

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Beispiele für Optimierungs- und Approximationsaufgaben	1
1.1	Optimierungsaufgaben in Funktionenräumen	1
1.2	Aufgaben in $\mathbb{R}^n$	4
1.3	Lineare Programmierungsaufgaben	5
1.4	Restringierte Optimierungsaufgaben. Ergänzungsmethode	7
1.5	Minimierung bzgl. zweier Variablen. Sukzessive Minimierung	8
2	Lineare Programmierung	10
2.1	Einführung	10
2.2	Kanonische Form einer linearen Programmierungsaufgabe (KFP) . . .	11
2.3	Simplex-Algorithmus	13
2.4	Der allgemeine Fall	17
2.5	Duale und schwach duale Aufgaben	23
3	Konvexe Mengen und konvexe Funktionen	29
3.1	Metrische Räume	29
3.2	Normierte Räume	31
3.2.1	Definition und Beispiele	31
3.2.2	Dualraum eines normierten Raumes	32
3.2.3	Geometrische Deutung linearer Funktionale. Hyperebenen . . .	33
3.3	Konvexe Mengen	34
3.3.1	Das Innere und der Abschluss konvexer Mengen	36
3.3.2	Linear beschränkte Mengen	36
3.4	Strikter Trennungssatz in $\mathbb{R}^n$	37
3.5	Satz von Carathéodory	38
3.6	Konvexe Funktionen	39
3.6.1	Stetigkeit konvexer Funktionen in $\mathbb{R}^n$	42
3.6.2	Äquivalenz der Normen in $\mathbb{R}^n$	43
3.7	Minkowski-Funktional	45
3.8	Richtungsableitung	48
3.9	Differenzierbarkeitseigenschaften konvexer Funktionen: Monotonie des Differenzenquotienten	49
3.10	Fréchet-Differenzierbarkeit	53
3.11	Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$. Matrix und Operatorschreibweise	54
3.12	Monotone und positiv definite Abbildungen	56
3.13	Ein Kriterium für positive Definitheit einer Matrix	57

3.14	inf-konvexe Funktionen	60
3.15	Satz von Weierstraß	66
3.16	Existenzaussagen in endlich-dimensionalen Räumen	67
3.17	Eindeutige Lösbarkeit von Optimierungsaufgaben	68
3.18	Stabilität bei monotoner Konvergenz	69
3.19	Eine Erweiterung des Riemann-Integrals	74
4	Notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen	77
4.1	Notwendige Optimalitätsbedingungen	77
4.2	Hinreichende Optimalitätsbedingungen: Charakterisierungssatz der konvexen Optimierung	78
4.3	Lokale Minimallösungen	79
4.4	Restringierte Optimierungsaufgaben: Penalty-Methode	81
4.5	Lagrange-Methode	83
4.5.1	Variable Lagrange-Multiplikatoren	88
4.5.2	Lagrange-Lemma bei Gleichungen und Ungleichungen	89
4.6	Satz von Kuhn-Tucker	92
4.7	Satz über Lagrange-Multiplikatoren	95
4.8	Zurückführung von Ungleichungsrestriktionen auf Gleichungsre- striktionen	95
4.9	Penalty-Lagrange-Methode (Augmented Lagrangian Method)	96
5	Anwendungen des Charakterisierungssatzes der konvexen Optimierung in der Approximationstheorie und der Variationsrechnung	98
5.1	Approximation in Prä-Hilberträumen	99
5.1.1	Prä-Hilberträume	99
5.1.2	Cauchy-Schwarzsche Ungleichung	99
5.1.3	Skalarprodukt-Norm	100
5.1.4	Parallelogrammgleichung	100
5.1.5	Beispiele für Prä-Hilberträume	100
5.1.6	Differenzierbarkeit und Approximationssatz	100
5.1.7	Projektionssatz	102
5.1.8	Gramsche Matrix	102
5.1.9	Fourierreihen	103
5.1.10	Vollständigkeit. Banach- und Hilberträume. L^p -Räume und Orliczräume	107
5.1.11	Existenzsatz	110
5.1.12	Stetigkeit der metrischen Projektion	111
5.1.13	Trennungssätze in Hilberträumen	111
5.1.14	Lineare endlich-codimensionale Approximation	112
5.1.15	Eine Anwendung in der Steuerungstheorie	113
5.1.16	Endlich-codimensionale Approximation bei Ungleichungen	115

5.2	Variationsrechnung	117
5.2.1	Variationsaufgaben mit festen Endpunkten	117
5.2.2	Der Ansatz über die Richtungsableitung	118
5.2.3	Euler-Lagrange-Gleichung	121
5.2.4	Vereinfachungen der Euler-Lagrange-Gleichung	123
5.2.5	Die n -dimensionale Euler-Lagrange-Gleichung	124
5.2.6	Lokale Minimallösungen	125
5.2.7	Restringierte Variationsaufgaben	127
5.2.8	Hinreichende Optimalitätsbedingungen	129
5.2.9	Variationsaufgaben mit Singularitäten	131
5.2.10	Eine Lösung des Brachistochronenproblems	133
5.2.11	Beispiel aus der Optik	141
5.2.12	Substituierte Aufgaben	142
5.2.13	Ein isoperimetrisches Problem	144
5.2.14	Variationsaufgabe mit freiem Endpunkt. Bolza und Mayer- sche Probleme	147
5.2.15	Variationsaufgaben mit stückweise differenzierbaren Funk- tionen	151
5.3	Theorie der optimalen Steuerung	156
5.3.1	Einführung	156
5.3.2	Variationsaufgaben als Probleme der optimalen Steuerung . .	159
5.3.3	Beispiele aus der Ökonomie	160
5.3.4	Elementarer Lagrange-Ansatz	162
5.3.5	Hamilton-Funktion	171
5.3.6	Hinreichende Bedingungen. Separierte Aufgaben	171
5.3.7	Nicht separierte Aufgaben	178
5.3.8	Quadratische Aufgaben	182
5.3.9	Lineare Aufgaben mit freiem Endpunkt	187
5.3.10	Aufgaben mit festen Endpunkten und linearen DGL	190
5.3.11	Quadratische Steuerungsaufgaben als Minimierungsaufga- ben im quadratischen Mittel	194
5.3.12	Minimalzeitprobleme als lineare Approximationsaufgaben . .	195
5.3.13	Maßtheoretische Erweiterungen	201
5.3.14	Dynamische Optimierung	201
6	Methode der punktwweisen Minimierung	205
6.1	Die Methode der Ergänzung bei Variationsaufgaben	205
6.1.1	Lineare Ergänzung	207
6.1.2	Produktergänzungen	208
6.1.3	Äquivalente Aufgaben	209
6.1.4	Ansatz der punktwweisen Minimierung	211

6.1.5	Allgemeine Variationsaufgaben und die punktweise Minimierung	212
6.1.6	Prinzip der punktweisen Minimierung für allgemeine Variationsaufgaben	213
6.2	Anwendungen der linearen Ergänzung	213
6.2.1	Die Wurfparabel	215
6.2.2	Die Kettenlinie	216
6.2.3	Parametrische Behandlung der Kettenlinienaufgabe	217
6.3	Die Euler-Lagrange-Gleichung und kanonische Gleichungen der Variationsrechnung bei punktweiser Minimierung	220
6.3.1	Anwendung der Euler-Regel II auf das Wirkungsintegral	221
6.3.2	Konvexe Aufgaben	221
6.3.3	Konvexifizierung mit Hilfe von äquivalenten Aufgaben	222
6.3.4	Eine Anwendung auf die Ungleichungen von Wirtinger	224
6.3.5	Konvexifizierung der Aufgabe des harmonischen Oszillators	226
6.3.6	Die Euler-Lagrange-Gleichung und die punktweise Minimierung	227
6.3.7	Die kanonischen Gleichungen in der Euler-Lagrange-Form	229
6.3.8	Hamilton-Funktion und kanonische Gleichungen der Variationsrechnung	230
6.4	Punktweise Minimierung bei Aufgaben mit Singularitäten	232
6.4.1	Punktweise Minimierung bei Variationsaufgaben mit Singularitäten	232
6.4.2	Behandlung des Brachistochronenproblems mit der punktweisen Minimierung	234
6.4.3	Die Dido-Aufgabe	236
6.4.4	Die Dido-Aufgabe mit einem freien Grundintervall	237
6.4.5	Die Dido-Aufgabe mit freien Endpunkten	238
6.4.6	Freie Endpunkte und freie Wahl der Intervalllänge	240
6.4.7	Geschlossene Kurven	240
6.4.8	Die klassische Dido-Aufgabe	243
6.5	Die kürzeste Verbindung auf einer Fläche	244
6.5.1	Die geodätischen Linien auf einer Fläche	244
6.5.2	Die geodätischen Linien auf der Sphäre	245
6.6	Sukzessive Minimierung bei Variationsaufgaben	246
6.7	Sukzessive Minimierung mit einer konstanten zweiten Stufe	247
6.7.1	Sukzessive Minimierung bei quadratischen Variationsaufgaben	247
6.7.2	Die Wirtinger Ungleichung bei freiem Endpunkt	250
6.7.3	Die Ungleichung von Friedrichs	251
6.7.4	Die Friedrichs-Ungleichung bei freiem Endpunkt	252
6.7.5	Konstante zweite Stufe bei autonomen Ergänzungen	253
6.7.6	Konstante zweite Stufe und die Hamilton-Funktion	256

6.7.7	Eine Anwendung auf das Hamiltonsche Prinzip	257
6.7.8	Elastischer Stab	259
6.8	Rotationskörper größten Volumens bei vorgegebener Länge des Meridians	261
6.8.1	Parametrischer Ansatz	261
6.8.2	Rotationskörper größten Volumens bei freier Breite	262
6.8.3	Rotationskörper kleinster Oberfläche	264
6.8.4	Die Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung	268
6.9	Ein Stabilitätssatz	268
6.10	Optimale Flächen. Variation zweifacher Integrale	270
6.11	Euler-Ostrogradski-Gleichung	270
6.11.1	Membranenschwingung	271
6.11.2	Hinreichende Optimalitätsbedingung	271
6.12	Verallgemeinerung auf n -dimensionale Bereichsintegrale	272
6.13	Punktweise Minimierung bei der optimalen Steuerung	273
6.13.1	Äquivalente Aufgaben	274
6.13.2	Ansatz der punktweisen Minimierung für AOS-Aufgaben	275
6.14	Diskrete optimale Steuerung	279
6.14.1	Einführung	279
6.14.2	Diskrete Variationsaufgaben	279
6.14.3	Diskrete Euler-Lagrange-Gleichung	281
6.14.4	Bezeichnungen und eine Formulierung der Aufgabe der diskreten optimalen Steuerung	283
6.14.5	Äquivalente diskrete ADOS-Aufgaben	284
6.14.6	Quadratische Aufgaben der diskreten optimalen Steuerung	287
6.14.7	Eine Anwendung in der Zeitreihenanalyse	290
7	Čebyšev-Approximation	295
7.1	Charakterisierung der besten Čebyšev-Approximation	295
7.2	Satz von de la Vallée-Poussin I	297
7.3	Haarsche Teilräume	298
7.4	Satz von Čebyšev	300
7.5	Approximationssätze von Weierstraß und der Satz von Korovkin	301
7.6	Satz von Stone-Weierstraß	306
8	Approximation im Mittel	309
8.1	L^1 -Approximation	309
8.1.1	Rechtsseitige Richtungsableitung der L^1 -Norm	309
8.1.2	Eine Verallgemeinerung der L^1 -Approximation	310
8.1.3	Charakterisierung der besten L^1 -Approximation	311
8.1.4	Beschreibung des Medians als beste L^1 -Approximation	311
8.2	L^Φ -Approximation in $C[a, b]$	313

8.2.1	Jackson-Alternative für L^Φ -Approximation	314
8.2.2	Eindeutigkeitssatz	314
8.2.3	Berechnung der besten $L^1(\mu)$ -Approximation. Der Satz von Markov	315
8.2.4	Fehlerabschätzungen. Satz von Bernstein	318
8.3	Spline-Funktionen	321
9	Stabilitätsbetrachtungen für konvexe Aufgaben	328
9.1	Gleichgradige Stetigkeit von Familien konvexer Funktionen	328
9.2	Gleichgradige Stetigkeit konvexer Funktionen in Banachräumen und der Satz über gleichmäßige Beschränktheit	331
9.3	Stetige Konvergenz und gleichgradige Stetigkeit	336
9.4	Stabilitätssätze	338
9.4.1	Diskrete Approximierbarkeit bei semi-infiniter Optimierung	344
9.5	Geordnete Vektorräume und konvexe Kegel	344
9.5.1	Geordnete Vektorräume	344
9.5.2	Normale Kegel	346
9.6	Konvexe Abbildungen	347
9.7	Komponentenweise konvexe Abbildungen	351
10	Selektion von Lösungen durch Algorithmen. Zweistufige Lösungen	353
10.1	Zweistufige Optimierungsaufgaben	354
10.2	Stabilitätsbetrachtungen für Variationsungleichungen	359
10.3	Zweistufige Variationsungleichungen	360
11	Trennungssätze	363
11.1	Satz von Hahn-Banach	363
11.1.1	Der Dualraum von $C[a, b]$. Darstellungssatz von Riesz	366
11.2	Satz von Mazur	369
11.3	Trennungssatz von Eidelheit	370
11.4	Strikter Trennungssatz	370
11.5	Subgradienten	371
11.6	Der Dualraum eines Hilbertraumes	375
12	Konjugierte Funktionen. Der Satz von Fenchel	378
12.1	Youngsche Ungleichung	379
12.2	Beispiele für konjugierte Funktionen	383
12.3	Satz von Fenchel	384
12.4	Existenz von Minimallösungen bei konvexen Optimierungsaufgaben	388
12.4.1	Weierstraßsches Existenzprinzip	391
12.4.2	Analytische Darstellung des Dualraumes von L^p	397
12.5	Dualitätssatz der linearen Approximationstheorie	399
12.6	Die Formel von Ascoli	400

12.7	Charakterisierungssatz der linearen Approximation	401
12.8	Gleichgewichtssatz der linearen Approximation	401
12.9	Starke Lösbarkeit. Uniform konvexe Funktionen	402
13	Lagrange-Multiplikatoren	406
13.1	Duale Kegel	406
13.2	Konvexe Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen	407
13.3	Satz über Lagrange-Multiplikatoren	409
13.4	Lagrange-Multiplikatoren bei linearen Nebenbedingungen	413
13.5	Konvexe Ungleichungen und lineare Gleichungen	413
13.6	Hinreichende Bedingung für restringierte Minimallösungen	416
13.7	Sattelpunktversionen	417
13.8	Lagrange-Dualität	418
14	Duale Optimierungsaufgaben	419
14.1	Infinite lineare Optimierung	419
14.2	Semiinfinite lineare Optimierung	420
14.3	Dualitätssatz der linearen Programmierung	425
14.4	Extremalpunkte. Satz von Minkowski	426
14.5	Duale Aufgaben in $C(T)$	430
14.6	Ein Momentenproblem von Markov	431
14.7	Numerische Behandlung von semiinfiniten Aufgaben	434
14.8	Čebyšev-Approximation – duale Aufgabe	440
14.9	Impulssteuerungen und Čebyšev-Approximation	442
14.10	Minimaxaufgaben und Lagrange-Multiplikatoren	443
14.11	Sattelpunktkriterium	445
14.12	Spieltheoretische Interpretation	446
14.13	Minimaxsätze	446
14.14	Topologische Räume	449
14.15	Satz von Ky Fan	450
14.16	Eine Charakterisierung von Minimax-Lösungen mit rechtsseitiger Richtungsableitung	451
14.17	Minimaxsätze für Lagrange-Funktionen	452
14.18	Infinite konvexe Optimierung	453
14.19	Semiinfinite konvexe Optimierung	455
15	Eine Anwendung in der Testtheorie	456
15.1	Testfunktion	456
15.2	Ein Optimalitätskriterium	457
15.3	Das Fundamentallemma von Neyman-Pearson	459
15.4	Existenz von besten Tests	461
15.5	Existenz von besten verallgemeinerten Tests	462
15.6	Notwendige Bedingungen	463

15.7	Eine duale Aufgabe	465
A	Mengenkonvergenz	467
B	Kontraktionssatz. Gewöhnliche Differentialgleichungen	472
B.1	Kontraktionssatz	472
B.2	Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	475
B.3	Existenz- und Eindeutigkeitssatz für stückweise stetig differenzierbare Funktionen	478
B.4	Lineare DGL-Systeme für stückweise stetig differenzierbare Funktionen	479
B.5	Stetige Abhängigkeit der Lösungen	485
C	Das Lemma von Zorn	489
D	Verallgemeinerungen in topologischen Vektorräumen	490
	Literaturverzeichnis	495
	Spezielle Symbole und Abkürzungen	505
	Index	507