal{L}$  auf  $X$  ist einfach über  $\Sigma$ .

Beweis: Der Beweis von [[FS92], Abschnitt 9, Lemma 9.7] gilt genauso für komplexe Räume anstelle von komplexen Superräumen.  $\square$

Die Aussagen ii) und iii) des vorstehenden Lemmas implizieren wegen Satz 3.4.8 sofort

**3.4.26 Korollar:** *Sei  $X \rightarrow \Sigma$  ein eigentlicher flacher Morphismus, der kohomologisch flach in Dimension 0 ist,  $S$  ein beliebiger  $\Sigma$ -Raum,  $\mathcal{L}$  eine invertierbare Garbe auf  $X_S$  und  $\pi : X_S \rightarrow S$  die Projektion auf  $S$ . Dann ist der Kohomologiemodul  $L^0\pi_{\#}(\mathcal{L})$  lokal frei auf  $S$ .*  $\square$

Insbesondere erfüllt ein invertierbarer Modul die Voraussetzungen von Satz 3.4.6. Eine interessante Anwendung dieses Satzes ergibt sich für den bereits erwähnten Modulraum für Familien invertierbarer Garben auf  $X$ . Wir betrachten zunächst den *Picard-Funktor*

$$\mathrm{Pic}_{X/\Sigma} : \mathbf{An}_{\Sigma}^{opp} \rightarrow \mathbf{Mengen}, \quad S \mapsto \Gamma(S, R^1\varphi_{S*}(\mathcal{O}_{X_S}^*)).$$

Er ordnet einem komplexen Raum  $S$  über  $\Sigma$  die Menge der lokal freien Moduln von Rang 1 zu. Wegen [[Fle78], Kapitel 3, Abschnitt 9, Teil B, Theorem 9.3] gilt:

**3.4.27 Theorem:** *Der Funktor  $\mathrm{Pic}_{X/\Sigma}$  besitzt einen feinen Modulraum  $\mathbb{G}_{X/\Sigma}$ .*

**3.4.28 Theorem:** *Ist  $\varphi : X \rightarrow \Sigma$  eine holomorphe Abbildung wie in 3.4.25 und bezeichnet  $\mathcal{P}$  das universelle Geradenbündel über  $\mathbb{G} := \mathbb{G}_{X/\Sigma}$ , so gibt es eine Darstellung*

$$\Omega_{\mathbb{G}/\Sigma}^1 \cong L^{-1}\pi_{2\#}(\mathcal{P}) \cong L^{-1}\pi_{2\#}(\mathcal{O}_{X_{\mathbb{G}}})(\mathcal{O}_{X_{\mathbb{G}}}).$$

Ist  $\varphi$  zusätzlich glatt von relativer Dimension  $d$ , dann ergibt sich

$$\Omega_{\mathbb{G}/\Sigma}^1 \cong R^{d-1}\pi_{2*}(\pi_1^*\omega_{X/\Sigma}).$$

Beweis: Bezeichnet  $\mathcal{K}$  einen dualisierenden Komplex auf  $\mathbb{G}$ , so ist offenbar

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om_{X_{\mathbb{G}}}(\mathcal{P}, \mathcal{P} \otimes \pi_2^*\mathcal{K}) &= \mathcal{H}om_{X_{\mathbb{G}}}(\mathcal{P}, \mathcal{P} \otimes \pi_2^*\mathcal{K}) \\ &\cong \mathcal{H}om_{X_{\mathbb{G}}}(\mathcal{O}_{X_{\mathbb{G}}}, \mathcal{O}_{X_{\mathbb{G}}} \otimes \pi_2^*\mathcal{K}), \end{aligned}$$

da  $\mathcal{P}$  eine invertierbare Garbe und somit insbesondere flach ist. Genau wie in den Beweisen von 3.3.7 und 3.3.15 ergibt sich die Behauptung daher aus Theorem 3.2.1 und Bemerkung 2.2.13.  $\square$

Die Darstellung in 3.4.28 liefert im absoluten Fall die bekannte Form von  $\Omega_{\mathbb{G}}^1$  für eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit  $X$ .

**3.4.29 Korollar:** *Ist  $X$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $d$ , so induziert die Darstellung in 3.4.28*

$$\Omega_{\mathbb{G}}^1 \cong H^{d-1}(X, \omega_X) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}}.$$

Insbesondere ist  $T_g(\mathbb{G}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$  für jeden Punkt  $g = [\mathcal{L}] \in \mathbb{G}$ .

Beweis: In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbb{G}} & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \xi \\ \mathbb{G} & \xrightarrow{\gamma} & 0 \end{array}$$

ist  $\gamma$  stets flach. Zusammen mit der Darstellung aus 3.4.28 für  $\Omega_{\mathbb{G}/\Sigma}^1$  und  $\Sigma = 0$  folgt daraus

$$\Omega_{\mathbb{G}}^1 \cong R^{d-1}\pi_{2*}(\pi_1^*\omega_X) \cong \gamma^*R^{d-1}\xi_*(\omega_X) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \otimes_{\mathbb{C}} H^{d-1}(X, \omega_X).$$

Die Darstellung für den Tangentialraum  $T_g\mathbb{G}$  folgt daraus wegen der Serre-Dualität: für den Dualraum ist offensichtlich

$$(T_g\mathbb{G})^\vee \cong \Omega_{\mathbb{G}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}}} \mathbb{C} \cong H^{d-1}(X, \omega_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}}} \mathbb{C} \cong H^{d-1}(X, \omega_X).$$

Serre-Dualität [vgl. [Har83], Kapitel 3, Abschnitt 7] liefert nun

$$T_g\mathbb{G} \cong \text{Ext}_X^1(\omega_X, \omega_X) \cong \text{Ext}_X^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X). \quad \square$$

### 3.5 Deformation kompakter komplexer Räume

Als drittes Beispiel betrachten wir Familien von kompakten komplexen Räumen, Familien kompakter Mannigfaltigkeiten und ihre Deformationen. Da diese Familien sehr groß sind, besitzen sie keine Modulräume. Allerdings können wir mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden Aussagen über die Glattheit der Basis einer semiuniversellen Deformation machen. Dazu werden wir geeignete  $S$ -Auflösungen konstruieren und Theorem 3.2.1 anwenden, um eine globale Gestalt der Kotangentialgarbe  $\Omega_{S'}^1$  der Basis der semiuniversellen Deformation zu bestimmen. Um Aussagen über die Glattheit von  $S'$  machen zu können, werden wir untersuchen, in welchen Situationen die Kotangentialgarbe  $\Omega_{S'}^1$  lokal frei ist. Dies ist beispielsweise dann erfüllt, wenn die Garbe der globalen Vektorfelder  $\Gamma(X'(s), \Theta_{X'(s)})$  für alle  $s \in S'$  verschwindet.

Wir beginnen mit der Deformation kompakter komplexer Räume und betrachten zunächst die Deformationstheorie für komplexe Räume.

**3.5.1 Deformationstheorie für Familien komplexer Räume** Es bezeichne  $p : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$  die folgende Faserung in Gruppoide: ein Objekt  $a$  in  $\mathbf{F}(S)$  ist gegeben durch einen flachen Morphismus  $f : X \rightarrow S$  über  $\Sigma$ . Ist  $b = (g : X' \rightarrow S')$  ein weiteres Objekt in  $\mathbf{F}$ , so ist ein Morphismus  $a \rightarrow b$  in  $\mathbf{F}$  gegeben durch ein kartesisches Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ S & \longrightarrow & S' \end{array}$$

Der Funktor  $p$  ordnet  $a = (f : X \rightarrow S)$  den komplexen Raum  $S$  zu und einem Morphismus  $a \rightarrow b$  wie oben die holomorphe Abbildung  $S \rightarrow S'$ . Da

wir speziell Deformationen *kompakter* komplexer Räume über  $\Sigma$  untersuchen wollen, werden nur solche Morphismen  $X \rightarrow S$  in  $\mathbf{F}$  betrachtet, die zusätzlich *eigentlich* sind. Auch diese bilden eine Kategorie, die im Folgenden mit  $\mathbf{Compact} := \mathbf{Compact}_{X/\Sigma}$  bezeichnet wird. Nach [[Fle78], Kapitel 3, Abschnitt 8] induziert die oben definierte Faserung  $p$  eine homogene Faserung in Gruppoide  $p : \mathbf{Compact} \rightarrow \mathbf{An}_\Sigma$ . Wollen wir die Faserungen unterscheiden, so verwenden wir die Notation  $p\mathbf{Compact}$  und  $p\mathbf{Complex}$ .

Ist  $X_0$  ein komplexer Raum, so ist eine Deformation von  $X_0$  gegeben durch einen flachen Morphismus komplexer Räume  $X \rightarrow S$  derart, dass die Faser von  $X$  über einem Punkt  $s \in S$  isomorph ist zum gegebenen Raum  $X_0$ , i.e.  $X(s) \cong X_0$ . Es gilt der folgende fundamentale Satz:

**3.5.2 Theorem:** *Jeder kompakte komplexe Raum  $X_0$  besitzt eine (konvergente) semiuniverselle Deformation.*

Ein Beweis für den absoluten Fall, i.e. für kompakte komplexe Räume über einem reduzierten Punkt  $\Sigma = 0$ , ergibt sich aus [Dou74], [Gra74] und [Pal76]. Der relative Fall wird in [[Fle78], Kapitel 3, Abschnitt 8, Theorem 8.5] bewiesen.

Als Nächstes soll eine  $S$ -Auflösung für ein Objekt  $a = (f : X \rightarrow S)$  konstruiert werden. Dazu wird das folgende Lemma benötigt. Mit  $\text{Aut}_\Sigma(f/S, \mathcal{N})$  bezeichnen wir den Modul  $\text{Aut}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$ ; analog ist  $\text{Ex}_\Sigma(f/S, \mathcal{N}) := \text{Ex}_\Sigma(a/S, \mathcal{N})$ .

**3.5.3 Lemma:** *Sei  $X$  ein komplexer Raum,  $f : X \rightarrow S$  ein flacher Morphismus und  $\mathcal{N} \in \mathbf{Coh}(S)$ . Dann gibt es Isomorphismen*

$$\text{Aut}_\Sigma(f/S, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^0(\mathbb{L}_{X/S}, f^*\mathcal{N}) \text{ und } \text{Ex}_\Sigma(f/S, \mathcal{N}) \cong \text{Ext}^1(\mathbb{L}_{X/S}, f^*\mathcal{N}),$$

die funktoriell in  $\mathcal{N}$  sind. Ferner definiert

$$\text{Ob}_\Sigma(f/S, \mathcal{N}) := \text{Ob}_\Sigma(a/S, \mathcal{N}) := \text{Ext}^2(\mathbb{L}_{X/S}, f^*\mathcal{N})$$

eine Obstruktionstheorie für  $a$  im Sinne von 1.4.4iii).

Beweis: Da eine Deformation von kompakten komplexen Räumen ein Spezialfall der Deformation von holomorphen Abbildungen ist, ergeben sich die Behauptungen aus 2.3.5 [siehe auch [Fle78], Kapitel 1, Abschnitt 3, Teil D, Satz 3.19ff].  $\square$

**3.5.4 Satz:** *Ist  $f : X \rightarrow S$  ein eigentlicher flacher Morphismus und  $a = f$  das zugehörige Objekt in  $\mathbf{Compact}$ , so ist  $Lf_\#(\mathbb{L}_{X/S})$  eine obstruierende  $S$ -Auflösung von  $a$ . Dabei bezeichnet  $Lf_\#$  den Funktor  $Lf_\#(\mathcal{O}_X)$ .*

Beweis: Die Isomorphismen in 3.5.3 sind mit Restriktionen auf  $\mathbb{Z}$ -offenen Teilmengen  $U \subset S$  verträglich, wie man leicht sieht. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 3.5.3 und Bemerkung 2.2.5.  $\square$

### 3.5.1 Kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden speziell kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten untersucht. Wir wollen zunächst die wichtigsten Begriffe festlegen.

**3.5.5 Definition:** Ein komplexer Raum  $X$  heißt *komplexe Mannigfaltigkeit*, wenn er lokal isomorph ist zu einem offenen Unterraum  $V \subset \mathbb{C}^n$ , das heißt wenn es eine offene Überdeckung  $\{U\}$  von  $X$  gibt zusammen mit Isomorphismen geringter Räume  $(U, \mathcal{O}_{X|_U}) \cong (V, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n|_V}) \subset (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ . Ist  $X$  zusätzlich kompakt, so nennt man  $X$  eine *kompakte komplexe Mannigfaltigkeit* oder kurz *kompakte Mannigfaltigkeit*.

Per Konstruktion liegt jeder Punkt  $x \in X$  einer komplexen Mannigfaltigkeit in einer offenen Umgebung  $U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ . Die Zuordnung  $x \mapsto \varphi(x) := \dim_x X := n$  ist wohldefiniert und liefert eine stetige Funktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{Z}$  [siehe [KK83], Kapitel 3, Abschnitt 32].  $\dim_x X$  wird als *Dimension* von  $X$  im Punkt  $x$  bezeichnet. Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  ist die Dimension auf jeder Zusammenhangskomponente konstant. Der Einfachheit halber sei in diesem Abschnitt eine Mannigfaltigkeit stets *zusammenhängend*. Wegen der Bemerkung zuvor hat daher jede Mannigfaltigkeit  $X$  eine eindeutig definierte *Dimension*  $\dim X$ .

Für kompakte Mannigfaltigkeiten ergibt sich aus 3.5.1 die folgende naheliegende Konstruktion einer Deformationstheorie.

**3.5.6 Deformationstheorie für Familien von Mannigfaltigkeiten** Es sei  $\mathbf{Mf}_{X/\Sigma} \subset \mathbf{Compact}_{X/\Sigma}$  die Unterkategorie der *glatten* eigentlichen Morphismen komplexer Räume. Wollen wir Deformationen kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten untersuchen, so wählen wir für  $\Sigma$  einen reduzierten Punkt und betrachten den durch  $p_{\mathbf{Compact}}$  induzierten Funktor  $p_{\mathbf{Mf}} : \mathbf{Mf} := \mathbf{Mf}_X \rightarrow \mathbf{An}$ . Offensichtlich liefert dies eine homogene Faserung in Gruppoide, die im Folgenden als *Deformationstheorie* für kompakte komplexe Räume bezeichnet wird.

Ist nun  $a = (f : X \rightarrow S)$  ein Objekt aus  $\mathbf{Mf}$ , so ist wegen der Glattheit der Kotangentenkomplex trivial, das heißt es ist  $\mathbb{L}_{X/S} \cong \Omega_{X/S}^1$  im Grad Null konzentriert [siehe Beispiel 2.3.1]. Aus Satz 3.5.4 ergibt sich nun unmittelbar

**3.5.7 Satz:** *Ist  $f : X \rightarrow S$  eigentlich und glatt von relativer Dimension  $d$ , so hat die zugehörige  $S$ -Auflösung von  $a = f$  in  $\mathbf{Mf}$  die Gestalt  $Lf_*(\Omega_{X/S}^1) \cong Rf_*(\Omega_{X/S}^1 \otimes \omega_{X/S})[d]$ .*  $\square$

Aus der Existenz der  $S$ -Auflösungen folgt mit 3.1.7 eine lokale Beschreibung der Kotangentialgarbe  $\Omega_S^1$  bestimmter Räume  $S$ . Dies müssen komplexe Räume  $S$  sein, für die in bestimmten Punkten  $s \in S$  der Raumkeim  $(S, s)$  Basis einer versellen Deformation der gegebenen komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  ist. Die Existenz solcher kovergenten versellen Deformationen wird in [Kur62] und [Kur71] bewiesen. Zusammen mit 1.3.20 folgt daher

**3.5.8 Theorem:** *Jede kompakte komplexe Mannigfaltigkeit besitzt eine (konvergente) semiuniverselle Deformation.*  $\square$

Sei  $X_0$  eine festgewählte kompakte Mannigfaltigkeit und  $X'$  die semiuniverselle Deformation von  $X_0$ . Mit Hilfe von 3.2.1 lässt sich eine Variante des Satzes von Bogomolov-Tian-Todorov sehr einfach beweisen. Die Aussagen der ursprünglichen Arbeiten [Bog78], [Tod89] und [[Yau87], Seite 629 – 646] wurden von Z. Ran und Y. Kawamata weiter verallgemeinert [siehe [Ran92] und [Kaw92]]. Wir wollen uns auf die folgende Aussage beschränken:

**3.5.9 Theorem: (Bogomolov-Tian-Todorov)** *Sei  $X_0$  eine kompakte  $d$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, die bimeromorph äquivalent ist zu einer Kählermannigfaltigkeit. Ist  $\omega_{X_0} \cong \mathcal{O}_{X_0}$ , so ist die Basis  $S'$  der semiuniversellen Deformation  $X'$  von  $X_0$  glatt.*

Beweis: Sei  $f' : X' \rightarrow S'$  die semiuniverselle Deformation von  $X_0$ . Da  $f'$  eigentlich und glatt ist, folgt aus [[Del68], Theorem 5.5], dass  $f'_*\omega_{X'/S'}$  lokal frei und  $f'_*(\omega_{X'/S'} \otimes -)$  ein exakter Funktor auf  $\mathbf{Coh}(S')$  ist. Weil  $f'$  eine Deformation von  $X_0$  ist, gibt es ein  $s' \in S'$  mit  $X'(s') \cong X_0$ . Wegen  $\omega_{X_0} \cong \mathcal{O}_{X_0}$  folgt daraus leicht, dass auch die kanonische Garbe  $\omega_{X'/S'}$  trivial ist. Wegen 3.5.7 ist daher durch

$$Lf'_*(\Omega_{X'/S'}^1) \cong Rf'_*(\Omega_{X'/S'}^1 \otimes \omega_{X'/S'})[d] \cong Rf'_*(\Omega_{X'/S'}^1)[d]$$

eine  $S'$ -Auflösung von  $f' \in \mathbf{Mf}(S')$  gegeben. Wegen [[Del68], Theorem 5.5] sind nun für  $j = 0, \dots, d$  die Moduln

$$L^{-j}f'_*(\Omega_{X'/S'}^1) \cong R^{d-j}f'_*(\Omega_{X'/S'}^1)$$

lokal frei. Mit  $j = 0$  folgt, dass die Voraussetzungen von 3.2.1 erfüllt sind. Da  $S'$  Basis der semiuniversellen Deformation  $f'$  ist, erhalten wir die Darstellung

$$\Omega_{S'}^1 \cong R^{d-1}f'_*(\Omega_{X'/S'}^1).$$

Wegen [[Del68], Theorem 5.5] ist dies aber ebenfalls ein lokal freier Modul auf  $S'$ ; es entspricht dem Fall  $j = 1$  in der obigen Darstellung. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**3.5.10 Bemerkung:** In dem Beweis von 3.5.9 haben wir wesentlich die Aussage [[Del68], Theorem 5.5] von Deligne benutzt. Da diese auf Hodgetheorie basiert, ist die Voraussetzung an  $X_0$ , *bimeromorph äquivalent zu einer Kählermannigfaltigkeit* sein zu müssen, unabdingbar. Es sei aber angemerkt, dass projektive Mannigfaltigkeiten und etwas allgemeiner auch algebraische Mannigfaltigkeiten diese Voraussetzung erfüllen.

Wir wollen einen anderen Ansatz verfolgen, um die Voraussetzungen von 3.2.1 zu prüfen. Diese sind nach Beispiel 3.2.8 erfüllt, wenn  $\mathcal{A}ut(a/S, -)$  exakt ist. Dazu genügt es, die Surjektivität der Abbildung

$$\mathcal{A}ut(a/S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{A}ut(a/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)$$

für jeden Punkt  $s \in S$  nachzuweisen [[Gro63], Kapitel 3, Teil 2, 7.5.2]. Bilden wir auf der rechten Seite den Halm im Punkte  $\sigma \in S$ , so liefert dies

$$\mathcal{A}ut(a/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_\sigma \cong \mathcal{A}ut((a, \sigma)/(S, \sigma), (\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_\sigma).$$

Für  $\sigma \neq s$  verschwindet  $(\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_\sigma$  und die Abbildung ist trivialerweise surjektiv. Für  $\sigma = s$  ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ut((a, \sigma)/(S, \sigma), (\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_\sigma) &\cong \mathcal{A}ut((a, s)/(S, s), (\mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)_s) \\ &\cong \mathcal{A}ut((a, s)/(S, s), \mathbb{C}_s) \\ &\cong \mathcal{A}ut(a_s/\{s\}, \mathbb{C}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\Omega_{X(s)}^1, \mathcal{O}_{X(s)}) \end{aligned}$$

Die letzten beiden Isomorphismen ergeben sich der Reihe nach aus 1.2.13 und 3.5.3. Wegen  $\Gamma(X(s), \Theta_{X(s)}) \cong \mathrm{Hom}(\Omega_{X(s)}^1, \mathcal{O}_{X(s)})$  folgt nun unmittelbar aus 3.2.1 und Satz 3.5.7:

**3.5.11 Satz:** Sei  $X'$  über  $S'$  die semiuniverselle Deformation einer kompakten Mannigfaltigkeit  $X_0$ . Ist für alle  $s \in S'$   $\Gamma(X'(s), \Theta_{X'(s)}) = 0$ , so gilt

$$\Omega_{S'}^1 \cong R^{d-1} f'_*(\Omega_{X'/S'}^1 \otimes \omega_{X'/S'}). \quad \square$$

Mit der schwächeren Voraussetzung, dass nur  $\Gamma(X_0, \Theta_{X_0})$  verschwindet, gilt:

**3.5.12 Satz:** Sei  $X_0$  eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die keine globalen Vektorfelder hat, i.e.  $\Gamma(X_0, \Theta_{X_0}) = 0$ . Ist  $a' = (f' : X' \rightarrow S')$  die semiuniverselle Deformation von  $X_0$  in einem Punkt  $s_0$ , so gibt es nahe  $s_0 \in S$  eine Darstellung

$$\Omega_{S'}^1 \cong R^{d-1} f'_*(\Omega_{X'/S'}^1 \otimes \omega_{X'/S'}).$$

Beweis: Mit der Voraussetzung  $\Gamma(X_0, \Theta_{X_0}) = 0$  folgt aus den obigen Überlegungen, dass die Abbildung

$$\text{Aut}(a/S, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Aut}(a/S, \mathcal{O}_S/\mathfrak{m}_s)$$

lediglich für  $s = s_0$  surjektiv ist. Da die betrachteten Moduln kohärent sind, ist sie dann auch surjektiv auf einer  $\mathbb{Z}$ -offenen Umgebung  $U$  von  $s_0$ . Daraus folgt leicht, dass  $L^0 f'_\#(\Omega_{X/S}^1)_{|U}$  ein lokal freier  $\mathcal{O}_{S|U}$ -Modul ist. Die Behauptung ergibt sich daher wieder aus 3.2.1 und 3.5.7.  $\square$

Als Anwendung dieses Satzes sei die folgende klassische Aussage für Riemannsche Flächen genannt:

**3.5.13 Korollar:** Sei  $C$  eine Riemannsche Fläche mit  $\Theta_C(C) = 0$  und  $a' = (f' : C' \rightarrow S')$  in einem Punkt  $s'$  die semiuniverselle Deformation von  $C$ . Dann hat der Kotangentenmodul von  $S'$  nahe  $s'$  die Darstellung

$$\Omega_{S'}^1 \cong f'_*(\Omega_{C'/S'}^{\otimes 2}).$$

Beweis: Wir erinnern daran, dass eine Riemannsche Fläche  $C$  definiert ist als eine zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Wegen  $\dim C = 1$  sind sowohl  $C \rightarrow 0$  als auch  $C' \rightarrow S'$  glatt von relativer Dimension 1. Daher ist  $\omega_{C'/S'} \cong \bigwedge^1 \Omega_{C'/S'}^1 \cong \Omega_{C'/S'}^1$ . Mit Satz 3.5.12 erhalten wir

$$\Omega_{S'}^1 \cong R^0 f'_*(\Omega_{C'/S'}^1 \otimes \omega_{C'/S'}) \cong f'_*(\Omega_{C'/S'}^1 \otimes \Omega_{C'/S'}^1) \cong f'_*(\Omega_{C'/S'}^{\otimes 2}). \quad \square$$

# Literaturverzeichnis

- [BF] R.-O. Buchweitz and H. Flenner. Deformationstheorie. In Vorbereitung.
- [BF03] R.-O. Buchweitz and H. Flenner. A semiregularity map for modules and applications to deformations. *Compos. Math.*, 137(2):135–210, 2003.
- [Bog78] F. A. Bogomolov. Hamiltonian Kählerian manifolds. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 243(5):1101–1104, 1978.
- [Bou07] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1980 original [Masson, Paris].
- [Del68] P. Deligne. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (35):259–278, 1968.
- [Dou66] A. Douady. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné. In *Sovremen. Probl. Teor. Analit. Funktsij, Mezhdunarod. Konf. Teor. Analit. Funktsij, Erevan 1965, 141-143*. 1966.
- [Dou74] A. Douady. Le problème des modules locaux pour les espaces  $\mathbf{C}$ -analytiques compacts. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7:569–602 (1975), 1974.
- [FL02] H. Flenner and M. Lübke. Analytic moduli spaces of simple (co)framed sheaves. In *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, pages 99–109. Springer-Verlag, 2002.
- [Fle78] H. Flenner. Deformationen holomorpher abbildungen. Habilitationsschrift Osnabrück, 1978.
- [Fle81a] H. Flenner. Ein Kriterium für die Offenheit der Versalität. *Math. Z.*, 178:449–473, 1981.
- [Fle81b] H. Flenner. Eine Bemerkung über relative Ext-Garben. *Math. Ann.*, 258:175–182, 1981.
- [Fri67] J. Frisch. Points de platitude d’un morphisme d’espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4:118–138, 1967.

- [FS92] H. Flenner and D. Sundararaman. Analytic geometry of complex superspaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 330(1):1–40, 1992.
- [GR71] H. Grauert and R. Remmert. *Analytische Stellenalgebren*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Gra74] H. Grauert. Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. *Invent. Math.*, 25:107–142, 1974.
- [Gro60] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.
- [Gro63] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (17):91, 1963.
- [Gro65] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24):231, 1965.
- [Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [Gro95] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, pages Exp. No. 221, 249–276. Soc. Math. France, Paris, 1995.
- [Har66] R. Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture Notes in Mathematics, 20. Springer-Verlag, 1966.
- [Har83] R. Hartshorne. *Algebraic geometry. Corr. 3rd printing*. Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer-Verlag, 1983.
- [HS97] P.J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra. 2nd ed.* Graduate Texts in Mathematics. 4. Springer-Verlag, 1997.
- [Kaw92] Y. Kawamata. Unobstructed deformations. A remark on a paper of Z. Ran: “Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle”. *J. Algebraic Geom.*, 1(2):183–190, 1992.
- [KK83] L. Kaup and B. Kaup. *Holomorphic functions of several variables. An introduction to the fundamental theory*. De Gruyter Studies in Mathematics, 3., 1983.
- [KO89] S. Kosarew and C. Okonek. Global moduli spaces and simple holomorphic bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 25(1):1–19, 1989.
- [Kur62] M. Kuranishi. On the locally complete families of complex analytic structures. *Ann. Math.* 75, 536–577, 1962.
- [Kur71] M. Kuranishi. *Deformations of compact complex manifolds*. Séminaire de Mathématiques Supérieures. Ete 1969. Les Presses de l’Université de Montréal, 1971.

- [Leh98] M. Lehn. On the cotangent sheaf of quot-schemes. *Int. J. Math.*, 9(4):513–522, 1998.
- [Mat70] H. Matsumura. *Commutative algebra*. W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2. edition, 1998.
- [Muk03] S. Mukai. *An introduction to invariants and moduli*, volume 81 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Nag62] M. Nagata. *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13. Interscience Publishers, 1962.
- [New78] P. E. Newstead. *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, volume 51 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1978.
- [Pal76] V. P. Palamodov. Deformations of complex spaces. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(3(189)):129–194, 1976.
- [Pou69] G. Pourcin. Théoreme de Douady au-dessus de S. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser.*, 23:451–459, 1969.
- [Ran92] Z. Ran. Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle. *J. Algebraic Geom.*, 1(2):279–291, 1992.
- [Rim72] D. S. Rim. Formal deformation theory in: Seminaire de geometrie algebrique sga 7. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 288. Springer, 1972.
- [Rob98] P. C. Roberts. *Multiplicities and Chern classes in local algebra*. Cambridge Tracts in Mathematics, 133. Cambridge University Press., 1998.
- [RR70] J.-P. Ramis and G. Ruget. Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (38):77–91, 1970.
- [RR74] J.-P. Ramis and G. Ruget. Résidus et dualité. *Invent. Math.*, 26:89–131, 1974.
- [Sch70] H. W. Schuster. Infinitesimale Erweiterungen komplexer Räume. *Comment. Math. Helv.*, 45:265–286, 1970.
- [SS72] G. Scheja and U. Storch. Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. *Math. Ann.*, 197:137–170, 1972.
- [SS94] G. Scheja and U. Storch. *Lehrbuch der Algebra. Teil 1*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. edition, 1994.

- [ST81] Y. T. Siu and G. Trautmann. Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 29(238):iii+155, 1981.
- [Tod89] A. N. Todorov. The Weil-Petersson geometry of the moduli space of  $SU(n \geq 3)$  (Calabi-Yau) manifolds. I. *Comm. Math. Phys.*, 126(2):325–346, 1989.
- [Vie95] E. Viehweg. *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, volume 30 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, 1995.
- [Wei95] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge Univ. Press., 1995.
- [Yau87] S.-T. Yau, editor. *Mathematical aspects of string theory*, volume 1 of *Advanced Series in Mathematical Physics*, Singapore, 1987. World Scientific Publishing Co.