

Kettenbrüche über Banachalgebren – Konvergenzkriterien und Anwendungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von
Hendrik Baumann

aus
Ostercappeln

genehmigt von der Fakultät für Mathematik/Informatik und Maschinenbau
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung:

10.12.2010

Bibliographische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dissertation Clausthal 2011

Vorsitzende/Vorsitzender der Promotionskommission:

Prof. Dr. Michael Kolonko, TU Clausthal

Hauptberichterstatter:

Prof. Dr. Thomas Hanschke, TU Clausthal

Berichterstatter:

Prof. Dr. Hans-Heinrich Kairies, TU Clausthal

D104

©PAPIERFLIEGER VERLAG GmbH, Clausthal-Zellerfeld, 2011
Telemannstraße 1, 38678 Clausthal-Zellerfeld
<http://www.papierflieger-verlag.de>

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es nicht gestattet, das Buch oder Teile daraus auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

1. Auflage, 2011

ISBN: 978-3-86948-144-9

Danksagung

Zum Gelingen dieser Arbeit haben viele Menschen beigetragen. Für die mathematische Grundausbildung, für wissenschaftliche Ratschläge und für die moralische Unterstützung danke ich den Mathematik-Dozenten der TU Clausthal, meinen Kollegen, meinem Freundeskreis und meiner Familie. Speziell möchte ich mich bei Herrn Hanschke dafür bedanken, dass er für meine Promotion einen wissenschaftlichen Rahmen abgesteckt hat, in dem ich mich kreativ mit Themengebieten aus der reinen und der angewandten Mathematik beschäftigen konnte, was mir viel Freude bereitet hat, und auch dafür, dass er mir, als die wesentlichen Ergebnisse standen, sinnvolle Ratschläge zu deren Strukturierung und zum weiteren Vorgehen gegeben hat. Auch Herrn Kairies, der kurzfristig das sicherlich zeitintensive Koreferat meiner Arbeit übernommen hat, möchte ich herzlich danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Klassische Kettenbrüche und der historische Beginn der Kettenbruchtheorie	1
1.2	Kettenbrüche über \mathbb{C} und Differenzgleichungen	3
1.3	Mehrdimensionale Kettenbrüche und der Jacobi-Perron-Algorithmus	5
1.4	Kettenbrüche über Banachalgebren	7
1.5	Einseitige Kettenbrüche	9
1.6	Verallgemeinerung nach Levrie und Bultheel	10
1.7	Aufbau der Arbeit	11
2	Einseitige Kettenbrüche	13
2.1	Grundlagen	13
2.2	Transformationen	16
2.3	Die Pringsheim-Kriterien für einseitige Kettenbrüche	18
2.4	Anwendung einseitiger Kettenbrüche auf Differenzgleichungen	22
3	S-Reihen	25
3.1	Motivation und Definition	25
3.2	Identitäten für die S -Reihen	27
3.3	Grenzwerte für $N \rightarrow \infty$	29
3.4	Die Mengen $\mathcal{M}(\mathcal{R})$	30
4	Konvergenz beidseitiger Kettenbrüche	33
4.1	Einige Elemente in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$	33
4.2	Komponentenweise Normbildung	35
4.3	Ähnliche Kettenbrüche	36

4.4	Das Pringsheim-Kriterium für beidseitige Kettenbrüche	36
4.5	Praktikable Fehlerabschätzung	39
5	Inverse Kettenbrüche und Differenzgleichungen	43
5.1	Motivation	43
5.2	Die Mengen \mathcal{M}_D	43
5.3	Eigenschaften von $\mathcal{M}_D(\mathcal{R})$	48
5.4	Ähnliche inverse Kettenbrüche	49
5.5	Das Pringsheim-Kriterium für Differenzgleichungen	51
5.6	Verbindung zur LU-Zerlegung für block-tridiagonale Matrizen	52
5.7	Verallgemeinerung der Anfangsbedingung	53
6	Anwendung auf Markovketten	57
6.1	Interpretation der S -Reihen	57
6.2	Die Matrix $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$	61
6.3	Berechnung eines stationären Maßes	61
6.4	Abschneiden	63
6.5	Markovketten in stetiger Zeit	64
6.6	Interpretation der R_n	65
6.7	Algorithmen	66
6.8	Zeitabhängige Lösungen	70
6.9	Ausgesuchte Spezialfälle	73
7	Anwendungen	79
7.1	Ein Bediensystem mit Totalverlusten	79
7.2	Eine Differentialgleichung	83
A	Banachalgebren	91
A.1	Definitionen und einfache Ergebnisse	91
A.2	Konvergenz von Reihen	92
B	Abbildungen	97
C	Bezeichnungen	109

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Klassische Kettenbrüche und der historische Beginn der Kettenbruchtheorie

Als *regelmäßige Kettenbrüche* werden endliche oder unendliche Strukturen der Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und natürlichen Zahlen b_1, b_2, \dots bezeichnet, die b_n heißen auch *Teilnenner*. Dabei wird einem unendlichen Kettenbruch ein Wert zugeordnet, indem in den approximierenden endlichen Kettenbrüchen

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_N}}}}$$

der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ betrachtet wird.

Nach vereinzelt früheren Ansätzen verwendeten John Wallis (1616-1703) und Christiaan Huygens (1629-1695) Kettenbrüche systematisch, zumeist, um Naturkonstanten darzustellen oder zu approximieren. Leonhard Euler (1707-1783) studierte erstmals Kettenbrüche als eigenständige mathematische Strukturen und kam zu einem fundamentalen Ergebnis:

Satz 1.1.1 (Euler). *Endliche regelmäßige Kettenbrüche stellen rationale Zahlen dar, umgekehrt besitzt jede rationale Zahl genau zwei Darstellungen als endlicher regelmäßiger Kettenbruch, jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch konvergiert gegen eine irrationale Zahl, umgekehrt kann jede irrationale reelle Zahl eindeutig als unendlicher regelmäßiger Kettenbruch dargestellt werden.*

Die Rationalität endlicher regelmäßiger Kettenbrüche ist offensichtlich, bei der Umkehrung können die Teilnenner b_n mithilfe des Euklidischen Algorithmus gewonnen werden. Die zwei Darstellungen resultieren daraus, dass $b_N > 1$ stets durch $b_N - 1 + \frac{1}{1}$ ersetzt werden kann.

Euler studierte auch die Eigenschaften periodischer unendlicher Kettenbrüche (d.h. $b_{n+d} = b_n$ mit einem $d \in \mathbb{N}$ für genügend große n) genauer, und stellte fest, dass sie stets quadratische Irrationalzahlen darstellen, also irrationale Zahlen, die sich als Nullstellen eines Polynoms zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten ergeben. Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) konnte auch die Umkehrung dieses Sachverhalts zeigen, womit sich eine vollständige Charakterisierung quadratischer Irrationalzahlen mittels regelmäßiger Kettenbrüche ergab.

Satz 1.1.2 (Euler-Lagrange). *Jeder periodische regelmäßige Kettenbruch konvergiert gegen eine quadratische Irrationalzahl, und jede quadratische Irrationalzahl ist als periodischer regelmäßiger Kettenbruch darstellbar.*

Lagrange zeigte, dass die sogenannten *Näherungsbrüche* $\frac{A_N}{B_N}$, die durch Umwandlung des approximierenden endlichen Kettenbruchs

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_N}}}}$$

in einen gewöhnlichen Bruch entstehen, *beste Näherungen* an den unendlichen Kettenbruch

$$K = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}$$

bilden, d.h. ist $\frac{p}{q}$ ein weiterer Bruch mit Nenner $q \leq B_N$ und $\frac{p}{q} \neq \frac{A_N}{B_N}$, so gilt

$$\left| K - \frac{p}{q} \right| > \left| K - \frac{A_N}{B_N} \right|.$$

Die Beweise dieser Resultate, weitere und bessere auf Lagrange zurückzuführende Approximationsaussagen, sowie zahlreiche darüberhinaus gehende Resultate über regelmäßige Kettenbrüche werden etwa in [23], Kapitel II dargestellt. Die Arbeiten von Euler und Lagrange zeigten auf, dass Kettenbrüche insbesondere zur Lösung von Approximationsaufgaben in vielen Situationen sinnvolle Ansätze darstellen. Mit dem Zweck immer abstraktere oder kompliziertere Approximationen durchzuführen, wurden Kettenbrüche seit der systematischen Einführung durch Euler in verschiedenen Formen verallgemeinert.

1.2 Kettenbrüche über \mathbb{C} und Differenzgleichungen

Eine Verallgemeinerung von Kettenbrüchen entsteht beispielsweise im Zusammenhang mit Differenzgleichungen. Wird die Differenzgleichung

$$x_n = b_n x_{n+1} + x_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $b_1, b_2, \dots \in \mathbb{N}$ durch x_{n+1} dividiert, so liefert die Abkürzung $K_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ zunächst $K_n = b_n + \frac{1}{K_{n+1}}$, und damit die Vermutung

$$K_0 = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}}.$$

Da die Differenzgleichung zwei linear unabhängige Lösungen hat, die konkrete Lösung jedoch durch das Verhältnis $\frac{x_0}{x_1}$ eindeutig festgelegt ist, kann $\frac{x_0}{x_1}$ nur für eine der unendlichen vielen Lösungen $(x_n)_{n=0}^\infty$ mit dem unendlichen Kettenbruch zusammenfallen. Es stellt sich die Frage, für welche der Lösungen dies gilt.

Diese Frage kann in erheblich allgemeinerem Kontext diskutiert werden, indem Differenzgleichungen der Form

$$x_n = b_n x_{n+1} + a_{n+1} x_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $b_n, a_n \in \mathbb{C}$ betrachtet werden. Der erneute Ansatz $K_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ liefert nun analog $K_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{K_{n+1}}$ und damit

$$K_0 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}},$$

wobei auch dies nur für eine der unendlich vielen Lösungen $(x_n)_{n=0}^\infty$ zutreffen kann, und derartige Kettenbrüche noch zu definieren sind. Dies erfolgt in

Definition 1.2.1. Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexwertige Folgen. Ist durch die Rekursion

$$\begin{aligned} K_N^{(N)} &= b_N, & N \in \mathbb{N}_0 & \quad \text{und} \\ K_n^{(N)} &= b_n + a_{n+1} \left(K_{n+1}^{(N)} \right)^{-1}, & n, N \in \mathbb{N}_0, n < N \end{aligned}$$

der Wert $K_0^{(N)}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ erklärt, so heißt $K_0^{(N)}$ *wohldefinierter endlicher Kettenbruch der Stufe N*. Existiert

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_0^{(N)}$$

so heißt K *konvergenter unendlicher Kettenbruch*, $K_0^{(N)}$ heißt dann auch *N-te Approximante* an K .

Basierend auf einigen Vorarbeiten wie [1] stellte Oskar Perron (1880-1975) einige Kriterien auf, unter welchen Bedingungen welche der Lösungen der betrachteten Differenzgleichung $x_n = b_n x_{n+1} + a_{n+1} x_{n+2}$ durch das Verhältnis $\frac{x_0}{x_1} = K_0$ mit dem konvergenten Kettenbruch $K = K_0$ charakterisiert ist, siehe [24], §20. Unter anderem zeigte Perron, dass stets $\frac{x_0}{x_1} = K_0$ gilt, wenn (x_n) durch eine weitere Lösung (y_n) der Differenzgleichung dominiert wird, d.h. wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ gilt.

Neben einem wichtigen theoretischen Resultat beinhaltet dieser Sachverhalt auch praktischen Nutzen. Da gerade die dominierte Lösung einer Differenzgleichung im Allgemeinen auch bei bekannten Anfangsdaten x_0 und x_1 durch die naheliegende Vorwärtsrekursion nicht stabil berechnet werden kann, sind alternative Berechnungsmöglichkeiten von Interesse. Die Beziehung zu den Kettenbrüchen legt nun nahe, zunächst K_0, \dots, K_N (mit einem genügend großen $N \in \mathbb{N}$) zu berechnen, und anschließend x_1, \dots, x_{N+1} über die Quotientenbeziehung $\frac{x_n}{x_{n+1}} = K_n$ für die gesuchte dominierte Lösung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zu ermitteln. Auf diese Weise wird die Differenzgleichung zweiter Ordnung auf die stabil lösbare Differenzgleichung $x_n - x_{n+1} K_n = 0$ reduziert. Natürlich ist es mit endlichen numerischen Algorithmen nicht möglich, die unendlichen Kettenbrüche K_n exakt auszurechnen. Stattdessen wird $K_n^{(N)}$ verwendet, und somit wird in der Praxis das durch Abschneiden entstehende System

$$\begin{aligned} x_n^{(N)} &= b_n x_{n+1}^{(N)} + a_{n+1} x_{n+2}^{(N)}, & n = 0, \dots, N-1, \\ x_N^{(N)} &= b_N x_{N+1}^{(N)} \end{aligned}$$

gelöst. Konvergieren die Kettenbrüche K_n gegen $\frac{x_n}{x_{n+1}}$, so konvergieren auch die Elemente $x_n^{(N)}$ der durch Abschneiden entstehenden Lösungen gegen x_n .

Schon deutlich vor dem 20. Jahrhundert wurden Kettenbrüche nach Definition 1.2.1 behandelt. Bereits Wallis und Euler war bekannt, wie Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche umgewandelt werden können: Für die N -te Approximation gilt $K_0^{(N)} = \frac{A_N}{B_N}$, wobei die Folgen (A_n) und (B_n) durch

$$(1.2.1) \quad A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$(1.2.2) \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 0, \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

definiert sind. Diese Darstellung für die Näherungsbrüche erlaubte es, zahlreiche Konvergenzkriterien für Kettenbrüche nachzuweisen, da für Kettenbrüche nach Definition 1.2.1 im Gegensatz zu regelmäßigen Kettenbrüchen die Konvergenz nicht stets gegeben ist (selbst für endliche Kettenbrüche ist nicht immer Wohldefiniertheit gegeben). Eine der bekanntesten Gruppen von Konvergenzkriterien geht auf Alfred Pringsheim (1850-1941, [27], [26]) zurück.

Satz 1.2.1 (Pringsheim-Kriterium). *Es seien $b_0, b_1, b_2, \dots \in \mathbb{C}$ und $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$, K bezeichne den Kettenbruch*

$$K = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\dots}}}$$

- *Gilt $|b_n| \geq |a_n| + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist K konvergent mit $|K - b_0| \leq 1$.*
- *Gibt es $q_1, q_2, \dots \in \mathbb{R}$ mit*

$$1 \leq q_1, \quad \left| \frac{a_n}{b_{n-1}b_n} \right| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1}q_n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots,$$

und gilt einmal strikt $<$, so ist K ebenfalls konvergent.

Zahlreiche weitere Kriterien sind in Perrons Büchern [23] und [24] dargestellt, und auch wenn seitdem weiter an Kettenbrüchen über \mathbb{C} gearbeitet wurde, soll an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden.

1.3 Mehrdimensionale Kettenbrüche und der Jacobi-Perron-Algorithmus

Eine weitere Verallgemeinerung stellen mehrdimensionale Kettenbrüche dar. Da sie in dieser Arbeit nicht näher behandelt werden, soll ihre Entstehung und das grundsätzliche Konzept nur kurz vorgestellt werden.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) strebte an, mittels periodischer Strukturen kubische Irrationalzahlen anzunähern. Da reguläre Kettenbrüche hierfür nach dem Satz von Euler-Lagrange nicht infrage kamen, suchte er nach geeigneten Verallgemeinerungen. Perron systematisierte dieses Verfahren, woraus dann der *Jacobi-Perron-Algorithmus* zur Entwicklung von mehrdimensionalen Kettenbrüchen, den *Jacobi-Perron-Entwicklungen* entstand.

Bei der Bestimmung des unendlichen regelmäßigen Kettenbruchs für eine irrationale Zahl α wird $\alpha_0 = \alpha$ und dann sukzessive $b_\nu = \lfloor \alpha_\nu \rfloor$ und $\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{b_\nu - \alpha_\nu}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Dies entspricht einer Übertragung des Euklidischen Algorithmus auf irrationale Zahlen, für rationales α wäre ein $\alpha_n \in \mathbb{N}$ und der Algorithmus bräche ab. Der Jacobi-Perron-Algorithmus verallgemeinert nun diesen Ansatz für Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, für die $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ linear unabhängig über \mathbb{Q} ist. Es wird nun $\alpha_{0,i} = \alpha_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, und dann sukzessive

$$\begin{aligned} b_{\nu,i} &= \lfloor \alpha_{\nu,i} \rfloor, & i = 1, \dots, n, \nu \in \mathbb{N}_0, \\ \alpha_{\nu+1,n} &= \frac{1}{\alpha_{\nu,1} - b_{\nu,1}}, & \nu \in \mathbb{N}_0, \\ \alpha_{\nu+1,i-1} &= \alpha_{\nu+1,n}(\alpha_{\nu,1} - b_{\nu,1}), & i = 2, \dots, n, \nu \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

definiert. Die Vektoren $(b_{\nu,i})_{i=1}^n$ heißen nun Teilnenner der *Jacobi-Perron-Entwicklung* des Vektors $(\alpha_i)_{i=1}^n$. Die Jacobi-Perron-Entwicklung selbst ist ein mehrdimensionaler Kettenbruch, der über Näherungsnenner und -zähler definiert wird. Diese werden dabei über die an (1.2.1) und (1.2.2) angelehnten Rekursionen

$$\begin{aligned} A_{ii} &= 1, & i &= 0, \dots, n, \\ A_{ji} &= 0, & i, j &= 0, \dots, n, \quad j \neq i, \\ A_{\nu+n+1,i} &= A_{\nu,i} + \sum_{j=1}^n b_{\nu,j} A_{\nu+j,i}, & i &= 0, \dots, n, \nu \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

definiert. Es lässt sich zeigen, dass dann $\alpha_i = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{A_{\nu,i}}{A_{\nu,0}}$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, und tatsächlich Verknüpfungen zwischen Ordnungen der Irrationalzahlen α_i und Periodizitäten der Teilnenner $(b_{\nu,i})_{i=1}^n$ bestehen, siehe etwa Bernsteins Arbeit [4] über den Jacobi-Perron-Algorithmus.

Die Jacobi-Perron-Entwicklung von Irrationalzahlen höherer Ordnung entspricht einer Verallgemeinerung von regelmäßigen Kettenbrüchen, da die Teilnenner stets Vektoren natürlicher Zahlen sind. Wie schon bei eindimensionalen Kettenbrüchen bietet es sich an, sie durch beliebige komplexe Zahlen zu ersetzen und auch die Teilzähler 1 (Koeffizienten vor $A_{\nu,i}$ in der Rekursion) durch beliebige komplexe Zahlen a_ν zu ersetzen. Ab 1978 wurde dieser Ansatz verfolgt, deutlich verbunden mit dem Ziel, lineare Differenzgleichungen mit mehr als drei Termen zu lösen. Diese Ansätze gehen im Wesentlichen auf die Arbeiten von De Bruin (etwa [11]) und Van der Cruyssen (etwa [35]) zurück. Sie prägten für die Kettenbruchverallgemeinerung den Begriff „Generalized Continued Fraction“ und erkannten, dass erneut dominierte Lösungen mit den verallgemeinerten Kettenbrüchen assoziiert waren. Wie für Differenzgleichungen zweiter Ordnung besteht auch hier nun die Möglichkeit, dominierte Lösungen numerisch stabil über verallgemeinerte Kettenbrüche zu ermitteln (siehe auch [16]). Ebenfalls analog zu den Systemen zweiter Ordnung können die durch Kettenbrüche und deren Approximationen berechneten Lösungen auch als durch Abschneiden des Systems entstehende Lösungen interpretiert werden. Für verallgemeinerte Kettenbrüche zeigte Levrie in [18] und [19] ein Konvergenz-Kriterium vom Pringsheim-Typ, das sich bei Anwendung auf gewöhnliche Kettenbrüche auf Satz 1.2.1 reduziert, also als direkte Verallgemeinerung angesehen werden kann.

Wie eingangs dieses Abschnittes bereits erwähnt, werden mehrdimensionale Kettenbrüche in dieser Arbeit nicht näher betrachtet, der Zusammenhang zwischen den durch Kettenbrüchen erzeugten Lösungen von Differenzgleichungen und den durch Abschneiden erzeugten Lösungen wird jedoch in Kapitel 5 in einem etwas anderen Kontext noch einmal aufgegriffen.

1.4 Kettenbrüche über Banachalgebren

Gegenstand dieser Arbeit sollen vielmehr Kettenbrüche sein, die zwar im Wesentlichen gemäß Definition 1.2.1 entstehen, jedoch mit einer Banachalgebra \mathcal{R} als Wertebereich für Teilzähler und -nenner. Eine Motivation, derartige Kettenbrüche überhaupt zu betrachten, liegt darin, Differenzgleichungen der Form $x_n = b_n x_{n+1} + a_{n+1} x_{n+2}$ in Banachalgebren zu lösen, etwa können b_n und a_{n+1} quadratische Matrizen sein.

Bemerkung 1.4.1. Von nun an wird stets mit \mathcal{R} eine Banachalgebra mit Norm $\|\cdot\|$ und Einselement I bezeichnet, und mit \mathcal{R}^* die zugehörige Einheitengruppe, d.h. die Gruppe aller regulären (invertierbaren) Elemente in \mathcal{R} . Einige wichtige Definition und Ergebnisse insbesondere zur Konvergenz von Reihen in einer Banachalgebra sind in Anhang A aufgeführt.

Abgesehen davon, dass die Frage nach der Wohldefiniertheit endlicher Kettenbrüche offensichtlich an Gewicht gewinnt, stellt sich zunächst das Problem, ob ein Bruch $\frac{p}{q}$ durch $q^{-1}p$ oder pq^{-1} ersetzt werden muss. In dieser Arbeit sollen neben Spezialfällen, zu denen sich elementarere Zugänge finden, ganz allgemeine Kettenbrüche über Banachalgebren behandelt werden, bei denen ein Teil des Zählers von links und ein Teil des Zählers von rechts an die Inversen multipliziert wird. Dies führt zu der grundlegenden

Definition 1.4.1. Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} . Ist durch die Rekursion

$$\begin{aligned} K_N^{(N)} &= b_N, & N \in \mathbb{N}_0 & \quad \text{und} \\ K_n^{(N)} &= b_n + a_{n+1} \left(K_{n+1}^{(N)} \right)^{-1} c_{n+1}, & n, N \in \mathbb{N}_0, n < N \end{aligned}$$

der Wert $K_0^{(N)}$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ erklärt, so heißt $K_0^{(N)}$ *wohldefinierter endlicher Kettenbruch der Stufe N* . Existiert

$$K = \lim_{N \rightarrow \infty} K_0^{(N)}$$

so heißt K *konvergenter unendlicher Kettenbruch*, $K_0^{(N)}$ heißt dann auch *N -te Approximante* an K . Da die Kettenbrüche durch die Folgen b, a, c definiert sind, wird noch die Bezeichnung $CF^{(N)}(b, a, c) = K_0^{(N)}$ für die Approximanten sowie $CF(b, a, c) = K$ für den Kettenbruch selbst eingeführt.

In der Literatur kommen derartige Kettenbrüche zumeist als Matrixkettenbrüche vor, erstmals in der Dissertation von Pia Pflüger aus dem Jahr 1966, [25]. Diese Arbeit hat mit einigen nachfolgenden ([32], [28], [36]) jedoch starke Einschränkungen an die Folgen b, a, c der Teilnenner und -zähler gemeinsam, insbesondere sind in diesen Arbeiten in großen Teilen nur Vielfache des neutralen Elements I als Teilzähler zugelassen. In der hier vorgestellten

allgemeinen Form behandelten unter anderem Denk und Riederle [10] Kettenbrüche über Banachalgebren. Sie katalogisierten 1981 nicht nur eine Reihe von Anwendungen, sondern zeigten vor allem den folgenden

Satz 1.4.1. *Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} sowie $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen $q_n > 1$ mit*

$$\|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{q_{n-1} - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{1}{q_N} \prod_{n=1}^N \|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot q_n^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Dann sind die endlichen Kettenbrüche $K^{(N)} = CF^{(N)}(b, a, c)$ wohldefiniert, der unendliche Kettenbruch $K = CF(b, a, c)$ ist konvergent, und es gilt

$$\|K b_0^{-1} - I\| \leq \frac{q_0 - 1}{q_0}$$

sowie

$$\|K - K^{(N-1)}\| \leq \frac{\|b_0\|}{q_N} \prod_{n=1}^N \|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot q_n^2.$$

Dabei handelt es sich um die erste in der Literatur zu findende Übertragung des Pringsheim-Kriteriums Satz 1.2.1 auf Kettenbrüche über Banachalgebren, denn der Term $\|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n b_{n-1}^{-1}\|$ entspricht für $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ dem Term $\left| \frac{a_n}{b_{n-1} b_n} \right|$ aus dem zweiten Teil von Satz 1.2.1. Allerdings ist die zweite Bedingung dieses Satzes eine echte Zusatzbedingung. Beispielsweise für $\mathcal{R} = \mathbb{C}$, mit $q_n = b_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_n = c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt offenbar Konvergenz nach dem ursprünglichen Pringsheim-Kriterium vor, jedoch gilt

$$\frac{1}{q_N} \prod_{n=1}^N \|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot q_n^2 = \frac{1}{2}$$

unabhängig von N , somit sind die Bedingungen von Satz 1.4.1 nicht erfüllt. In einer Arbeit aus dem Jahr 1995 zeigt Schelling ([30]) den

Satz 1.4.2. *Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} sowie $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen $q_n \geq 1$ mit*

$$\|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|c_n\| \cdot \|b_{n-1}^{-1}\| \leq (1 - \epsilon) \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}$$

oder

$$\|a_n\| \cdot \|b_n^{-1} c_n\| \cdot \|b_{n-1}^{-1}\| \leq (1 - \epsilon) \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}$$

für alle $n \geq 2$ mit einer Konstanten $\epsilon > 0$. Dann konvergiert $CF(b, a, c)$.

Schelling verzichtet zwar auf eine Zusatzbedingung, führt jedoch den Faktor $1 - \epsilon$ ein, der mindestens genau so restriktiv wirkt. Auch die Bedingungen dieses Satzes sind für das obige Beispiel mit $q_n = b_n = 2$ und $a_n = c_n = 1$ nicht erfüllt. Insofern können beide Kriterien nicht als exakte Verallgemeinerung des Pringsheim-Kriteriums in \mathbb{C} gelten. Ein wichtiger Punkt dieser Arbeit ist der Nachweis von

Satz 1.4.3. *Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} sowie $(q_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit*

$$1 \leq q_1 \quad \text{und} \quad \|a_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot \|c_n b_n^{-1}\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \geq 2$$

mit mindestens einem strikten $<$, oder

$$1 \leq q_1 \quad \text{und} \quad \|b_n^{-1} a_n\| \cdot \|b_{n-1}^{-1} c_n\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \geq 2$$

mit mindestens einem strikten $<$. Dann ist $CF(b, a, c)$ konvergent.

Dieser Satz wird in Kapitel 4 neu formuliert, dabei werden auch Fehlerschranken für die Differenz zu den Approximationen $CF^{(N)}(b, a, c)$ angegeben, die etwas genauer als die von Denk und Riederle sind. Offensichtlich handelt es sich um ein Kriterium, dass im Fall $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ exakt mit dem Satz 1.2.1 übereinstimmt.

1.5 Einseitige Kettenbrüche

Ein Fakt, der es erschwert, Konvergenzkriterien für allgemeine Kettenbrüche über Banachalgebren zu zeigen, ist das Fehlen einer brauchbaren Darstellung als einfacher Bruch. Im Fall $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ ist es, wie oben angemerkt, stets möglich, die Kettenbruchapproximation der N -ten Stufe in einen gewöhnlichen Bruch $\frac{A_N}{B_N}$ umzuwandeln, wobei Näherungszähler und -nenner die Rekursionen (1.2.1) und (1.2.2) erfüllen. Im allgemeinen Fall ist es in Banachalgebren unmöglich, für Darstellungen von $CF^{(N)}(b, a, c)$ als $B_N^{-1} A_N$, $A_N B_N^{-1}$ oder auch $A_N B_N^{-1} C_N$ entsprechende Rekursionsformeln für A_N , B_N , C_N anzugeben. Fallen jedoch alle a_n oder alle c_n mit dem neutralen Element I der Banachalgebra zusammen, so ist wieder eine Darstellung mittels Näherungsnennern und -zählern möglich, die Rekursionen für diese entsprechen im Wesentlichen denen im Fall $\mathcal{R} = \mathbb{C}$.

Definition 1.5.1. Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} . Der Kettenbruch $CF(b, a, (I))$ heißt *Linkskettenbruch*, $CF(b, (I), c)$ heißt *Rechtskettenbruch*.

Einige weitere Kettenbrüche lassen sich auf einfache Weise auf derartige *einseitige Kettenbrüche* zurückführen: Sind alle a_n Zentrumselemente oder Einheiten, so kann der beidseitige Kettenbruch $CF(b, a, c)$ in einen einseitigen Kettenbruch umgewandelt werden. Ist

a_n Zentrumselement, so kann es durch I ersetzt werden, wenn c_n gleichzeitig durch $a_n c_n$ ersetzt wird. Ist a_n eine Einheit, so kann a_n durch I ersetzt werden, wenn gleichzeitig b_{n+1} durch $b_{n+1} a_n^{-1}$ und c_{n+1} durch $c_{n+1} a_n^{-1}$ ersetzt wird. Umgekehrt kann $CF(b, a, c)$ auch in einen einseitigen Kettenbruch umgewandelt werden, wenn alle c_n Zentrumselemente oder Einheiten sind.

Schelling geht in seiner Arbeit [30] ebenfalls auf einseitige Kettenbrüche ein und zeigt etwa

Satz 1.5.1. *Es seien $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} mit*

$$\|a_n b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1}\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|a_n B_n^{-1}\| \cdot \|B_n\| \cdot \|b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1}\| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $CF(b, a, (I))$ konvergent.

Dabei ist B_n der noch zu definierende n -te Näherungsnenner. Schelling zeigt, dass die erste Ungleichung garantiert, dass B_n^{-1} in der zweiten Ungleichung existiert, ansonsten ist die erste Ungleichung natürlich überflüssig, da sie aus der zweiten folgt. Zwar fällt dieses Kriterium im Fall $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ mit dem ursprünglichen Pringsheimkriterium zusammen, allerdings ist es schwieriger nachzuprüfen, da die B_n zunächst aus den Folgen a und b berechnet werden müssen. Darüberhinaus lassen sich auch hier Beispiele konstruieren, für die zwar die erste Ungleichung, nicht aber die zweite Ungleichung erfüllt ist (siehe Beispiel 1.5.1). In dieser Arbeit ist daher das Kapitel 2 dem elementaren, auf Näherungsnennern und -zählern basierenden Beweis gewidmet, dass bereits die erste Ungleichung zur Konvergenz ausreicht.

Beispiel 1.5.1. Wähle $\mathcal{R} = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit der Zeilensummennorm, $a_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b_n = 2I$. Dann ist die erste Ungleichung in Satz 1.5.1 offensichtlich für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Im Vorgriff auf Lemma 2.1.1 wird verwendet, dass $B_2 = b_1 b_2 + a_2$ ist, hier gilt also

$$B_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad a_2 B_2^{-1} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\|a_2 B_2^{-1}\| = \frac{17}{81}$, $\|B_2\| = 5$, $\|b_2^{-1}\| = \frac{1}{2}$ und insgesamt ist die zweite Ungleichung in Satz 1.5.1 für $n = 2$ nicht erfüllt.

1.6 Verallgemeinerung nach Levrie und Bultheel

Der Vollständigkeit halber soll noch erwähnt werden, dass es eine weitere Verallgemeinerung von Kettenbrüchen über Banachalgebren gibt. Offensichtlich lassen sich die Rekursionen (1.2.1) und (1.2.2) in Matrixform als

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ A_{n-2} & B_{n-2} \end{pmatrix}$$

darstellen. Levrie und Bultheel lassen in ihrer Arbeit [20] nun für b_n und a_n sowie anstelle von 1 und 0 in der unteren Matrixzeile beliebige geeignet dimensionierte Matrizen zu, definieren den Quotienten der beiden Elemente aus der oberen Matrixzeile auf der linken Seite als Kettenbruchapproximation, und führen den Grenzübergang durch. Anstelle von Matrizen können zur Ersetzung von $b_n, a_n, 1, 0$ problemlos auch Elemente einer beliebigen Banachalgebra in die Matrix geschrieben werden, womit eine Verallgemeinerung einseitiger Kettenbrüche über Banachalgebren entsteht, jedoch keine Verallgemeinerung beidseitiger Kettenbrüche, da, wie schon erwähnt, für beidseitige Kettenbrüche zumindest keine explizite Rekursion von Nenner und -zählern angegeben werden kann. Levrie und Bultheel legen auch dar, dass ihre Definition der Kettenbrüche die Verallgemeinerung nach De Bruin und Van der Cruyssen einschließt, und zeigen ein Konvergenz-Kriterium, jedoch keines vom Pringsheim-Typ. Auf die Verallgemeinerung nach Levrie und Bultheel soll im Weiteren nicht näher eingegangen werden.

1.7 Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 wird zunächst ein Konvergenzkriterium für Kettenbrüche über Banachalgebren vom Pringsheim-Typ über einen elementaren Zugang gezeigt, der als völlig analog zu dem Beweis des ursprünglichen Pringsheim-Kriteriums, wie er etwa in [24] dargestellt ist, angesehen werden kann. In Kapitel 4 wird dann der beidseitige Fall behandelt, wozu allerdings ein neues Konzept nötig ist, das zuvor in Kapitel 3 vorgestellt wird. In Kapitel 5 wird dann gezeigt, wie sich auch über Banachalgebren mittels Kettenbrüchen Differenzgleichungen lösen lassen, und der oben angekündigte Zusammenhang zwischen den durch Kettenbrüchen erzeugten Lösungen und den durch einen Abschneideprozess erzeugten Lösungen von Differenzgleichungen wird aufgezeigt. Dabei wird auch vorgeführt, wie sich Fehlerabschätzungen für Kettenbruchapproximationen auf durch Abschneideprozesse erzeugte Lösungen von Differenzgleichungen übertragen lassen.

Als großes Feld praktischer Anwendungen wird in Kapitel 6 dann das Berechnen stationärer Verteilungen für eine Klasse von Markovketten, sogenannten *Quasi-Geburts- und Todesprozessen mit Katastrophenszenarien* aufgezeigt. Dabei müssen Gleichungssysteme gelöst werden, die sich als Vektor-Matrix-Differenzgleichungen zweiter Ordnung herausstellen, und die mittels Kettenbrüchen schnell und stabil gelöst werden können. Ein konkretes Beispiel hierfür sowie eine weitere Anwendung von Kettenbrüchen im Zusammenhang mit dem Lösen einer Differenzgleichung zweiter Ordnung werden in Kapitel 7 präsentiert.

Kapitel 2

Einseitige Kettenbrüche

2.1 Grundlagen

Das wesentliche Ziel dieses Kapitels ist es, für einseitige Kettenbrüche eine Verallgemeinerung des Pringsheim-Kriteriums auf Banachalgebren zu zeigen, dessen Beweis sich an den ursprünglichen (zum Beispiel [24], §14) anlehnt. Wie in der Einleitung bereits beschrieben, basiert dieser Beweis auf der Umwandlung endlicher Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche, bestehend aus Näherungsnennern und -zählern. Zunächst wird die Umwandlung in gewöhnliche Brüche auf Kettenbrüche über Banachalgebren übertragen. Grundsätzlich wird in diesem Kapitel vorausgesetzt, dass $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit Werten in der Banachalgebra \mathcal{R} sind, ferner seien

$$K_L = CF(b, a, (I)) \quad \text{und} \quad K_L^{(N)} = CF^{(N)}(b, a, (I))$$

sowie

$$K_R = CF(b, (I), c) \quad \text{und} \quad K_R^{(N)} = CF^{(N)}(b, (I), c).$$

2.1.1 Näherungszähler und -nenner

Gegenüber allgemeinen (beidseitigen) Kettenbrüchen besitzen einseitige Kettenbrüche den großen Vorteil, dass die Approximationen sich in gewöhnliche Brüche umwandeln lassen, für die Zähler und Nenner dieser Approximationen gilt dabei sogar eine einfache Rekursion.

Lemma 2.1.1. $K_L^{(N)}$ bzw. $K_R^{(N)}$ existiere. Dann gilt

$$K_L^{(N)} = A_N B_N^{-1} \quad \text{bzw.} \quad K_R^{(N)} = B_N^{-1} A_N$$

mit

$$(2.1.1) \quad A_{-1} = I, \quad A_0 = b_0, \quad A_n = A_{n-1}b_n + A_{n-2}a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(2.1.2) \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = I, \quad B_n = B_{n-1}b_n + B_{n-2}a_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

bzw.

$$(2.1.3) \quad A_{-1} = I, \quad A_0 = b_0, \quad A_n = b_n A_{n-1} + c_n A_{n-2} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(2.1.4) \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = I, \quad B_n = b_n B_{n-1} + c_n B_{n-2}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

Beweis. Die Aussage ist für $N = 0$ und $N = 1$ trivial, sei nun $N \geq 1$ und die Aussage für alle Rechtskettenbrüche mit existierender N -ter Approximation gezeigt. Betrachte nun einen Rechtskettenbruch mit existierender $N + 1$ -ter Approximation, d.h. $K_n^{(N+1)}$ aus Definition 1.4.1 ist für $n = 1, \dots, N + 1$ invertierbar, insbesondere ist b_{N+1} invertierbar. Es folgt

$$K_{N-1}^{(N+1)} = b_{N-1} + (b_N + b_{N+1}^{-1} c_{N+1})^{-1} c_N = b_{N-1} + (b_{N+1} b_N + c_{N+1}) b_{N+1}^{-1} c_N,$$

d.h. es gilt $K_n^{(N+1)} = \tilde{K}_n^{(N)}$ für alle $n \leq N$, falls $\tilde{K}_n^{(N)}$ wie in Definition 1.4.1 für den modifizierten Kettenbruch $CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c})$ gewählt wird und $\tilde{b}_n = b_n$ bzw. $\tilde{c}_n = c_n$ für alle $n \leq N - 1$ sowie $\tilde{b}_N = b_{N+1} b_N + c_{N+1}$ bzw. $\tilde{c}_N = b_{N+1} c_N$ gesetzt wird. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$K_0^{(N+1)} = \tilde{K}_0^{(N)} = \tilde{B}_N^{-1} \tilde{A}_N$$

mit entsprechend definierten \tilde{B}_n und \tilde{A}_n , und offensichtlich gilt $\tilde{B}_n = B_n$ und $\tilde{A}_n = A_n$ für alle $n \leq N - 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{B}_N &= \tilde{b}_N \tilde{B}_{N-1} + \tilde{c}_N \tilde{B}_{N-2} \\ &= (b_{N+1} b_N + c_{N+1}) B_{N-1} + b_{N+1} c_N B_{N-2} \\ &= b_{N+1} (b_N B_{N-1} + c_N B_{N-2}) + c_{N+1} B_{N-1} \\ &= b_{N+1} B_N + c_{N+1} B_{N-1} = B_{N+1} \end{aligned}$$

und analog $\tilde{A}_N = A_{N+1}$ und somit ist die Behauptung bewiesen. Der Beweis für Linkskettenbrüche verläuft entsprechend. \square

Die Zerlegung in Zähler und Nenner und deren divisionsfreie Rekursion ziehen neben der einfacheren praktischen Berechnung von Kettenbrüchen vor allem theoretische Resultate mit sich, von denen in der Folge Gebrauch gemacht wird. Darüberhinaus legen sie eine Definition von Kettenbrüchen mit etwas schwächeren Voraussetzungen nahe.

Definition 2.1.1 (Näherungszähler und -nenner, Wohldefiniertheit und Konvergenz einseitiger Kettenbrüche). Es sei $CF(b, a, (I))$ bzw. $CF(b, (I), c)$ ein einseitiger Kettenbruch. Dann heißen die durch (2.1.1) bzw. (2.1.3) definierten Werte A_n die *n-ten Näherungszähler* für den Kettenbruch und die durch (2.1.2) bzw. (2.1.4) definierten Werte B_n die *n-ten Näherungsnenner* für den Kettenbruch. Er heißt *wohldefiniert*, falls B_n^{-1} für fast alle $n \in \mathbb{N}$ existiert und *konvergent*, falls $\lim A_n B_n^{-1}$ bzw. $\lim B_n^{-1} A_n$ existiert.

2.1.2 Differenzen zwischen Approximationen

In der Folge wird stets

$$D_n = K_L^{(n)} - K_L^{(n-1)} \quad \text{bzw.} \quad D_n = K_R^{(n)} - K_R^{(n-1)}$$

für $n \geq 1$ gesetzt, falls beide Approximationen existieren. Klar ist

Folgerung 2.1.1. $K_L^{(N)}$ bzw. $K_R^{(N)}$ mögen für alle $N \in \mathbb{N}_0$ existieren. Genau dann ist K_L bzw. K_R konvergent, wenn

$$\sum_{n \geq n_0} D_n$$

für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ konvergiert. Es gilt dann

$$K_L - b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \quad \text{bzw.} \quad K_R - b_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n$$

und damit

$$\|K_L - b_0\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|D_n\| \quad \text{bzw.} \quad \|K_R - b_0\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|D_n\|.$$

Folgerung 2.1.1 gilt auch für nicht-einseitige Kettenbrüche, ist allerdings schwierig anzuwenden. Für einseitige Kettenbrüche hingegen lässt sich wiederum eine einfache Rekursion zeigen.

Lemma 2.1.2. Für ein $n \geq 2$ seien die Näherungsnenner B_{n-2} , B_{n-1} und B_n invertierbar. Dann gilt für Linkskettenbrüche bzw. Rechtskettenbrüche

$$D_n = -D_{n-1}B_{n-2}a_nB_n^{-1} \quad \text{bzw.} \quad D_n = -B_n^{-1}c_nB_{n-2}D_{n-1}.$$

Beweis. Nach Definition von D_n sowie (2.1.3) und (2.1.4) folgt für Rechtskettenbrüche

$$\begin{aligned} D_n &= -B_n^{-1} (B_n B_{n-1}^{-1} A_{n-1} - A_n) \\ &= -B_n^{-1} (b_n B_{n-1} B_{n-1}^{-1} A_{n-1} + c_n B_{n-2} B_{n-1}^{-1} A_{n-1} - b_n A_{n-1} - c_n A_{n-2}) \\ &= -B_n^{-1} c_n (B_{n-2} B_{n-1}^{-1} A_{n-1} - A_{n-2}) \\ &= -B_n^{-1} c_n B_{n-2} D_{n-1}. \end{aligned}$$

Analog für Linkskettenbrüche. □

2.2 Transformationen

2.2.1 Transformationen zwischen zwei Kettenbrüchen

Oftmals kann die Konvergenz eines Kettenbruchs mit sogenannten Konvergenzkriterien nicht nachgewiesen werden, in diesem Fall hilft der Übergang zu einem ähnlichen Kettenbruch; dieser Begriff wird nun zunächst definiert.

Definition 2.2.1 (Ähnlichkeit und Äquivalenz zwischen zwei Kettenbrüchen). Es seien $CF(b, a, (I))$ und $CF(\tilde{b}, \tilde{a}, (I))$ Linkskettenbrüche. Gibt es eine Folge $(\rho_n)_{n \geq -1}$ von Einheiten $\rho_n \in \mathcal{R}^*$ mit

$$\tilde{b}_n = \rho_{n-1}^{-1} b_n \rho_n \quad \text{und} \quad \tilde{a}_n = \rho_{n-2}^{-1} a_n \rho_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $n \in \mathbb{N}$, so wird $CF(\tilde{b}, \tilde{a}, (I))$ als (ρ_0, ρ_{-1}) -ähnlich zu $CF(b, a, (I))$ bezeichnet. Für $\rho_{-1} = \rho_0 = I$ heißen die beiden Kettenbrüche *äquivalent*.

Seien nun $CF(b, (I), c)$ und $CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c})$ Rechtskettenbrüche. Gibt es eine Folge $(\rho_n)_{n \geq -1}$ von Einheiten $\rho_n \in \mathcal{R}^*$ mit

$$\tilde{b}_n = \rho_n b_n \rho_{n-1}^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{c}_n = \rho_n c_n \rho_{n-2}^{-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $n \in \mathbb{N}$, so wird $CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c})$ als (ρ_0, ρ_{-1}) -ähnlich zu $CF(b, (I), c)$ bezeichnet. Für $\rho_{-1} = \rho_0 = I$ heißen die beiden Kettenbrüche *äquivalent*.

Die Definition der Ähnlichkeit bzw. Äquivalenz bedarf einer nachträglichen Rechtfertigung.

Satz 2.2.1. *Der Linkskettenbruch $CF(\tilde{b}, \tilde{a}, (I))$ sei (ρ_0, ρ_{-1}) -ähnlich zu $CF(b, a, (I))$ bzw. der Rechtskettenbruch $CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c})$ sei (ρ_0, ρ_{-1}) -ähnlich zu $CF(b, (I), c)$. Dann fallen Wohldefiniertheit und Konvergenz beider Kettenbrüche zusammen. Im Fall der Konvergenz gilt*

$$CF(\tilde{b}, \tilde{a}, (I)) = \rho_{-1}^{-1} CF(b, a, (I)) \rho_0 \quad \text{bzw.} \quad CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c}) = \rho_0 CF(b, (I), c) \rho_{-1}^{-1}.$$

Beweis. Betrachte die Aussage für die Rechtskettenbrüche, für Linkskettenbrüche analog. Es gilt

$$\tilde{B}_{-1} = 0 = \rho_{-1} 0 \rho_0^{-1} = \rho_{-1} B_{-1} \rho_0^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{B}_0 = I = \rho_0 I \rho_0^{-1} = \rho_0 B_0 \rho_0^{-1},$$

sei nun $n \geq 1$ und $\tilde{B}_k = \rho_k B_k \rho_0^{-1}$ für alle $k \leq n-1$ gezeigt. Dann folgt nach (2.1.4)

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n &= \tilde{b}_n \tilde{B}_{n-1} + \tilde{a}_n \tilde{B}_{n-2} = \rho_n b_n \rho_{n-1}^{-1} \rho_n B_{n-1} \rho_0^{-1} + \rho_n a_n \rho_{n-2}^{-1} \rho_{n-2} B_{n-2} \rho_0^{-1} \\ &= \rho_n (b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}) \rho_0^{-1} = \rho_n B_n \rho_0^{-1}. \end{aligned}$$

Analog lässt sich auch $\tilde{A}_n = \rho_n A_n \rho_{-1}^{-1}$ für alle $n \geq -1$ gewinnen. Ist nun B_n invertierbar, so auch \tilde{B}_n und umgekehrt, und es gilt

$$\tilde{B}_n^{-1} \tilde{A}_n = \rho_0 B_n^{-1} \rho_n^{-1} \rho_n A_n \rho_{-1}^{-1} = \rho_0 B_n^{-1} A_n \rho_{-1}^{-1}$$

und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ liefert das Zusammenfallen der Konvergenz. \square

2.2.2 Äquivalenz zu Reihen

Definition 2.2.2. $K_L^{(N)}$ bzw. $K_R^{(N)}$ existiere für alle $N \in \mathbb{N}_0$, ferner sei $R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n$ mit $r_n \in \mathcal{R}$. Gilt

$$K_L^{(N)} = \sum_{n=0}^N r_n \quad \text{bzw.} \quad K_R^{(N)} = \sum_{n=0}^N r_n$$

für alle $N \in \mathbb{N}_0$, so heißen K_L bzw. K_R und die Reihe R *äquivalent*.

Offensichtlich fallen die Konvergenz äquivalenter Kettenbrüche und Reihen zusammen. Außerdem ist der Kettenbruch $CF(b, a, c)$ natürlich äquivalent zur Reihe $\sum r_n$ mit $r_0 = b_0$ und $r_n = D_n$ für $n \geq 1$, dies ist aber eher von theoretischer Natur. In einigen Fällen lassen sich Kettenbrüche allerdings sehr einfach durch den Vergleich mit einer Reihe berechnen.

Lemma 2.2.1. *Es sei $r_0 \in \mathcal{R}$ beliebig, mit $\gamma_1, \gamma_2, \dots \in \mathcal{R}$ sei $r_n = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n$ bzw. $r_n = \gamma_n \gamma_{n-1} \dots \gamma_1$ für $n \geq 1$. Wird*

$$b_0 = r_0, \quad b_1 = I, \quad b_n = I + \gamma_n \quad (n \geq 2), \quad a_1 = c_1 = \gamma_1, \quad a_n = c_n = -\gamma_n \quad (n \geq 2)$$

gesetzt, so sind $R = \sum_{n=0}^{\infty} r_n$ und K_L bzw. K_R äquivalent.

Beweis. Es ist $B_0 = I$ sowie $B_1 = b_1 = I$ und nach (2.1.2) bzw. (2.1.4) folgt induktiv auch für $n \geq 2$

$$B_n = I + \gamma_n - \gamma_n = I.$$

Weiter ist $A_0 = b_0 = r_0$ und $A_1 = r_0 + \gamma_1 = r_0 + r_1$. Sei nun $A_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} r_k$ und $A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r_k$ für $n \geq 2$ gezeigt. Dann ist für Rechtskettenbrüche nach (2.1.3)

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} = (I + \gamma_n) \sum_{k=0}^{n-1} r_k - \gamma_n \sum_{k=0}^{n-2} r_k = \sum_{k=0}^{n-1} r_k + \gamma_n r_{n-1} = \sum_{k=0}^n r_k,$$

analog für Linkskettenbrüche mit (2.1.1). \square

In Lemma 2.2.1 wurde eine Reihe in einen Kettenbruch entwickelt, allerdings ist der umgekehrte Weg von größerer Bedeutung. Lemma 2.2.1 deckt dabei den Fall ab, dass $b_n + c_n = I$ bzw. $b_n + a_n = I$ für alle $n \geq 2$ und $b_1 = I$ ist. Es stellt sich die Frage, wie der Wert des Kettenbruchs zu berechnen ist, wenn auch $b_1 + c_1 = I$ bzw. $b_1 + a_1 = I$ ist.

Lemma 2.2.2. *Es sei $b_n = I + \gamma_n$ und $a_n = c_n = -\gamma_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Existiert mit $r_0 = I$ und $r_n = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n$ bzw. $r_n = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_1$ für $n \geq 1$ der Wert*

$$R^- = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N r_n \right)^{-1},$$

so konvergiert $K_L = R^- + b_0 - I$ bzw. $K_R = R^- + b_0 - I$. Divergiert R^- , so auch der Kettenbruch.

Beweis. Setze in Lemma 2.2.1 $r_0 = 0$ und verschiebe die Indizes der γ_n um 1 nach unten. Dann sind die Partialsummen der Reihe

$$\gamma_0 + \gamma_1 \gamma_0 + \gamma_2 \gamma_1 \gamma_0 + \dots$$

gerade die Approximationen an

$$\left(I - \left(I + \gamma_1 - \left(I + \gamma_2 - \dots \right)^{-1} \gamma_2 \right)^{-1} \gamma_1 \right)^{-1} \gamma_0,$$

Einsetzen von $\gamma_0 = I$, Invertieren und anschließender Grenzübergang liefert die Behauptung für Rechtskettenbrüche mit $b_0 = I$, durch Addieren von $b_0 - I$ auf beiden Seiten folgt die allgemeine Behauptung, analog für Linkskettenbrüche. \square

2.3 Die Pringsheim-Kriterien für einseitige Kettenbrüche

2.3.1 Vorbemerkungen

Wie in der Einleitung beschrieben, besagt das ursprüngliche Pringsheim-Kriterium für Kettenbrüche über \mathbb{C} , dass die Erfüllung der Ungleichungen $|b_n| \geq |a_n| + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruchs $CF(b, a, (I))$ ist. Das nachstehende Beispiel verdeutlicht, dass eine direkte Übertragung auf Kettenbrüche über Banachalgebren nicht möglich ist.

Beispiel 2.3.1. Es wird $\mathcal{R} = \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit der Zeilensummennorm betrachtet. Es sei $a_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $b_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $\|b_n\| \geq \|a_n\| + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Koeffizienten a_n und b_n Diagonalmatrizen sind, zerfällt der Matrixkettenbruch im Wesentlichen in zwei skalare Kettenbrüche. Der erste hat die Koeffizienten $b_n = 2$ und $a_n = 1$ und konvergiert nach dem skalaren Pringsheimkriterium, Satz 1.2.1. Der zweite hat die Koeffizienten $b_n = 1$ und $a_n = -1$; es ist leicht zu sehen, dass der zweite, fünfte, achte, elfte, ... Näherungsnenner für diesen skalaren Kettenbruch 0 ist, d.h. es sind unendlich viele Kettenbruchapproximationen nicht wohldefiniert, insgesamt liegt also Divergenz vor.

Ähnliche Beispiele lassen sich auch für andere Normen finden. Wie in der Einleitung bereits angesprochen, ist die „richtige“ Bedingung

$$\|b_n^{-1}\| + \|a_n b_n^{-1}\| \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \|b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1} c_n\| \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diese entspricht in \mathbb{C} aufgrund der Multiplikatивität der Betragsnorm natürlich der Bedingung $|b_n| \geq |a_n| + 1$. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass auch im Fall von Banachalgebren die Erfüllung der angegebenen Ungleichungen bereits hinreichend für die Konvergenz des betrachteten Kettenbruchs ist.

2.3.2 Die Basisformulierung

Zum Nachweis des Pringsheim-Kriteriums wird zunächst ein Lemma gezeigt, in dem der wesentliche Beweisaufwand erfolgt.

Lemma 2.3.1. *Es sei $b_n \in \mathcal{R}^*$ mit*

$$(PL) \quad \|b_n^{-1}\| + \|a_n b_n^{-1}\| \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad (PR) \quad \|b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1} c_n\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert B_n^{-1} für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und es gilt

$$\|B_n^{-1} B_{n-1}\| + \|D_n B_{n-1}\| \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \|B_{n-1} B_n^{-1}\| + \|B_{n-1} D_n\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$ tritt höchstens ein, wenn in (PL) bzw. (PR) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht.

Beweis. Der Beweis wird induktiv für Rechtskettenbrüche geführt, für Linkskettenbrüche verläuft er analog. Für $n = 1$ ist $B_1 = b_1$, $B_0 = I$ (beide invertierbar) und

$$D_1 = b_1^{-1}(b_1 b_0 + c_1) - b_0 = b_1^{-1} c_1$$

und nach (PR) folgt

$$\|B_0 B_1^{-1}\| + \|B_0 D_1\| = \|b_1^{-1}\| + \|b_1^{-1} c_1\| \leq 1.$$

Sei nun $n \geq 2$ und die Existenz von B_{n-1}^{-1} sowie $\|B_{n-2}B_{n-1}^{-1}\| + \|B_{n-2}D_{n-1}\| \leq 1$ gegeben. Nach (2.1.4) ist

$$b_n^{-1}B_nB_{n-1}^{-1} = I + b_n^{-1}c_nB_{n-2}B_{n-1}^{-1}.$$

Es ist $\|B_{n-2}B_{n-1}^{-1}\| \leq 1$ nach Induktionsvoraussetzung und $\|b_n^{-1}c_n\| < 1$ nach (PR), zusammen also $\|b_n^{-1}c_nB_{n-2}B_{n-1}^{-1}\| < 1$. Nach Satz A.2.1 existiert dann

$$(b_n^{-1}B_nB_{n-1}^{-1})^{-1} \quad \text{mit} \quad \left\| (b_n^{-1}B_nB_{n-1}^{-1})^{-1} r \right\| \leq \frac{\|r\|}{1 - \|b_n^{-1}c_nB_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|}$$

für alle $r \in \mathcal{R}$. Gemäß Lemma A.1.1 existiert nun auch das Inverse von B_n und weiter ist

$$\|B_{n-1}B_n^{-1}\| = \left\| (b_n^{-1}B_nB_{n-1}^{-1})^{-1} b_n^{-1} \right\| \leq \frac{\|b_n^{-1}\|}{1 - \|b_n^{-1}c_nB_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|},$$

und mit $D_n = -B_n^{-1}c_nB_{n-2}D_{n-1}$ aus Lemma 2.1.2 folgt

$$\begin{aligned} \|B_{n-1}D_n\| &= \|B_{n-1}B_n^{-1}c_nB_{n-2}D_{n-1}\| = \left\| (b_n^{-1}B_nB_{n-1}^{-1})^{-1} b_n^{-1}c_nB_{n-2}D_{n-1} \right\| \\ &\leq \frac{\|b_n^{-1}c_nB_{n-2}D_{n-1}\|}{1 - \|b_n^{-1}c_nB_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Addieren liefert mit der Submultiplikativität der Norm und der Induktionsvoraussetzung schließlich

$$\begin{aligned} \|B_{n-1}B_n^{-1}\| + \|B_{n-1}D_n\| &\leq \frac{\|b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1}c_n\| \cdot \|B_{n-2}D_{n-1}\|}{1 - \|b_n^{-1}c_n\| \cdot \|B_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|} \\ &\leq \frac{1 - \|b_n^{-1}c_n\| + \|b_n^{-1}c_n\| (1 - \|B_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|)}{1 - \|b_n^{-1}c_n\| \cdot \|B_{n-2}B_{n-1}^{-1}\|} \leq 1. \end{aligned}$$

□

Satz 2.3.1 (Pringsheim-Kriterium für einseitige Kettenbrüche, Formulierung I). *Es sei $b_n \in \mathcal{R}^*$ mit*

$$(PL) \quad \|b_n^{-1}\| + \|a_nb_n^{-1}\| \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad (PR) \quad \|b_n^{-1}\| + \|b_n^{-1}c_n\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert K_L bzw. K_R mit

$$\|K_L - b_0\| \leq \|I\| \quad \text{bzw.} \quad \|K_R - b_0\| \leq \|I\|.$$

Gleichheit gilt höchstens, wenn in (PL) bzw. (PR) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemma 2.3.1

$$\|D_n\| \leq \|D_n B_{n-1}\| \cdot \|B_{n-1}^{-1}\| \leq (1 - \|B_{n-1}^{-1} B_{n-1}\|) \|B_{n-1}^{-1}\| \leq \|B_{n-1}^{-1}\| - \|B_n^{-1}\|$$

bzw.

$$\|D_n\| \leq \|B_{n-1}^{-1}\| \cdot \|B_{n-1} D_n\| \leq \|B_{n-1}^{-1}\| (1 - \|B_{n-1} B_n^{-1}\|) \leq \|B_{n-1}^{-1}\| - \|B_n^{-1}\|.$$

Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht höchstens, wenn in (PL) bzw. (PR) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht. Da trivialerweise $\|D_n\| \geq 0$ ist, fällt $\|B_n^{-1}\|$ monoton in n , beginnend bei $\|B_0^{-1}\| = \|I\|$, und nach unten durch 0 beschränkt. Folglich konvergiert $\|B_n^{-1}\|$ gegen einen Wert $\beta \in [0, \|I\|]$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\|B_{n-1}^{-1}\| - \|B_n^{-1}\|) = \|I\| - \beta \leq \|I\|,$$

Gleichheit gilt höchstens, wenn in (PL) bzw. (PR) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht. Mit Folgerung 2.1.1 folgt die Konvergenz des Kettenbruchs mit der angegebenen Ungleichung. \square

Bemerkung 2.3.1. Die Rekursionsformeln für Näherungszähler und -nenner einseitiger Kettenbrüche sowie für die Differenzen aufeinanderfolgender Approximationen sind schon länger bekannt, siehe etwa [30], auch der Übergang zu äquivalenten Kettenbrüchen ist nicht neu. Bisherige Ergebnisse wie etwa das bereits beschriebene von Schelling [30] basieren jedoch darauf, die zu Beginn des Beweises von Satz 2.3.1 hergeleitete Abschätzung

$$\|D_n\| \leq \|B_{n-1}^{-1}\| - \|B_n^{-1}\|$$

direkt induktiv zu zeigen. Dies ist in \mathbb{C} möglich, siehe etwa [24], §14, und kann auch problemlos auf den Quaternionen-Schiefkörper \mathbb{H} übertragen werden, dabei muss jedoch Gebrauch von der Multiplikativität der Norm gemacht werden. Die entscheidende neue Beweisidee liegt darin, zunächst die stärkere Ungleichung aus Lemma 2.3.1 zu zeigen, und die benötigte Abschätzung für $\|D_n\|$ hierauf zurückzuführen.

2.3.3 Weitere Formulierungen

Es wird nun eine alternative Formulierung des Pringsheim-Kriteriums angegeben, die sich im Wesentlichen durch eine Äquivalenztransformation aus Satz 2.3.2 ergibt, und der zweiten Formulierung des ursprünglichen Pringsheim-Kriteriums in Satz 1.2.1 entspricht.

Satz 2.3.2 (Pringsheim-Kriterium für einseitige Kettenbrüche, Formulierung II). *Es sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Weiter sei $b_n \in \mathcal{R}^*$ mit*

$$\|I\| \leq q_1 \quad \text{und} \quad \|a_n b_n^{-1}\| \cdot \|b_{n-1}^{-1}\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n} \quad \text{bzw.} \quad \|b_{n-1}^{-1}\| \|b_n^{-1} c_n\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n} \quad (n \geq 2)$$

und mindestens einmal gelte strikt $<$. Dann ist $CF(b, a, (I))$ bzw. $CF(b, (I), c)$ konvergent.

Beweis. Der Beweis wird wieder nur für Rechtskettenbrüche geführt, für Linkskettenbrüche verläuft er analog. Zunächst gelte (PR) für alle $n \geq 2$ und $\|b_1^{-1}\| \leq \frac{1}{\|I\|}$ und mindestens einmal gelte strikt $<$. Dann folgt

$$K_R = b_0 + (b_1 - r)^{-1}c_1,$$

dabei ist r nach Satz 2.3.1 ein konvergenter Kettenbruch mit $\|r\| \leq \|I\|$, gilt in (PR) für ein $n \geq 2$ Ungleichheit, so ist sogar $\|r\| < \|I\|$. Da b_1 als invertierbar vorausgesetzt war, reicht es zur Konvergenz von K_R die Invertierbarkeit von $I - b_1^{-1}r$ zu zeigen. Aus $\|b_1^{-1}\| \leq \frac{1}{\|I\|}$ und $\|r\| \leq \|I\|$ mit mindestens einem strikten $<$ folgt $\|b_1^{-1}r\| < 1$. Satz A.2.1 liefert die Existenz des Inversen und damit die Konvergenz von K_R . Zum Nachweis der eigentlichen Behauptung wird die Äquivalenzumformung nach Definition 2.2.1 mit $\rho_{-1} = \rho_0 = I$ und $\rho_n = q_1 \dots q_n \|b_1^{-1}\| \dots \|b_n^{-1}\| I$ betrachtet. Es folgt

$$\tilde{b}_n = q_n \|b_n^{-1}\| b_n \quad \text{und} \quad \tilde{c}_n = q_{n-1} q_n \|b_{n-1}^{-1}\| \cdot \|b_n^{-1}\| c_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (mit $q_0 = 1$). Damit ist

$$\|\tilde{b}_1^{-1}\| = \frac{1}{q_1} \leq \frac{1}{\|I\|}$$

und für $n \geq 2$

$$\|\tilde{b}_n^{-1}\| + \|\tilde{b}_n^{-1}\tilde{c}_n\| = \frac{1}{q_n} + q_{n-1} \|b_{n-1}^{-1}\| \cdot \|b_n^{-1}c_n\| \leq \frac{1}{q_n} + q_{n-1} \frac{q_n - 1}{q_{n-1}q_n} = 1$$

und mindestens einmal gilt strikt $<$. Nach dem bereits Bewiesenen ist der Kettenbruch $CF(\tilde{b}, (I), \tilde{c})$ und damit auch $CF(b, (I), c) = K_R$ konvergent. \square

Ein bemerkenswerter Spezialfall ist die konstante Wahl $q_n = 2$, die auf die Beschränkung der Produkte durch $\frac{1}{4}$ hinausläuft. Weitere Spezialfälle werden zum Beispiel in [24], §14 angegeben.

2.4 Anwendung einseitiger Kettenbrüche auf Differenzgleichungen

Es soll hier zunächst nur kurz auf den Zusammenhang zu den Lösungen von Differenzgleichungen eingegangen werden. Wird in der Differenzgleichung

$$x_n = b_n x_{n+1} + a_{n+1} x_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

in Verallgemeinerung von $K_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ aus der Einleitung der Ansatz $x_n = K_n x_{n+1}$ eingesetzt, so folgt im Falle der Existenz von K_{n+1}^{-1}

$$K_n x_{n+1} = b_n x_{n+1} + a_{n+1} K_{n+1}^{-1} x_{n+1},$$

was sicher erfüllt ist, wenn $K_n = b_n + a_{n+1}K_{n+1}^{-1}$ ist, was wiederum den Ansatz $K_0 = CF(b, a, (I))$ nahelegt. Dieser grundlegende Ansatz wird später in Kapitel 5 ausführlicher betrachtet, allerdings erst nach dem Studium beidseitiger Kettenbrüche, da im Allgemeinen bei Differenzgleichungen zweiter Ordnung die Form

$$c_n x_n = b_n x_{n+1} + a_{n+1} x_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

angenommen werden muss. Ist $c_n \notin \mathcal{R}^*$, so lässt sich diese Differenzgleichung nicht auf eine mit $c_n = I$ zurückführen, und ein Lösungsansatz mit einseitigen Kettenbrüchen ist nicht sinnvoll.

Kapitel 3

S -Reihen

3.1 Motivation und Definition

Wie im Abschnitt 2.4 dargestellt, sind einseitige Kettenbrüche nicht geeignet, allgemeine Differenzgleichungen zweiter Ordnung über einer Banachalgebra zu lösen. In Kapitel 5 wird aufgezeigt, dass hierfür gerade die allgemeineren beidseitigen Kettenbrüche gemäß Definition 1.4.1 angemessen sind. Es sollen nun Konvergenz-Kriterien vom Pringsheim-Typ, also Übertragungen der Sätze 2.3.1 und 2.3.2 auf beidseitige Kettenbrüche gezeigt werden.

Da es jedoch nicht möglich ist, Näherungsnenner und -zähler für beidseitige Kettenbrüche $CF(b, a, c)$ über explizite Rekursionen anzugeben, wird eine völlig neue Beweisidee benötigt. Wie in der Einleitung beschrieben, gibt es Ansätze von Denk und Riederle [10] sowie Schelling [30]. Die Beweise machen aber in beiden Fällen Gebrauch von der jeweiligen Zusatzbedingung, die im Wesentlichen bewirkt, dass die Abbildungen H_n der Form $H_n(x) = b_n + a_{n+1}x^{-1}c_{n+1}$ kontrahierend wirken. Diese Beweise sind im Vergleich zu dem hier vorgestellten Beweis sehr kurz, jedoch wird hier wie angekündigt keine Zusatzbedingung verwendet, darüberhinaus wird eine bessere Fehlerabschätzung für die Differenz zwischen Kettenbruchapproximationen und Grenzwert angegeben als etwa bei Denk und Riederle [10].

Der Beweis der in Kapitel 4 aufgeführten Konvergenz-Kriterien nutzt im Wesentlichen immer dieselbe Idee. Diese entstand ursprünglich aus der Betrachtung konkreter Anwendungen, nämlich von Kettenbrüchen, wie sie im Zusammenhang mit der Berechnung stationärer Maße von Markovketten entstehen. Eine große Klasse beidseitiger Kettenbrüche wird nun auf diesen Prototypen von Kettenbruch zurückgeführt, dessen Konvergenz wiederum über eine Interpretation als bedingte Verweilzeiten in gewissen Zuständen der Markovkette gezeigt werden kann.

Im Wesentlichen werden dabei die Werte b_n , a_{n+1} und c_{n+1} nach einer geeigneten Trans-

formation in der Form

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & \\ c_1 & I - b_1 & a_2 & & \\ & c_2 & I - b_2 & a_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

in eine unendliche Tridiagonalmatrix geschrieben. Anschließend wird diese als Bewertungsmatrix (im Kontext von Markovketten als Übergangsmatrix) für die Kanten eines Graphen mit Knotenmenge \mathbb{N}_0 verwendet: b_0 ist die Bewertung der Kante $(0, 0)$, a_1 die Bewertung der Kante $(0, 1)$, c_1 die Bewertung der Kante $(1, 0)$, \dots . Die Bewertung eines Pfades soll durch Multiplikation der Bewertung der einzelnen Kanten erfolgen, d.h. der Pfad $(0, 1, 0)$ etwa erhält die Bewertung $a_1 c_1$. Um die Beweisidee an dieser Stelle schon einmal aufzuzeigen, sei angenommen, dass $\|I - b_1\| < 1$ ist und die Bewertungen aller Pfade der Form $(0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1, 0)$ \dots aufsummiert werden sollen. Es ergeben sich die Bewertungen b_0 , $a_1 c_1$, $a_1(I - b_1)c_1$, $a_1(I - b_1)^2 c_1$, \dots , und Aufsummieren liefert

$$b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_1(I - b_1)^k c_1 = b_0 + a_1 b_1^{-1} c_1.$$

Dies ist genau die Kettenbruchapproximation der ersten Stufe. Unter zusätzlichen Voraussetzungen lässt sich weiterhin erschließen, dass die Approximation der zweiten Stufe, also

$$b_0 + a_1 (b_1 + a_2 b_2^{-1} c_2)^{-1} c_2$$

gerade die Summe der Bewertungen aller Pfade von 0 nach 0 ist, die als Zwischenknoten nur 1 oder 2 enthalten. Dies wird im Folgenden mit Einführung der S -Reihen systematisiert.

In den verschiedenen Formulierungen des Pringsheim-Kriteriums, die in Kapitel 4 gezeigt werden, wird allerdings keine direkte Voraussetzung an $\|I - b_1\|$ gestellt, es muss dort ohnehin noch eine Äquivalenztransformation des Kettenbruchs erfolgen. In diesem Kapitel werden daher die Koeffizienten der Matrix P wie sonst auch üblich mit p_{ij} bezeichnet.

Definition 3.1.1. Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine tridiagonale Matrix mit Einträgen aus der Banachalgebra \mathcal{R} . Dann wird

$$S(P, i, j, A) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{n-1} \in A \\ j_0 = i, j_n = j}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}}$$

gesetzt, sofern diese Reihe absolut konvergiert, d.h. sofern

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{n-1} \in A \\ j_0 = i, j_n = j}} \left\| \prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}} \right\| < \infty.$$

Für $A = \emptyset$ ist $S(P, i, j, A) = p_{ij}$.

Beispielsweise wird die oben betrachtete Summe der Bewertungen aller Pfade der Form $(0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), \dots$ durch $S(P, 0, 0, \{1\})$ abgekürzt.

3.2 Identitäten für die S -Reihen

Es sei nun $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ stets eine tridiagonale Matrix über \mathcal{R} . In diesem Abschnitt werden einige technische Identitäten gezeigt, auf denen dann die wichtigsten Aussagen dieser Arbeit basieren. Dabei sei stets $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und es wird $\mathbb{N}_{iN} = \{i, i+1, \dots, N\}$ für endliches N gesetzt, sofern $i \leq N$ ist, für $i > N$ ist $\mathbb{N}_{iN} = \emptyset$, für $N = \infty$ ist $\mathbb{N}_{i,\infty} = \{i, i+1, i+2, \dots\}$.

Lemma 3.2.1. *Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq N$ und $S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})$ konvergiere absolut. Dann konvergiert auch $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N})$ absolut und es gilt*

$$(I + S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}))(I - S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N})) = (I - S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}))(I + S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})) = I.$$

Beweis. Die absolute Konvergenz von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N})$ als Teilreihe von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})$ ist klar. Betrachte nun unter Verwendung von Satz A.2.2

$$\begin{aligned} & S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) \cdot S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}) \\ = & \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{iN} \\ j_0 = i, j_m = i}} \prod_{r=0}^{m-1} p_{j_r, j_{r+1}} \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}_{i+1,N} \\ k_0 = i, k_n = i}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{k_r, k_{r+1}} \\ = & \sum_{\substack{n \geq 2, 1 \leq m < n \\ j_0 = j_m = j_n = i \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{iN} \\ j_{m+1}, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}_{i+1,N}}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}}. \end{aligned}$$

In der letzten Summe stehen dabei offenbar gerade die Indextupel (j_1, \dots, j_{n-1}) , die mindestens einmal i enthalten, somit folgt

$$S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) \cdot S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}) = S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) - S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}).$$

Umgekehrt folgt analog auch

$$S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}) \cdot S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) = S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) - S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1,N}),$$

woraus zusammen dann die Behauptung folgt. \square

Lemma 3.2.2. *Es sei $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq N$ und $S(P, i+1, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ konvergiere absolut. Dann konvergieren auch $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1, N})$, $S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und $S(P, i+1, i, \mathbb{N}_{i+1, N})$ absolut und es gilt*

$$\begin{aligned} S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1, N}) &= p_{ii} + p_{i, i+1} S(P, i+1, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{i+1, i} \\ &= p_{ii} + S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{i+1, i} \\ &= p_{ii} + p_{i, i+1} S(P, i+1, i, \mathbb{N}_{i+1, N}). \end{aligned}$$

Beweis. Für $n = 1$ gibt es in $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i, N})$ nur einen Summanden, nämlich p_{ii} , für $n \geq 2$ muss $j_1, j_2, \dots, j_{n-1} > i$ bestehen. Aufgrund der tridiagonalen Struktur von P ist dann entweder der Summand 0 oder es gilt $j_1 = j_{n-1} = i+1$. Für $n = 2$ kommt somit nur der Summand $p_{i, i+1} p_{i+1, i}$ hinzu, für $n \geq 3$ kommen die Summanden aus $S(P, i+1, i+1, \mathbb{N}_{i, N})$, von links mit $p_{i, i+1}$, von rechts mit $p_{i+1, i}$ multipliziert hinzu. Die anderen beiden Aussagen folgen analog, indem nur $p_{i, i+1}$ nach links oder nur $p_{i+1, i}$ nach rechts ausgeklammert wird. \square

Lemma 3.2.3. *Es seien $i \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq N-2$ und die Reihen $S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und $S(P, i, i+2, \mathbb{N}_{i+1, N})$ mögen absolut konvergieren. Dann gilt*

$$S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) = p_{i, i+1} + S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{i+1, i+1} + S(P, i, i+2, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{i+2, i+1}.$$

Ist $N < \infty$ und konvergiert die Reihe $S(P, N-1, N, \{N\})$ absolut, so gilt

$$S(P, N-1, N, \{N\}) = p_{N-1, N} + S(P, N-1, N, \{N\}) p_{NN}.$$

Beweis. Der einzige Summand in $S(P, i, i+1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ für $n = 1$ ist $p_{i, i+1}$. Für $n \geq 2$ können die Fälle $j_{n-1} = i+1$ und $j_{n-1} = i+2$ auftreten, diese liefern dann die beiden weiteren Summanden. Für $i = N-1$ kann der Fall $j_{n-1} = i+2$ nicht eintreten, und es gibt einen Summanden weniger. \square

Lemma 3.2.4. *Es seien $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i < j \leq N-2$ und die Reihen $S(P, i, j, \mathbb{N}_{i+1, N})$, $S(P, i, j+1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und $S(P, i, j+2, \mathbb{N}_{i+2, N})$ mögen absolut konvergieren. Dann gilt*

$$\begin{aligned} S(P, i, j+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) &= S(P, i, j, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{j, j+1} + S(P, i, j+1, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{j+1, j+1} \\ &\quad + S(P, i, j+2, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{j+2, j+1}. \end{aligned}$$

Ist $i \leq N-2$, $N < \infty$ und konvergieren $S(P, i, N-1, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und $S(P, i, N, \mathbb{N}_{i+1, N})$ absolut, so gilt

$$S(P, i, N, \mathbb{N}_{i+1, N}) = S(P, i, N-1, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{N-1, N} + S(P, i, N, \mathbb{N}_{i+1, N}) p_{NN}.$$

Beweis. Wie Lemma 3.2.3, allerdings gibt es jetzt für $n = 1$ keine von 0 verschiedenen Summanden mehr, dafür für j_{n-1} eine zusätzliche Möglichkeit, die jeweils den ersten Summanden liefert. \square

Lemma 3.2.5. *Es seien $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ mit $i < j < k \leq N$, die Reihen $S(P, i, j, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und $S(P, j, k, \mathbb{N}_{j+1, N})$ mögen absolut konvergieren. Dann konvergiert auch $S(P, i, k, \mathbb{N}_{i+1, N})$ absolut und es gilt*

$$S(P, i, k, \mathbb{N}_{i+1, N}) = S(P, i, j, \mathbb{N}_{i+1, N}) \cdot S(P, j, k, \mathbb{N}_{j+1, N}).$$

Beweis. Formal wieder unter Verwendung von Satz A.2.2 ist

$$\begin{aligned} & S(P, i, j, \mathbb{N}_{i+1, N}) \cdot S(P, j, k, \mathbb{N}_{j+1, N}) \\ = & \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{i+1, N} \\ j_0 = i, j_m = j}} \prod_{r=0}^{m-1} p_{j_r, j_{r+1}} \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}_{j+1, N} \\ k_0 = j, k_n = k}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{k_r, k_{r+1}} \\ = & \sum_{\substack{n \geq 2, 1 \leq m < n \\ j_0 = i, j_m = j, j_n = k \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{i+1, N} \\ j_{m+1}, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}_{j+1, N}}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}}. \end{aligned}$$

Bei der letzten Summe werden alle Indextupel (j_1, \dots, j_n) betrachtet, die wenigstens einmal j enthalten. Dies sind aber bereits alle Indextupel, zu denen die zugehörigen Produkte einen von 0 verschiedenen Summanden liefern können, da P als tridiagonal vorausgesetzt ist. Damit handelt es sich um $S(P, i, k, \mathbb{N}_{i+1, N})$ und die absolute Konvergenz ist ebenfalls durch Satz A.2.2 gesichert. \square

3.3 Grenzwerte für $N \rightarrow \infty$

In den vorangegangenen Lemmata über die Identitäten der S -Reihen war stets für die „Zwischenknoten“ eine Menge der Form \mathbb{N}_{iN} zugelassen, N war dabei eine natürliche Zahl oder auch ∞ . Wie oben bereits angedeutet, besteht die Beweisidee für Konvergenzkriterien darin, Kettenbruchapproximationen als derartige S -Reihen mit einem endlichen N zu interpretieren. Natürlich muss dann der Grenzwert $N \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Dies erfolgt in

Satz 3.3.1. *Es seien $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ und $S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, \infty})$ konvergiere absolut. Dann konvergiert auch $S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN})$ für jedes endliche $N \geq \max\{i, j, k\}$ und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN}) = S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, \infty}).$$

Beweis. Es ist

$$S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, \infty}) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{k, \infty} \\ j_0 = i, j_m = j}} \prod_{r=0}^{m-1} p_{j_r, j_{r+1}}$$

und

$$S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN}) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{m-1} \in \mathbb{N}_{kN} \\ j_0 = i, j_m = j}} \prod_{r=0}^{m-1} p_{j_r, j_{r+1}}.$$

Die Indexmengen für die Summen in $S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN})$ sind Teilmengen der Indexmenge für die Summe in $S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, \infty})$, die Indexmenge für $S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, N+1})$ umfasst offensichtlich die für $S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN})$, und schließlich ist jedes Element der Indexmenge von $S(P, i, j, \mathbb{N}_{k, \infty})$ in der Indexmenge von $S(P, i, j, \mathbb{N}_{kN})$ für ein endliches N enthalten. Damit sind die Voraussetzungen von Satz A.2.4 erfüllt, und dieser liefert die Behauptung. \square

3.4 Die Mengen $\mathcal{M}(\mathcal{R})$

Definition 3.4.1. Über einer Banachalgebra \mathcal{R} wird $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ als die Menge aller tridiagonalen Matrizen $P = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}_0}$ definiert, für die

- $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ absolut konvergiert und
- $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i, N})$ für alle $i, N \in \mathbb{N}$ mit $i \leq N$ absolut konvergiert.

Die Bedeutung der Menge $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ für die Frage nach der Konvergenz von Kettenbrüchen liefert der

Satz 3.4.1. Es sei $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, die Folgen b , a und c seien durch $b_n = I - p_{nn}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $a_n = -p_{n-1, n}$ und $c_n = p_{n, n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erklärt. Dann konvergiert

$$CF(b, a, c) = I - S(P, 0, 0, \mathbb{N})$$

und für die Approximation der N -ten Stufe gilt

$$CF^{(N)}(b, a, c) = I - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}).$$

Beweis. Die Voraussetzungen an $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ garantieren die Anwendbarkeit der Lemmata 3.2.1 und 3.2.2 für endliches $N \in \mathbb{N}_0$. Diese ergeben zusammen

$$\begin{aligned} I - S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1, N}) &= I - p_{ii} - p_{i, i+1} (I - S(P, i+1, i+1, \mathbb{N}_{i+2, N}))^{-1} p_{i+1, i} \\ &= b_i + a_{i+1} (I - S(P, i+1, i+1, \mathbb{N}_{i+2, N}))^{-1} c_{i+1} \end{aligned}$$

für $i < N$, für $i = N$ ist

$$I - S(P, N, N, \mathbb{N}_{N+1, N}) = I - S(P, N, N, \emptyset) = I - p_{NN} = b_N.$$

Mit der Vereinbarung $K_n^{(N)} = I - S(P, n, n, \mathbb{N}_{n+1, N})$ folgt also

$$K_N^{(N)} = b_N \quad \text{und} \quad K_n^{(N)} = b_n + a_{n+1} \left(K_{n+1}^{(N)} \right)^{-1} c_{n+1}, \quad n < N,$$

d.h. nach Definition ist gerade $CF^{(N)}(b, a, c) = I - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$. Da nach Voraussetzung auch $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ absolut konvergiert, folgt die Behauptung mit Satz 3.3.1. \square

Zur Untersuchung von Konvergenzgeschwindigkeiten wird es später hilfreich sein, die unendliche Matrix P durch eine endliche Matrix \tilde{P} zu ersetzen.

Lemma 3.4.1. *Es sei $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ und $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{i,j=0}^{N+1}$ sei tridiagonal mit $N \in \mathbb{N}_0$ und*

$$\tilde{p}_{ij} = p_{ij}, \quad i \leq N, \quad \tilde{p}_{N+1, N} = S(P, N+1, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty}), \quad \tilde{p}_{N+1, N+1} = 0.$$

Dann gilt $S(P, 0, 0, \mathbb{N}) = S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N})$.

Beweis. Wieder nach Lemma 3.2.2 gilt

$$S(P, N, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty}) = p_{NN} + p_{N, N+1} S(P, N+1, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty}).$$

Umgekehrt gilt nach Definition

$$S(\tilde{P}, N, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty}) = \tilde{p}_{NN} + \tilde{p}_{N, N+1} \tilde{p}_{N+1, N} = p_{NN} + p_{N, N+1} S(P, N+1, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty}).$$

Induktiv folgt dann wie im Beweis von Satz 3.4.1 mit den Lemmata 3.2.1 und 3.2.2 die Behauptung. \square

Kapitel 4

Konvergenz beidseitiger Kettenbrüche

4.1 Einige Elemente in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$

Die Beweise für Konvergenzkriterien folgen in diesem Kapitel stets dem Muster, dass zunächst einige vergleichsweise einfache Transformationen vollzogen werden, und anschließend mithilfe von Satz 3.4.1 die Konvergenz des transformierten Kettenbruchs gefolgert wird. Die Konvergenz des ursprünglichen Kettenbruchs liefern dann einfache Rücktransformationen. Für dieses Vorgehen ist es jedoch von essentieller Bedeutung, überhaupt Elemente von $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ zu kennen. Über \mathbb{R} lassen sich einige derartige Matrizen identifizieren.

Satz 4.1.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ tridiagonal mit $p_{ij} \geq 0$ und $p_{i,i+1} > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Ferner sei $p_{11} + p_{12} \leq 1$ und $p_{n,n-1} + p_{nn} + p_{n,n+1} \leq 1$ für alle $n \geq 2$, und mindestens einmal gelte strikt $<$.*

- *Dann ist $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.*
- *Ist zusätzlich $p_{10} + p_{11} + p_{12} \leq 1$, so gilt $S(P, 0, 0, \mathbb{N}) \leq p_{00} + p_{01}$. Gleichheit gilt höchstens, falls $p_{n,n-1} + p_{nn} + p_{n,n+1} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht.*
- *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S(P, n+1, n, \mathbb{N}_{n+1, \infty}) \leq 1$.*

Beweis. Interpretiere $P^{\{m \dots N\}} = (p_{ij})_{i,j=m}^N$ als Übergangsmatrix einer mit $(X_n^{\{m \dots N\}})_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichneten Markovkette mit Zuständen $\{m, \dots, N\}$. Wegen $p_{i,i+1} > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist für $m \geq 1$ und endliches N jeder Zustand stets transient. Für $i \geq 1$ und endliches N gilt

wegen der tridiagonalen Struktur von P

$$\begin{aligned}
S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN}) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{k-1} \in \mathbb{N}_{iN} \\ j_0 = i, j_k = i}} \prod_{r=0}^{k-1} p_{j_r, j_{r+1}} \\
&= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{k-1} \in \mathbb{N}_{iN} \\ j_0 = i, j_k = i}} \text{Prob} \left(X_r^{\{i \dots N\}} = j_r \text{ für } r = 1, 2, \dots, k \mid X_0^{\{i \dots N\}} = j_0 \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Prob} \left(X_k^{\{i \dots N\}} = i \mid X_0^{\{i \dots N\}} = i \right).
\end{aligned}$$

Nach einem zentralen Kriterium für die Transienz von Zuständen einer Markovkette (siehe Satz 6.1.1) konvergiert diese Reihe (absolut). Der Zustand 1 ist auch bezüglich $P^{\{1, \dots, \infty\}} = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ transient, denn entweder ist die Zeilensumme in der Zeile 1 echt kleiner 1, oder es wird vom Zustand 1 ausgehend ein Zustand erreicht, dessen zugehörige Zeilensumme echt kleiner als 1 ist. Insbesondere konvergiert also auch $S(P, 1, 1, \mathbb{N})$ absolut und damit $S(P, 0, 0, \mathbb{N}) = p_{00} + p_{01}S(P, 1, 1, \mathbb{N})p_{10}$. Ist die Zusatzbedingung erfüllt, so wird zunächst darüberhinaus angenommen, dass P insgesamt die Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist. Dann gilt

$$S(P, 1, 0, \mathbb{N}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Prob} (X_k = 0, X_p \neq 0 \ (p = 1, \dots, k-1) \mid X_0 = 1) \leq 1,$$

da es sich um die Summe von Wahrscheinlichkeiten disjunkter Ereignisse handelt. Da in dieser Abschätzung p_{00} und p_{01} nicht vorkommen, gilt sie auch dann noch, wenn die zum Index 0 gehörende Zeile die Zeilensummenbedingung für Übergangsmatrizen verletzt. Dann gilt noch

$$S(P, 0, 0, \mathbb{N}) = p_{00} + p_{01}S(P, 1, 0, \mathbb{N}) \leq p_{00} + p_{01}.$$

Die letzte Abschätzung ergibt sich mit einer ähnlichen Rechnung wie oben, mit der Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix P ist

$$S(P, n+1, n, \mathbb{N}_{n+1, \infty}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Prob} (X_k = n, X_p \geq n+1 \ (p = 1, \dots, k-1) \mid X_0 = n+1)$$

eine Reihe von Wahrscheinlichkeiten disjunkter Ereignisse, also ≤ 1 . □

In \mathbb{R} lässt sich natürlich auch noch die Kommutativität ausnutzen, sie liefert das

Lemma 4.1.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}_0}$ sei tridiagonal mit Einträgen $\tilde{p}_{ij} \in \mathbb{R}$.*

- Gilt

$$\tilde{p}_{ii} = p_{ii} \quad \text{und} \quad \tilde{p}_{i,i+1}\tilde{p}_{i+1,i} = p_{i,i+1}p_{i+1,i}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$, so ist auch $\tilde{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ und es gilt $S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}) = S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Voraussetzungen dieses Satzes gelten insbesondere für $\tilde{P} = P^T$.

- Enthalten $P, \tilde{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ beide nur nichtnegative Einträge, gilt jedoch abgeschwächt nur noch

$$\tilde{p}_{ii} = p_{ii} \quad \text{und} \quad \tilde{p}_{i,i+1}\tilde{p}_{i+1,i} \geq p_{i,i+1}p_{i+1,i},$$

so gilt $S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}) \geq S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ für alle $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und

$$S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}) - S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}) \geq S(P, 0, 0, \mathbb{N}) - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. In der Definition von $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ und der Aussage des Satzes werden nur S -Reihen der Form $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i+1, N})$ (gegebenenfalls mit $N = \infty$) betrachtet. In jedem einzelnen Summanden kommen $p_{j, j+1}$ und $p_{j+1, j}$ für alle j in derselben Potenz vor, d.h. das Produkt dieser beiden kann aufgrund der Kommutativität durch ein gleiches Produkt mit anderen Faktoren ersetzt werden, ohne dass sich Konvergenzeigenschaften oder Werte der S -Reihen verändern. \square

4.2 Komponentenweise Normbildung

Es soll nun für tridiagonale Matrizen $P \in \mathcal{R}$ eine einfache hinreichende Bedingung für $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ aufgezeigt werden.

Lemma 4.2.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}_0}$ mit Einträgen $p_{ij} \in \mathcal{R}$ tridiagonal und es sei*

$$\mathcal{N}(P) := (\|p_{ij}\|)_{i, j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

Dann ist auch $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ und es gilt

$$\|S(P, 0, 0, \mathbb{N})\| \leq S(\mathcal{N}(P), 0, 0, \mathbb{N})$$

sowie

$$\|S(P, 0, 0, \mathbb{N}) - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})\| \leq S(\mathcal{N}(P), 0, 0, \mathbb{N}) - S(\mathcal{N}(P), 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition der S -Reihen, der Submultiplikativität der Norm und der Nichtnegativität der Einträge von $\mathcal{N}(P)$. \square

4.3 Ähnliche Kettenbrüche

Satz 3.4.1 greift nur für eine kleine Klasse von Kettenbrüchen, kann aber mithilfe von Transformationen auch auf weitere übertragen werden.

Lemma 4.3.1. *Es seien $K = CF(b, a, c)$ und $\tilde{K} = CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c})$ zwei Kettenbrüche über \mathcal{R} , (γ_n) sei eine Folge von Einheiten $\gamma_n \in \mathcal{R}^*$ und es gelte*

$$\tilde{b}_n = \gamma_n b_n, \quad \tilde{a}_{n+1} = \gamma_n a_{n+1}, \quad \tilde{c}_n = \gamma_n c_n.$$

Konvergiert K , so konvergiert auch \tilde{K} (und umgekehrt), und es gilt $\tilde{K} = \gamma_0 K$ und für die Approximationen der N -ten Stufe gilt $\tilde{K}^{(N)} = \gamma_0 K^{(N)}$.

Beweis. Es sei $K_n^{(N)}$ wie in Definition 1.4.1 für K und entsprechend $\tilde{K}_n^{(N)}$ für \tilde{K} . Offensichtlich ist

$$\tilde{K}_N^{(N)} = \tilde{b}_N = \gamma_N b_N = \gamma_N K_N^{(N)},$$

und induktiv folgt für $n < N$

$$\tilde{K}_n^{(N)} = \tilde{b}_n + \tilde{a}_{n+1} \left(\tilde{K}_{n+1}^{(N)} \right)^{-1} \tilde{c}_{n+1} = \gamma_n b_n + \gamma_n a_{n+1} \left(K_{n+1}^{(N)} \right)^{-1} \gamma_{n+1}^{-1} \gamma_{n+1} c_{n+1} = \gamma_n K_n^{(N)}.$$

Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ für $n = 0$ liefert die Behauptung. □

Mit analogem Beweis lässt sich auch die umgekehrte Transformation betrachten.

Lemma 4.3.2. *Es seien $K = CF(b, a, c)$ und $\tilde{K} = CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c})$ zwei Kettenbrüche über \mathcal{R} , (γ_n) sei eine Folge von Einheiten $\gamma_n \in \mathcal{R}^*$ und es gelte*

$$\tilde{b}_n = b_n \gamma_n, \quad \tilde{c}_{n+1} = c_{n+1} \gamma_n, \quad \tilde{a}_n = a_n \gamma_n.$$

Konvergiert K , so konvergiert auch \tilde{K} (und umgekehrt), und es gilt $\tilde{K} = K \gamma_0$ und für die Approximationen der N -ten Stufe gilt $\tilde{K}^{(N)} = K^{(N)} \gamma_0$.

4.4 Das Pringsheim-Kriterium für beidseitige Kettenbrüche

Die ersten beiden Formulierungen, die nun bewiesen werden sollen, stellen Verallgemeinerungen von Satz 2.3.1 dar.

Satz 4.4.1 (Pringsheim-Kriterium über Banachalgebren, Formulierung I). *Es sei $c_1 \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n \neq 0$ und $b_n \in \mathcal{R}^*$ mit*

$$(4.4.1) \quad \left\| b_n^{-1} a_{n+1} \right\| + \left\| b_n^{-1} c_n \right\| \leq 1.$$

Dann ist $CF(b, a, c)$ konvergent mit

$$\|CF(b, a, c) - b_0\| \leq \|a_1\|.$$

Gleichheit gilt höchstens, wenn in (4.4.1) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht.

Beweis. Der Wert von b_0 hat weder Einfluss auf das Konvergenzverhalten von $CF(b, a, c)$ noch auf den Wert von $CF(b, a, c) - b_0$, o.B.d.A. sei $b_0 = I \in \mathcal{R}^*$. Nun wird mit $\gamma_n = b_n^{-1}$ Lemma 4.3.1 angewendet, es verbleibt zu zeigen, dass $CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c})$ mit $\left\| CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}) \right\| \leq \|a_1\|$ konvergiert, falls

$$\|\tilde{a}_{n+1}\| + \|\tilde{c}_n\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{b}_n = I$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dazu reicht es nach Satz 3.4.1 zu zeigen, dass mit $p_{ii} = I - \tilde{b}_i = 0$, $p_{i,i+1} = \tilde{a}_{i+1}$ und $p_{i+1,i} = \tilde{c}_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die tridiagonale Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist und $\|S(P, 0, 0, \mathbb{N})\| \leq \|a_1\|$ ist (Gleichheit nur, falls oben stets „=" gilt). Dazu wird die Matrix $\tilde{P} = \mathcal{N}(P)$ betrachtet, die durch komponentenweise Normbildung aus P hervorgeht. Für die Elemente von \tilde{P} gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{p}_{n,n-1} + \tilde{p}_{nn} + \tilde{p}_{n,n+1} = \|\tilde{c}_n\| + 0 + \|\tilde{a}_{n+1}\| \leq 1,$$

d.h. nach Satz 4.1.1 ist $\tilde{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit $S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}) \leq \tilde{p}_{00} + \tilde{p}_{01} = \|a_1\|$ (Gleichheit nur, falls alle Zeilensummen genau 1 sind). Mit Lemma 4.2.1 folgt die Behauptung. \square

Satz 4.4.2 (Pringsheim-Kriterium für Banachalgebren, Formulierung II). *Es sei $a_1 \neq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n \neq 0$ und $b_n \in \mathcal{R}^*$ mit*

$$(4.4.2) \quad \left\| c_{n+1} b_n^{-1} \right\| + \left\| a_n b_n^{-1} \right\| \leq 1.$$

Dann ist $CF(b, a, c)$ konvergent mit

$$\|CF(b, a, c) - b_0\| \leq \|c_1\|.$$

Gleichheit gilt höchstens, wenn in (4.4.1) für alle $n \in \mathbb{N}$ Gleichheit besteht.

Beweis. P wird im Wesentlichen wie im Beweis von Satz 4.4.1 gebildet, allerdings unter Verwendung von Lemma 4.3.2 anstelle von Lemma 4.3.1. Dies liefert dann die Einträge $p_{ii} = 0$, $p_{i,i+1} = a_{i+1} b_{i+1}^{-1}$ und $p_{i+1,i} = c_{i+1} b_i^{-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Mit $\tilde{P} = (\mathcal{N}(P))^T$ folgt

$$\tilde{p}_{n,n-1} + \tilde{p}_{nn} + \tilde{p}_{n,n+1} = \|p_{n-1,n}\| + \|p_{nn}\| + \|p_{n+1,n}\| = \|a_n b_n^{-1}\| + 0 + \|c_{n+1} b_n^{-1}\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und unter zusätzlicher Verwendung von Lemma 4.1.1 folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 4.4.1. \square

Schließlich soll noch ein Kriterium formuliert werden, das der Formulierung von Satz 2.3.2 entspricht, also die zweite Formulierung des ursprünglichen Pringsheim-Kriteriums Satz 1.2.1 verallgemeinert.

Satz 4.4.3 (Pringsheim-Kriterium für Banachalgebren, Formulierung III). *Es sei $b_n \in \mathcal{R}^*$ und $q_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$(4.4.3) \quad 1 \leq q_1, \quad \left\| b_{n-1}^{-1} a_n \right\| \cdot \left\| b_n^{-1} c_n \right\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \geq 2$$

mit mindestens einem strikten $<$ oder

$$(4.4.4) \quad 1 \leq q_1, \quad \left\| c_n b_{n-1}^{-1} \right\| \cdot \left\| a_n b_n^{-1} \right\| \leq \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \geq 2$$

mit mindestens einem strikten $<$, so ist $CF(b, a, c)$ konvergent. Mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \|a_1\| \cdot \|b_1^{-1} c_1\| \quad \text{und} \quad \alpha_n = \|b_{n-1}^{-1} a_n\| \cdot \|b_n^{-1} c_n\|, \quad n \geq 2, & \text{bzw.} \\ \alpha_1 &= \|c_1\| \cdot \|a_1 b_1^{-1}\| \quad \text{und} \quad \alpha_n = \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot \|a_n b_n^{-1}\|, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

und $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie

$$\gamma_1 = \alpha_1 \quad \text{und} \quad \gamma_n = \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n}, \quad n \geq 2$$

und $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt für die Konvergenzgeschwindigkeit

- $\left| CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c) \right| \leq \left| CF((1), \alpha, (1)) - CF^{(N)}((1), \alpha, (1)) \right|,$
- $\left| CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c) \right| \leq \left| CF((1), \gamma, (1)) - CF^{(N)}((1), \gamma, (1)) \right|,$ falls $q_1 > 1$.

Beweis. Es sei wieder o.B.d.A. $b_0 = I$, (4.4.3) gegeben und P sei wie \tilde{P} im Beweis zu Satz 4.4.1 definiert, d.h. P hat die Einträge

$$p_{nn} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad p_{n,n-1} = \|b_n^{-1} c_n\| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad p_{n,n+1} = \|b_n^{-1} a_{n+1}\| \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

In Anbetracht der Lemmata 4.2.1 und 4.3.1 (mit $\gamma_0 = b_0^{-1} = I$) und natürlich Satz 3.4.1 reicht es zu zeigen, dass $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ist und $S(P, 0, 0, \mathbb{N}) - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ für endliches $N \in \mathbb{N}$ die obigen Abschätzungen erfüllt. Dazu wird Lemma 4.1.1 verwendet, und P durch \tilde{P} mit $p_{i,i+1} p_{i+1,i} = \tilde{p}_{i,i+1} \tilde{p}_{i+1,i}$ ersetzt, ohne dass sich die Werte der betrachteten S -Reihen ändern. Konkret wird hier $\tilde{p}_{n,n+1} = \frac{1}{q_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gewählt, womit

$$\tilde{p}_{n+1,n} = \frac{p_{n,n+1} p_{n+1,n}}{\tilde{p}_{n,n+1}} = q_n \cdot \|b_n^{-1} a_{n+1}\| \cdot \|b_{n+1}^{-1} c_{n+1}\|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Damit ist

$$\tilde{p}_{11} + \tilde{p}_{12} = \frac{1}{q_1} \leq 1$$

und für $n \geq 2$

$$\tilde{p}_{n,n-1} + \tilde{p}_{nn} + \tilde{p}_{n,n+1} = q_{n-1} \cdot \|b_{n-1}^{-1}a_n\| \cdot \|b_n^{-1}c_n\| + \frac{1}{q_n} \leq \frac{q_n - 1}{q_n} + \frac{1}{q_n} = 1,$$

und mindestens einmal gilt strikt $<$. Nach Satz 4.1.1 ist $\tilde{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, womit die Konvergenz bewiesen ist.

Die erste Fehlerabschätzung folgt daraus, dass der angegebene Kettenbruch $CF((1), \alpha, (1))$ gerade der zur Berechnung von $1 - S(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N})$ ist, nach Lemma 4.2.1 ist die Konvergenz des ursprünglichen \mathcal{R} -wertigen Kettenbruch dann mindestens so schnell. Für $q_n > 1$ konvergiert auch der zweite angegebene reelle Kettenbruch (zum Beispiel nach diesem Kriterium), die Konvergenz wird gemäß Lemma 4.1.1 wegen $\alpha_n \leq \gamma_n$ höchstens langsamer.

Ist nun (4.4.4) gegeben, so ist das Beweisverfahren nahezu identisch, es wird lediglich Lemma 4.3.2 statt Lemma 4.3.1 angewendet, was dann auf

$$p_{nn} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad p_{n,n-1} = \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und} \quad p_{n,n+1} = \|a_{n+1} b_{n+1}^{-1}\| \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

führt, jedoch wegen $b_0 = I$ keine Auswirkungen auf $S(P, 0, 0, \mathbb{N}) - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ hat. \square

4.5 Praktikable Fehlerabschätzung

Eine sinnvolle Abschätzung des Approximationsfehlers entsteht für gewöhnlich weder durch exaktes Betrachten des Kettenbruchs mit den α_n als Teilzähler noch des Kettenbruchs mit den γ_n als Teilzähler. Ist nicht gerade $\alpha_n = \gamma_n$, so entsteht in vielen Fällen für $CF((1), \alpha, (1))$ ein Kettenbruch mit nicht explizit ausrechenbaren Näherungen, umgekehrt ist dann im Allgemeinen die Abschätzung gegen die Konvergenzgeschwindigkeit von $CF((1), \gamma, (1))$ zu grob. Beispielsweise lässt sich leicht feststellen, dass für den Kettenbruch $CF((1), (1/4), (1))$, der durch die konstante Wahl $q_n = 2$ entsteht, das Restglied die Größenordnung $O(1/N)$ hat. Ist jedoch $\alpha_n \leq (1 - \epsilon)\gamma_n$ mit einem konstanten $\epsilon > 0$ für alle $n \geq 2$, so liegt etwa nach dem Kriterium von Denk und Riederle [10] exponentiell schnelle Konvergenz des Kettenbruchs $CF(b, a, c)$ vor. Es soll nun eine Fehlerabschätzung gezeigt werden, die bei vielen Wahlen für die q_n schnell auszuwerten ist, jedoch die schnellere Konvergenz für $\alpha_n < \gamma_n$ wiedergibt.

Satz 4.5.1. *Es sei α_n wie in Satz 4.4.3 definiert, die Voraussetzungen jenen Satzes mögen mit $q_1 > 1$ gelten. Dann konvergiert $CF(b, a, c)$ und für $N \in \mathbb{N}$ mit $q_N > 1$ gilt*

$$\|CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c)\| \leq \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N}{(q_N B_N - B_{N-1}) B_N},$$

wobei B_n durch $B_0 = B_1 = 1$ sowie $B_n = B_{n-1} - \frac{q_n - 1}{q_{n-1} q_n} B_{n-2}$ für $n \geq 2$ erklärt ist.

Beweis. Auch diese Abschätzung beruht auf

$$\|CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c)\| \leq S\left(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}\right) - S\left(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}\right),$$

wobei $\tilde{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ die gleichnamige Matrix aus dem Beweis von Satz 4.4.3 ist, d.h.

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{01} &= \alpha_1 = \gamma_1 \\ \tilde{p}_{10} &= 1 \\ \tilde{p}_{n,n+1} &= \frac{1}{q_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{p}_{n,n-1} &= q_{n-1}\alpha_n \leq \frac{q_n - 1}{q_n}, \quad n \geq 2, \\ \tilde{p}_{ij} &= 0, \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Hinzu kommt hier noch die Idee, dass jeder Summand in dieser oberen Schranke wegen der Kommutativität in \mathbb{R} das Produkt

$$\prod_{n=1}^N \tilde{p}_{n-1,n} \tilde{p}_{n,n-1} = \prod_{n=1}^N \alpha_n$$

enthält. Somit ist auch

$$\frac{S\left(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}\right) - S\left(\tilde{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}\right)}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N}$$

eine Reihe von Produkten über Werte \tilde{p}_{ij} . Diese wird höchstens größer, wenn $\tilde{p}_{n,n-1}$ für $n \geq 2$ durch $\frac{q_n - 1}{q_n}$ ersetzt wird. Liefert dies die Matrix P' , so gilt also

$$\frac{\|CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c)\|}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N} \leq \frac{S(P', 0, 0, \mathbb{N}) - S(P', 0, 0, \mathbb{N}_{1N})}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N}.$$

Die Matrix P' wird nun gemäß Lemma 3.4.1 durch eine endliche Matrix ersetzt, die an der Stelle $(N+1, N)$ den Wert $S(P', N+1, N, \mathbb{N}_{N+1, \infty})$ enthält. Da dieser Wert nach Satz 4.1.1 durch 1 nach oben beschränkt ist, folgt

$$\frac{\|CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c)\|}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N} \leq \frac{S\left(\hat{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1, N+1}\right) - S\left(\hat{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}\right)}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N},$$

wobei $\hat{P} = (\hat{p}_{ij})_{i,j=0}^{N+1}$ durch

$$\begin{aligned} \hat{p}_{01} &= \alpha_1 = \gamma_1 \\ \hat{p}_{10} &= 1 \\ \hat{p}_{n,n+1} &= \frac{1}{q_n}, \quad n = 1, \dots, N \\ \hat{p}_{n,n-1} &= \frac{q_n - 1}{q_n}, \quad n = 2, \dots, N \\ \hat{p}_{N+1, N} &= 1 \\ \hat{p}_{ij} &= 0, \quad \text{sonst,} \end{aligned}$$

erklärt ist. Seien nun $\hat{a}_i = -\hat{p}_{i-1,i}\hat{p}_{i,i-1}$ und $\hat{c}_i = 1$ für $i = 1, \dots, N+1$ sowie $\hat{b}_i = 1 - \hat{p}_{ii} = 1$ für $i = 0, \dots, N+1$. Dann gilt (unter Verwendung der Kommutativität in \mathbb{R}) nach Satz 3.4.1

$$S\left(\hat{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1,N+1}\right) - S\left(\hat{P}, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}\right) = CF^{(N)}\left(\hat{b}, \hat{a}, \hat{c}\right) - CF^{(N+1)}\left(\hat{b}, \hat{a}, \hat{c}\right) = -D_{N+1}$$

mit der Differenz D_{N+1} aus Kapitel 2 für den (einseitigen) Kettenbruch $CF\left(\hat{b}, \hat{a}, \hat{c}\right)$. Iteration der Rekursionsvorschrift für die D_n in Lemma 2.1.2 liefert

$$D_{N+1} = \frac{\prod_{n=1}^{N+1} (-\hat{a}_n) \cdot B_1 B_0}{B_{N+1} B_N}$$

mit den Näherungsnennern B_n für $CF\left(\hat{b}, \hat{a}, \hat{c}\right)$. Wegen $\hat{b}_i = 1$ gilt hier $B_0 = B_1 = 1$ und $B_n = B_{n-1} + \hat{a}_n B_{n-2}$ für $n \geq 2$. Einsetzen von $\hat{a}_n = -\gamma_n$ für $n = 1, \dots, N$ und $\hat{a}_{N+1} = -\frac{1}{q_N}$ sowie Ersetzen von B_{N+1} nach der Rekursionsvorschrift liefern

$$-D_{N+1} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N \cdot \frac{1}{q_N}}{\left(B_N - \frac{1}{q_N} B_{N-1}\right) B_N},$$

und Zusammenfassen liefert schließlich

$$\begin{aligned} \left\| CF(b, a, c) - CF^{(N)}(b, a, c) \right\| &\leq \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N}{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N} \cdot \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_N \cdot \frac{1}{q_N}}{\left(B_N - \frac{1}{q_N} B_{N-1}\right) B_N} \\ &= \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N}{(q_N B_N - B_{N-1}) B_N}. \end{aligned}$$

□

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich wieder für $q_n = 2$.

Folgerung 4.5.1. *Es sei $b_n \in \mathcal{R}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$, α_n sei wie in Satz 4.4.3 definiert und es gelte*

$$\alpha_n = \left\| b_{n-1}^{-1} a_n \right\| \cdot \left\| b_n^{-1} c_n \right\| \leq \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_n = \left\| c_n b_{n-1}^{-1} \right\| \cdot \left\| a_n b_n^{-1} \right\| \leq \frac{1}{4},$$

für alle $n \geq 2$. Dann konvergiert $K = CF(b, a, c)$, und für die Approximationen $K^{(N)} = CF^{(N)}(b, a, c)$ gilt

$$\left\| K - K^{(N)} \right\| \leq \frac{2^{2N-1}}{N+1} \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_N \leq \frac{1}{2(N+1)}.$$

Beweis. Es muss im Wesentlichen nur B_n mit $q_n = 2$ berechnet werden, die allgemeine Lösung von $B_n = B_{n-1} - \frac{q_n-1}{q_{n-1}q_n}B_{n-2} = B_{n-1} - \frac{1}{4}B_{n-2}$ ist $B_n = \frac{(f+gn)}{2^n}$ mit $f, g \in \mathbb{R}$, und wegen $B_0 = B_1 = 1$ folgt $B_n = \frac{n+1}{2^n}$. Damit ist

$$(2 \cdot B_N - B_{N-1})B_N = \left(\frac{N+1}{2^{N-1}} - \frac{N}{2^{N-1}} \right) \frac{N+1}{2^N} = \frac{N+1}{2^{2N-1}}.$$

Einsetzen in Satz 4.5.1 liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 4.5.1. Der Beweis der Sätze 4.4.1 und 4.4.2 erfolgte hier im Wesentlichen, um den Zusammenhang zwischen der Pringsheim-Bedingung und der Zeilensummenbedingung für Übergangsmatrizen von Markovketten zu betonen. Die Sätze können aber auch als Spezialfälle von Satz 4.4.3 aufgefasst werden. Wird unter der Voraussetzung aus Satz 4.4.1 stets $\|b_n^{-1}a_{n+1}\| =: \frac{1}{q_n}$ gesetzt, so ist $\|b_n^{-1}c_n\| \leq \frac{q_n-1}{q_n}$ und folglich

$$\|b_{n-1}^{-1}a_n\| \cdot \|b_n^{-1}c_n\| \leq \frac{q_n-1}{q_{n-1}q_n},$$

d.h. die Bedingung aus Satz 4.4.3 ist erfüllt, analog auch für die Bedingung aus Satz 4.4.2. Auf diesem Zusammenhang basierend kann auch die Fehlerabschätzung aus Satz 4.5.1 auf die Sätze 4.4.1 und 4.4.2 angewendet werden.

Kapitel 5

Inverse Kettenbrüche und Differenzgleichungen

5.1 Motivation

Differenzgleichungen der Form $-x_{n-1}a_n + x_nb_n + x_{n+1}c_{n+1} = 0$ zu lösen, ist über Banachalgebren im Allgemeinen schwierig, darüberhinaus ist das Lösen von Differenzgleichungen zweiter Ordnung bereits über \mathbb{R} in vielen Fällen numerisch instabil. Von Vorteil ist es natürlich, wenn die Differenzgleichung entkoppelt werden kann, und eine einfache Rekursion der Form $x_{n+1} = x_nR_n$ verbleibt. Wird dieser Ansatz in die Differenzgleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$x_{n-1}(-a_n + R_{n-1}b_n + R_{n-1}R_nc_{n+1}) = 0.$$

Dies ist sicher erfüllt, wenn $R_{n-1} = a_n(b_n + R_nc_{n+1})^{-1}$ gilt, und das Inverse existiert. Unter welchen Voraussetzungen diese Inversen existieren, unter welchen Voraussetzungen sich auf diese Weise die Differenzgleichung lösen lässt, und mit welchen Anfangsbedingungen derartige Lösungen dann gegebenenfalls kompatibel sind, soll in diesem Kapitel untersucht werden. Da sich durch die Setzung $K_n = R_n^{-1}$ unter geeigneten Invertierbarkeitsvoraussetzungen $K_{n-1} = b_na_n^{-1} + K_n^{-1}c_{n+1}a_n^{-1}$ ergibt, werden die R_n als *inverse Kettenbrüche* bezeichnet.

5.2 Die Mengen \mathcal{M}_D

Definition 5.2.1. Über einer Banachalgebra \mathcal{R} wird $\mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ als die Menge aller tridiagonalen Matrizen $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ definiert, für die $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ absolut konvergiert.

Gemäß Satz 3.3.1 gilt natürlich $\mathcal{M}_D(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Für die Lösung von Differenzgleichungen ist die Menge $\mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ von großer Bedeutung, denn es gilt

Satz 5.2.1. *Es sei $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$, $b_i = I - p_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sowie $a_i = p_{i-1,i}$ und $c_i = -p_{i,i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)} &= 0, & N \in \mathbb{N}_0, \\ R_n^{(N)} &= a_{n+1} \left(b_{n+1} + R_{n+1}^{(N)} c_{n+2} \right)^{-1}, & n, N \in \mathbb{N}_0, \quad n < N \\ R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)}, & n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

erklärten inversen Kettenbrüche R_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

- durch $x_{n+1} = x_n R_n^{(N)}$ für $n = 1, \dots, N-1$ wird eine Lösung von

$$\begin{aligned} -x_{n-1}a_n + x_n b_n + x_{n+1}c_{n+1} &= 0, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ -x_{N-1}a_N + x_N b_N &= 0 \end{aligned}$$

erklärt, die genau dann auch noch die Anfangsbedingung

$$x_0 b_0 + x_1 c_1 = 0$$

erfüllt, wenn $x_0 CF^{(N)}(b, a, c) = 0$ ist.

- durch $x_{n+1} = x_n R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Lösung von

$$-x_{n-1}a_n + x_n b_n + x_{n+1}c_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

erklärt, die genau dann auch noch die Anfangsbedingung

$$x_0 b_0 + x_1 c_1 = 0$$

erfüllt, wenn $x_0 CF(b, a, c) = 0$ ist.

- $x_0 = CF(b, a, c)$ ist eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_0 b_1 + x_1 c_2 &= a_1, \\ -x_{n-1}a_{n+1} + x_n b_{n+1} + x_{n+1}c_{n+2} &= 0, & n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

falls $b_0 = 0$ und $c_1 = I$ gewählt wird.

- $x_0 = CF^{(N)}(b, a, c)$ ist eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x_0 b_1 + x_1 c_2 &= a_1, \\ -x_{n-1}a_{n+1} + x_n b_{n+1} + x_{n+1}c_{n+2} &= 0, & n = 1, \dots, N-2, \\ -x_{N-2}a_N + x_{N-1}b_N &= 0, \end{aligned}$$

falls $b_0 = 0$ und $c_1 = I$ gewählt wird.

Beweis. Nach Definition konvergiert $S(P, N - 1, N, \mathbb{N}_{NN})$ und es gilt nach den Lemmata 3.2.3 und 3.2.1

$$\begin{aligned} S(P, N - 1, N, \mathbb{N}_{NN}) &= p_{N-1,N} S(P, N, N, \mathbb{N}_{NN}) = p_{N-1,N} (I - S(P, N, N, \emptyset))^{-1} \\ &= p_{N-1,N} (I - p_{NN})^{-1} = a_N B_N^{-1} = R_{N-1}^{(N)}. \end{aligned}$$

Für $n < N$ ist nach den Lemmata 3.2.3 und 3.2.5

$$\begin{aligned} S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) &= p_{n,n+1} + S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) p_{n+1,n+1} \\ &\quad + S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) S(P, n + 1, n + 2, \mathbb{N}_{n+2,N}) p_{n+2,n+1} \end{aligned}$$

und Auflösen liefert

$$S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) (I - p_{n+1,n+1} - S(P, n + 1, n + 2, \mathbb{N}_{n+2,N}) p_{n+2,n+1}) = p_{n,n+1}.$$

Der eingeklammerte Term ist Lemma 3.2.2 zufolge gerade $I - S(P, n + 1, n + 1, \mathbb{N}_{n+2,N})$, nach Lemma 3.2.1 existiert das Inverse und es folgt

$$S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) = p_{n,n+1} (I - p_{n+1,n+1} - S(P, n + 1, n + 2, \mathbb{N}_{n+2,N}) p_{n+2,n+1})^{-1}.$$

Induktiv folgt damit $S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) = R_n^{(N)}$, wegen der absoluten Konvergenz von $S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,\infty}) = p_{n,n+1} S(P, n + 1, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,\infty})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergieren alle vorkommenden S -Reihen absolut und nach Satz 3.3.1 existiert auch

$$R_n = \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) = S(P, n, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,\infty}).$$

Betrachte nun die durch $x_{n+1} = x_n R_n^{(N)}$ gewonnenen Werte x_1, x_2, \dots, x_N . Beginnend mit $x_1 = x_0 S(P, 0, 1, \mathbb{N}_{1,N})$ folgt gemäß Lemma 3.2.5 induktiv

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} S(P, n - 1, n, \mathbb{N}_{n,N}) = x_0 S(P, 0, n - 1, \mathbb{N}_{n-1,N}) S(P, n - 1, n, \mathbb{N}_{n,N}) \\ &= x_0 S(P, 0, n, \mathbb{N}_{n,N}) \end{aligned}$$

für $n = 1, \dots, N - 1$. Nach Lemma 3.2.4 und erneut Lemma 3.2.5 folgt

$$\begin{aligned} &-x_{n-1} a_n + x_n b_n + x_{n+1} c_{n+1} \\ &= x_0 S(P, 0, n - 1, \mathbb{N}_{n-1,N}) \\ &\quad \cdot (-p_{n-1,n} + S(P, n - 1, n, \mathbb{N}_{n,N}) (I - p_{nn}) - S(P, n - 1, n + 1, \mathbb{N}_{n+1,N}) p_{n+1,n}) \\ &= x_0 S(P, 0, n - 1, \mathbb{N}_{n-1,N}) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

für $n = 2, \dots, N - 1$ sowie

$$\begin{aligned} &-x_{N-1} a_N + x_N b_N \\ &= x_0 S(P, 0, N - 1, \mathbb{N}_{N-1,N}) (-p_{N-1,N} + S(P, N - 1, N, \mathbb{N}_{N,N}) (I - p_{NN})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.3 folgt auch

$$\begin{aligned}
& -x_0a_1 + x_1b_1 + x_2c_2 \\
&= x_0(-p_{01} + S(P, 0, 1, \mathbb{N}_{1,N}(I - p_{11}) - S(P, 0, 2, \mathbb{N}_{2,N})p_{21})) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass die Differenzgleichungen erfüllt sind. Schließlich ist die Anfangsbedingung genau dann erfüllt, wenn (nach Lemma 3.2.2)

$$\begin{aligned}
x_0 \left(b_0 + R_0^{(N)} c_1 \right) &= x_0 (I - p_{00} - S(P, 0, 1, \mathbb{N}_{1N} p_{10})) \\
&= x_0 (I - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})) = x_0 CF^{(N)}(b, a, c)
\end{aligned}$$

gilt. Damit ist die erste Aussage über Differenzgleichungen bewiesen, die zweite ebenfalls mit $N = \infty$. Um den dritten Punkt zu beweisen, wird zusätzlich $x_{-1} = I$ angenommen, die Differenzgleichung hat dann bis auf eine Indexverschiebung die gleiche Gestalt wie zuvor, dabei ist

$$\begin{aligned}
x_0 &= x_{-1}R_0 = R_0 = a_1 (b_1 + R_1c_2)^{-1} = a_1 (I - p_{11} - S(P, 1, 2, \mathbb{N}_{2,N})p_{21})^{-1} \\
&= b_0 + a_1 (I - S(P, 1, 1, \mathbb{N}_{1N}))^{-1} c_1 = CF(b, a, c)
\end{aligned}$$

mit $b_0 = 0$ und $c_1 = I$. Der letzte Punkt wird schließlich analog durch Indexverschiebung im ersten Punkt bewiesen. \square

Mit analogem Beweis lässt sich auch zeigen, dass mittels inverser Kettenbrüche Differenzgleichungen mit Koeffizienten auf der linken Seite gelöst werden können, also

Satz 5.2.2. *Es sei $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$, $b_{ii} = I - p_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sowie $a_i = -p_{i-1,i}$ und $c_i = p_{i,i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned}
L_N^{(N)} &= 0, \quad N \in \mathbb{N}_0, \\
L_n^{(N)} &= \left(b_{n+1} + a_{n+2}L_{n+1}^{(N)} \right)^{-1} c_{n+1}, \quad N \in \mathbb{N}_0, \\
L_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} L_n^{(N)}, \quad n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

erklärten inversen Kettenbrüche L_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

- durch $x_{n+1} = L_n^{(N)} x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Lösung von

$$\begin{aligned}
-c_n x_{n-1} + b_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} &= 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \\
-c_N x_{N-1} + b_N x_N &= 0
\end{aligned}$$

erklärt, die genau dann die Anfangsbedingung

$$b_0 x_0 + a_1 x_1 = 0$$

erfüllt, wenn $CF^{(N)}(b, a, c)x_0 = 0$ ist.

- durch $x_{n+1} = L_n x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Lösung von

$$-c_n x_{n-1} + b_n x_n + a_{n+1} x_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

erklärt, die genau dann auch noch die Anfangsbedingung

$$b_0 x_0 + a_1 x_1 = 0$$

erfüllt, wenn $CF(b, a, c)x_0 = 0$ ist.

- $x_0 = CF(b, a, c)$ ist eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} b_1 x_0 + a_2 x_1 &= c_1, \\ -c_{n+1} x_{n-1} + b_{n+1} x_n + a_{n+2} x_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

falls $b_0 = 0$ und $a_1 = I$ gewählt wird.

- $x_0 = CF^{(N)}(b, a, c)$ ist eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} b_1 x_0 + a_2 x_1 &= c_1, \\ -c_{n+1} x_{n-1} + b_{n+1} x_n + a_{n+2} x_{n+1} &= 0, \quad n = 1, \dots, N-2, \\ -c_N x_{N-2} + b_N x_{N-1} &= 0, \end{aligned}$$

falls $b_0 = 0$ und $a_1 = I$ gewählt wird.

Es sei angemerkt, dass die L_i hier die Interpretation $L_i = S(P, i+1, i, \mathbb{N}_{i+1, \infty})$ besitzen, und daher einige gegenüber Kapitel 3 modifizierte Resultate über S -Reihen verwendet werden müssen. Zum Beispiel wird hier anstelle von Lemma 3.2.5 die Identität

$$S(P, k, i, \mathbb{N}_{i+1, \infty}) = S(P, k, j, \mathbb{N}_{j+1, \infty})S(P, j, i, \mathbb{N}_{i+1, \infty})$$

für $i < j < k$ verwendet, der Beweis bleibt unverändert, insbesondere konvergieren diese Reihen für $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ stets absolut.

Bemerkung 5.2.1. Zu beachten ist, dass in den Sätzen 5.2.1 und 5.2.2 keine Aussage über die Mächtigkeit oder Struktur der gesamten Lösungsmenge der betrachteten Differenzgleichungen getroffen wird. Es wird lediglich ausgesagt, dass unter den gegebenen Voraussetzungen zumindest eine Lösung existiert, die – je nach Sichtweise – mit Kettenbrüchen assoziiert ist bzw. durch das sukzessive Lösen der abgeschnittenen Differenzgleichungen approximiert wird. Im Spezialfall $\mathcal{R} = \mathbb{C}^{d \times d}$ lassen sich die Matrixdifferenzgleichungen auf skalare Differenzgleichungen höherer Ordnung zurückführen. Dann lassen sich auch Aussagen über die Struktur der Lösungsmenge, d.h. über die Dimension des Lösungsraums treffen, siehe etwa [35] oder [16].

Die Hauptaufgabe wird es wieder sein, Matrizen $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ zu identifizieren, allerdings ist bereits $\mathcal{M}_D(\mathcal{R}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{R})$ bekannt. Darüberhinaus muss der Einfluss von Transformationen der Koeffizienten b_n , a_n und c_n wie in den Lemmata 4.3.1 und 4.3.2 abgeklärt werden.

5.3 Eigenschaften von $\mathcal{M}_D(\mathcal{R})$

Eine einfache Möglichkeit, die \mathcal{M}_D -Eigenschaft nachzuweisen, besteht wieder in komponentenweiser Normbildung.

Lemma 5.3.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine tridiagonale Matrix über \mathcal{R} , und für die durch komponentenweise Normbildung entstandene Matrix \tilde{P} über \mathbb{R} gelte $\tilde{P} \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$. Dann ist auch $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition der S -Reihen und der Submultiplikativität der Norm. \square

Daher ist es wieder hilfreich, die Menge $\mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ genauer zu betrachten.

Satz 5.3.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ tridiagonal mit $p_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$, $p_{11} + p_{12} \leq 1$ und $p_{n,n-1} + p_{nn} + p_{n,n+1} \leq 1$ für alle $n \geq 2$. Ist bezüglich der Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i,j \geq 1}$ jeder Zustand aus \mathbb{N} transient, so ist $P \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$. Dies ist insbesondere erfüllt, wenn $p_{nn} = 0$ und $p_{n,n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Beweis. Nach den Überlegungen aus dem Beweis zu Satz 4.1.1 ist

$$S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{Prob} \left(X_k^{\{i,\dots,\infty\}} = i \mid X_0^{\{i,\dots,\infty\}} = i \right),$$

wenn die Markovkette $\left(X_n^{\{i,\dots,\infty\}} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v=i}^\infty$ besitzt. Da der Zustand i bereits bezüglich der Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v \geq 1}$ transient ist, ist er auch bezüglich $(p_{uv})_{u,v \geq i}$ transient. Nach dem Transienzkriterium konvergiert damit $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ (absolut).

Einfache Aussagen aus der Theorie der Markovketten sind, dass jeder Zustand mit korrespondierender Zeilensumme < 1 transient ist, und dass jeder Zustand, von dem ein transienter Zustand aus erreichbar ist, ebenfalls transient ist. Gilt nun die Zusatzvoraussetzung, d.h. $p_{nn} = 0$ und $p_{n,n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist bezüglich $(p_{uv})_{u,v \geq 1}$ insbesondere der Zustand 1 transient, denn die korrespondierende Zeilensumme ist < 1 . Sei nun $n - 1 \in \mathbb{N}$ als transient nachgewiesen und betrachte den Zustand n . Ist $p_{n,n-1} = 0$, so ist die korrespondierende Zeilensumme < 1 und n ist transient, ist $p_{n,n-1} > 0$, so ist der transienter Zustand $n - 1$ von n aus erreichbar, und n ist ebenfalls transient. Daher ist unter diesen Voraussetzungen bezüglich $(p_{ij})_{i,j \geq 1}$ jeder Zustand aus \mathbb{N} transient. \square

5.4 Ähnliche inverse Kettenbrüche

Es werden nun die Transformationen aus den Lemmata 4.3.1 und 4.3.2 angewendet.

Lemma 5.4.1. *Es sei $\gamma_n \in \mathcal{R}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und*

$$\tilde{b}_n = \gamma_n b_n, \quad \tilde{a}_{n+1} = \gamma_n a_{n+1}, \quad \tilde{c}_n = \gamma_n c_n,$$

mit R_n seien die aus den Folgen b, a, c gebildeten inversen Kettenbrüche aus Satz 5.2.1 bezeichnet, mit \tilde{R}_n die entsprechend aus den Folgen $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}$ gebildeten inversen Kettenbrüche. Ferner sei $K = CF(b, a, c)$ und $\tilde{K} = CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c})$. Konvergieren die R_n , so auch die \tilde{R}_n und umgekehrt. Gilt eine der ersten beiden Aussagen aus Satz 5.2.1 für die b, a, c, R, K , so gilt sie auch für $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{R}, \tilde{K}$ und umgekehrt, die Lösungsmenge bleibt dabei gleichmächtig. Ist zusätzlich $\gamma_0 = I$ und gilt eine der letzten beiden Aussagen aus Satz 5.2.1 für b, a, c, K , so gilt sie auch für $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{K}$ und umgekehrt.

Beweis. Es gilt $\tilde{R}_N^{(N)} = 0 = \gamma_N 0 = \gamma_N R_N^{(N)} \gamma_{N+1}^{-1}$. Sei nun $\tilde{R}_{n+1}^{(N)} = \gamma_{n+1} R_{n+1}^{(N)} \gamma_{n+2}^{-1}$ für ein $n < N$ gezeigt, dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(N)} &= \tilde{a}_{n+1} \left(\tilde{b}_{n+1} + \tilde{R}_{n+1}^{(N)} \tilde{c}_{n+2} \right)^{-1} \\ &= \gamma_n a_{n+1} \left(\gamma_{n+1} b_{n+1} + \gamma_{n+1} R_{n+1}^{(N)} \gamma_{n+2}^{-1} \gamma_{n+2} c_{n+2} \right)^{-1} \\ &= \gamma_n a_{n+1} \left(b_{n+1} + R_{n+1}^{(N)} c_{n+2} \right)^{-1} \gamma_{n+1}^{-1} \\ &= \gamma_n R_n^{(N)} \gamma_{n+1}^{-1}. \end{aligned}$$

Ersichtlich existieren in dieser Iteration dabei die Inversen für $\tilde{R}_n^{(N)}$ genau dann, wenn die Inversen in der Iteration für $R_n^{(N)}$ existieren. Darüberhinaus fällt die Konvergenz von \tilde{R}_n und R_n zusammen, da $\gamma_n \in \mathcal{R}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist, für die Grenzwerte gilt dann ebenfalls $\tilde{R}_n = \gamma_n R_n \gamma_{n+1}^{-1}$.

Ist nun $\tilde{x}_n = x_n \gamma_n^{-1}$, so gilt

$$\begin{aligned} & -\tilde{x}_{n-1} \tilde{a}_n + \tilde{x}_n \tilde{b}_n + \tilde{x}_{n+1} \tilde{c}_{n+1} \\ &= -x_{n-1} \gamma_{n-1}^{-1} \gamma_{n-1} a_n + x_n \gamma_n^{-1} \gamma_n b_n + x_{n+1} \gamma_{n+1}^{-1} \gamma_{n+1} c_{n+1} \\ &= -x_{n-1} a_n + x_n b_n + x_{n+1} c_{n+1}. \end{aligned}$$

Analog folgt auch $\tilde{x}_0 \tilde{b}_0 + \tilde{x}_1 \tilde{c}_1 = x_0 b_0 + x_1 c_1$ und (für endliche Systeme)

$$-\tilde{x}_{N-1} \tilde{a}_N + \tilde{x}_N \tilde{b}_N = -x_{N-1} a_N + x_N b_N.$$

Erfüllt also \tilde{x} oder x das zugehörige Differenzgleichungssystem, so gilt dies auch für die jeweils andere Folge.

Ist $x_{n+1} = x_n R_n$ und ist $\tilde{x}_n = x_n \gamma_n^{-1}$, so ist

$$\tilde{x}_n \tilde{R}_n = x_n \gamma_n^{-1} \gamma_n R_n \gamma_{n+1}^{-1} = x_{n+1} \gamma_{n+1}^{-1},$$

d.h. durch $\tilde{x}_0 = x_0 \gamma_0^{-1}$ und $\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n \tilde{R}_n$ wird gerade obige Folge (\tilde{x}_n) erklärt.

Da nach Lemma 4.3.1 weiterhin $\tilde{K} = \gamma_0 K$ ist, entsprechen sich auch die Anfangsbedingungen $0 = x_0 K$ und $0 = \tilde{x}_0 \tilde{K} = x_0 \gamma_0^{-1} \gamma_0 K = x_0 K$. Damit gibt es jeweils gleich viele Lösungen.

Durch eine entsprechende Rechnung übertragen sich auch die verschobenen Differenzgleichungen der letzten beiden Aussagen aus Satz 5.2.1 und wegen $\gamma_0 = I$ gilt hier $\tilde{K} = K$. \square

Analog wird auch das nachstehende umgekehrte Resultat bewiesen.

Lemma 5.4.2. *Es sei $\gamma_n \in \mathcal{R}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und es gelte*

$$\tilde{b}_n = b_n \gamma_n, \quad \tilde{c}_{n+1} = c_{n+1} \gamma_n, \quad \tilde{a}_n = c_n \gamma_n,$$

mit L_n seien die aus den Folgen b, a, c gebildeten inversen Kettenbrüche aus Satz 5.2.2 bezeichnet, mit \tilde{L}_n die entsprechend aus den Folgen $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}$ gebildeten inversen Kettenbrüche. Ferner sei $K = CF(b, a, c)$ und $\tilde{K} = CF(\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c})$. Konvergieren die L_n , so auch die \tilde{L}_n und umgekehrt. Gilt eine der ersten beiden Aussagen aus Satz 5.2.2 für die b, a, c, L, K , so gilt sie auch für $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{L}, \tilde{K}$ und umgekehrt, die Lösungsmenge bleibt dabei gleichmächtig. Ist zusätzlich $\gamma_0 = I$ und gilt eine der letzten beiden Aussagen aus Satz 5.2.2 für b, a, c, K , so gilt sie auch für $\tilde{b}, \tilde{a}, \tilde{c}, \tilde{K}$ und umgekehrt.

Insbesondere lässt sich damit eine Verallgemeinerung der Sätze 5.2.1 und 5.2.2 formulieren.

Satz 5.4.1. *Es sei $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Einheiten und $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ tridiagonal.*

- Wird $b_i = \gamma_i(I - p_{ii})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $a_i = \gamma_{i-1} p_{i-1,i}$ und $c_i = -\gamma_i p_{i,i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gewählt, so gelten in Satz 5.2.1 die ersten beiden Aussagen unverändert, die letzten beiden Aussagen gelten für $\gamma_0 = I$ ebenfalls unverändert. Die Mächtigkeit der Lösungsmengen der betrachteten Differenzgleichungen ist unabhängig von der konkreten Folge (γ_n) .
- Wird $b_i = (I - p_{ii})\gamma_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $a_i = -p_{i-1,i}\gamma_i$ und $c_i = p_{i,i-1}\gamma_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gewählt, so gelten in Satz 5.2.2 die ersten beiden Aussagen unverändert, die letzten beiden Aussagen gelten für $\gamma_0 = I$ ebenfalls unverändert. Die Mächtigkeit der Lösungsmengen der betrachteten Differenzgleichungen ist unabhängig von der konkreten Folge (γ_n) .

5.5 Das Pringsheim-Kriterium für Differenzgleichungen

In diesem Abschnitt sollen nun Differenzgleichungen betrachtet werden, wie sie in der jeweils dritten Aussage der Sätze 5.2.1 und 5.2.2 vorkommen, ihre Lösungen sollen jeweils mit den Lösungen des abgeschnittenen Systems aus der jeweils vierten Aussage der Sätze approximiert werden. Dabei stellt sich die Frage nach dem Approximationsfehler. Da die Lösungen x_0 jeweils mit Kettenbrüchen berechnet werden können, lässt sich diese Frage unter geeigneten Voraussetzungen durch einen Vergleich mit dem Approximationsfehler für Kettenbrüche beantworten.

Satz 5.5.1. *Die Koeffizienten in*

$$\begin{aligned}x_0 b_1 + x_1 c_2 &= a_1, \\ -x_{n-1} a_{n+1} + x_n b_{n+1} + x_{n+2} c_{n+2} &= 0, \quad n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

bzw. in

$$\begin{aligned}b_1 x_0 + a_2 x_1 &= c_1, \\ -c_{n+1} x_{n-1} + b_{n+1} x_n + a_{n+2} x_{n+1} &= 0,\end{aligned}$$

seien durch $c_1 = I$ bzw. $a_1 = I$ ergänzt. Ferner sei α_n entweder durch

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \|a_1\| \cdot \|b_1^{-1} c_1\| \quad \text{und} \quad \alpha_n = \|b_{n-1}^{-1} a_n\| \cdot \|b_n^{-1} c_n\|, \quad n \geq 2, \quad \text{oder durch} \\ \alpha_1 &= \|c_1\| \cdot \|a_1 b_1^{-1}\| \quad \text{und} \quad \alpha_n = \|c_n b_{n-1}^{-1}\| \cdot \|a_n b_n^{-1}\|, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

expliziert, für alle $n \geq 2$ gelte $\alpha_n \leq \frac{q_n - 1}{q_n - 1 q_n}$ mit reellen Zahlen $q_n > 1$. Ferner sei die Lösung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ des Differenzgleichungssystems eindeutig, ebenso sei die Lösung $(x_n^{(N)})_{n=0}^N$ des abgeschnittenen Systems

$$\begin{aligned}x_0 b_1 + x_1 c_2 &= a_1, \\ -x_{n-1} a_{n+1} + x_n b_{n+1} + x_{n+2} c_{n+2} &= 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ -x_{N-1} a_{N+1} + x_N b_{N+1} &= 0,\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}b_1 x_0 + a_2 x_1 &= c_1, \\ -c_{n+1} x_{n-1} + b_{n+1} x_n + a_{n+2} x_{n+1} &= 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ -c_{N+1} x_{N-1} + b_{N+1} x_N &= 0,\end{aligned}$$

(für genügend großes $N \in \mathbb{N}$) eindeutig. Dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_n^{(N)} = x_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\left\| x_0 - x_0^{(N)} \right\| \leq \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{N+1}}{(q_{N+1}B_{N+1} - B_N)B_{N+1}},$$

wobei B_n durch $B_0 = B_1 = 1$ sowie $B_n = B_{n-1} - \frac{q_n-1}{q_n}B_{n-2}$ für $n \geq 2$ erklärt ist. Im Spezialfall $q_n = 2$ ist

$$(q_{N+1}B_{N+1} - B_N)B_{N+1} = \frac{N+2}{2^{2N+1}}.$$

Beweis. Betrachte die Matrix \tilde{P} aus dem Beweis von Satz 4.4.3, diese enthielt die Elemente $\tilde{p}_{n,n+1} = \frac{1}{q_n}$ für $n \geq 1$. Da hier $q_n > 1$ vorausgesetzt ist, erfüllt \tilde{P} die Voraussetzungen von Satz 5.3.1, und zusammen mit Lemma 5.4.1 bzw. Lemma 5.4.2 (im Beweis von Satz 4.4.3 wurden die gleichen Transformationen verwendet) liefert Satz 5.2.1 bzw. Satz 5.2.2, dass die Differenzgleichungssysteme durch $x_0 = CF(b, a, c)$ und $x_{n+1} = x_n R_{n+1}$ bzw. $x_{n+1} = L_{n+1} x_n$ gelöst werden, die abgeschnittenen Differenzgleichungssysteme mit den entsprechenden Näherungen. Wegen der Konvergenz der Kettenbrüche und der inversen Kettenbrüche folgt die Konvergenz von $x_n^{(N)}$ gegen x_n , die Fehlerabschätzung für x_0 folgt mit einer einfachen Indexverschiebung (maximaler Koeffizientenindex des abgeschnittenen Systems ist $N+1$) unmittelbar aus Satz 4.5.1. \square

Bemerkung 5.5.1. In Satz 5.5.1 wurde im Wesentlichen Satz 4.4.3 auf Differenzgleichungen angewendet, für die Fehlerabschätzung wurde Satz 4.5.1 benutzt. Sinngemäß kann auch eine Übertragung der beiden vorangegangenen Formulierungen des Pringsheim-Kriteriums, also der Sätze 4.4.1 und 4.4.2 erfolgen, allerdings handelt es sich bei diesen Sätzen nach Bemerkung 4.5.1 ohnehin um Spezialfälle von Satz 4.4.3, und für eine mögliche Fehlerabschätzung in Anlehnung an Satz 4.5.1 muss ohnehin die Formulierung mit den q_n gewählt werden.

5.6 Verbindung zur LU-Zerlegung für block-tridiagonale Matrizen

Bei der LU-Zerlegung tridiagonaler Matrizen

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & & & & \\ E_1 & D_2 & F_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & F_{N-1} & \\ & & & E_{N-1} & D_N & \end{pmatrix}$$

in

$$\begin{pmatrix} I & & & & & \\ L_1 & I & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & L_{N-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & & & & \\ & U_2 & F_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & F_{N-1} \\ & & & & & U_N \end{pmatrix}$$

in der Variante für Block-Matrizen ohne Pivotisierung wird zunächst $U_1 = D_1$ und dann für $i = 2, \dots, N$ sukzessive

$$L_{i-1} = E_{i-1}U_{i-1}^{-1} \quad \text{und} \quad U_i = D_i - L_{i-1}F_{i-1}$$

gesetzt, vorausgesetzt die U_{i-1}^{-1} existieren. In dieser Form ist der Algorithmus etwa in [14], Abschnitt 4.5 aufgeführt. Als hinreichendes Kriterium für die Existenz der Inversen U_{i-1}^{-1} und somit Gültigkeit des Algorithmus ist dort

$$\|D_i^{-1}\| \cdot (\|F_{i-1}\| + \|E_i\|) < 1$$

für $i = 1, \dots, N$ mit $F_0 = E_N = 0$ in der Spaltensummennorm angegeben.

Wird nun $b_n = D_{N-n}$, $a_n = -E_{N-n}$, $c_n = F_{N-n}$ sowie $K_n = U_{N-n}$ und $R_n = -L_{N-1-n}$ substituiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{N-1} &= b_{N-1}, \\ K_n &= b_n + a_{n+1}K_{n+1}^{-1}c_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-2, \\ R_{N-1} &= 0, \\ R_n &= a_n (b_{n+1} + R_{n+1}c_{n+2})^{-1}, \quad n = 0, \dots, N-2, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $K_0 = CF^{(N-1)}(b, a, c)$, und die $R_n = -L_{N-1-n}$ sind die inversen Kettenbrüche. Nach den Überlegungen in diesem Kapitel ist die LU-Zerlegung in der angegebenen Form immer noch durchführbar, wenn die Koeffizienten $D_n = b_{N-n}$, $E_n = -a_{N-n}$ und $F_n = D_{N-n}$ die Bedingungen aus Satz 5.5.1 erfüllen, diese sind etwas weniger restriktiv als die oben aus [14] zitierte.

5.7 Verallgemeinerung der Anfangsbedingung

Bislang kamen in den Anfangsbedingungen für die Differenzgleichungen stets nur x_0 und x_1 aus der Lösung vor. Die Anfangsbedingung war stets linear in diesen Werten, etwa war $x_0b_0 + x_1c_1 = 0$. Eine einfache Verallgemeinerung liefert Anfangsbedingungen, die zwar immer noch linear in den vorkommenden Lösungskomponenten ist, von diesen jedoch beliebig viele enthalten, also

$$x_0b_0 + x_1c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_kg_k = 0.$$

Um derartige Nebenbedingungen behandeln zu können, wird noch eine Identität für S -Reihen benötigt. Dabei sei P nun nicht mehr zwangsläufig tridiagonal, die Definition der S -Reihen bleibt unverändert. Enthält P neben den Elementen auf den drei mittleren Diagonalen noch Elemente in der ersten Spalte, gilt also $p_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$ ist, so ändern sich die Aussagen der Lemmata 3.2.1 und 3.2.5 nicht, in den Lemmata 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 ist lediglich $i = 0$ nicht mehr erlaubt. Stattdessen gilt

Lemma 5.7.1. *Für $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ sei $p_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$. Konvergieren die vorkommenden Reihen alle absolut, so gilt*

$$S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}) = p_{00} + \sum_{k=1}^N S(P, 0, k, \mathbb{N}_{1N}) p_{k0}$$

für jedes $N \in \mathbb{N}$ sowie

$$S(P, 0, 0, \mathbb{N}) = p_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} S(P, 0, k, \mathbb{N}) p_{k0}.$$

Beweis. Analog Beweis von Lemma 3.2.3. □

Da sich $S(P, 0, k, \mathbb{N})$ als Produkt von

$$S(P, i, i + 1, \mathbb{N}_{i+1, \infty}) = p_{i, i+1} S(P, i + 1, i + 1, \mathbb{N}_{i+1, \infty})$$

für $i = 0, \dots, k - 1$ schreiben lässt, konvergieren die Reihen auf der rechten Seite in den Gleichungen in Lemma 5.7.1 bei unveränderter Definition für $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ absolut. Lediglich die absolute Konvergenz von $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ muss für die Anwendung von Lemma 5.7.1 nachgewiesen werden, für tridiagonale Matrizen handelte es sich um eine redundante Forderung.

Wird für $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ eine Lösung (x_n) der Differenzgleichung

$$-x_{n-1}a_n + x_n b_n + x_{n+1}c_{n+1} = 0$$

durch $x_{n+1} = x_n R_n$ iteriert, so wurde im Beweis von Satz 5.2.1 festgestellt, dass $x_n = x_0 S(P, 0, n, \mathbb{N})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, falls $b_i = I - p_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sowie $a_i = p_{i-1, i}$ und $c_i = -p_{i, i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gewählt wird. Angesichts der zweiten Gleichung in Lemma 5.7.1 wird nun die Anfangsbedingung

$$x_0 b_0 + x_1 c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k g_k = 0$$

erfüllt, wenn $g_k = -p_{k0}$ ist, und x_0 als Lösung von

$$x_0 (CF(b, a, c) + R_0 R_1 g_2 + R_0 R_1 R_2 g_3 + \dots) = 0$$

gewählt wird. Auch bei Anwendung einer Transformation wie in Lemma 5.4.1 ändert sich daran nichts, wenn $\tilde{g}_k = \gamma_k c_k$ gewählt wird, es kürzen sich dann alle Faktoren γ_n gegen γ_n^{-1} heraus. Damit folgt

Satz 5.7.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ mit $p_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$, ferner sei auch $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ absolut konvergent und (γ_n) sei eine Folge von Einheiten. Wird $b_i = \gamma_i(I - p_{ii})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, $a_i = \gamma_{i-1}p_{i-1,i}$ und $c_i = -\gamma_i p_{i,i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $g_i = \gamma_i p_{i0}$ für $i \geq 2$ gewählt, so konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)} &= 0, & N \in \mathbb{N}_0, \\ R_n^{(N)} &= a_{n+1} \left(b_{n+1} + R_{n+1}^{(N)} c_{n+2} \right)^{-1}, & n, N \in \mathbb{N}_0, \quad n < N \\ R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)}, & n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

erklärten inversen Kettenbrüche R_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und

- durch $x_{n+1} = x_n R_n^{(N)}$ für $n = 1, \dots, N - 1$ wird eine Lösung von

$$\begin{aligned} -x_{n-1}a_n + x_n b_n + x_{n+1}c_{n+1} &= 0, & n = 1, 2, \dots, N - 1, \\ -x_{N-1}a_N + x_N b_N &= 0 \end{aligned}$$

erklärt, die genau dann auch noch die Anfangsbedingung

$$x_0 b_0 + x_1 c_1 + \sum_{k=2}^N x_k g_k = 0$$

erfüllt, wenn

$$x_0 \left(CF^{(N)}(b, a, c) + \sum_{k=2}^N \prod_{i=0}^{k-1} R_i g_k \right) = 0$$

ist.

- durch $x_{n+1} = x_n R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird eine Lösung von

$$-x_{n-1}a_n + x_n b_n + x_{n+1}c_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

erklärt, die genau dann auch noch die Anfangsbedingung

$$x_0 b_0 + x_1 c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x_k g_k = 0$$

erfüllt, wenn

$$x_0 \left(CF(b, a, c) + \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} R_i g_k \right) = 0$$

ist.

Die Mächtigkeit der Lösungsmengen hängt dabei nicht von der Folge (γ_n) ab.

Natürlich lässt sich der Satz auch formulieren, wenn wie in Satz 5.2.2 die Koeffizienten auf der linken Seite der x_i stehen, ist die Anfangsbedingung dann

$$b_0x_0 + a_1x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_kx_k = 0,$$

so wird $p_{0k} = g_k$ für $k \geq 2$ gewählt, es muss dann ein Lemma 5.7.1 entsprechendes Resultat für $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ gezeigt werden. Wie auch in dem betrachteten Fall ändert die veränderte Anfangsbedingung nichts an der Erfüllung der Differenzgleichung durch eine Kettenbruchlösung selbst, x_0 muss schließlich als Lösung von

$$\left(CF(b, a, c) + \sum_{k=2}^{\infty} g_k \prod_{i=0}^{i=k-1} L_i \right) x_0 = 0$$

gewählt werden. Da dieses Resultat allerdings in den noch folgenden Anwendungen nicht mehr verwendet wird, soll an dieser Stelle ebenso wenig darauf eingegangen werden wie auf die Möglichkeit, eine entsprechende Verallgemeinerung der Anfangsbedingung in den dritten und vierten Aussagen der Sätze 5.2.1 und 5.2.2 (nicht verschwindende Konstante in der Anfangsbedingung) zu betrachten. Wie auch eine weitere Abschwächung der Struktur von P führt dies auf Verallgemeinerungen von Kettenbrüchen, den in der Einleitung angesprochenen „Generalized Continued Fractions“ in der Definition von De Bruin und Van der Cruyssen, hier allerdings nicht über \mathbb{C} , sondern über einer Banachalgebra.

Kapitel 6

Anwendung auf Markovketten

6.1 Interpretation der S -Reihen

Schon in den Beweisen der Sätze 4.1.1 und 5.3.1 wurden Ausschnitte von P als Übergangsmatrix einer Markovkette interpretiert. Ist P insgesamt die Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in diskreter Zeit, so folgt mit den Eigenschaften homogener Markovketten

$$\begin{aligned} S(P, i, j, A) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{n-1} \in A \\ j_0 = i, j_n = j}} \prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}} \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j_1, \dots, j_{n-1} \in A \\ j_0 = i, j_n = j}} \text{Prob}(X_r = j_r \ (r = 1, \dots, n) \mid X_0 = j_0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}(X_n = j, X_p \in A \ (p = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = i). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ die Rückkehrwahrscheinlichkeit der Markovkette in den Zustand 0, also durch 1 beschränkt und damit stets absolut konvergent. Ist $X^{(A)}$ eine Markovkette mit der eingeschränkten Übergangsmatrix $(p_{ij})_{i, j \in A}$, so gilt für $i, j \in A$

$$S(P, i, j, A) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}(X_n^{(A)} = j \mid X_0 = i).$$

Hier soll nun das Kriterium für Transienz und Rekurrenz erwähnt werden, dass auch schon in den Beweisen der Sätze 4.1.1 und 5.3.1 verwendet wurde.

Satz 6.1.1. *Es sei E der Zustandsraum einer Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Genau dann konvergiert*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}(X_n = j | X_0 = j),$$

wenn der Zustand $j \in E$ transient ist. In diesem Fall konvergiert sogar für jedes $i \in E$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}(X_n = j | X_0 = i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}(X_n = j | X_0 = j).$$

Beweis. Siehe etwa [31], Kapitel 5. □

Speziell für $j = i$ konvergiert $S(P, i, i, A)$ mit $i \in A$ also genau dann, wenn der Zustand i bezüglich $(X_n^{(A)})$ transient ist. Damit lässt sich sehr genau klassifizieren, unter welchen Bedingungen eine Übergangsmatrix $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ bzw. $P \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ ist.

Satz 6.1.2. *Es sei P eine tridiagonale Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum \mathbb{N}_0 . Genau dann ist $P \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, wenn für jeden Zustand $i \in \mathbb{N}$ wenigstens eine der Aussagen*

- „ i ist transient.“
- „von i aus ist 0 erreichbar.“
- „von i aus sind unendlich viele Zustände erreichbar.“

gilt. Genau dann ist $P \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$, wenn für jeden Zustand $i \in \mathbb{N}$ eine der ersten beiden Aussagen gilt. Insbesondere ist sicher $P \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$, wenn P irreduzibel ist.

Beweis. $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist als Rückkehrwahrscheinlichkeit in den Zustand 0 ohnehin konvergent, $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,N})$ für $1 \leq i \leq N$ unter den angegebenen Voraussetzungen ebenfalls, da in jedem der drei Fälle i bezüglich der Übergangsmatrix $(p_{uv})_{u,v=i}^N$ transient ist. Ist für ein $i \in \mathbb{N}$ keine der Aussagen wahr, so sei es minimal mit dieser Eigenschaft. Dann ist jedoch i rekurrent, und es gibt ein derartiges $N \in \mathbb{N}$, für das i auch bezüglich $(p_{uv})_{u,v=i}^N$ rekurrent ist. Dann divergiert jedoch $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,N})$ und es folgt $P \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Ist stets eine der ersten beiden Aussagen wahr, so ist i stets bezüglich $(p_{uv})_{u,v=i}^\infty$ transient und $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ konvergiert. Ist umgekehrt für ein $i \in \mathbb{N}$ keine der ersten beiden Aussagen wahr, so sei es minimal. Dann ist i bezüglich $(p_{uv})_{u,v=i}^\infty$ rekurrent, und $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ divergiert. □

Es werden nun Markovketten $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum

$$E = \{(n, u) : n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq u \leq d_n\}$$

mit $d_n \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachtet. Der Zustandsraum ist dann zweidimensional, für $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ heißt $X_n^{(1)}$ *Level* und $X_n^{(2)}$ *Phase* des Zustands. Es wird nun angenommen, dass Übergänge zwischen zwei Zuständen (m, u) und (n, v) nur möglich sind, wenn $|m - n| \leq 1$ ist, d.h. bezüglich des Levels sind nur Schritte, keine Sprünge möglich. Derartige Markovketten werden auch als *Quasi-Geburts- und Todesprozesse in diskreter Zeit* bezeichnet. Werden die Zustände alphanumerisch sortiert, so entsteht eine blocktridiagonale Struktur

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & & & \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & & \\ & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

mit Matrizen $p_{ij} = (P(X_1 = (j, v) | X_0 = (i, u))) \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$. Die grundlegende Banachalgebra ist hier

$$\mathcal{R} = \left\{ B = (b_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} : b_{ij} \in \mathbb{C}, \|B\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} |b_{ij}| < \infty \right\}$$

mit $\|\cdot\|$ als Norm. Die Matrizen $p_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ werden in \mathcal{R} integriert, indem die ursprünglichen Einträge einfach in die nordwestliche $d_i \times d_j$ -Ecke geschrieben werden, und alle restlichen Einträge auf Null gesetzt werden, d.h. von nun an wird p_{ij} als Element aus \mathcal{R} interpretiert, aber es bleibt bekannt, dass p_{ij} nur in der nordwestlichen $d_i \times d_j$ -Ecke nicht-verschwindende Einträge hat. Dadurch wird der Zustandsraum der Markovkette formal auf $\bar{E} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ erweitert, allerdings ist von einem Zustand aus E kein Zustand aus $\bar{E} \setminus E$ erreichbar und jeder Zustand aus $\bar{E} \setminus E$ ist transient.

Für das Produkt $p_{ij}p_{jk}$ zweier Blockmatrizen aus P gilt

$$\begin{aligned} p_{ij}p_{jk} &= \left(\sum_{v \in \mathbb{N}} \text{Prob}(X_1 = (j, v) | X_0 = (i, u)) P(X_2 = (k, w) | X_1 = (j, v)) \right)_{u, w \in \mathbb{N}} \\ &= \left(\text{Prob} \left(X_2 = (k, w), X_1^{(1)} = j \mid X_0 = (i, u) \right) \right)_{u, w \in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

woraus iterativ

$$\prod_{r=0}^{n-1} p_{j_r, j_{r+1}} = \left(\text{Prob} \left(X_n = (j, v), X_r^{(1)} = j_r \ (r = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = (i, u) \right) \right)_{u, v \in \mathbb{N}}$$

folgt. Da das Produkt nur in den Zeilen von 0 verschiedene Einträge haben kann, in denen p_{j_0, j_1} von 0 verschiedene Einträge hat, und nur in den Spalten von 0 verschiedene Einträge

haben kann, in denen p_{j_{n-1}, j_n} von 0 verschiedene Einträge hat, handelt es sich dabei bis auf ergänzende Nullen um eine $d_{j_0} \times d_{j_n}$ -Matrix. Für die S -Reihen folgt

$$S(P, i, j, A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob} (X_n = (j, v), X_r^{(1)} \in A (r = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = (i, u)) \right)_{u, v \in \mathbb{N}},$$

wobei es sich bis auf ergänzende Nullen wieder um eine $d_i \times d_j$ -Matrix handelt. Ist $i, j \in A$ und der Zustand (j, v) transient bezüglich der auf $A \times \mathbb{N}$ eingeschränkten Markovkette, so konvergieren alle Reihen in der Spalte v von $S(P, i, j, A)$. Ist hingegen (i, u) rekurrent bezüglich der auf $A \times \mathbb{N}$ eingeschränkten Markovkette, so divergiert sicher die Komponente von $S(P, i, i, A)$ an der Stelle (u, u) . Damit lassen sich auch tridiagonale Blockmatrizen als Elemente von \mathcal{M} bzw. \mathcal{M}_D identifizieren.

Satz 6.1.3. *Es sei P eine Block-tridiagonale Übergangsmatrix mit Zustandsraum $\bar{E} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, wobei p_{ij} außerhalb der nordwestlichen $d_i \times d_j$ -Ecke ausschließlich Nullen enthält. Genau dann ist $P \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, wenn für jeden Zustand $(i, u) \in E = \{(n, u) : n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq u \leq d_n\}$ wenigstens eine der Aussagen*

- „ (i, u) ist transient.“
- „Von (i, u) aus ist ein Zustand der Form $(0, v) \in E$ erreichbar.“
- „Von (i, u) aus sind unendlich viele Zustände aus E erreichbar.“

gilt. Genau dann ist $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$, wenn für jeden Zustand (i, u) eine der beiden ersten Aussagen gilt. Insbesondere ist in dem Fall, dass die Einschränkung auf E Irreduzibilität liefert, $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$.

Beweis. Die Zeilensummen von $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob} (X_n^{(1)} = 0, X_r^{(1)} \neq 0 (r = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = (0, u))$$

sind als Wahrscheinlichkeiten sämtlich durch 1 beschränkt, d.h. $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist stets absolut konvergent in \mathcal{R} . $S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})$ enthält für $i \geq 1$ endlich viele von 0 verschiedene Einträge, ist eine der drei Aussagen gegeben und $N < \infty$, so ist jeder der Zustände (i, v) transient bezüglich der auf $\mathbb{N}_{iN} \times \mathbb{N}$ eingeschränkten Markovkette. Die Zeilensummennorm $\|\cdot\|$ kann dann durch die Summe aller Einträge abgeschätzt werden, diese ist immer noch endlich. Ist umgekehrt für ein (i, u) keine der Aussagen erfüllt, so sei i minimal. Dann gibt es ein derartiges $N \in \mathbb{N}$, dass (i, u) bezüglich der auf $\mathbb{N}_{iN} \times \mathbb{N}$ eingeschränkten Markovkette rekurrent ist, die Komponente von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})$ an der Stelle (u, u) divergiert, stellt aber gleichzeitig eine untere Schranke für die Zeilensummennorm von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{iN})$ dar, d.h. es liegt Divergenz vor. Entsprechend folgt auch die Einstufung von $P \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ mit auf $\mathbb{N}_{i, \infty} \times \mathbb{N}$ eingeschränkten Markovketten. \square

6.2 Die Matrix $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$

Es wurde bereits gezeigt, dass $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ für Block-Übergangsmatrizen P stets absolut konvergiert und es sich bis auf ergänzende Nullen um eine $d_0 \times d_0$ -Matrix handelt, der Eintrag an der Stelle (u, v) ist gerade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob} (X_n = (0, v), X_r^{(1)} \neq 0 (r = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = (0, u)).$$

Es handelt sich dabei um die Wahrscheinlichkeit, dass die in $(0, u)$ startende Markovkette jemals in einen Zustand mit Level 0 zurückkehrt, und dass bei der ersten solchen Rückkehr die Phase v angenommen wird. Die Zeilensummen sind gerade die Wahrscheinlichkeiten, dass die in $(0, u)$ startende Markovkette jemals in das Level 0 zurückkehrt. Somit sind die Zeilensummen durch 1 beschränkt, und $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist selbst wieder eine Übergangsmatrix. Ist für die Markovkette von $(0, u)$ ausgehend der Zustand $(0, v)$ erreichbar, so gibt es eine endliche Folge $(i_r, u_r)_{r=0}^n$ mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten von (i_r, u_r) nach (i_{r+1}, u_{r+1}) , mit $(i_0, u_0) = (i, u)$ und $(i_n, u_n) = (0, v)$. Wird nur die Teilfolge von Zuständen der Form $(0, u_r)$ betrachtet, so entsteht eine endliche Folge $(u_r)_{r=0}^n$ mit $u_0 = u$ und $u_n = v$ derart, dass von $(0, u_r)$ aus $(0, u_{r+1})$ erreichbar ist, ohne dass zwischendurch noch ein weiterer Zustand des Levels 0 angenommen werden muss. Insbesondere enthält dann $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ an den Stellen (u_r, u_{r+1}) einen positiven Eintrag, und für eine Markovkette mit Übergangsmatrix $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist vom Zustand u aus der Zustand v erreichbar. Damit folgt

Satz 6.2.1. *Es sei P eine Block-tridiagonale Übergangsmatrix mit Zustandsraum $\bar{E} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, wobei p_{ij} sicher außerhalb der nordwestlichen $d_i \times d_j$ -Ecke ausschließlich Nullen enthält, und auf $E = \{(n, u) : n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq u \leq d_n\}$ eingeschränkt sei P irreduzibel rekurrent. Dann ist $P \in \mathcal{M}_D(\mathbb{R})$ und $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist eine irreduzible stochastische Übergangsmatrix.*

6.3 Berechnung eines stationären Maßes

Es soll nun davon ausgegangen werden, dass $(p_{ij})_{i,j \in E}$ irreduzibel rekurrent ist. In solchen Fällen ist ein stationäres Maß x von Interesse, also ein Vektor x mit $xP = 0$, $x \geq 0$ (komponentenweise) und $x \neq 0$ (vektoriell). x zerfällt hier in Teilvektoren $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit $x_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wegen der Tridiagonalität von P zerfällt $xP = 0$ in

$$\begin{aligned} x_0 p_{00} + x_1 p_{10} &= x_0, \\ x_{n-1} p_{n-1,n} + x_n p_{nn} + x_{n+1} p_{n,n+1} &= x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da p_{ij} außerhalb der nordwestlichen $d_i \times d_j$ -Ecke nur Nullen enthält, sind die Einträge von x_i außerhalb der ersten d_i Komponenten völlig beliebig. Es wird daher vereinbart, dass

x_i auch nur in den ersten d_i Komponenten von 0 verschiedene Einträge enthält. Dann ist x nach der Theorie der Markovketten bis auf einen konstanten skalaren Faktor eindeutig bestimmt und (in den jeweils ersten d_i Komponenten jedes Teilvektors x_i) strikt positiv wählbar. Mit dieser Vereinbarung ist nach dem Perron-Frobenius-Theorem weiterhin der Links-Eigenwert x_0 von $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ zum Perron-Frobenius-Eigenwert 1 (nach Satz 6.2.1 handelt es sich um eine irreduzible stochastische Matrix) ebenfalls bis auf einen konstanten Faktor eindeutig und strikt positiv wählbar. Wird nun Satz 5.2.1 angewendet, so lassen sich leicht die Koeffizienten $b_i = I - p_{ii}$, $a_i = p_{i,i-1}$ und $c_i = -p_{i,i-1}$ zur Lösung des Differenzgleichungssystems identifizieren, dabei ist I zunächst das neutrale Element in \mathcal{R} , also die unendlich-dimensionale Einheitsmatrix. Da diese Beziehungen in der Aussage des Satzes ebenfalls vorkommen, lässt sich dieser ohne weitere Transformation anwenden. Beim Berechnen der inversen Kettenbrüche R_n wird also die Rekursionsvorschrift

$$R_n^{(N)} = p_{n,n+1} \left(I - p_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1} \right)^{-1}$$

verwendet. Wegen der Interpretation $R_n^{(N)} = S(P, n, n+1, \mathbb{N}_{n+1,N})$ ist $R_n^{(N)}$ bis auf ergänzende Nullen eine $d_n \times d_{n+1}$ -Matrix, alternativ lässt sich dies auch induktiv aus der Rekursionsvorschrift zeigen. Damit ist $p_{n+1,n+1} + R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1}$ bis auf ergänzende Nullen eine $d_{n+1} \times d_{n+1}$ -Matrix und die Matrixinversion lässt sich „blockweise“ durchführen, indem zunächst die nordwestliche $d_{n+1} \times d_{n+1}$ -Matrix invertiert wird, und diese dann durch Einsen in den weiteren Hauptdiagonaleinträgen ergänzt wird. Damit ist klar, dass sich alternativ auch

$$R_n^{(N)} = p_{n,n+1} \left(I_{d_{n+1}} - p_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1} \right)^{-1}$$

iterieren lässt, wobei jetzt tatsächlich $p_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ ist, und I_d die $d \times d$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Wird noch beachtet, dass mit den Bezeichnungen aus Satz 5.2.1 gerade

$$CF(b, a, c) = I_{d_0} - p_{00} - R_0 p_{10}$$

ist, so liefert dieser

Satz 6.3.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzibel rekurrente block-tridiagonale Übergangsmatrix mit $p_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)} &= 0, & N \in \mathbb{N}_0 \\ R_n^{(N)} &= p_{n,n+1} \left(I_{d_{n+1}} - p_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1} \right)^{-1}, & n < N \\ R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)} \end{aligned}$$

definierten inversen Kettenbrüche R_n , die vektorwertige Lösung von

$$x_0 (I_{d_0} - p_{00} - R_0 p_{10}) = 0$$

ist bis auf einen konstanten skalaren Faktor eindeutig und kann strikt positiv gewählt werden. Durch $x_{n+1} = x_n R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird dann ein stationäres Maß für P berechnet.

Eine einfache Erweiterung ergibt sich, wenn $p_{i0} \neq 0$ auch für $i \geq 2$ erlaubt ist, es handelt sich dann bei der Markovkette um einen sogenannte *diskreten Quasi-Geburts- und Todesprozess mit Katastrophenszenarien*, hier kann Satz 5.7.1 herangezogen werden, die absolute Konvergenz von $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ wurde unabhängig von der Struktur von P bewiesen. Hier ist konkret $\gamma_n = I$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, insbesondere ist $CF(b, a, c) = I_{d_0} - p_{00} - R_0 p_{10}$. Damit folgt

Satz 6.3.2. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzibel rekurrente Block-Übergangsmatrix mit $p_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ und $p_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $j > 0$ und $|i - j| > 1$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)} &= 0, & N \in \mathbb{N}_0 \\ R_n^{(N)} &= p_{n,n+1} \left(I_{d_{n+1}} - p_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1} \right)^{-1}, & n < N \\ R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)} \end{aligned}$$

definierten inversen Kettenbrüche R_n , die vektorwertige Lösung von

$$x_0 \left(I - p_{00} - \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} R_i p_{n0} \right) = 0$$

ist bis auf einen konstanten skalaren Faktor eindeutig und kann strikt positiv gewählt werden. Durch $x_{n+1} = x_n R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird dann ein stationäres Maß für P berechnet.

6.4 Abschneiden

Um die Sätze 6.3.1 bzw. 6.3.2 praktisch verwenden zu können, stören die unendlichen Iterationen für R_n und x_n . In der Praxis muss stattdessen mit $R_n^{(N)}$ für ein großes $N \in \mathbb{N}$ gearbeitet werden. Ist $x_0^{(N)}$ so gewählt, dass $x_0^{(N)}$ für $N \rightarrow \infty$ gegen x_0 strebt, so konvergieren auch die durch $x_{n+1}^{(N)} = x_n^{(N)} R_n^{(N)}$ erklärten Werte $x_n^{(N)}$ gegen x_n . Das größere theoretische Problem entsteht bei der Approximation von x_0 durch $x_0^{(N)}$, denn $S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ als Approximation an $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ ist für genügend großes N zwar noch irreduzibel, jedoch nicht mehr stochastisch (es sei denn, P war nicht irreduzibel), somit besitzt

$$S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N}) = p_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} R_i p_{n0}$$

auch nicht mehr den Eigenwert 1. Es gibt nun zwei praktische Optionen:

- Da $S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$ immer noch irreduzibel und nichtnegativ ist, gibt es einen Perron-Frobenius-Eigenwert, der etwas kleiner als 1 ist. Der zugehörige linksseitige Perron-Frobenius-Eigenvektor ist ebenfalls bis auf einen konstanten Faktor eindeutig, kann strikt positiv gewählt werden, und strebt für $N \rightarrow \infty$ gegen den tatsächlich gesuchten Vektor x_0 .

- Da $I - S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ den Rang $d_0 - 1$ hat, würde bei exaktem Wert für $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ eine Komponente von x_0 fixiert, und eine der skalaren Gleichungen des zu lösenden Systems $x_0 (I - S(P, 0, 0, \mathbb{N})) = 0$ ignoriert. Dies wird einfach auf die Berechnung mit dem Approximationsfehler übertragen, d.h. eine Komponente von $x_0^{(N)}$ wird fixiert, eine Gleichung aus dem System $x_0^{(N)} (I - S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})) = 0$ wird ignoriert. Wird die fixierte Komponente strikt positiv und unabhängig von N gewählt, so ist $x_0^{(N)}$ das minimale subinvariante Maß für $S(P, 0, 0, \mathbb{N}_{1N})$, das für $N \rightarrow \infty$ von unten gegen x_0 , das invariante Maß für $S(P, 0, 0, \mathbb{N})$ mit der entsprechend fixierten Komponente konvergiert (siehe etwa [31], Kapitel 5). Da aufgrund der Interpretation als S -Reihe sichergestellt ist, dass $R_n^{(N)}$ ebenfalls von unten gegen R_n konvergiert, konvergiert sogar der komplette Vektor $x^{(N)}$ insgesamt von unten gegen den gesuchten Vektor x .

Welche der beiden Optionen in der Praxis verwendet wird, spielt nur eine untergeordnete Rolle, da für genügend großes $N \gg n$ der durch das Abschneiden entstandene Fehler für $x_n^{(N)}$ ohnehin kleiner ist als unvermeidbare Rechenfehler. In vielen praktischen Fällen liegt sogar positive Rekurrenz vor, und es ist die stationäre Verteilung π , also ein stationäres Maß mit $\sum \|\pi_i\| = 1$ gesucht. Dazu wird nach dem Berechnen der x_i noch durch $\sum \|x_i\|$ geteilt. Dabei geht auch die Eigenschaft der Konvergenz von unten, also ein Vorteil der zweiten Variante, verloren.

Allgemein lässt sich keine Fehlerabschätzung für den Abschneidevorgang angeben, somit gibt es auch keine allgemeinen Empfehlungen für die Wahl des Abschneidelevels N . Für Spezialfälle gibt es jedoch Ansätze, siehe etwa [7].

Bemerkung 6.4.1. Eine Alternative beim Abschneideprozess besteht noch darin, $N, M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ zu wählen, zunächst $R_N^{(M)}$ zu bestimmen, dann rekursiv $R_{N-1}^{(M)}, \dots, R_0^{(M)}$ und anschließend $x_1^{(M)}, \dots, x_{N+1}^{(M)}$ zu ermitteln, also eine Art Voriteration für R_N durchzuführen. Eine intuitive Begründung liegt darin, dass $R_{N+1}^{(M)}, \dots, R_M^{(M)}$ ohnehin ungenau und somit $x_{N+2}^{(M)}, \dots, x_{M+1}^{(M)}$ nicht vertrauenswürdig sind. Allerdings sind auch $x_{N+2}^{(M)}, \dots, x_{M+1}^{(M)}$ stets nichtnegative Vektoren und punktweise $\leq x_{N+2}, \dots, x_{M+1}$, bei der anschließenden Normierung wirkt ihre Miteinbeziehung also in die richtige Richtung. Anstelle einer Voriteration ist es daher besser, einfach den Abschneidepunkt etwas zu erhöhen, alle berechneten Teilvektoren des stationären Maßes in dessen Normierung miteinzubeziehen, aber den letzten dieser Teilvektoren nicht zu vertrauen. Der Vorteil der Voriteration, dass $R_{N+1}^{(M)}, \dots, R_M^{(M)}$ nicht gespeichert werden müssen, ist für kleine Differenzen $M - N$ unerheblich, und für große Werte von N und somit viel Speicherplatzbedarf sind ohnehin andere Möglichkeiten der Speicherplatzreduzierung besser geeignet (siehe Abschnitt 6.7).

6.5 Markovketten in stetiger Zeit

Markovketten $(Y_t)_{t \geq 0}$ in stetiger Zeit werden durch ihre Generatormatrix Q charakterisiert. Hier sei E wie oben gegeben und auch Q in Blöcke $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ untergliedert, die einzelnen

Elemente seien $q_{ij(u,v)}$, es sei angenommen, dass kein Zustand absorbierend ist, d.h. $q_{ii(u,u)} < 0$ für alle $(i, u) \in E$. Wird nun

$$p_{ij(u,v)} = \delta_{ij}\delta_{uv} - \frac{q_{ij(u,v)}}{q_{ii(u,u)}},$$

also

$$p_{ij} = \delta_{ij}I + \gamma_i^{-1}q_{ij} \quad \text{mit} \quad \gamma_i = \text{diag}(-q_{ii(u,u)})_{u=1}^{d_i}$$

gesetzt, so ist $P = (p_{ij})$ gerade die Übergangsmatrix der *eingebetteten Sprungkette*, der Markovkette in diskreter Zeit, die nur die Übergänge zu Sprungzeitpunkten betrachtet. Die Irreduzibilität und die Rekurrenz von $(Y_t)_{t \geq 0}$ und der eingebetteten Sprungkette fallen zusammen. Zur formalen Einbettung in die Banachalgebra \mathcal{R} wird q_{ij} zunächst wieder erweitert, dabei $q_{ii(u,u)} < 0$ beliebig für $u > d_i$ gesetzt, sonst wird durch Nullen ergänzt. Nach der Transformation sind dann die p_{ij} wieder mit Nullen ergänzte $d_i \times d_j$ -Matrizen. Es gilt nun

$$q_{ii} = -\gamma_i(I - p_{ii}), \quad q_{i,i+1} = \gamma_i p_{i,i+1}, \quad q_{i,i-1} = \gamma_i p_{i,i-1}, \quad q_{i0} = \gamma_i p_{i0}$$

d.h. mit $b_i = -q_{ii} = \gamma(I - p_{ii})$, $a_i = q_{i-1,i} = \gamma_{i-1} p_{i-1,i}$, $c_i = -q_{i,i-1} = -\gamma_i p_{i,i-1}$ sowie gegebenenfalls $g_i = -q_{i0} = -\gamma_i p_{i0}$ liefert Satz 5.4.1 bzw. Satz 5.7.1

Satz 6.5.1. *Es sei $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzibel rekurrente Block-Übergangsmatrix mit $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ und $q_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $j > 0$ und $|i - j| > 1$. Dann konvergieren die*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)} &= 0, & N \in \mathbb{N}_0 \\ R_n^{(N)} &= q_{n,n+1} \left(-q_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)} p_{n+2,n+1} \right)^{-1}, & n < N \\ R_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)} \end{aligned}$$

definierten inversen Kettenbrüche R_n , die vektorwertige Lösung von

$$x_0 \left(-q_{00} - \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} R_i q_{n0} \right) = 0$$

ist bis auf einen konstanten skalaren Faktor eindeutig und kann strikt positiv gewählt werden. Durch $x_{n+1} = x_n R_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wird dann ein stationäres Maß für P berechnet.

6.6 Interpretation der R_n

Es soll noch eine kurze Interpretation der Einträge von R_n für Markovketten in diskreter und stetiger Zeit gegeben werden. Zu Beginn dieses Kapitels wurde bereits dargestellt, dass $R_n = S(P, n, n+1, \mathbb{N}_{n+1, \infty})$ ist, also R_n an der Stelle (u, v) den Eintrag

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Prob} (X_k = (n+1, v), X_r^{(1)} \geq n+1 \mid X_0 = (n, u))$$

enthält. Wird die Zufallsvariable $Z_{(n,v)}$ als die Anzahl der Besuche im Zustand (n, v) vor dem ersten Sprung in einen Zustand mit Level $< n$ definiert, so handelt es sich dabei gerade um

$$E[Z_{(n+1,v)}|X_0 = (n, u)].$$

Bei Markovketten in stetiger Zeit wurde eine Transformation der inversen Kettenbrüche nach Lemma 5.4.1 mit $\gamma_i = \text{diag}(-q_{ii(u,u)})_{u=1}^{d_i}$ durchgeführt, die das Problem auf Markovketten in diskreter Zeit zurückführte. Im Umkehrschluss heißt dies nun, dass für Markovketten in stetiger Zeit R_n an der Stelle (u, v) den Eintrag

$$-\frac{1}{q_{n+1,n+1(v,v)}} E[Z_{(n+1,v)}|X_0 = (n, u)]$$

enthält, wobei $Z_{(n,v)}$ wie oben definiert ist. Da die Zeit, die die Markovkette in stetiger Zeit im Zustand $(n + 1, v)$ verweilt, gerade exponentiell mit Parameter $-q_{n+1,n+1(v,v)}$ verteilt ist, entspricht dies

$$E[T_{(n+1,v)}|X_0 = (n, u)],$$

wenn die Zufallsvariable $T_{(n,v)}$ als die Zeit definiert wird, die die Markovkette insgesamt im Zustand (n, v) verweilt, bevor der erste Sprung in einen Zustand mit Level $< n$ erfolgt.

6.7 Algorithmen

Hier werden nur Algorithmen zur Berechnung der stationären Verteilung für Quasi-Geburts- und Todesprozesse mit Katastrophenszenarien in stetiger Zeit betrachtet. Die Algorithmen für derartige Prozesse in diskreter Zeit sind analog, $-q_{ii}$ ist dann durch $I - p_{ii}$, $q_{i,i+1}$ durch $p_{i,i+1}$, und $q_{i+1,i}$ durch $p_{i+1,i}$ zu ersetzen.

Sei also $(Y_t)_{t \geq 0}$ eine irreduzibel positiv rekurrente Markovkette in stetiger Zeit mit Block-Generatormatrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ mit $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ und $q_{ij} = 0$, falls $i > 0$ und $|i - j| > 1$ ist. Ist zusätzlich $q_{0j} = 0$ für $j \geq 2$ angenommen, liegt also ein echter Quasi-Geburts- und Todesprozess vor, so liefert Satz 6.5.1 den einfachen Algorithmus, $R_N = 0$ für ein großes N zu setzen, $R_{N-1}, R_{N-2}, \dots, R_0$ zu bestimmen, x_0 aus $x_0(-q_{00} - R_0 q_{01}) = 0$ und anschließend x_1, x_2, \dots, x_N iterativ zu ermitteln, und schließlich zu normalisieren, um die stationäre Verteilung π zu erhalten. In dieser Form findet sich der Algorithmus bei Hanschke [15], ähnliche Algorithmen auch bei Bright und Taylor [7] und bei Gaver, Jacobs und Latouche [12], die sämtlich als Verallgemeinerung der durch Neuts [22] eingeführten matrixgeometrischen Methoden für levelunabhängige Quasi-Geburts- und Todesprozesse ($q_{n,n+1}$, q_{nn} und $q_{n,n-1}$ hängen bis auf endlich viele Ausnahmen nicht von n ab) zu verstehen sind. Während der Algorithmus von Gaver, Jacobs und Latouche ohnehin nur für endliche Levelmengen gedacht ist, versuchen Bright und Taylor zunächst den Wert R_N zu schätzen und dann q_{NN} durch $q_{NN} + R_N q_{N+1,N}$ zu ersetzen, dies würde dann den exakten Wert für R_{N-1} liefern (in der Praxis verwenden sie eine Voriteration, siehe Bemerkung 6.4.1).

In keiner der zitierten Arbeiten wird bewiesen, dass die inversen Kettenbrüche $R_n^{(N)}$ für $N \rightarrow \infty$ gegen R_n konvergieren, sondern lediglich, dass die ermittelten stationären Verteilungen für $N \rightarrow \infty$ gegen die tatsächliche stationäre Verteilung konvergieren. Ohnehin hat die Konvergenz der inversen Kettenbrüche in diesem Kontext lediglich theoretische Bedeutung. Als praktische Erweiterungen sollen in dieser Arbeit noch die angesprochene Erlaubnis von $q_{i0} \neq 0$ für $i \geq 2$ (Katastrophenszenarien) sowie Algorithmen zur effizienten Speicherplatznutzung angegeben werden.

6.7.1 Der Basis-Algorithmus

Gegenüber Quasi-Geburts- und Todesprozessen ohne Katastrophen wird die Bestimmung von x_0 mittels der Gleichung

$$x_0 \left(-q_{00} - \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} R_i q_{n0} \right) = 0$$

auf den ersten Blick etwas aufwendiger. Auch wenn in der Praxis abgeschnitten wird, und nur der Term

$$K = -q_{00} - \sum_{n=1}^N \prod_{i=0}^{n-1} R_i q_{n0}$$

berechnet werden muss (Lösung des Systems $x_0 K = 0$ siehe Abschnitt 6.4), handelt es sich immer noch um einen umfangreichen Term. Es ist jedoch nicht nötig, erst alle R_n auszurechnen, und erst anschließend K aus den R_n zu ermitteln, da sich

$$K = -q_{00} + R_0 (-q_{10} + R_1 (-q_{20} + R_2 (\dots - q_{N-1,0} - R_{N-1} q_{N0})))$$

schreiben lässt. Damit kann K während der Bestimmung der R_n iterativ mitberechnet werden.

Algorithmus 6.7.1. $(Y_t)_{t \geq 0}$ sei eine irreduzibel positiv rekurrente Markovkette in stetiger Zeit mit Block-Generatormatrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ mit $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ und $q_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$ ist.

Gesucht: Stationäre Verteilung für $(Y_t)_{t \geq 0}$ (oder eine Approximation).

- Wähle N groß, setze $R_N = 0$ und $K = -q_{N0}$.
- Für $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$ berechne

$$R_n = q_{n,n+1} (-q_{n+1,n+1} - R_{n+1} q_{n+2,n+1})^{-1}$$

und ersetze K durch $-q_{n0} + R_n K$.

- Bestimme x_0 als nicht verschwindende Lösung von $x_0 K = 0$.
- Für $n = 0, 1, \dots, N - 1$ berechne $x_{n+1} = x_n K_n$.
- Setze $\pi_n = \frac{x_n}{\sum \|x_k\|}$.

6.7.2 Reduktion des Speicherplatzbedarfs

Ein Nachteil von Algorithmus 6.7.1 besteht darin, dass alle Matrizen R_n gespeichert werden müssen. Diese sind im Allgemeinen auch voll besetzt, so dass sparse-matrix-Methoden zur Speicherung (Erläuterung siehe unten) hier nicht in Frage kommen. Es müssen zeitgleich K und die Matrizen R_0, \dots, R_{N-1} abgespeichert werden, nach der Berechnung von x_0 kann K gelöscht werden, nach der Berechnung von x_1 kann R_0 gelöscht werden, usw. Für $d_i = d$ unabhängig von i müssen also in der Spitze $(N + 1) \cdot d^2$ reelle Zahlen gespeichert werden. Eine Alternative zur Lösung großer Gleichungssysteme besteht natürlich immer in iterativen Methoden wie dem Gauß-Seidel-Verfahren, dem Jacobi-Verfahren, dem SOR-Verfahren oder speziell für Markovketten der Potenzmethode (allgemeine numerische Verfahren für Markovketten siehe etwa [34]). Für diese müssen gleichzeitig die aktuelle Iteration bestehend aus $(N + 1) \cdot d$ reellen Zahlen sowie die Iterationsmatrix gespeichert werden. Die Iterationsmatrix ist dabei höchstens so stark besetzt wie die Generatormatrix Q . In vielen praktischen Problemen sind auch die Blöcke $q_{n,n-1}$, q_{nn} und $q_{n,n+1}$ so dünn besetzt, dass in jeder skalaren Zeile von Q nur etwa m (mit einer Zahl $m \ll d$ zwischen 4 und 10) von Null verschiedene Werte enthalten sind. In diesem Fall bieten sich zur Speicherung der Iterationsmatrix sparse-matrix-Methoden an, das heißt, es werden nur die von Null verschiedenen Werte (reelle Zahlen) mitsamt ihren Positionen (zwei ganze Zahlen) gespeichert. Dadurch kommt es, je nach Verhältnis von m und d , in vielen Fällen dazu, dass die iterativen Methoden tatsächlich weniger Speicherplatz benötigen als Algorithmus 6.7.1.

Eine einfache Idee, den Speicherplatzbedarf zu reduzieren, besteht darin, nicht alle Werte R_n zu speichern, sondern nur R_{kM} für ein festes $M \geq 2$ und $k = 0, 1, 2, \dots$ zu speichern. Die fehlenden R_n zur Bestimmung von x_{n+1} werden später bei Bedarf neu ermittelt, indem dann von R_{kM} ausgehend die Werte $R_{kM-1}, R_{kM-2}, \dots, R_{kM-M+1}$ berechnet werden. Dadurch werden gleichzeitig etwa $M + \frac{N}{M}$ Matrizen abgespeichert, für konstantes $d_i = d$ bietet sich eine Wahl $M \approx \sqrt{N}$ an, die diesen Wert minimiert.

Algorithmus 6.7.2. $(Y_t)_{t \geq 0}$ sei eine irreduzibel positiv rekurrente Markovkette in stetiger Zeit mit Block-Generatormatrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ mit $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und $q_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$ ist.

Gesucht: Stationäre Verteilung für $(Y_t)_{t \geq 0}$ (oder eine Approximation).

- Wähle $N = M^2$ groß, setze $R = R_N = 0$ und $K = -q_{N0}$.
- Für $k = M - 1, M - 2, \dots, 0$
 - Für $n = kM + N - 1, kM + N - 2, \dots, kM$ ersetze R durch

$$q_{n,n+1} (-q_{n+1,n+1} - Rq_{n+2,n+1})^{-1}$$

und K durch $-q_{n0} + RK$.

- Speichere $R_{kM} = R$.

- Berechne x_0 als nicht verschwindende Lösung von $x_0 K = 0$ und lösche K .
- Für $k = 0, 1, \dots, M - 1$
 - Für $n = kM + M - 1, kM + M - 2, \dots, kM + 1$ berechne
$$R_n = q_{n,n+1} (-q_{n+1,n+1} - R_{n+1} q_{n+2,n+1})^{-1}.$$
 - Für $n = kM, kM + 1, \dots, kM + M - 1$ setze $x_{n+1} = x_n R_n$.
 - Lösche $R_{kM}, R_{kM+1}, \dots, R_{kM+M-1}$.
- Setze $\pi_n = \frac{x_n}{\sum \|x_k\|}$.

Ist d_i nicht konstant, so bieten sich gegebenenfalls andere Werte für M an, oder auch nicht äquidistante Abstände der Indizes der zu speichernden R_n . Für Algorithmus 6.7.2 müssen gleichzeitig nun nur noch etwa $2\sqrt{N} \cdot d^2$ reelle Zahlen für die R_n abgespeichert werden. Je nach Verhältnis der Zahlen N und d (und im Vergleich mit den iterativen Verfahren der Anzahl m der nichtverschwindenden Werte in jeder skalaren Zeile von Q) ist der Speicherplatzbedarf dadurch deutlich reduziert. Der Preis dafür ist eine Erhöhung der Rechenzeit, diese hängt davon ab, welcher Anteil der Rechenzeit in Algorithmus 6.7.1 für die Iteration der R_n benötigt wird, und welcher Anteil für die anderen Aufgaben. Algorithmus 6.7.2 ist höchstens um den Faktor 2 langsamer als Algorithmus 6.7.1.

6.7.3 Berechnen von Kenngrößen

In vielen praktischen Anwendungen ist gar nicht die stationäre Verteilung π selbst von Interesse, sondern einige stationäre Kenngrößen der Form

$$E[f] = \pi f := \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n f_n$$

mit Spaltenvektoren $f_n \in \mathbb{C}^{d_n}$. Aus derartigen Werten lassen sich beispielsweise leicht das mittlere stationäre Level, seine Varianz, die mittlere stationäre Phase, ihre Varianz, usw. zusammensetzen.

Anstatt zunächst π komplett zu berechnen und dann πf auszuwerten, lässt sich der Basisalgorithmus 6.7.1 derart modifizieren, dass dies bereits während der Ermittlung der R_n erledigt wird. Ähnlich wie bei der Berechnung von K lässt sich für die Approximation

$$\sum_{n=0}^N \pi_n f_n = \pi_0 (f_0 + R_0 (f_1 + R_1 (\dots f_{N-1} + R_{N-1} f_N)))$$

schreiben. Sollen nur verschiedene derartige Werte $E_1 := \pi f^{(1)}, E_2 := \pi f^{(2)}, \dots, E_M := \pi f^{(M)}$ ermittelt werden, so müssen die R_n gar nicht mehr gespeichert werden, E_1, \dots, E_M

und K werden während der Iteration der R_n bis auf den Faktor π_0 bestimmt, aus $x_0 K = 0$ kann dann x_0 bestimmt werden, und damit E_1, \dots, E_M bis auf einen von der konkreten Funktion $f^{(i)}$ unabhängigen konstanten reellen Faktor. Dieser lässt sich einfach herausfinden, indem $f_i^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gesetzt wird und auch $E_0 = \pi f^{(0)}$ mit bestimmt wird. Aus $E_0 = 1$ wird dann der konstante Faktor ermittelt.

Algorithmus 6.7.3. $(Y_t)_{t \geq 0}$ sei eine irreduzibel positiv rekurrente Markovkette in stetiger Zeit mit Block-Generatormatrix $Q = (q_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ mit $q_{ij} \in \mathbb{C}^{d_i \times d_j}$ und $q_{ij} = 0$, falls $j > 0$ und $|i - j| > 1$ ist.

Gesucht: Stationäre Kenngrößen $E_1 = \pi f^{(1)}, \dots, E_M = \pi f^{(M)}$ (oder Approximationen).

- Ergänze Funktion $f^{(0)}$ mit $f_i^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{C}^{d_i}$.
- Wähle N groß, setze $R = 0$, $K = -q_{N0}$ und $E_m = f_N^{(m)}$ für $m = 0, \dots, M$.
- Für $n = N - 1, N - 2, \dots, 0$ ersetze R durch

$$q_{n,n+1} (-q_{n+1,n+1} - Rq_{n+2,n+1})^{-1},$$

K durch $-q_{n0} + RK$, und E_m für $m = 0, \dots, M$ durch $f_n^{(m)} + RE_m$.

- Bestimme x_0 als nicht verschwindende Lösung von $x_0 K = 0$, und definiere $\Sigma = x_0 E_0$.
- Ersetze E_m für $m = 1, \dots, M$ durch $\frac{x_0 E_m}{\Sigma}$.

Algorithmus 6.7.3 berechnet die Kenngrößen E_1, \dots, E_M mindestens genau so schnell wie Algorithmus 6.7.1 mit anschließender Berechnung der Skalarprodukte $\pi f^{(m)}$, benötigt dafür aber fast keinen Speicherplatz, lediglich die Matrizen R und K sowie $M + 1$ Vektoren (die Zwischenergebnisse für die E_i) müssen gespeichert werden. Für viele praktische Probleme reicht eine Berechnung von Werten, die sich aus derartigen Kenngrößen zusammensetzen lassen, völlig aus.

6.8 Zeitabhängige Lösungen

Wird für eine diskrete Markovkette mit tridiagonaler Block-Übergangsmatrix P und Anfangsverteilung $(f, 0, 0, 0, \dots)$ mit $\|f\| = 1$ die Funktion

$$\phi_n(z) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \text{Prob}(X_m = (n, u)) \cdot z^m \right)_{u=1}^{d_n}$$

definiert, so folgt

$$\phi_0(z) = f + \phi_0(z)p_{00}z + \phi_1(z)p_{10}z$$

und

$$\phi_n(z) = \phi_{n-1}(z)p_{n-1,n}z + \phi_n(z)p_{nn}z + \phi_{n+1}(z)p_{n+1,n}z, \quad n \in \mathbb{N},$$

also ein System der Form aus dem dritten Punkt in Satz 5.2.1. Um diesen anzuwenden, reicht es aus, nachzuweisen, dass $\tilde{P} \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ ist, wobei \tilde{P} die Einträge

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{00} &= 0 \\ \tilde{p}_{01} &= f \\ \tilde{p}_{10} &= I \\ \tilde{p}_{ii} &= p_{i-1,i-1}z, \quad i \in \mathbb{N} \\ \tilde{p}_{i,i+1} &= p_{i-1,i}z, \quad i \in \mathbb{N} \\ \tilde{p}_{i+1,i} &= p_{i,i-1}z, \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

enthält, insbesondere ist damit $S\left(\tilde{P}, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty}\right) = S(P \cdot z, i-1, i-1, \mathbb{N}_{i-1,\infty})$, d.h. es reicht aus, die absolute Konvergenz von $S(P \cdot z, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ nachzuweisen. Dazu hilft die bereits erfolgte Interpretation der S -Reihen, denn es gilt

$$S(P \cdot z, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\text{Prob} \left(X_n = (i, v), X_r^{(1)} \geq i \ (r = 1, \dots, n-1) \mid X_0 = (i, u) \right) \right)_{u,v=1}^{d_i} \cdot z^n.$$

Die Koeffizientenmatrizen sind in ihrer Norm offensichtlich durch 1 beschränkt, d.h. für $|z| < 1$ liegt unabhängig von den Eigenschaften der Markovkette absolute Konvergenz vor. Mit einer Indexverschiebung gegenüber Satz 5.2.1 folgt

Satz 6.8.1. *Es sei $P = (p_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$ eine tridiagonale Block-Übergangsmatrix, $\phi_n(z)$ wie oben definiert und $|z| < 1$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)}(z) &= 0, \quad N \in \mathbb{N}_0 \\ R_n^{(N)}(z) &= p_{n,n+1}z \left(I_{d_{n+1}} - p_{n+1,n+1}z - R_{n+1}^{(N)}(z)p_{n+2,n+1}z \right)^{-1}, \quad n < N \\ R_n(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)}(z) \end{aligned}$$

definierten inversen Kettenbrüche, $I_{d_0} - p_{00}z - R_0(z)p_{10}z$ ist invertierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \phi_0(z) &= f (I_{d_0} - p_{00}z - R_0(z)p_{10}z)^{-1} \\ \phi_{n+1}(z) &= \phi_n(z)R_n(z). \end{aligned}$$

Gesucht sind natürlich nicht die $\phi_n(z)$, sondern die Koeffizienten $\text{Prob}(X_m = (n, \cdot))$ dieser Reihe, die numerische Rückgewinnung beispielsweise mittels Cauchyscher Integralformel ist jedoch problematisch. Ähnliches gilt auch für das Analogon für Markovketten in stetiger Zeit. Mit $p_n(t) = \text{Prob}(Y_t = n)$ gilt nach den Kolomogorovschen Vorwärtsgleichungen

$$p'_0(t) = p_0(t)q_{00} + p_1(t)q_{10} \quad \text{und} \quad p'_n(t) = p_{n-1}(t)q_{n-1,n} + p_n(t)q_{nn} + p_{n+1}(t)q_{n+1,n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Anfangsverteilung $(f, 0, 0, \dots)$ und den Laplace-Transformierten $\psi_n(s)$ von $p_n(t)$ folgt

$$\begin{aligned} s\psi_0(s) - f &= \psi_0(s)q_{00} + \psi_1(s)q_{10} \\ s\psi_n(s) &= \psi_{n-1}(s)q_{n-1,n} + \psi_n(s)q_{nn} + \psi_{n+1}(s)q_{n+1,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Hier wird nun Satz 5.4.1, also die transformierte Version von Satz 5.2.1 verwendet. Dabei wird $\gamma_n = \text{diag}(s - q_{nn(u,u)})_{u=1}^{d_n}$ gewählt, dies führt darauf, dass $\tilde{P} \in \mathcal{M}_D(\mathcal{R})$ nachzuweisen ist, wobei \tilde{P} die Einträge

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{00} &= 0 \\ \tilde{p}_{01} &= f \\ \tilde{p}_{10} &= I \\ \tilde{p}_{ii} &= I - \gamma_{i-1}^{-1}(sI - q_{i-1,i-1}), \quad i \in \mathbb{N} \\ \tilde{p}_{i,i+1} &= \gamma_{i-1}^{-1}q_{i-1,i}, \quad i \in \mathbb{N} \\ \tilde{p}_{i+1,i} &= \gamma_i^{-1}q_{i,i-1}, \quad i \geq 2, \end{aligned}$$

besitzt. Erneut reicht es aus, die absolute Konvergenz von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ zu zeigen, wobei P die Einträge

$$\begin{aligned} p_{ii} &= I - \gamma_i^{-1}(sI - q_{ii}), \quad i \in \mathbb{N}_0 \\ p_{i,i+1} &= \gamma_i^{-1}q_{i,i+1}, \quad i \in \mathbb{N}_0 \\ p_{i+1,i} &= \gamma_{i+1}^{-1}q_{i+1,i}, \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

besitzt. Werden in allen Matrizen die einzelnen Komponenten durch ihre Beträge ersetzt, so werden die Normen der Summanden in den S -Reihen höchstens größer. Die Diagonalelemente von p_{ii} sind ohnehin 0, ansonsten wird $p_{ij(u,v)}$ nun also durch $\frac{q_{ij(u,v)}}{|s - q_{ii(u,u)}|}$ ersetzt. Ist $\text{Re}(s) > 0$, so ist wegen $q_{ii(u,u)} \leq 0$ der Nenner strikt größer als $-q_{ii(u,u)}$. Damit sind in diesem Fall alle Zeilensummen der neuen Matrix P' strikt kleiner 1, P' definiert also eine Markovkette mit ausschließlich transienten Zuständen und die absolute Konvergenz von $S(P, i, i, \mathbb{N}_{i,\infty})$ folgt unmittelbar. Damit ist auch hier nach Satz 5.2.1 und Lemma 5.4.1 die Berechnung mittels Kettenbrüchen möglich, es gilt

Satz 6.8.2. *Es sei Q eine tridiagonale Block-Generatormatrix, $\psi_n(s)$ die Laplace-Transformierte von $p_n(t)$ und $\text{Re}(s) > 0$, (Y_t) eine Markovkette in stetiger Zeit mit Generatormatrix Q und Anfangsverteilung $(f, 0, 0, \dots)$. Dann konvergieren die durch*

$$\begin{aligned} R_N^{(N)}(s) &= 0, \quad N \in \mathbb{N}_0 \\ R_n^{(N)}(s) &= q_{n,n+1} \left(s \cdot I_{d_{n+1}} - q_{n+1,n+1} - R_{n+1}^{(N)}(s)q_{n+2,n+1} \right)^{-1}, \quad n < N \\ R_n(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} R_n^{(N)}(s) \end{aligned}$$

erklärten Kettenbrüche $R_n(s)$, $s \cdot I_{d_0} - p_{00} - R_0(s)p_{10}$ ist invertierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\psi_0(s) &= f(s \cdot I_{d_0} - q_{00} - R_0(s)q_{10})^{-1} \\ \psi_{n+1}(s) &= \psi_n(s)R_n(s).\end{aligned}$$

Für praktische Anwendungen wird natürlich $p_n(t)$ benötigt, also muss zurücktransformiert werden,

$$p_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \psi_n(s) ds$$

mit einem $\gamma > 0$. Wie oben schon angedeutet, ist diese Rücktransformation numerisch aufwendig und problematisch. Zumindest der Aufwand kann jedoch stark reduziert werden, wenn nicht $p_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, sondern wieder nur wenige Kenngrößen der Form

$$E[f](t) = p(t)f = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) f_n$$

mit geeignet dimensionierten Spaltenvektoren $p_n(t)$ gesucht sind. Da die f_n konstant sind, ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(s) f_n$$

als Transformierte einer solchen Kenngröße, und diese Transformierte kann wie stationäre Kenngrößen mit einer Art Horner-Schema berechnet werden, d.h. es wird $T(s) = f_N$ gesetzt, und anschließend wird für $n = N - 1, \dots, 1$ nach dem Berechnen von $R_n(s)$ jeweils $T(s) = f_n + R_n(s)T(s)$ ersetzt, schließlich wird noch $T(s) = \psi_0(s)T(s)$ ersetzt. Die Rücktransformation von $T(s)$ liefert dann (eine Approximation an) $E[f](t)$, also

$$E[f](t) \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} T(s) ds.$$

Auf diese Weise muss nur noch eine Rücktransformation pro gewünschter Kenngröße erfolgen, damit ist das Problem entschärft, aber keineswegs gelöst. Auf die Erweiterung von Quasi-Geburts- und Todesprozessen, die Katastrophenszenarien beinhalten, für die also gegebenenfalls $q_{i0} \neq 0$ für $i \geq 2$ gilt, soll daher verzichtet werden. Für Ansätze der semi-analytischen Rücktransformation sei noch auf die Arbeit [21] von Mederer verwiesen.

6.9 Ausgesuchte Spezialfälle

6.9.1 Durch Quasi-Geburts- und Todesprozesse modellierte einfache Bediensysteme

Bei den meisten einfachen Markovschen Bediensystemen wird die Anzahl der Kunden im System als Zustand der zugrunde liegenden Markovkette verwendet. Speziell beim $M/M/1$ -

System kommen die Kunden nur einzeln an und werden nur einzeln bedient, die Zwischenankunftszeiten sowie die Bedienzeiten sind jeweils exponentiell verteilt. Die korrespondierende Generatormatrix hat (skalare) tridiagonale Gestalt, es handelt sich also um einen Geburts- und Todesprozess, die Ankünfte entsprechen Geburten, die Fertigstellungen von Bedienungen entsprechen Toden. Beim $M/M/1$ -System sind darüberhinaus die Ankunfts- und Bedienraten unabhängig von der Anzahl der Kunden im System, d.h. die Raten sind zustandsunabhängig.

In einigen Fällen hängen die Ankunfts- oder Bedienraten von einem weiteren Parameter ab, dem sogenannten Umgebungszustand, dies führt auf *Bediensysteme in zufälliger Umgebung*. Bei ihnen wechselt der Umgebungszustand gemäß einer zeitstetigen Markovkette mit Generatormatrix Q_E , die Ankunfts- und die Bedienraten hängen vom Umgebungszustand $u \in \{1, \dots, d\}$ ab, sie werden mit $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ bzw. μ_1, \dots, μ_d bezeichnet. Die Anzahl der Kunden wird hier als Level, der Umgebungszustand als Phase modelliert. Auf diese Weise entsteht ein Quasi-Geburts- und Todesprozess, die Generatormatrix Q ist also tridiagonal mit

$$q_{n,n+1} = \Lambda := \text{diag}(\lambda_u), \quad q_{n,n-1} = \mathcal{M} := \text{diag}(\mu_u), \quad q_{nn} = Q_E - \Lambda - \delta_{0n} \cdot \mathcal{M}.$$

Dieser Prozess ist allerdings levelunabhängig, da die Werte der Blöcke (bis auf die Ausnahme q_{00}) nicht von n abhängen, sondern lediglich davon, ob es sich um einen Block auf, oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen handelt.

Ein klassischer Fall, bei dem die Levelunabhängigkeit verloren geht, ist das $M/M/\infty$ -System in zufälliger Umgebung. Hier stehen genügend Bediener für jeden ankommenden Kunden zur Verfügung, die Bedienraten hängen zusätzlich von der Anzahl der Kunden im System ab: Sind n Kunden im System und ist u der Umgebungszustand, so ist die Bedienrate $n\mu_u$. Dies liefert eine tridiagonale Block-Generatormatrix mit Blöcken

$$q_{n,n+1} = \Lambda, \quad q_{n,n-1} = n\mathcal{M}, \quad q_{nn} = Q_E - \Lambda - n\mathcal{M}.$$

Ein weiterer typischer Fall eines Quasi-Geburts- und Todesprozesses entsteht, wenn die Zwischenankunfts- oder die Bedienzeiten oder beide nicht exponentiell, sondern phasentypverteilt sind. Ist beispielsweise die Zwischenankunftszeit phasentypverteilt, entspricht ihre Verteilung also der Verteilung der Absorptionszeit in einer Markovkette mit Anfangsverteilung $(\alpha, 0)$ mit einem Wahrscheinlichkeitsvektor $\alpha \in \mathbb{C}^{1 \times d}$ und Generatormatrix

$$\begin{pmatrix} T & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $T \in \mathbb{C}^{d \times d}$ und einem Vektor $t \in \mathbb{C}^{d \times 1}$, so lässt sich das Bediensystem modellieren, indem die Anzahl der Kunden im System als Level und die Phase der Ankunft als Phase verwendet wird. Bezeichnet μ_n die Bedienrate bei n Kunden im System, so ergeben sich die Blöcke

$$q_{n,n+1} = t\alpha, \quad q_{n,n-1} = \mu_n I, \quad q_{nn} = T - \mu_n I.$$

Ist μ_n unabhängig von n (bis auf $\mu_0 = 0$), so entsteht wieder ein levelunabhängiger Quasi-Geburts- und Todesprozess, der mit matrixgeometrischen Methoden nach Neuts [22] gelöst werden kann. Beispielsweise in $PH/M/\infty$ -Wartesystemen ist dies jedoch nicht der Fall, zusätzlich kann auch die Phasentypverteilung für die Ankünfte von der Anzahl an Kunden im System abhängen, d.h. die Parameter dieser Verteilung sind α_n und T_n , wobei auch die Dimension dieses Vektors bzw. dieser Matrix noch von n abhängen kann.

6.9.2 Retrial Queues

Ein weiteres Anwendungsfeld für Quasi-Geburts- und Todesprozess sind einige Retrial Queues. Eine solche ergibt sich beispielsweise, wenn Kunden an einem Bediensystem mit c Bedienern ankommen, dort aber kein Warteraum vorhanden ist; wenn alle Bediener belegt sind, verlassen neu ankommende Kunden sofort das System, versuchen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit später aber wieder, in das System einzutreten (siehe auch [15]). Bei derartigen Systemen muss bei der Modellierung als Markovkette neben der Anzahl belegter Bediener auch die Anzahl von Kunden, die nun immer wieder versuchen, in das System einzutreten, im Zustand der Markovkette modelliert werden. Dies führt auf den Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0 \times \{0, \dots, c\}$, wobei die erste Komponente (das Level) die Anzahl wiederholender Kunden, und die zweite Komponente (die Phase) die Anzahl belegter Bediener beschreibt. Es handelt sich hierbei um einen „competition process“, d.h. die Wahrscheinlichkeit für Übergänge von (i, u) nach (j, v) in einer Zeitspanne h ist für $|i - j| > 1$ oder $|u - v| > 1$ von der Größenordnung $o(h)$. Werden die Zustände wie üblich alphanumerisch sortiert, so entsteht wieder eine block-tridiagonale Form für Q , dabei sind die Blöcke $\in \mathbb{C}^{d \times d}$ mit $d = c + 1$ ihrerseits wieder tridiagonal.

Da auch die Wahrscheinlichkeit für Übergänge von (i, u) nach $(i + 1, u + 1)$ bzw. nach $(i - 1, u - 1)$ in einer Zeitspanne h von der Größenordnung $o(h)$ ist, enthalten die Blöcke oberhalb des Hauptdiagonalblocks keine obere Nebendiagonale, die Blöcke unterhalb des Hauptdiagonalblocks enthalten keine untere Nebendiagonale. Insgesamt sind also in jeder skalaren Zeile von Q unabhängig von der Bedieneranzahl c (und damit der Blockdimension) höchstens $m = 7$ Werte von 0 verschieden. Für große Werte von c verbrauchen daher iterative Methoden deutlich weniger Speicherplatz als Algorithmus 6.7.1 (siehe Abschnitt 6.7.2). Muss jedoch auch das Abschneidelevel N relativ groß gewählt werden, so bietet Algorithmus 6.7.2 eine gute Alternative.

Allerdings sind insbesondere in diesem Modell in erster Linie stationäre Kenngrößen von Interesse. Neben weiteren Größen, die sich einfach aus ihnen berechnen lassen, interessieren hier vor allem die mittlere stationäre Anzahl belegter Bediener, die mittlere stationäre Anzahl von Kunden im Pool der Wiederholer, und die mittlere stationäre Blockierwahrscheinlichkeit. Dabei berechnet sich die mittlere Anzahl von Kunden im Pool der Wiederholer durch

$$\sum_{(i,u) \in E} \pi_{(i,u)} \cdot i = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \cdot (i, i, \dots, i)^T,$$

die mittlere Anzahl belegter Bediener ist

$$\sum_{(i,u) \in E} \pi_{(i,u)} \cdot u = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \cdot (0, 1, \dots, u)^T,$$

die Blockier-Wahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde abgewiesen wird, weil alle Leitungen belegt sind, ist

$$\sum_{(i,u) \in E} \pi_{(i,u)} \cdot \delta_{uc} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \cdot (0, 0, \dots, 0, 1)^T.$$

Es handelt sich also in allen Fällen um Kenngrößen der Form πf , die mittels Algorithmus 6.7.3 schnell und mit wenig Speicherbedarf berechnet werden können.

Eine andere Form von Retrial Queue entsteht, wenn zwar (im Prinzip) unbegrenzter Warteraum zur Verfügung steht, ungeduldige Kunden allerdings von selbst das Warten beenden und es später noch einmal probieren (siehe [17]). Auch derartige Systeme führen auf Competition Processes als zugrunde liegenden Markovketten, allerdings ist der Zustandsraum hier normalerweise $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, da sowohl die Anzahl der Kunden im System (bei den Bedienern und im Warteraum) als auch die Anzahl der wiederholenden Kunden unbegrenzt ist. Hier muss also auch der Phasenraum zunächst abgeschnitten werden (eventuell in Abhängigkeit vom Level), es lassen sich auch keine allgemeinen Aussagen darüber treffen, ob die Anzahl der Kunden im System oder die Anzahl der wiederholenden Kunden als Level bzw. Phase zu wählen ist. Da der Aufwand der Algorithmen 6.7.1, 6.7.2 und 6.7.3 mit konstanter Phasenanzahl $d_i = d$ und Abschneidelevel N offensichtlich in der Größenordnung $O(N \times d^3)$ liegt, bietet es sich natürlich an, Phase und Level so zu wählen, dass nach dem Abschneiden die maximale Phase wesentlich kleiner ist als das maximale Level. Welche Wahl also in der Praxis zu treffen ist, hängt von den konkreten Systemparametern ab.

6.9.3 Bediensysteme mit Totalverlusten

Bislang lieferten alle betrachteten Systeme Quasi-Geburts- und Todesprozesse. Katastrophenszenarien entstehen erst durch die Möglichkeit von Totalverlusten, bei denen sowohl alle wartenden als auch alle sich in der Bedienung befindenden Kunden auf einen Schlag das System verlassen, beispielsweise Serverausfälle in Rechnernetzen oder Telekommunikationssystemen verursachen derartiges. Wird nun ein $PH/M/\infty$ -System, ein $M/M/\infty$ -System in zufälliger Umgebung oder ein anderes Bediensystem mit zustandsabhängigen Bedien- und/oder Ankunftsrate in zufälliger Umgebung betrachtet, und die Möglichkeit von Totalverlusten (üblicherweise mit einer sehr kleinen Rate im Vergleich zu den anderen Raten) mitmodelliert, so ändert sich nichts an der Wahl des Zustandsraums, lediglich q_{n0} wird zusätzlich besetzt. Bei $PH/M/\infty$ -Systemen ist dabei $q_{n0} = (\gamma_n, \gamma_n, \dots, \gamma_n)^T \alpha$ mit der Katastrophenrate γ_n und dem Parameter α der Phasentypverteilung (Anfangsverteilung der absorbierenden Markovkette, s.o.). Bei Bediensystemen in zufälliger Umgebung ist q_{n0}

eine Diagonalmatrix, die die Katastrophenraten abhängig von der Anzahl der Kunden im System und dem Umgebungszustand enthält.

6.9.4 Populations- und Epidemiemodelle

Ein weiterer typischer Fall für Quasi-Geburts- und Todesprozesse findet sich naheliegender Weise im Zusammenhang mit Markovschen Populationsmodellen. Beim gewöhnlichen Geburts- und Todesprozess wird die Populationsgröße n als Zustand modelliert, in einer Zeitspanne h tritt mit Wahrscheinlichkeit $\lambda_n h + o(h)$ eine Geburt, mit Wahrscheinlichkeit $\mu_n h + o(h)$ ein Tod, und mit Wahrscheinlichkeit $o(h)$ mehr als ein Ereignis ein. Dies führt auf eine skalare tridiagonale Struktur der Generatormatrix Q .

In einigen Modellen muss jedoch auch für derartige Systeme eine zweite Zustandskomponente berücksichtigt werden. Natürlich kann auch hier eine zufällige Umgebung (Umwelteinflüsse) auf Geburts- und Todesraten Einfluss nehmen. Außerdem bietet es sich in vielen Fällen an, die Population in zwei Gruppen zu unterscheiden, typischerweise gesunde und kranke. Es gibt nun die möglichen Ereignisse, dass ein gesundes Populationsmitglied geboren wird, je nach Krankheit kann allerdings auch ein krankes Mitglied geboren werden, kranke oder gesunde Mitglieder können einwandern (diese Raten hängen anders als die Geburtsraten typischerweise nicht von der Populationsgröße ab), kranke oder gesunde Mitglieder können (mit unterschiedlichen Raten) sterben oder auswandern, gesunde Mitglieder können infiziert werden, kranke Mitglieder können geheilt werden. Bei der Modellierung als Markovkette gibt es für den Zustandsraum verschiedene Möglichkeiten: Die erste Komponente kann als Populationsgröße, die zweite als Anzahl der kranken oder der gesunden Mitglieder gewählt werden. In diesem Fall ist der Zustandsraum $\{(n, u) : n \in \mathbb{N}_0, u \in \{0, \dots, n\}\}$. Alternativ kann die erste Komponente als die Anzahl der gesunden, die zweite Komponente als die Anzahl der kranken Mitglieder gewählt werden. In diesem Fall ist der Zustandsraum $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Bei der ersten Modellierung werden die Blöcke in Q mit steigendem Level immer größer, bei der zweiten Modellierung sind sie ohnehin unendlich groß, der Phasenraum kann aber gegebenenfalls abgeschnitten werden. Welche Modellierung vorzuziehen ist, hängt von den konkreten Raten ab, dies soll nicht Thema dieser Arbeit sein.

Kapitel 7

Anwendungen

7.1 Ein Bediensystem mit Totalverlusten

Es soll nun ein Beispiel eines Quasi-Geburts- und Todesprozesse mit Katastrophenszenarien etwas ausführlicher behandelt werden, im Wesentlichen handelt es sich dabei um ein M/M/c-Modell mit zustandsabhängigen Raten und Katastrophen in einer zufälligen Umgebung. Für die Entwicklung des Modells und die Unterstützung bei der Analyse sei Werner Sandmann gedankt (die Ergebnisse sind auch zur gemeinsamen Veröffentlichung eingereicht, siehe [3]). Der Vergleich verschiedener Algorithmen inklusive der in Abschnitt 6.7 vorgestellten Verfahren zur Berechnung stationärer Verteilungen wurde für Beispiele von Quasi-Geburts- und Todesprozessen ohne Katastrophen bereits zuvor in [2] durchgeführt.

7.1.1 Modellbeschreibung

Es wird ein Bediensystem mit c Bedienern und exponentiell verteilten Zwischenankunftszeiten und Bedienzeiten betrachtet, in dem zusätzlich noch Katastrophen passieren können, die zur Folge haben, dass alle, also sowohl die wartenden Kunden als auch die Kunden an den Bedienern verloren gehen. Beispielsweise in Rechnernetzen oder ähnlichen technischen Verbänden können solche Katastrophen (natürlich nur selten) vorkommen. Die Raten für Ankünfte, Bedienabschlüsse und Katastrophen hängen im Allgemeinen von der Anzahl an Kunden im System ab, hier sollen sie zusätzlich noch von einem zufälligen Umgebungszustand $u \in \{1, \dots, d\}$ abhängen, d.h. es gibt die Raten λ_{nu} , μ_{nu} und γ_{nu} für die Ankunft eines Kunden, den erfolgreichen Abschluss der Bedienung eines Kunden und eine Katastrophe bei jeweils n Kunden im System und Umgebungszustand u . Zusätzlich gibt es noch Raten σ_{nuv} für den Wechsel des Umgebungszustandes von u nach v bei n Kunden im System. Die Anzahl der Kunden im System wird nun als Level modelliert, der Umgebungszustand als Phase, auf diese Weise entsteht ein Quasi-Geburts- und Todesprozess mit Katastrophen mit den Blöcken

$$\begin{aligned}
q_{n,n+1} &= \begin{pmatrix} \lambda_{n1} & & & \\ & \lambda_{n2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{nd} \end{pmatrix}, & n = 0, 1, 2, \dots, \\
q_{n,n-1} &= \begin{pmatrix} \mu_{n1} & & & \\ & \mu_{n2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_{nd} \end{pmatrix}, & n = 2, 3, 4, \dots, \\
q_{n,0} &= \begin{pmatrix} \gamma_{n1} & & & \\ & \gamma_{n2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{nd} \end{pmatrix}, & n = 2, 3, 4, \dots, \\
q_{10} &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} + \mu_{11} & & & \\ & \gamma_{12} + \mu_{12} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{1d} + \mu_{1d} \end{pmatrix}, \\
q_{nn} &= \begin{pmatrix} \rho_{n1} & \sigma_{n12} & \dots & \sigma_{n1d} \\ \sigma_{n21} & \rho_{n2} & \dots & \sigma_{n2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{nd1} & \sigma_{nd2} & \dots & \rho_{nd} \end{pmatrix}, & n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

der Generatormatrix Q , wobei $\rho_{nu} = -\left(\gamma_{nu} + \mu_{nu} + \lambda_{nu} + \sum_{v \neq u} \sigma_{nuv}\right)$ mit $\mu_{0u} = \gamma_{0u} = 0$ definiert ist.

Es wird nun ein Beispiel behandelt, bei dem die Ankunftsrate mit steigender Anzahl wartender Kunden sinken, es wird

$$\lambda_{nu} = \lambda_0 \cdot \alpha_{\lambda,u} \cdot \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{1}{n-c+1}, & n > c, \end{cases}$$

mit einer Nominalankunftsrate λ_0 gesetzt, wie üblich bei c Bedientern ist

$$\mu_{nu} = \mu_0 \cdot \alpha_{\mu,u} \cdot \min(n, c)$$

mit einer Nominalbedienrate μ_0 . Die Katastrophenraten werden als unabhängig von der Anzahl an Kunden im System angenommen, also $\gamma_n = \gamma_0 \alpha_{\gamma,u}$ mit einer Nominalkatastrophenrate γ_0 , ebenso werden nur von n unabhängige Wechselraten σ_{nuv} verwendet.

Konkret wurden drei Umgebungszustände betrachtet, die Wechselraten σ_{nuv} wurden für $v \neq u$ sämtlich auf 0.1 gesetzt. Der Umgebungszustand 1 entspricht „Normalbetrieb“, d.h. Ankunfts-, Bedien- und Katastrophenraten entsprechen den jeweiligen Nominalraten, also $\alpha_{\lambda,1} = \alpha_{\mu,1} = \alpha_{\gamma,1} = 1$. Der Umgebungszustand 2 entspricht Problemen im System, es erfolgt keine Bedienung mehr, und Katastrophen werden wesentlich wahrscheinlicher, hier wird $\alpha_{\lambda,2} = 1$, $\alpha_{\mu,2} = 0$ und $\alpha_{\gamma,2} = 1000$ gesetzt. Der Umgebungszustand 3 bedeutet schließlich eine deutlich erhöhte Ankunftsrate, es wird $\alpha_{\lambda,3} = 10$ und $\alpha_{\mu,3} = \alpha_{\gamma,3} = 1$ gesetzt. Für die in Abschnitt 7.1.3 durchgeführte Analyse des Modells verbleiben also noch die Anzahl der Bediener c sowie die Nominalraten λ_0 , μ_0 und γ_0 zur Variation. Aufgrund der positiven Katastrophenraten ist die betrachtete Markovkette stets ergodisch, d.h. die stationäre Verteilung existiert.

7.1.2 Vergleich verschiedener Algorithmen

Es soll nun die stationäre Verteilung der beschriebenen Markovkette ermittelt werden, hier konkret mit $\lambda_0 = 100$, $\mu_0 = 1$, $\gamma_0 = 0.001$ und $c = 100$. Neben den Algorithmen 6.7.1 (mit MAA für Matrix Analytic Algorithm abgekürzt) und 6.7.2 (mit MEI für Memory Efficient Implementation abgekürzt) kommen hierfür klassische Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen infrage, also Gauss-Elimination und iterative Algorithmen wie Jacobi, Gauss-Seidel und Potenzmethode (siehe etwa [34]) oder die GTH-Variante der Gauss-Elimination (siehe [13]). Alle Verfahren wurden in C++ implementiert und auf demselben Rechner durchgeführt.

Die Laufzeit der iterativen Verfahren hängt natürlich wesentlich von der Abbruchbedingung ab, bezeichnet $\pi^{(k)}$ die k -te Approximation an die Lösung π von $\pi Q = 0$, so wurde hier abgebrochen, sobald $\|\pi^{(k+1)} - \pi^{(k)}\|_1 < 10^{-8}$ war. Ab einem Abschneidelevel von $N = 200$ war keine Verbesserung der Ergebnisse zu erkennen, die noch bestehenden Fehler $\|\pi Q\|_1$ sind daher nur auf Rechenungenauigkeiten bzw. im Fall der iterativen Verfahren auf methodische Fehler zurückzuführen. Dieser Fehler lag bei den iterativen Verfahren in der Größenordnung von 10^{-5} , für MAA, MEI, Gauss und GTH in der Größenordnung von 10^{-13} . Natürlich lässt sich der Fehler auch für die iterativen Verfahren reduzieren, indem die Abbruchbedingung angepasst wird, allerdings nur auf Kosten weiterer Rechenzeit. Bei der Gauss-Elimination und somit auch in der GTH-Variante ist zu beachten, dass das Verfahren nur bis zu einem Abschneidelevel von etwa 2000 den zur Verfügung stehenden Speicherplatz von einem Gigabyte einhält. Anders als bei tridiagonalen Matrizen (siehe Abschnitt 5.6) wird aufgrund der Katastrophenraten die Struktur von Q während des Eliminationsverfahrens nicht eingehalten und der Speicherplatzbedarf steigt quadratisch mit dem Abschneidelevel an.

In Abbildung 7.1.1 ist klar erkennbar, dass der Algorithmus 6.7.1 der schnellste der betrachteten Algorithmen ist, auch seine Variante, Algorithmus 6.7.2, die deutlich weniger Speicherplatz benötigt, ist noch deutlich schneller als alle konkurrierenden Verfahren. In Abbildung 7.1.2 ist ersichtlich, dass selbst Algorithmus 6.7.1 weniger Speicherplatz ver-

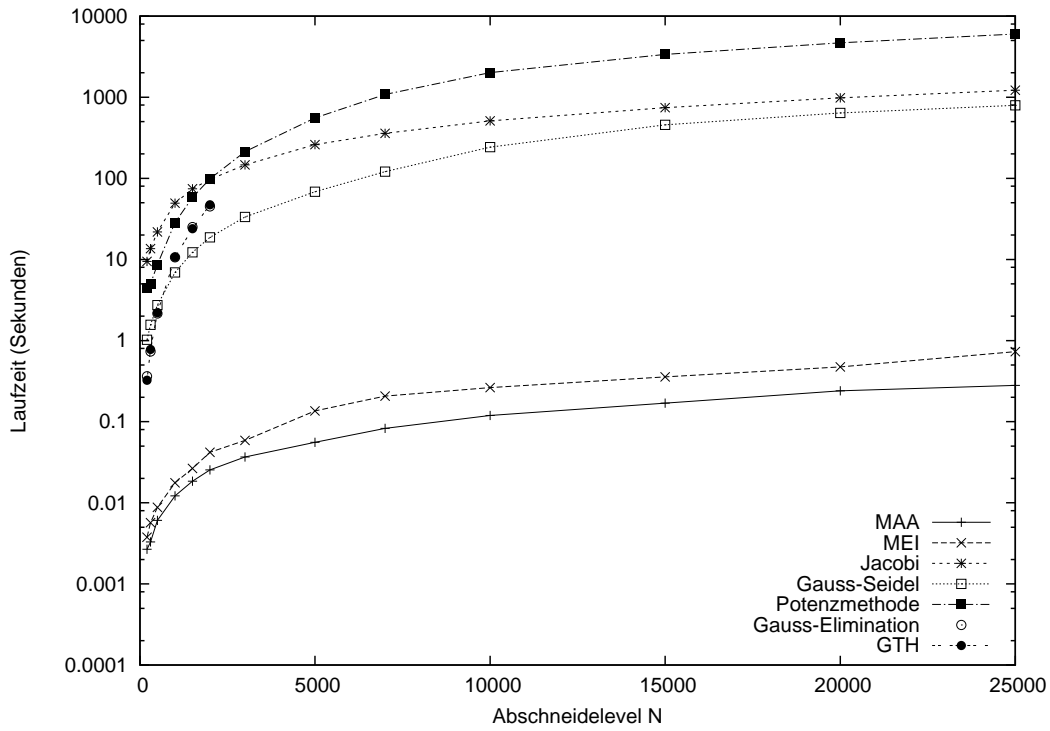


Abbildung 7.1.1: Laufzeit in Abhängigkeit vom maximalen Level N

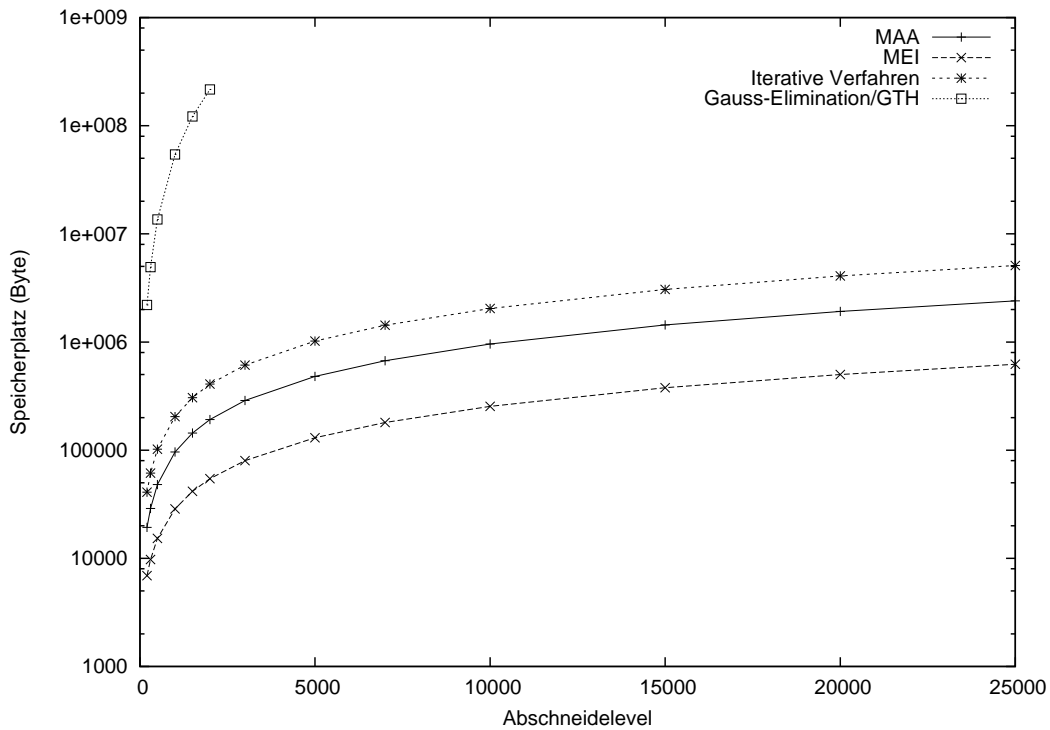


Abbildung 7.1.2: Speicherplatzbedarf in Abhängigkeit vom maximalen Level N

braucht als die klassischen Lösungsverfahren, 6.7.2 kommt natürlich mit noch weniger Speicherplatz aus. In anderen Beispielen (siehe [2]) kommt es vor, dass für Algorithmus 6.7.1 mehr Speicherplatz benötigt wird als für die iterativen Lösungsverfahren. Ist das Abschneidelevel N deutlich größer als die Blockgröße, so ist jedoch in jedem Fall Algorithmus 6.7.2 bezüglich des Speicherplatzbedarfs den iterativen Verfahren vorzuziehen.

7.1.3 Modellanalyse

Bei der Modellanalyse wird jeweils einer der vier Parameter c , λ_0 , μ_0 und γ_0 variiert. Die drei anderen Parameter sind dabei jeweils durch $c = 50$, $\lambda_0 = 100$, $\mu_0 = 1$ und $\gamma_0 = 0.001$ fixiert. In Anhang B sind für die verschiedenen Parametervariationen jeweils die stationären Verteilungen der Anzahl an Kunden im System (Randverteilung bezüglich des Levels) aufgetragen. Aus den Graphiken ist sofort ersichtlich, dass es nicht sinnvoll ist, sich hier auf Kenngrößen wie die mittlere Anzahl an Kunden im System zu beschränken, da alle Verteilungen bimodalen Charakter haben, d.h. die Verteilungen werden im Wesentlichen durch zwei „Peaks“ charakterisiert. Der steilere der beiden Peaks kann gut bei der Variation der Bedieneranzahl c in den Abbildungen B.1.1 bis B.1.5 beobachtet werden, er liegt stets etwas oberhalb von c . Die Lage des weniger steilen Peaks kann über das Verhältnis $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ charakterisiert werden: In den Abbildungen B.1.6 bis B.1.9 zur Variation von λ_0 sowie in den Abbildungen B.1.10 bis B.1.13 zur Variation von μ_0 lässt sich feststellen, dass dieser Peak für Werte von $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$, die deutlich kleiner als c sind, ziemlich genau bei $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ liegt, also linear mit $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ verschoben wird, für größere Werte verhält sich die Verschiebung des Peaks dann zwar sublinear, aber immer noch monoton. Bei der Variation von γ_0 in den Abbildungen B.1.14 bis B.1.17 ist schließlich offensichtlich, dass mit steigender Katastrophenrate die stationäre Wahrscheinlichkeit für keine oder sehr wenige Kunden im System größer wird.

Der letzte Effekt ist klar, da Katastrophen schließlich den Verlust aller Kunden bedeuten. Der Peak etwas oberhalb von c ist dadurch zu erklären, dass bei mehr als c Kunden im System die Ankunftsrate stark sinkt, d.h. sind mehr als c Kunden im System, kommen kaum noch Kunden an, die Raten für Bedienung und Katastrophen bleiben gleich, und auf diese Weise wird der Kundenbestand automatisch wieder abgebaut. Der Peak bei $\frac{\lambda_0}{\mu_0}$ entspricht dem Maximum der Verteilung in gewöhnlichen M/M/c-Modellen (siehe etwa [6]). Ist dieser Quotient in der Nähe von c oder sogar größer, so wirkt wieder die abnehmende Ankunftsrate für steigende Kundenanzahl, und der Peak wird nach links verschoben.

7.2 Eine Differentialgleichung

In einigen Anwendungen (zum Beispiel bei der approximativen Modellierung von Spektraldichten von Windturbulenzen, siehe [5] und dortige Literaturverweise) kommen lineare Differentialgleichungen der Form

$$(7.2.1) \quad x'(t) = Ax(t) + \xi(t)Cx(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0$$

mit deterministischen, von t unabhängigen Matrizen $A, C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ sowie einem stochastischen Prozess $(\xi(t))_{t \geq 0}$ der Form

$$\xi(t) = \cos(\theta + \gamma t + \beta w(t)), \quad t \geq 0$$

mit einer auf $[0, 2\pi)$ gleichverteilten Zufallsvariable θ , deterministischen Parametern $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sowie einem Standard-Wienerprozess $(w(t))_{t \geq 0}$ vor.

Eine wesentliche Aufgabe ist es, $\mathbf{E}[x(t)]$ zu bestimmen. Der hier dargestellte Weg wurde im Wesentlichen von Bobryk [5] vorgeschlagen. Er verwendet jedoch an der entsprechenden Stelle das Konvergenzkriterium für Kettenbrüche nach Denk und Riederle [10] mitsamt deren Fehlerabschätzung, stattdessen wird hier naheliegenderweise die Fehlerabschätzung aus Satz 4.5.1 angewendet.

Da $\xi(t)$ und $x(t)$ offensichtlich nicht unabhängig sind, ist es kein sinnvoller Ansatz, auf beiden Seiten der Differentialgleichung den Erwartungswert zu bilden. Stattdessen wird ein unendliches deterministisches Differentialgleichungssystem für $\mathbf{E}[x(t)]$ gebildet.

7.2.1 Ein deterministisches Differentialgleichungssystem für $\mathbf{E}[x(t)]$

Die Grundidee ist, die Cameron-Martin-Formel zur Translation von Wiener-Maßen zu verwenden. Dazu sei $H = L_0^{2,1}([0, t]; \mathbb{R})$ der Hilbertraum der in 0 startenden, quadratisch integrierbaren, reellwertigen Pfade über $[0, t]$ mit existierender erster Ableitung mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^t f'(s)g'(s) ds \quad (f, g \in H),$$

weiter sei $B = C_0([0, t]; \mathbb{R})$ der Banachraum der in 0 startenden, stetigen und reellwertigen Pfade über $[0, t]$ mit der Supremumsnorm. Mit der Inklusionsabbildung $il : H \rightarrow B$ mit $il(h) = h$ zusammen ergibt sich der eindimensionale klassische Wienertraum. Das Cameron-Martin-Theorem besagt nun, dass

$$\frac{d(T_h)_*(\gamma)}{d\gamma}(x) = \exp\left(\langle h, x \rangle - \frac{1}{2} \|h\|_H^2\right) \quad (x \in E)$$

gilt. Dabei ist $\langle h, x \rangle$ das Wiener-Paley-Integral, das als kanonische Fortsetzung des inneren Produkts von $H \times H$ auf $H \times B$ aufgefasst werden kann, also

$$\langle h, x \rangle = \int_0^t h'(s) dx(s),$$

weiter ist $\|h\| = |\sqrt{\langle h, h \rangle}|$, T_h eine Translation $T_h(x) = x + h$ mit $h \in H$, γ das durch den Standard-Wiener-Prozess induzierte Maß auf B und $g_*(\mu)$ für Funktionen g und Maße μ ist das Push-forward-Maß, also $(g_*(\mu))(A) = \mu(g^{-1}(A))$. Speziell für $h(s) = -cs$ ist

$$((T_h)_*(\gamma))(A) = \gamma(A - h(s)) = \gamma(A + cs), \quad \|h\|_H^2 = c^2 t, \quad \langle h, x \rangle = -cx(t).$$

Da $x(t)$ von der konkreten Realisierung $w(s)$, $0 \leq s \leq t$ des Wienerprozesses w abhängt, wird $x(t; w(s))$ geschrieben. Für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt nun aus der Cameron-Martin-Formel bei festem θ

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_\theta [\exp(cw(t)) \cdot x(t; w(s) + cks)] \\
&= \int_{w(s) \in B} \exp(cw(t)) \cdot x(t; w(s) + cks) d\gamma(w(s)) \\
&= \int_{w(s) \in B} \exp(c(w(t) + ct)) \cdot x(t; w(s) + cks + cs) d\gamma(w(s) + cs) \\
&= \exp(c^2t) \cdot \int_{w(s) \in B} \exp(cw(t)) \cdot x(t; w(s) + c(k+1)s) d((T_h)_*(\gamma))(w(s)) \\
&= \exp(c^2t) \cdot \int_{w(s) \in B} \exp(cw(t)) \cdot x(t; w(s) + c(k+1)s) \\
&\quad \cdot \exp\left(-cw(t) - \frac{1}{2}c^2t\right) d\gamma(w(s)) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}c^2t\right) \cdot \int_{w(s) \in B} x(t; w(s) + c(k+1)s) d\gamma(w(s)) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}c^2t\right) \cdot \mathbf{E}_\theta [x(t; w(s) + c(k+1)s)].
\end{aligned}$$

Da $\mathbf{E}[\exp(cw(t)) \cdot x(t; w(s) + cks)]$ und $\mathbf{E}[x(t; w(s) + c(k+1)s)]$ darüberhinaus in allen $c \in \mathbb{C}$ holomorph sind, gilt diese Identität auch für alle $c \in \mathbb{C}$, insbesondere liefert $c = i\beta$

$$(7.2.2) \quad \mathbf{E}_\theta [e^{i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] = e^{-\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E}_\theta [x(t; w(s) + i(k+1)\beta s)],$$

für $c = -i\beta$ ergibt Umbenennung von k in $-k$ weiter

$$(7.2.3) \quad \mathbf{E}_\theta [e^{-i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] = e^{-\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E}_\theta [x(t; w(s) + i(k-1)\beta s)].$$

Zudem liefert Einsetzen von

$$\cos(\theta + \gamma t + \beta w(t)) = \frac{1}{2} (e^{i\theta + i\gamma t + i\beta w(t)} + e^{-i\theta - i\gamma t - i\beta w(t)})$$

in (7.2.1) für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \mathbf{E} [e^{ik\theta} x(t; w(s) + ik\beta s)] \\
&= A \cdot \mathbf{E} [e^{ik\theta} x(t; w(s) + ik\beta s)] + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \mathbf{E} [e^{ik\theta} \cdot e^{i\theta + i\gamma t + i\beta(w(t) + ik\beta t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \mathbf{E} [e^{+ik\theta} \cdot e^{-i\theta - i\gamma t - i\beta(w(t) + ik\beta t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\
&= A \cdot \mathbf{E} [e^{\pm ik\theta} \cdot x(t; w(s) \pm ik\beta s)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{i\gamma t - k\beta^2 t} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot e^{i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{-i\gamma t + k\beta^2 t} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k-1)\theta} \cdot e^{-i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)].
\end{aligned}$$

Da θ und $w(s)$ als unabhängig vorausgesetzt sind, ergibt sich unter Verwendung von (7.2.2)

$$\begin{aligned}\mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot e^{i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] &= \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot \mathbf{E}_\theta [x(t; w(s) + ik\beta s)]] \\ &= e^{-\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot \mathbf{E}_\theta [x(t; w(s) + i(k+1)\beta s)]] \\ &= e^{-\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k+1)\beta s)],\end{aligned}$$

analog mit (7.2.3)

$$\mathbf{E} [e^{i(k-1)\theta} \cdot e^{-i\beta w(t)} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] = e^{-\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k-1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k-1)\beta s)].$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} \mathbf{E} [e^{ik\theta} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\ &= A \cdot \mathbf{E} [e^{ik\theta} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{i\gamma t - (1+2k)\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k+1)\beta s)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{-i\gamma t - (1-2k)\frac{\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k-1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k-1)\beta s)],\end{aligned}$$

und mit

$$y_k(t) = e^{ik\gamma t - \frac{k^2\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{ik\theta} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)]$$

folgt

$$\begin{aligned}y'_k(t) &= \left(A + \left(ik\gamma - \frac{k^2\beta^2}{2} \right) I \right) \cdot e^{ik\gamma t - \frac{k^2\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{ik\theta} \cdot x(t; w(s) + ik\beta s)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{i\gamma(k+1)t - \frac{(k^2+2k+1)\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k+1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k+1)\beta s)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot C \cdot e^{i\gamma(k-1)t - \frac{(k^2-2k+1)\beta^2 t}{2}} \cdot \mathbf{E} [e^{i(k-1)\theta} \cdot x(t; w(s) + i(k-1)\beta s)],\end{aligned}$$

also kann kurz

$$(7.2.4) \quad y'_k(t) = \left(A + \left(ik\gamma - \frac{k^2\beta^2}{2} \right) I \right) \cdot y_k(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{k+1}(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{k-1}(t) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

geschrieben werden. Die Anfangsbedingungen sind leicht anzugeben; da $x(0)$ deterministisch ist und die Gleichverteilung von θ auf $[0, 2\pi]$ bedingt, dass $e^{ik\theta}$ für $k \neq 0$ auf dem Rand des Einheitskreises in \mathbb{C} gleichverteilt ist, folgt

$$(7.2.5) \quad y_k(0) = \delta_{0k} x(0) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Eine weitere Umformung des Gleichungssystems besteht darin, $z_k = \frac{1}{2^k} (y_k, y_{-k})^T$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $z_0 = (y_0, 0)^T$ zu setzen. Es folgt

$$(7.2.6) \quad z'_0(t) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} z_0(t) + \begin{pmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z_1(t)$$

$$(7.2.7) \quad z'_k(t) = \begin{pmatrix} A + ik\gamma I - \frac{k^2\beta^2}{2}I & 0 \\ 0 & A - ik\gamma I - \frac{k^2\beta^2}{2}I \end{pmatrix} z_k(t) \\ + \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} z_{k+1}(t) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} z_{k-1}(t) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Bei den Anfangsbedingungen ändert sich nicht viel, es ist

$$(7.2.8) \quad z_k(0) = \delta_{k0} \begin{pmatrix} x(0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Von Interesse ist natürlich nur $y_0(t)$, also $z_0(t)$. Wird $z_{N+1}^{(N)}(t) \equiv 0$ gesetzt, so entsteht ein endliches Differentialgleichungssystem mit der Lösung $z_0^{(N)}(t)$. Die Lösungen $z_0(t)$ und $z_0^{(N)}(t)$ sind jeweils eindeutig (siehe [5]), es stellt sich die Frage, ob und wie schnell $z_0^{(N)}(t)$ gegen $z_0(t)$ konvergiert. Dies wird mithilfe des auf dem Pringsheim-Kriterium basierenden Satzes 5.5.1 nach Anwendung der Laplace-Transformation beantwortet.

7.2.2 Laplace-Transformation und Konvergenz im Laplace-Raum

Es sei $\bar{z}_k(\lambda)$ die Laplace-Transformierte von $z_k(t)$. Da die Laplace-Transformierte von $z'_k(t)$ gerade $\lambda\bar{z}_k(\lambda) - z_k(0)$ ist, folgt

$$(7.2.9) \quad \begin{pmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - A \end{pmatrix} \cdot \bar{z}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{z}_1(\lambda) + \begin{pmatrix} x(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$(7.2.10) \quad Q_k(\lambda) \cdot \bar{z}_k(\lambda) = Q \cdot \bar{z}_{k+1}(\lambda) + \frac{1}{4} \cdot Q \cdot \bar{z}_{k-1}(\lambda) \quad (k \in \mathbb{N})$$

mit

$$Q = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \left(\lambda - ik\gamma + \frac{k^2\beta^2}{2}\right)I - A & 0 \\ 0 & \left(\lambda + ik\gamma + \frac{k^2\beta^2}{2}\right)I - A \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ist mit $\bar{z}_{N+1}^{(N)}(s) \equiv 0$ ein endliches Gleichungssystem für $\bar{z}_0^{(N)}(s)$ zu erfüllen, wegen der Eindeutigkeit der Laplace-Transformation sind auch $z_0(s)$ und $z_0^{(N)}(s)$ dann jeweils eindeutig durch das Gleichungssystem bestimmt. Die Gleichungen (7.2.9) und (7.2.10)

bilden zusammen ein Gleichungssystem der in Satz 5.5.1 behandelten Form, dabei ist

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0 \\
b_1 &= \begin{pmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - A \end{pmatrix} \\
a_1 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \\
c_1 &= \begin{pmatrix} x(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\
a_2 &= -\begin{pmatrix} C & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
b_n &= Q_{n-1}(\lambda), \quad n \geq 2 \\
c_n &= Q, \quad n \geq 2 \\
a_n &= -\frac{1}{4} \cdot Q, \quad n \geq 3.
\end{aligned}$$

Die b_n , a_n und c_n sind natürlich Elemente der Banachalgebra $\mathcal{R} = \mathbb{C}^{2d \times 2d}$ (Vektoren können durch Nullen zu einer Matrix ergänzt werden), die hier auch bei der späteren Verwendung von Satz 5.5.1 zugrunde liegt. Allerdings kommen auch Matrizen der Dimension $d \times d$ und entsprechende Vektoren vor, $\|\cdot\|$ bezeichnet je nach Argument die euklidische Norm auf \mathbb{C}^d , \mathbb{C}^{2d} sowie die induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{C}^{d \times d}$ oder $\mathbb{C}^{2d \times 2d}$. Ist $\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma > \|A\|$, so ist nach dem Störungslemma oder Satz A.2.1 sicher $\lambda I - A$ invertierbar mit

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \left\| \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{\|I\|}{1 - \frac{1}{|\lambda|} \|A\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Damit ist auch $b_1 = \begin{pmatrix} \lambda I - A & 0 \\ 0 & \lambda I - A \end{pmatrix}$ invertierbar und es gilt

$$\|b_1^{-1} c_1\| \leq \frac{\|x(0)\|}{|\lambda| - \|A\|} \quad \text{sowie} \quad \|b_1^{-1} a_2\| \leq \frac{2 \|C\|}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Ebenso sind die Matrizen $\left(\lambda - ik\gamma + \frac{k^2\beta^2}{2} \right) I - A$ für λ mit $\operatorname{Re} \lambda > \|A\|$ invertierbar mit

$$\left(\left(\lambda - ik\gamma + \frac{k^2\beta^2}{2} \right) I - A \right)^{-1} \leq \frac{1}{|\lambda| + \frac{k^2\beta^2}{2} - \|A\|}.$$

Damit ist auch $b_{k+1} = Q_k(\lambda)$ für derartige λ und $k \geq 1$ invertierbar mit

$$\|Q_k^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{2}{|\lambda| + \frac{k^2\beta^2}{2} - \|A\|} < \frac{4}{k^2\beta^2}.$$

Mit $\|a_2\| \leq 2 \|C\|$ und $\|Q\| \leq 2 \|C\|$ lassen sich nun die α_n mit

$$\alpha_1 = \|a_1\| \cdot \|b_1^{-1} c_1\| \quad \text{und} \quad \alpha_n = \|b_{n-1}^{-1} a_n\| \cdot \|b_n^{-1} c_n\|, \quad n \geq 2$$

abschätzen. Es ist

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\leq \frac{\|x(0)\|}{|\lambda| - \|A\|}, \\ \alpha_2 &\leq \frac{2\|C\|}{|\lambda| - \|A\|} \cdot \frac{4 \cdot 2\|C\|}{\beta^2} = \frac{16\|C\|^2}{\beta^2(|\lambda| - \|A\|)}, \\ \alpha_n &\leq \frac{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\|C\|}{|\lambda| + \frac{(n-2)^2\beta^2}{2} - \|A\|} \cdot \frac{2 \cdot 2\|C\|}{|\lambda| + \frac{(n-1)^2\beta^2}{2} - \|A\|}, \quad n \geq 3.\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt α_n offensichtlich gegen 0, wird $|\lambda|$ größer, so wird α_n ebenfalls kleiner, für $\sigma > 0$ konvergiert α_n daher für $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \sigma$ gleichmäßig gegen 0. σ lässt sich demzufolge derart wählen, dass für $\operatorname{Re}(\lambda) \geq \sigma$ stets $\alpha_n \leq \frac{1}{4}$ für alle $n \geq 2$ gilt. Damit kann Satz 5.5.1 angewendet werden; dieser besagt, dass $\bar{z}_0^{(N)}(\lambda)$ für $\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma$ gegen $\bar{z}_0(\lambda)$ strebt, und

$$\left\| \bar{z}_0(\lambda) - \bar{z}_0^{(N)}(\lambda) \right\| \leq \frac{2^{2N+1}}{N+2} \prod_{n=1}^{N+1} \alpha_n$$

gilt. Wird α_n für $n \geq 3$ noch durch

$$\alpha_n \leq \frac{16\|C\|^2}{\beta^4(n-2)^2(n-1)^2}$$

abgeschätzt, so folgt

$$\begin{aligned}\left\| \bar{z}_0(\lambda) - \bar{z}_0^{(N)}(\lambda) \right\| &\leq \frac{2^{2N+1} \cdot 16^N \|C\|^{2N} \|x(0)\|}{(N+2)\beta^2\beta^{4(N-1)}((N-1)!N!)^2} \cdot \frac{1}{(|\lambda| - \|A\|)^2} \\ &= \frac{2\beta^2 \cdot 64^N \cdot \|C\|^{2N} \|x(0)\|}{(N+2)\beta^{4N}((N-1)!N!)^2} \cdot \frac{1}{(|\lambda| - \|A\|)^2}\end{aligned}$$

7.2.3 Rücktransformation

Mit der inversen Laplace-Transformation folgt

$$z_0(t) - z_0^{(N)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{y \in \mathbb{R}} e^{(\sigma+iy)t} \left(\bar{z}_0(\sigma+iy) - \bar{z}_0^{(N)}(\sigma+iy) \right) dy,$$

also

$$\left\| z_0(t) - z_0^{(N)}(t) \right\| \leq \gamma \cdot e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{8\|C\|}{\beta^2} \right)^{2N} \cdot \frac{1}{((N-1)!N!)^2 \cdot (N+2)}$$

mit dem weder von N noch von t abhängenden Wert

$$\gamma = \frac{\beta^2 \|x(0)\|}{\pi} \int_{y \in \mathbb{R}} \frac{dy}{\left(\sqrt{\sigma^2 + y^2} - \|A\| \right)^2}.$$

Wegen $z_0 = (y_0, 0)^T$ bzw. $z_0^{(N)} = (y_0^{(N)}, 0)^T$ ist damit gezeigt, dass die Funktion $y_0(t)$ in dem endlichen, deterministischen Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
 y'_k(t) &= \left(A + \left(ik\gamma - \frac{k^2\alpha^2}{2} \right) I \right) \cdot y_k(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{k+1}(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{k-1}(t) \\
 & \hspace{20em} (-N < k < N) \\
 y'_{-N}(t) &= \left(A + \left(-iN\gamma - \frac{N^2\alpha^2}{2} \right) I \right) \cdot y_{-N}(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{-N+1}(t) \\
 y'_N(t) &= \left(A + \left(iN\gamma - \frac{N^2\alpha^2}{2} \right) I \right) \cdot y_N(t) + \frac{1}{2} \cdot C \cdot y_{N-1}(t) \\
 y_0(0) &= x(0) \\
 y_k(0) &= 0 \quad (-N \leq k \leq N, k \neq 0)
 \end{aligned}$$

bis auf einen in seiner Norm durch

$$\gamma \cdot e^{\sigma t} \cdot \left(\frac{8 \|C\|}{\beta^2} \right)^{2N} \cdot \frac{1}{((N-1)!N!)^2 \cdot (N+2)}$$

beschränkten Fehler den Erwartungswert $\mathbf{E}[x(t)]$ berechnet.

Bemerkung 7.2.1. Bobryk benutzt in seiner Arbeit [5] das Konvergenzkriterium von Denk und Riederle, [10]. Natürlich folgt auch mit diesem Kriterium die Konvergenz des Kettenbruchs (dort wird mit der hier verwendeten Notation verlangt, dass das Produkt der α_n gegen 0 strebt, was offensichtlich der Fall ist) und damit des Verfahrens und auch eine vernünftige Fehlerabschätzung (es fehlt im Wesentlichen nur der Faktor $\frac{1}{N+2}$), da der Fehlerterm für große N vor allem durch die Fakultäten im Nenner bestimmt wird. Dieser kleine Unterschied kann jedoch je nach $\|C\|$, $\|A\|$ und β für kleine N wesentlich sein, und für eine praktische Umsetzung ist es von großer Wichtigkeit, N so klein wie möglich zu halten.

Anhang A

Banachalgebren

An dieser Stelle sollen kurz Definitionen und die wesentlichen verwendeten Sätze aus der Theorie der Banachalgebren angegeben werden.

A.1 Definitionen und einfache Ergebnisse

Definition A.1.1 (Banachalgebra). Eine *Algebra* \mathcal{R} ist ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, auf dem zusätzlich eine Multiplikation definiert ist. Ist auf einer Algebra \mathcal{R} darüberhinaus noch eine Norm $\|\cdot\|$ definiert, die submultiplikativ wirkt, d.h. $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, und ist \mathcal{R} bezüglich dieser Norm vollständig, so heißt \mathcal{R} *Banachalgebra*. Dabei werden die Begriffe der Cauchy-Folge und der konvergenten Folge wie in \mathbb{R} definiert. Existiert ein multiplikativ neutrales Element I , so wird \mathcal{R} als *Banachalgebra mit Eins* bezeichnet.

Anders als in Strukturen mit multiplikativer Norm muss $\|I\|$ für das neutrale Element I nicht 1 sein. Aus der Submultiplikativität folgt $\|I\| \leq \|I\|^2$ und wegen $\|I\| > 0$ (nach Definition der Norm und wegen $I \neq 0$ für nichttriviale Banachalgebren) ist $\|I\| \geq 1$. Als Beispiel sei hier die Banachalgebra aller Matrizen der Dimension $d \times d$ mit $d \geq 2$ mit der Gesamtnorm oder der Perron-Frobenius-Norm angeführt: Das multiplikativ neutrale Element I ist die Einheitsmatrix, in der Gesamtnorm ist $\|I\| = d$, in der Perron-Frobenius-Norm ist $\|I\| = \sqrt{d}$.

Definition A.1.2 (Einheiten). In einer Banachalgebra \mathcal{R} mit Eins I heißt $r \in \mathcal{R}$ eine *Einheit* oder *invertierbar*, wenn es ein Element $s \in \mathcal{R}$ mit $rs = sr = I$ gibt. Dabei wird s als *Inverse* von r auch mit $s = r^{-1}$ bezeichnet. Die Gruppe aller Einheiten wird mit \mathcal{R}^* bezeichnet.

Bei der Definition ist zu beachten, dass alle Ergebnisse der Ringtheorie auch für Banachalgebren gelten, insbesondere sind Inverse im Falle ihrer Existenz stets eindeutig, und die

Einheiten bilden tatsächlich eine Gruppe. Natürlich gelten auch alle weiteren Rechenregeln wie $0r = r0 = 0$ für alle $r \in \mathcal{R}$ und $(rs)^{-1} = s^{-1}r^{-1}$ für $r, s \in \mathcal{R}^*$. Ein weiteres einfaches Ergebnis ist

Lemma A.1.1. *Es seien $r, s, t \in \mathcal{R}$, r^{-1} und t^{-1} sowie $(rst)^{-1}$ mögen existieren. Dann existiert auch s^{-1} .*

Beweis. Das Inverse von s kann mit $t(rst)^{-1}r$ direkt angegeben werden. Denn wird die Identität $rst(rst)^{-1} = I$ von links mit r^{-1} und von rechts mit r multipliziert, so ergibt sich gerade $s \cdot t(rst)^{-1}r = I$, und wird $(rst)^{-1}rst = I$ von links mit t und von rechts mit t^{-1} multipliziert, so zeigt sich $t(rst)^{-1}r \cdot s = I$. \square

A.2 Konvergenz von Reihen

Nach Definition heißt eine Reihe $\sum r_n$ konvergent gegen r , wenn

$$\left\| r - \sum_{n=0}^N r_n \right\|$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Sie wird als absolut konvergent bezeichnet, falls in \mathbb{R} die Reihe $\sum \|r_n\|$ konvergiert.

Satz A.2.1. *Es sei \mathcal{R} eine Banachalgebra und $r \in \mathcal{R}$. Konvergiert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n,$$

so ist der Grenzwert gerade $(I - r)^{-1}$. Für $\|r\| < 1$ ist die Konvergenz garantiert und für alle $s \in \mathcal{R}$ gilt dann

$$\|(I - r)^{-1}s\| \leq \frac{\|s\|}{1 - \|r\|} \quad \text{bzw.} \quad \|s(I - r)^{-1}\| \leq \frac{\|s\|}{1 - \|r\|}.$$

Beweis. Konvergiert die Reihe über r^n , so gilt notwendig $r^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Nun ist

$$(I - r) \sum_{n=0}^{N-1} r^n = I - r^N = \sum_{n=0}^{N-1} r^n (I - r)$$

und der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ liefert

$$(I - r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n = I = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (I - r)$$

und damit die erste Behauptung. Ist $\|r\| < 1$, so ist wegen $\|r^n\| \leq \|r\|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Reihe über $\|r^n\|$ für $n \geq 1$ durch eine konvergente reelle geometrische Reihe abzuschätzen, d.h. die geometrische Reihe konvergiert sogar absolut. Die Subadditivität und die Submultiplikativität liefern dabei

$$\|(I - r)^{-1}s\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} r^n s \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|r\|^n \|s\| = \frac{\|s\|}{1 - \|r\|}$$

und entsprechend für Multiplikation von links mit s . □

Satz A.2.2. *Es seien $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in der Banachalgebra \mathcal{R} . Wird $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ gesetzt, so konvergiert auch $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut mit $C = AB$.*

Beweis. Wegen $\|c_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|a_k\| \|b_{n-k}\|$ und der absoluten Konvergenz von A und B folgt die absolute Konvergenz von C aus dem entsprechenden Satz in \mathbb{R} . Es bezeichne nun $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, entsprechend B_n und C_n . Dann gilt

$$C_n = \sum_{j=0}^n c_j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=k}^n b_{j-k} = \sum_{k=0}^n a_k B_{n-k}$$

sowie

$$AB = (A - A_n)B + \sum_{k=0}^n a_k B$$

und zusammen folgt

$$\begin{aligned} AB - C_n &= (A - A_n)B + \sum_{k=0}^n a_k (B - B_{n-k}) \\ &= (A - A_n)B + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k (B - B_{n-k}) + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n a_k (B - B_{n-k}). \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite strebt offensichtlich gegen 0. Der zweite kann in seiner Norm durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \max_{j \geq \frac{n}{2}} \|B - B_j\|$$

abgeschätzt werden, strebt also auch gegen 0. Der letzte Summand kann in seiner Norm gegen

$$\sum_{k \geq \frac{n}{2}} \|a_k\| \max_{j \in \mathbb{N}_0} \|B - B_j\|$$

abgeschätzt werden, und auch er strebt gegen 0. \square

Satz A.2.3. *Es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} r_n^{(k)} = r_n$ in der Banachalgebra \mathcal{R} . Ferner gebe es reelle Zahlen x_n mit $\|r_n^{(k)}\| \leq x_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sum x_n < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n.$$

Beweis. Die Konvergenz der vorkommenden Reihen ist klar, da auch $\|r_n\| \leq x_n$ ist; sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle zunächst N derart, dass $\sum_{n=N}^{\infty} x_n < \frac{\epsilon}{3}$ ist. Anschließend wähle K so groß, dass für alle $k \geq K$ und für alle $n = 0, \dots, N-1$

$$\|r_n - r_n^{(k)}\| < \frac{\epsilon}{3N}$$

ist. Dann gilt

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} r_n - \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(k)} \right\| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \|r_n - r_n^{(k)}\| + \sum_{n=N}^{\infty} \|r_n\| + \sum_{n=N}^{\infty} \|r_n^{(k)}\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

\square

Satz A.2.4. *Es sei J eine abzählbare Indexmenge, $J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$ und*

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k.$$

Die Reihe

$$\sum_{j \in J} r_j$$

konvergiere absolut in der Banachalgebra \mathcal{R} . Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_k} r_j = \sum_{j \in J} r_j.$$

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aufgrund der absoluten Konvergenz kann eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$ so gewählt werden, dass

$$\sum_{j \in J \setminus J_0} \|r_j\| < \epsilon$$

ist. Wegen $\bigcup J_k = J$ kann K so gewählt werden, dass

$$J_0 \subset \bigcup_{k=1}^K J_k = J_K$$

und somit auch $J_0 \subset J_k$ für alle $k \geq K$ ist, oder umgekehrt formuliert $J \setminus J_k \subset J \setminus J_0$. Es folgt

$$\left\| \sum_{j \in J} r_j - \sum_{j \in J_k} r_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J \setminus J_k} r_j \right\| \leq \sum_{j \in J \setminus J_k} \|r_j\| \leq \sum_{j \in J \setminus J_0} \|r_j\| < \epsilon$$

für alle $k \geq K$. □

Anhang B

Abbildungen

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die stationäre Verteilung der Kundenanzahl für das Beispiel aus Abschnitt 7.1 unter verschiedenen Parameterfestsetzungen.

In den Abbildungen B.1.1 bis B.1.5 wird der Parameter c bei fixierten Werten $\lambda_0 = 100$, $\mu_0 = 1$ und $\gamma_0 = 0.001$ variiert. In den Abbildungen B.1.6 bis B.1.9 wird der Parameter λ_0 bei fixierten Werten $c = 50$, $\mu_0 = 1$ und $\gamma_0 = 0.001$ variiert. In den Abbildungen B.1.10 bis B.1.13 wird der Parameter μ_0 bei fixierten Werten $c = 50$, $\lambda_0 = 100$ und $\gamma_0 = 0.001$ variiert. In den Abbildung B.1.14 bis B.1.17 wird der Parameter γ_0 bei fixierten Werten $c = 50$, $\lambda_0 = 100$ und $\mu_0 = 1$ variiert.

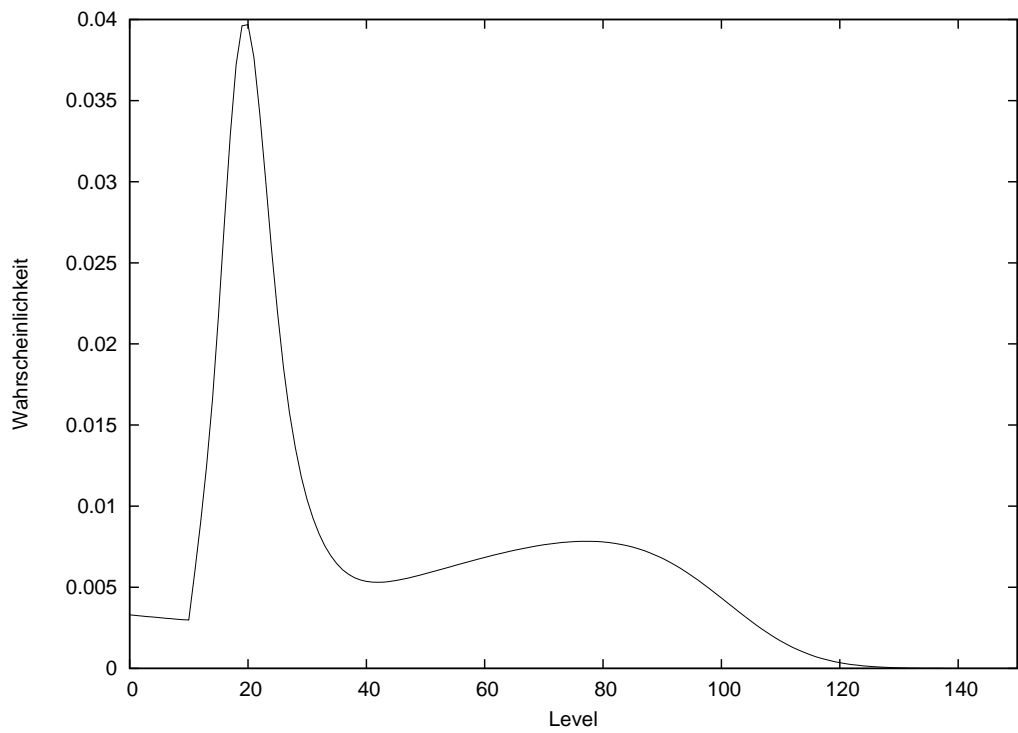
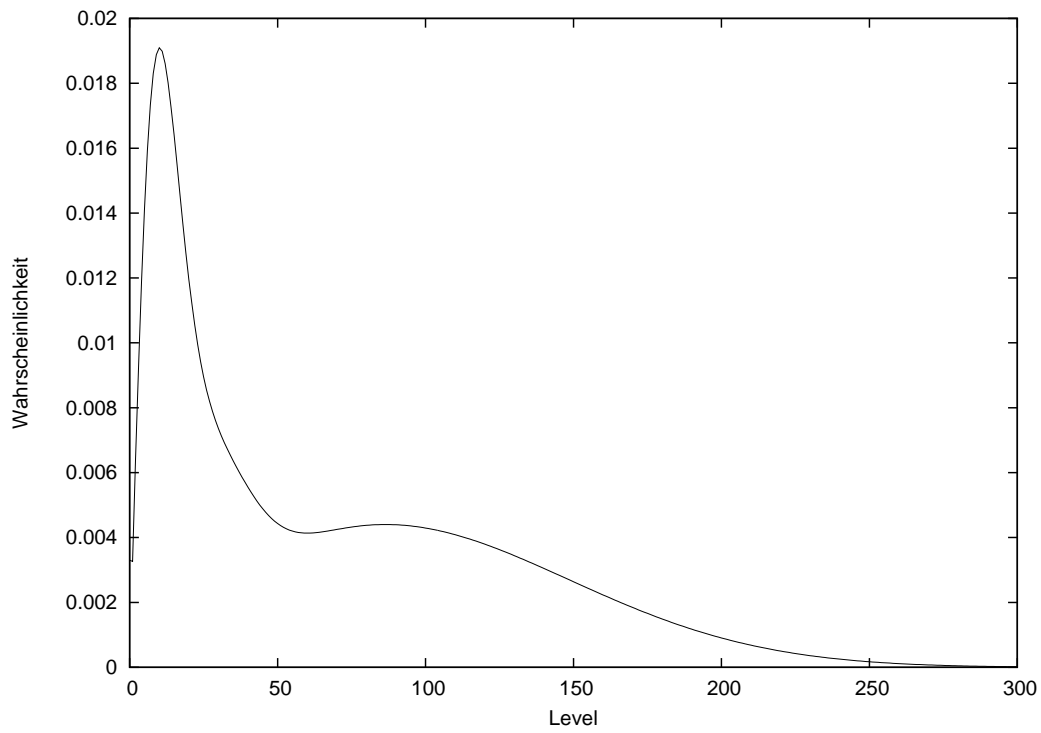


Abbildung B.1.1: Level-Wahrscheinlichkeiten für $c = 1$ (oben) und $c = 10$

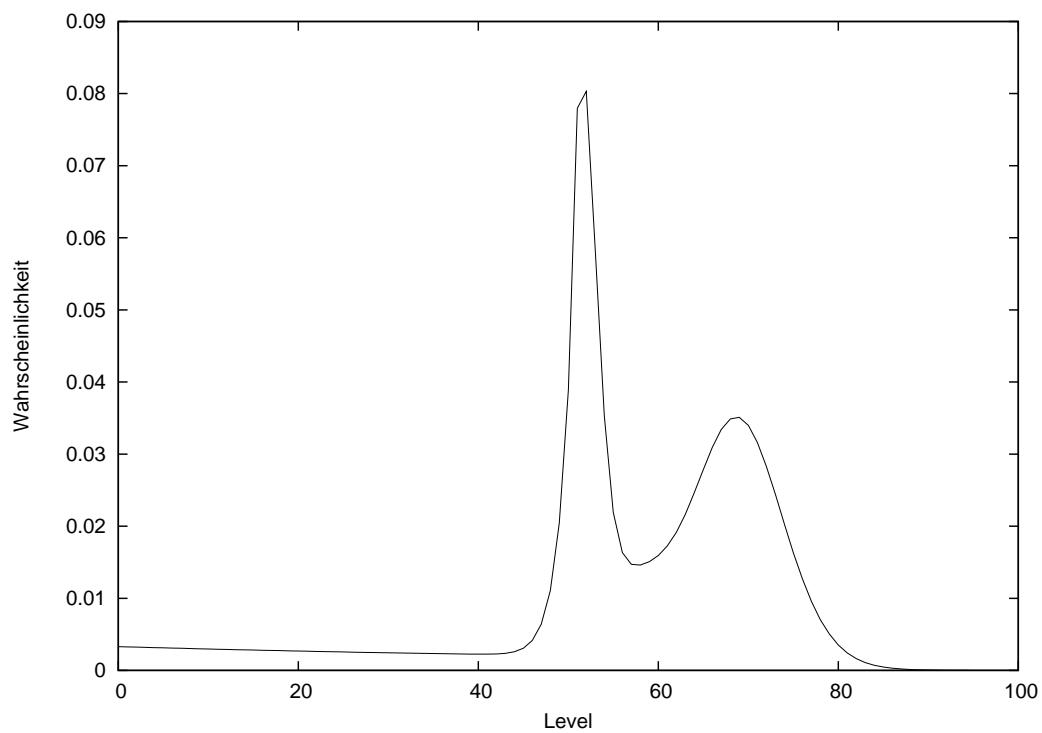
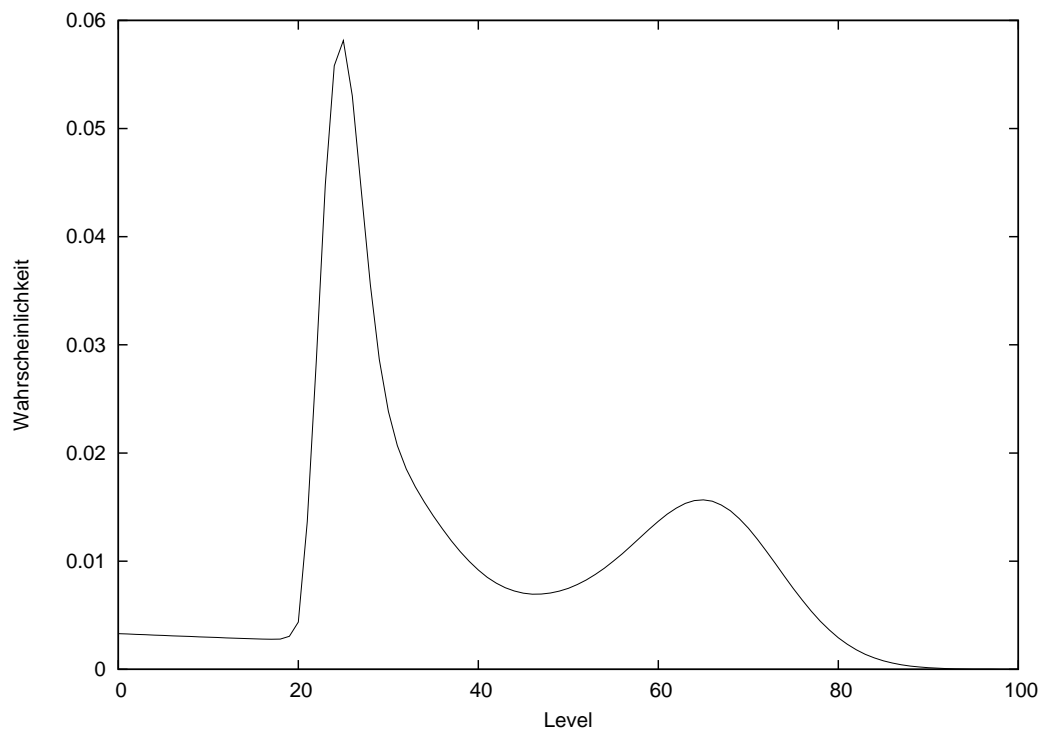


Abbildung B.1.2: Level-Wahrscheinlichkeiten für $c = 20$ (oben) und $c = 50$

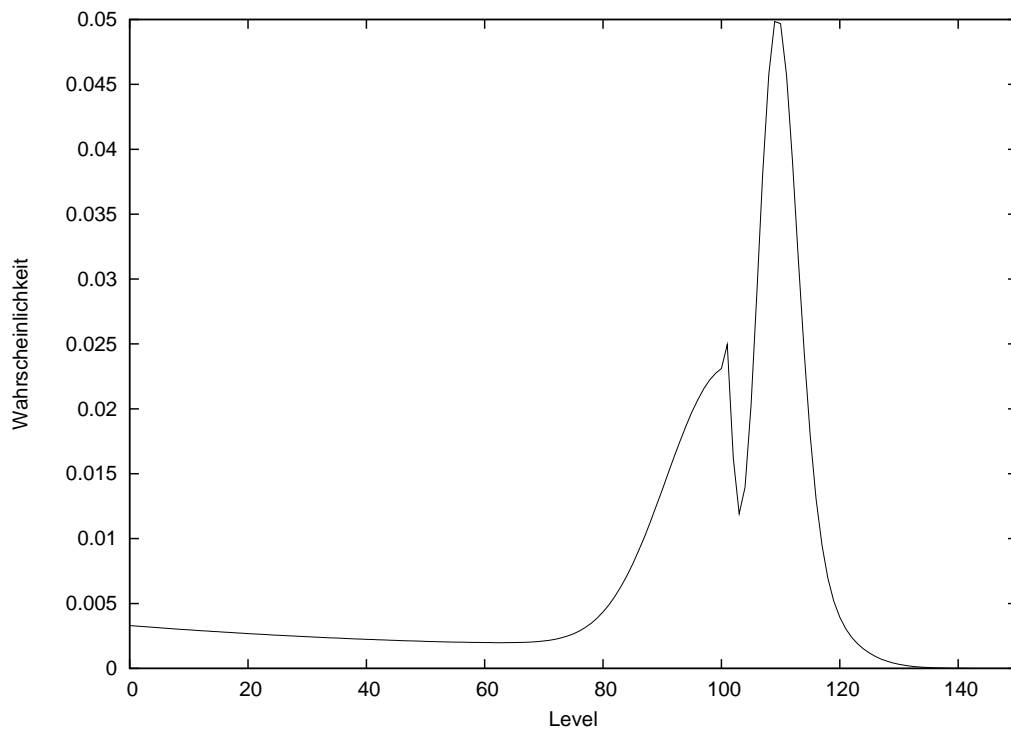
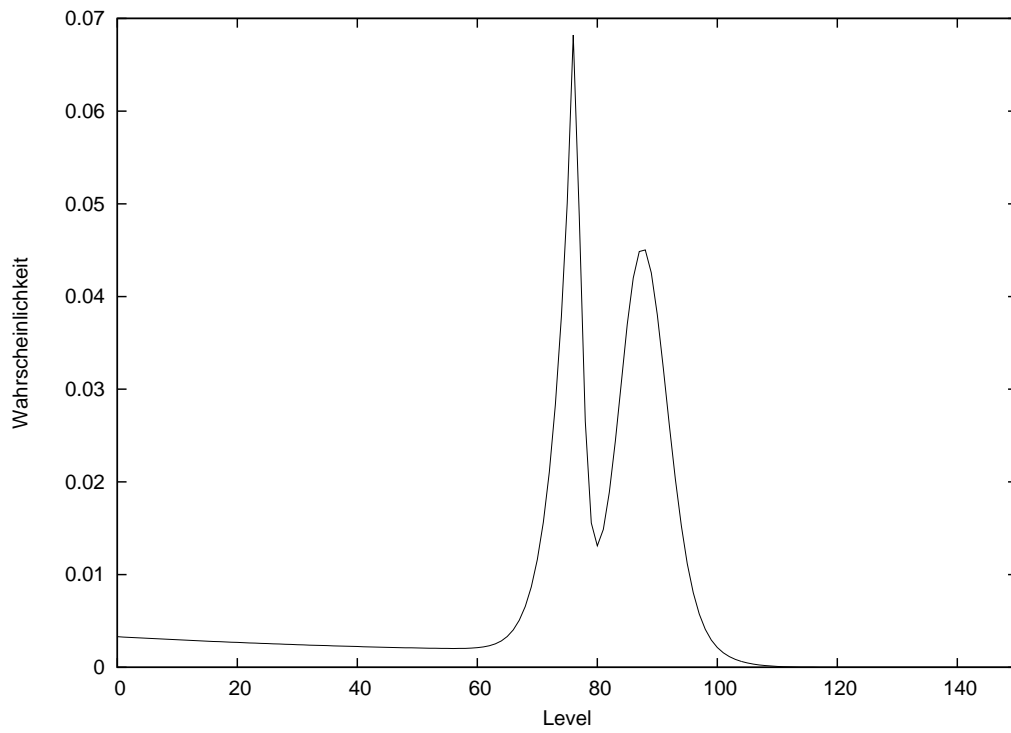


Abbildung B.1.3: Level-Wahrscheinlichkeiten für $c = 75$ (oben) und $c = 100$

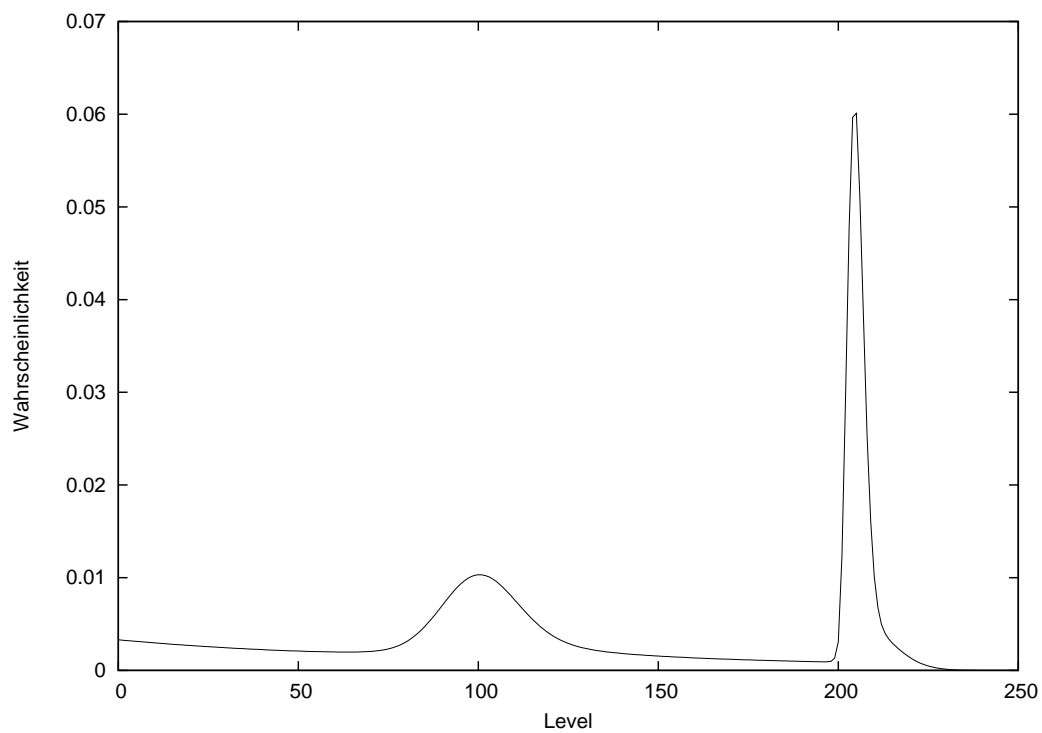
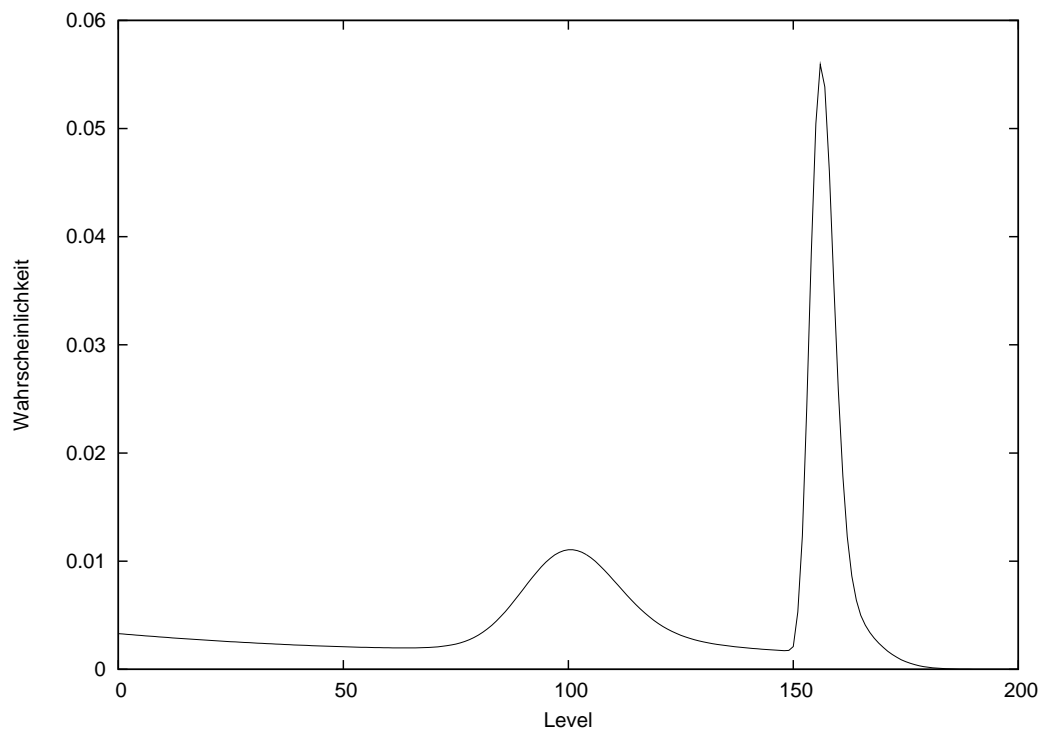


Abbildung B.1.4: Level-Wahrscheinlichkeiten für $c = 150$ (oben) und $c = 200$

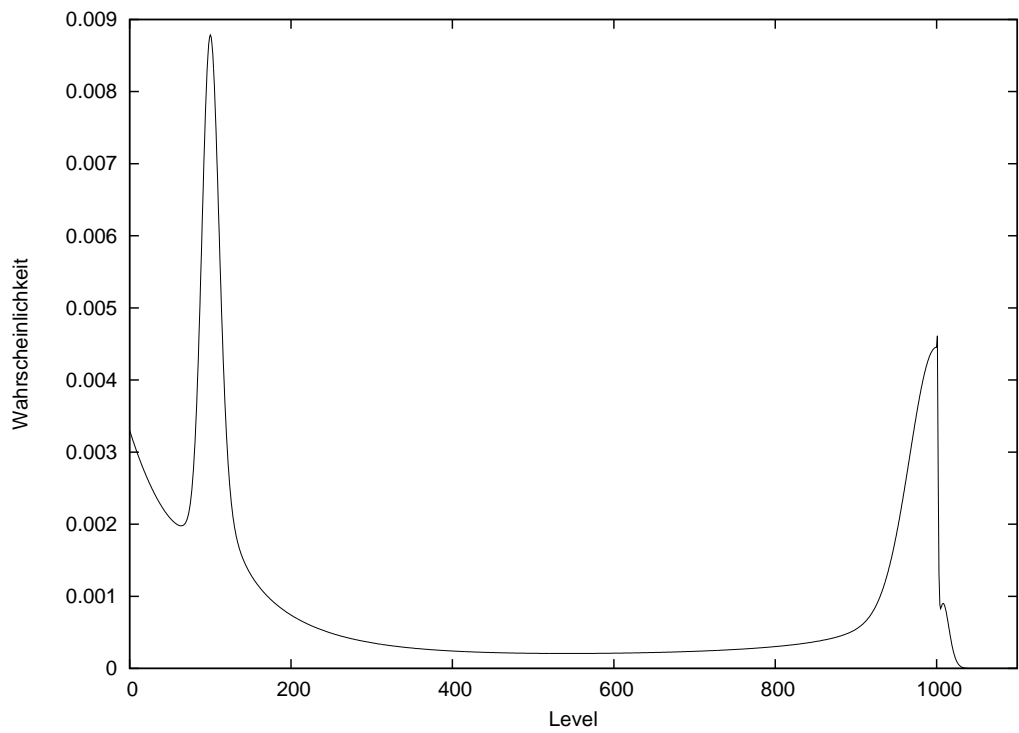
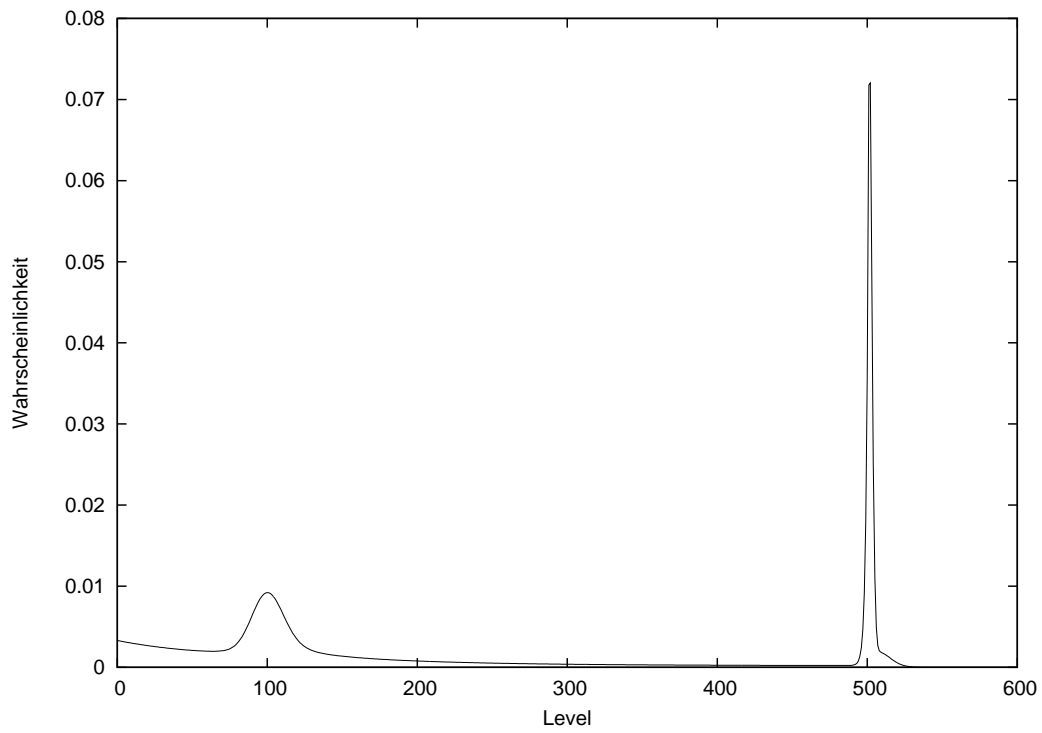


Abbildung B.1.5: Level-Wahrscheinlichkeiten für $c = 500$ (oben) und $c = 1000$

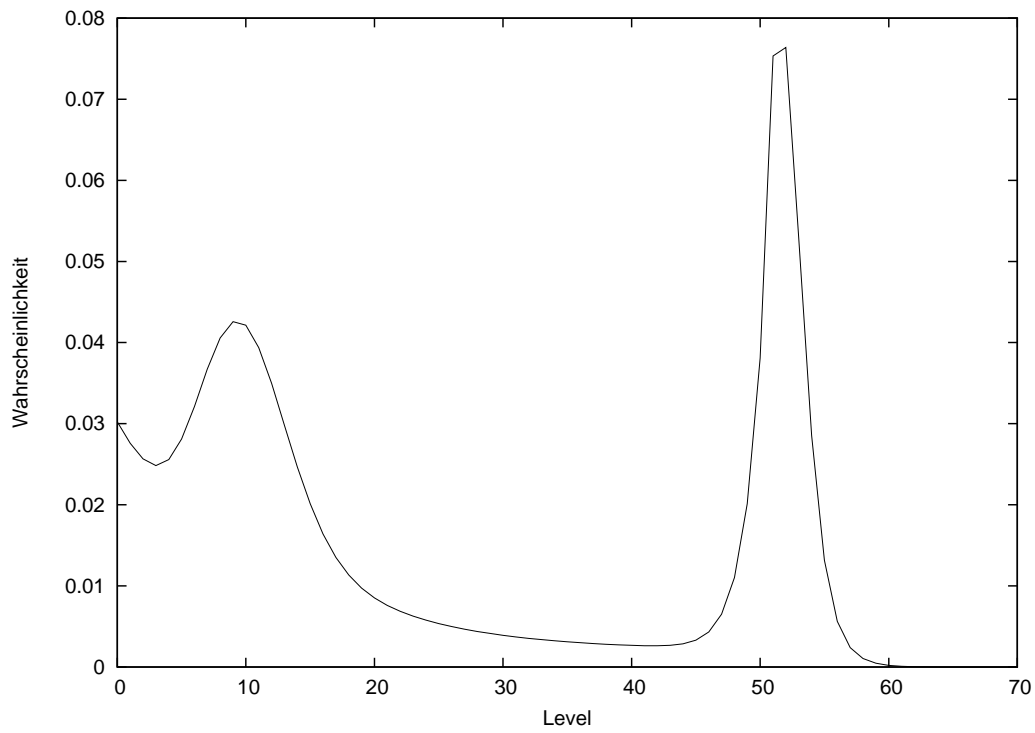


Abbildung B.1.6: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\lambda = 10$

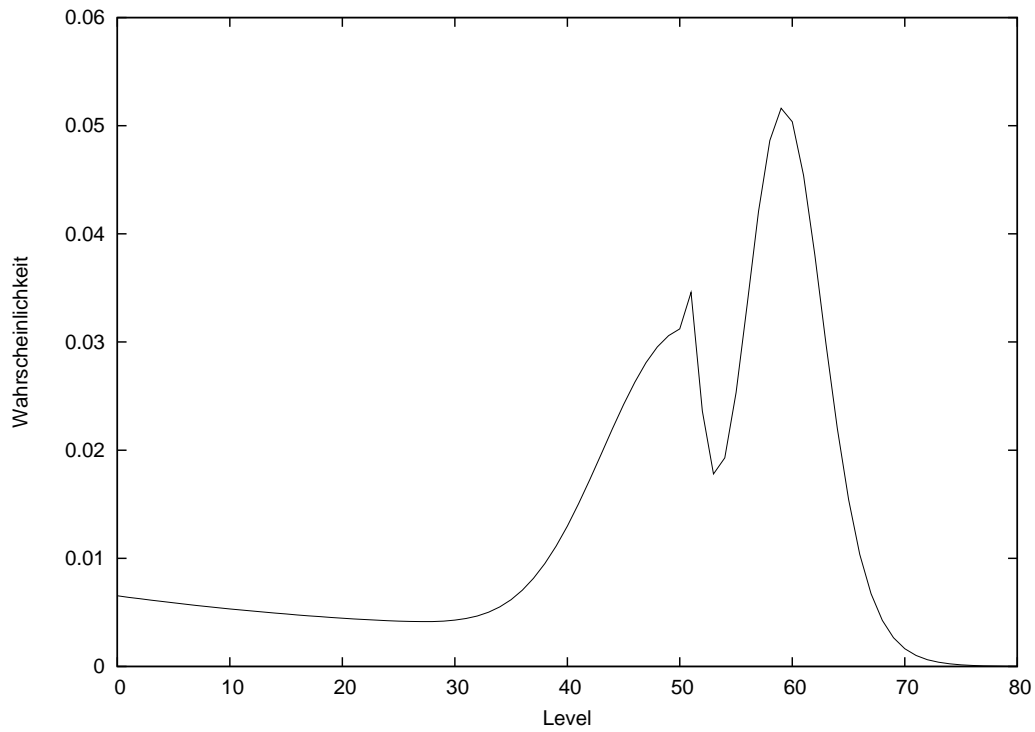


Abbildung B.1.7: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\lambda = 50$

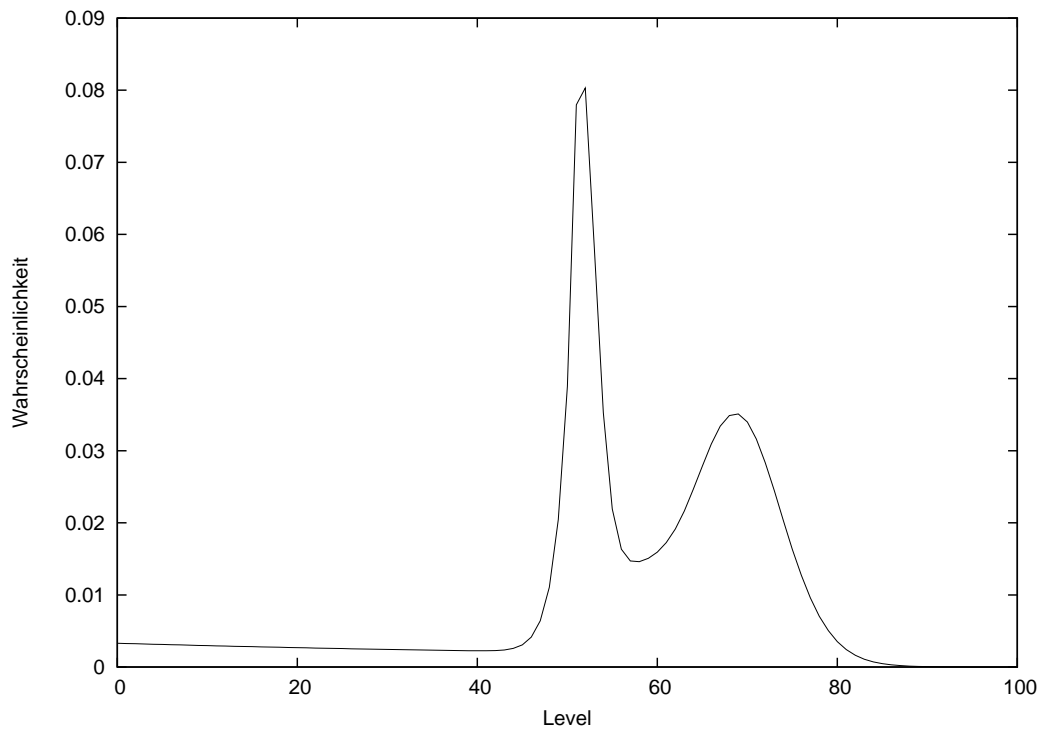


Abbildung B.1.8: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\lambda = 100$

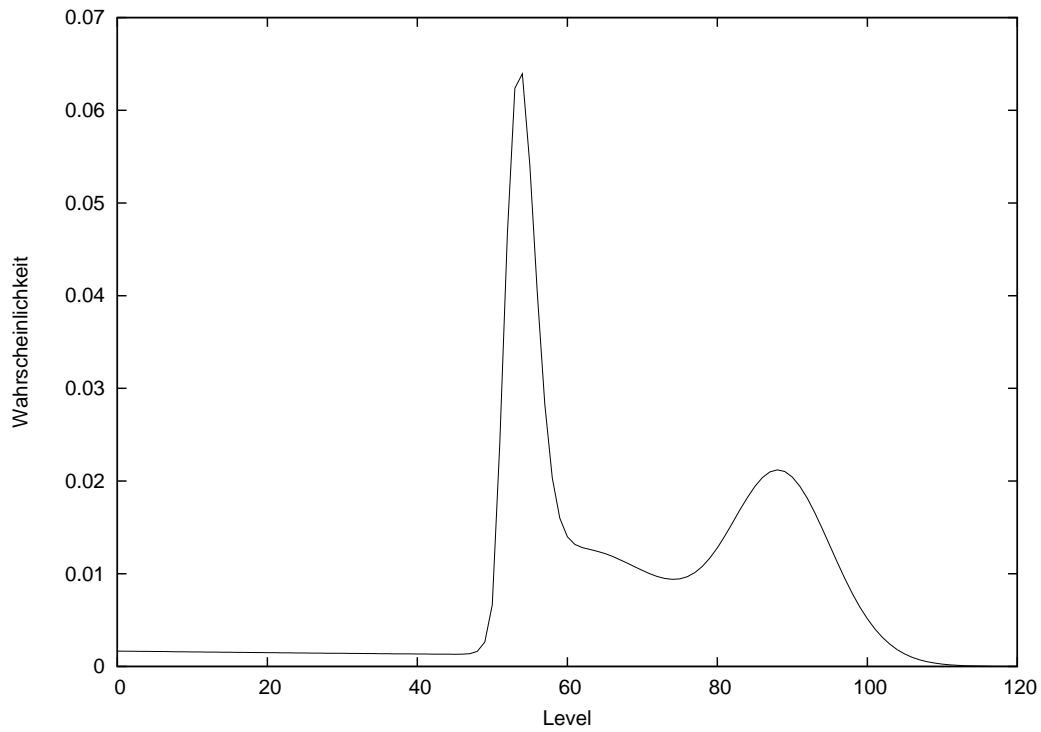


Abbildung B.1.9: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\lambda = 200$

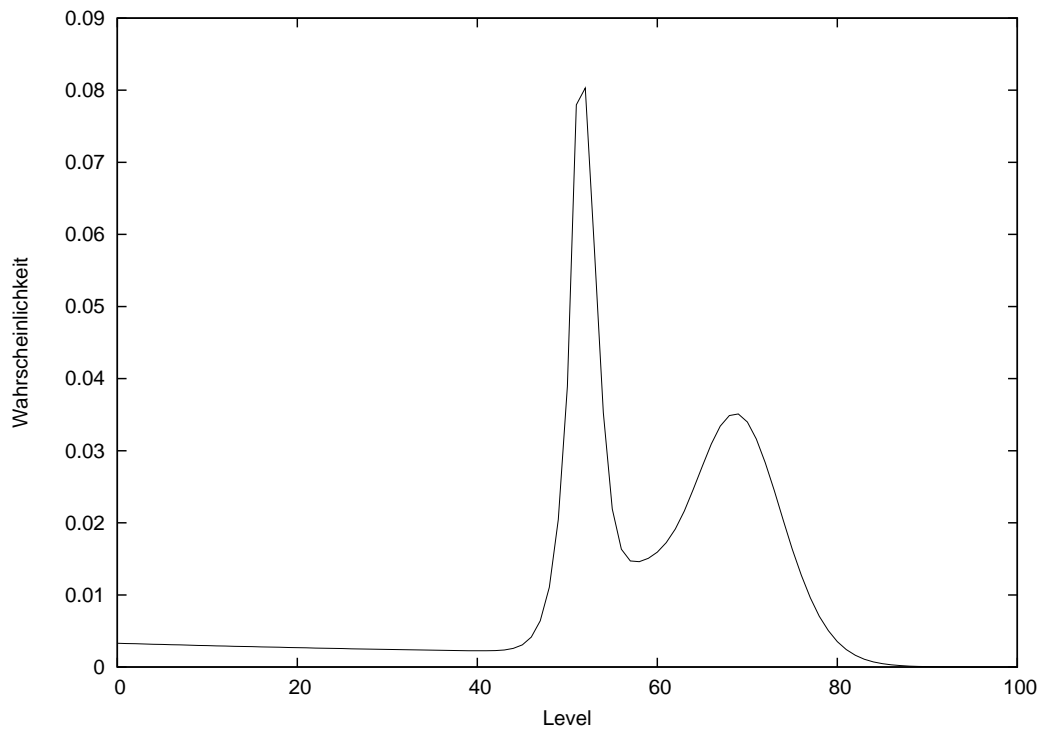


Abbildung B.1.10: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\mu = 1$

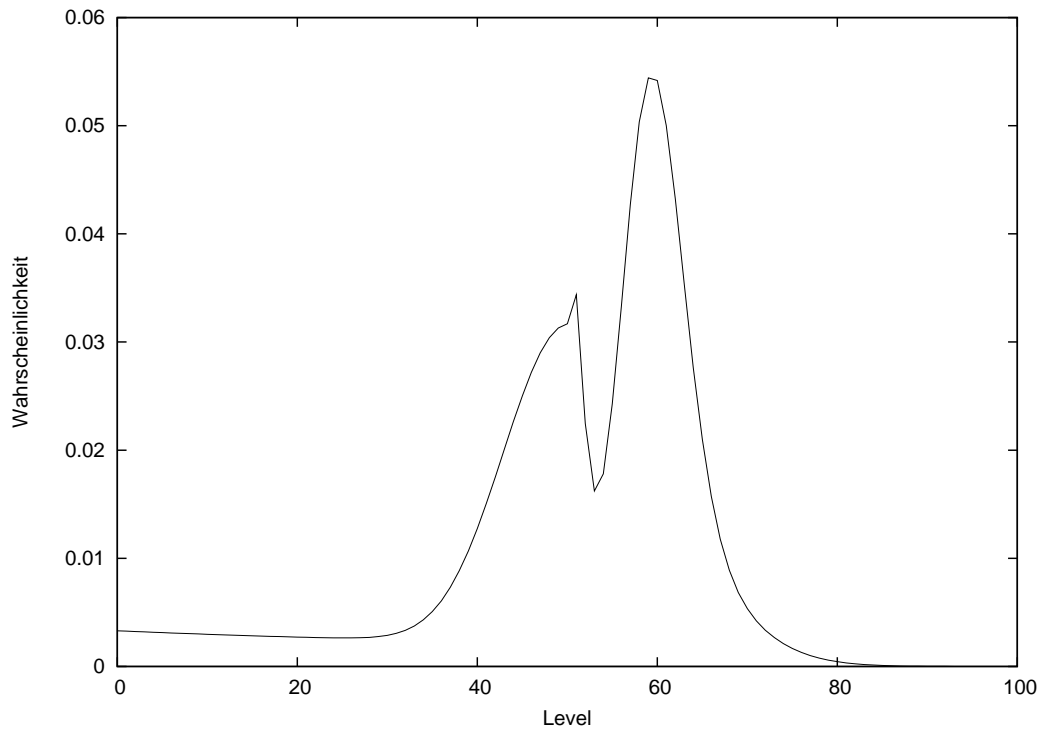


Abbildung B.1.11: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\mu = 2$

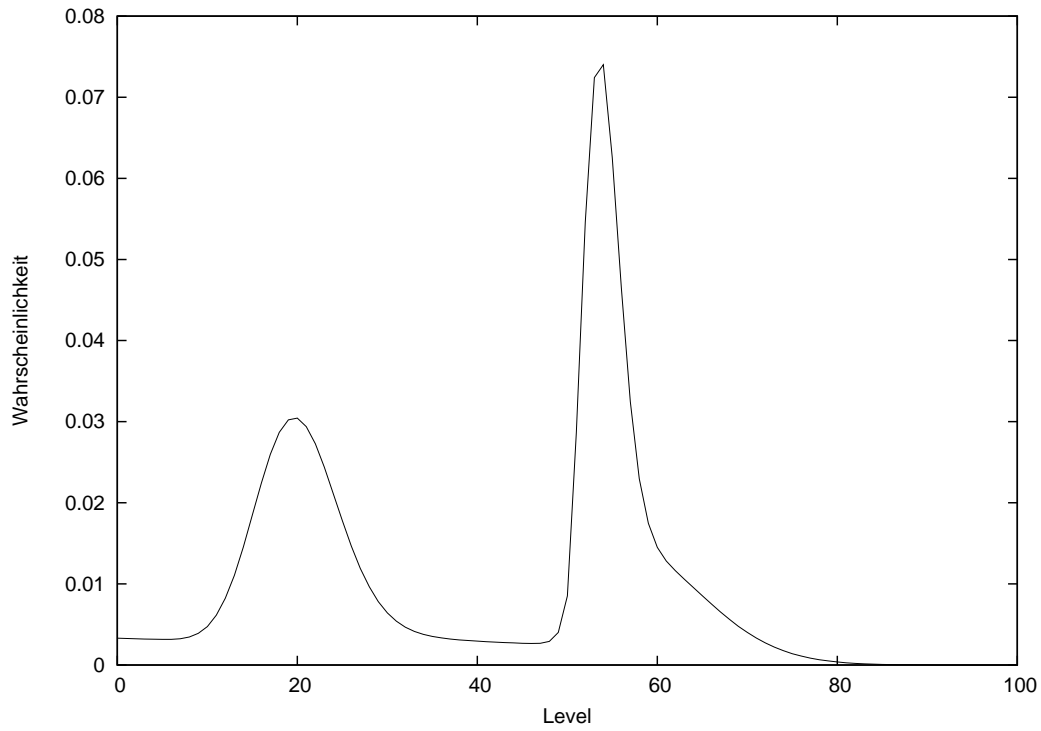


Abbildung B.1.12: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\mu = 5$

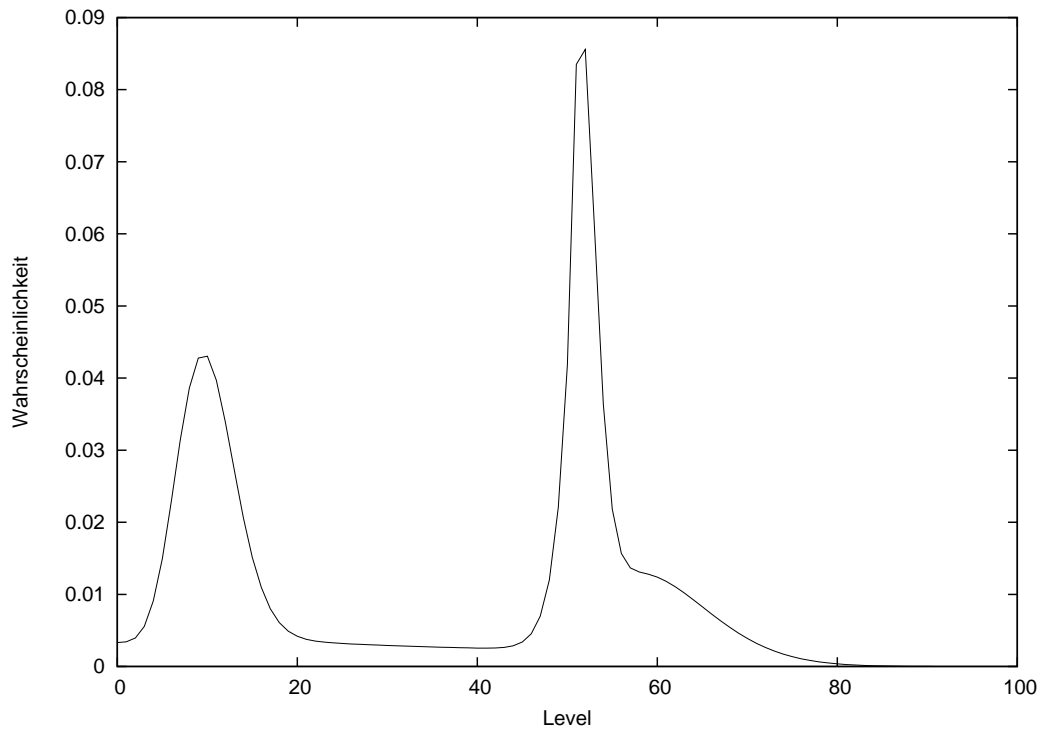


Abbildung B.1.13: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\mu = 10$

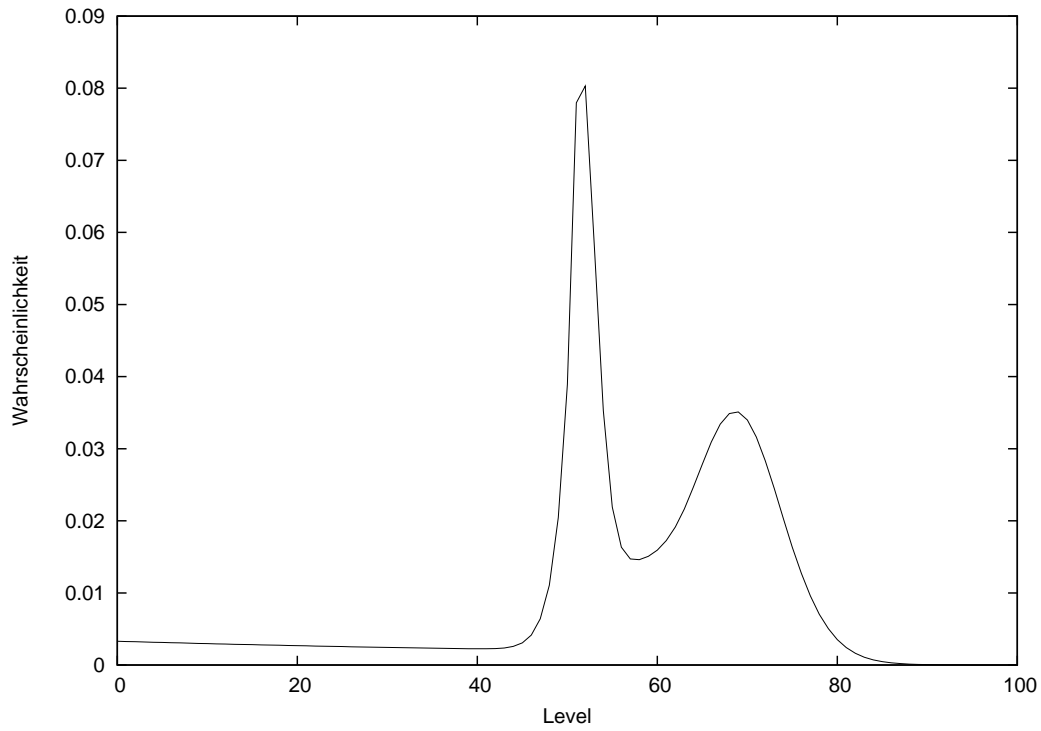


Abbildung B.1.14: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\gamma = 1$

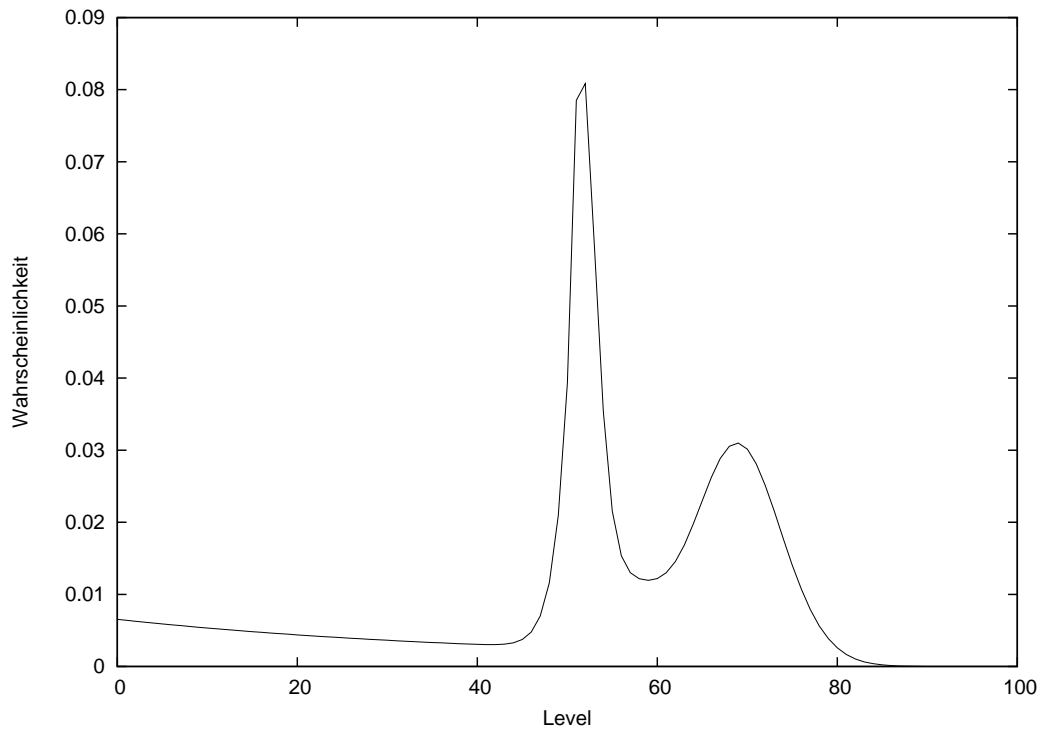


Abbildung B.1.15: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\gamma = 2$

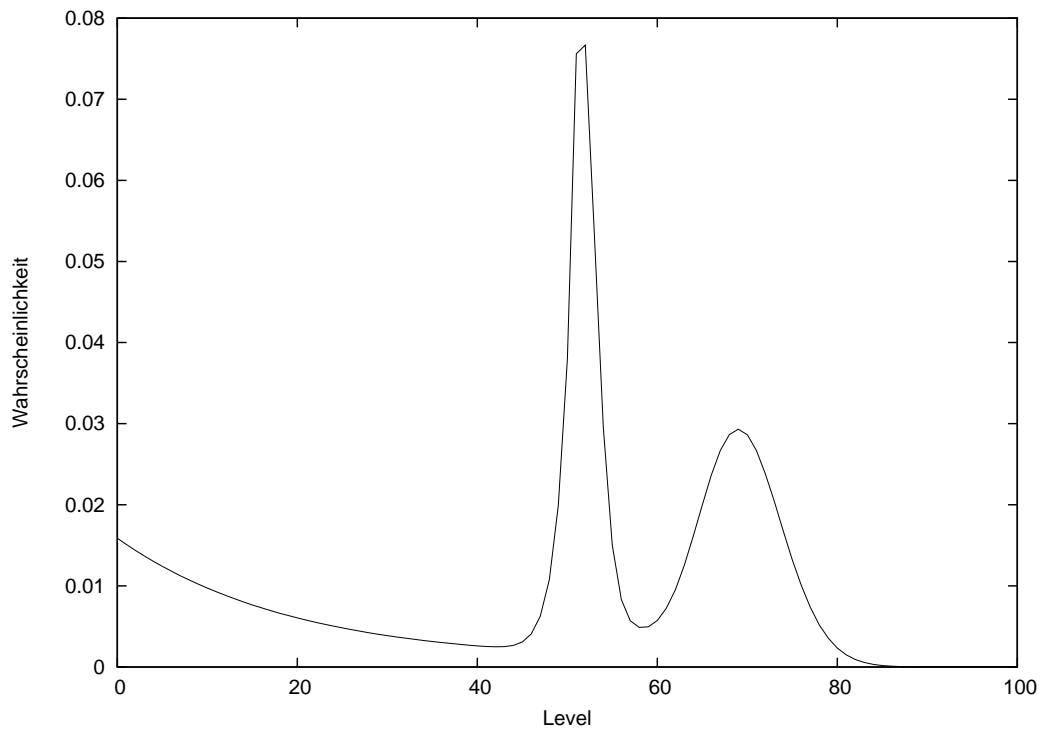


Abbildung B.1.16: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\gamma = 5$

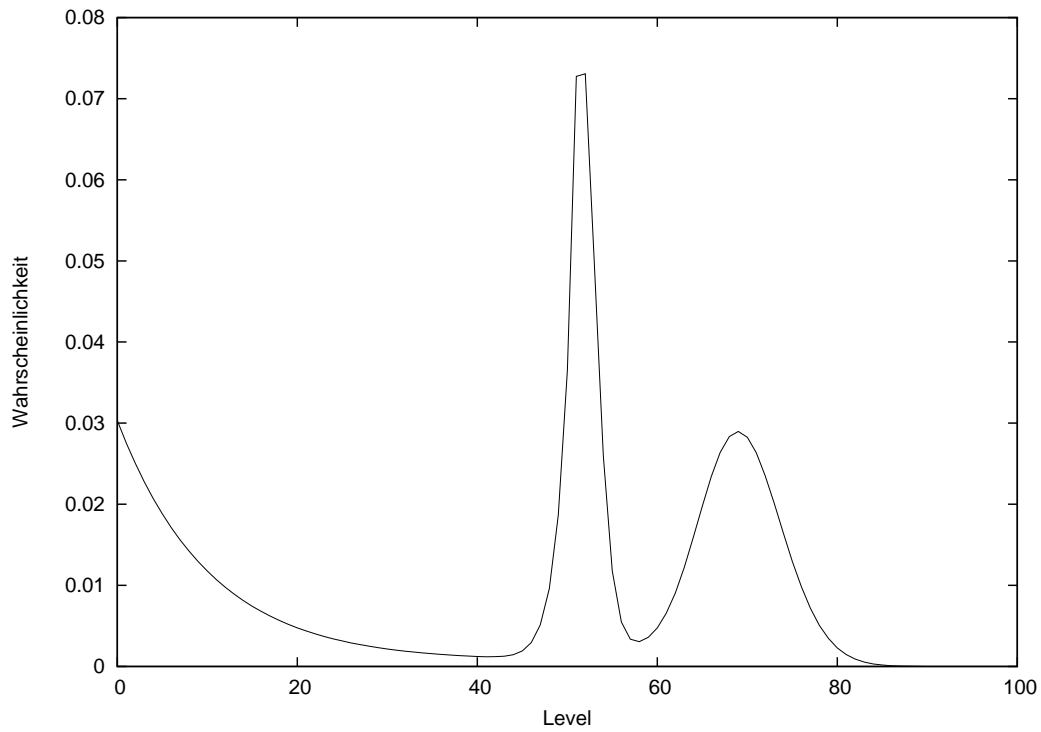


Abbildung B.1.17: Level-Wahrscheinlichkeiten für $\gamma = 10$

Anhang C

Bezeichnungen

- \mathcal{R} bezeichnet eine beliebige Banachalgebra mit Einselement. Dieses wird mit I bezeichnet, die Einheitengruppe mit \mathcal{R}^* .
- I_d bezeichnet die $d \times d$ -Einheitsmatrix.
- Es bezeichnet $\mathbb{N}_{m,n} = \{m, \dots, n\}$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$, für $m > n$ ist $\mathbb{N}_{m,n} = \emptyset$.
- Das Produkt $\prod_{i=1}^n r_i$ wird von unten nach oben ausgeschrieben, also $\prod_{i=1}^n r_i = \prod_{i=1}^{n-1} r_i \cdot r_n$.
- Das von oben nach unten ausgeschriebene Produkt wird mit $\prod_1^{i=n} r_i$ abgekürzt, also

$$\prod_1^{i=n} r_i = r_n \cdot \prod_1^{i=n-1} r_i.$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. Auric: *Recherches sur les fractions continues algébriques*. Journal de math. (6), 3, (1907).
- [2] H. Baumann, W. Sandmann: *Numerical solution of level dependent quasi-birth-and-death processes*. International Conference of Computational Science, ICCS 2010, Vol. 1 of Elsevier Procedia Computer Science, pp. 1555-1563 (2010).
- [3] H. Baumann, W. Sandmann: *Steady State Analysis of Level Dependent Quasi-Birth-and-Death Processes with Catastrophes*. Eingereicht bei Computers and Operations Research.
- [4] L. Bernstein: *The Jacobi-Perron Algorithm: Its Theory and Application*. Lecture Notes Math 207, Springer (1971).
- [5] R.V. Bobryk: *Closure method and asymptotic expansions for linear stochastic systems*. Journal Math. Anal. Appl. 329, pp. 703-711 (2007).
- [6] L. Breuer, D. Baum: *An introduction to queuing theory and matrix-analytic methods*. Springer (2005).
- [7] L. Bright, P.G. Taylor: *Calculating the Equilibrium Distribution in Level Dependent Quasi-Birth-and-Death Processes*. Commun. Statist.-Stochastic Models 11 (3), pp. 497-525 (1995).
- [8] A.K. Common, S.T. Hafez: *Continued-fraction solutions to the Ricatti equation and integrable lattice systems*. Journal Phys. A. 23, pp. 455-466 (1990).
- [9] A.K. Common, D.E. Roberts: *Solutions to the Ricatti equation and their relation to the Toda lattice*. Journal Phys. A. 19, pp. 1889-1898 (1986).
- [10] H. Denk, M. Riederle: *A Generalization of a Theorem of Pringsheim*. Journal of Approximation Theory 35, pp. 355-363 (1982).
- [11] M.G. de Bruin: *Convergence of generalized C-Fractions*. Journal Approx. Th. 24, pp. 177-207 (1978).

- [12] D.P. Gaver, P.A. Jacobs, G. Latouche: *Finite Birth-and-Death Models in Randomly Changing Environments*. Advances in Applied Probability 16 (4), pp. 715-731 (1984).
- [13] W.K. Grassmann, M.I. Taksar, D.P. Heyman: *Regenerative analysis and steady state distribution for Markov chains*. Operations Research 33 (5), pp. 1107-1116 (1985).
- [14] G.H. Golub, C.F. Van Loan: *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1996.
- [15] T. Hanschke: *A Matrix Continued Fraction Algorithm for the Multiserver Repeated Order Queue*. Mathematical and Computer Modelling 30, pp. 159-170 (1999).
- [16] T. Hanschke: *Ein verallgemeinerter Jacobi-Perron-Algorithmus zur Reduktion linearer Differenzgleichungssysteme*. Mh. Math 126, pp. 287-311 (1998).
- [17] A. Herzog: *Warteschlangensysteme mit ungedulden Kunden und Wiederholern*. Dissertation TU Clausthal (2008).
- [18] P. Levrie: *Pringsheim's theorem for generalized continued fractions*. Journal of Computational and Applied Mathematics 14, pp. 439-445 (1986).
- [19] P. Levrie: *Pringsheim's theorem revisited*. Journal of Computational and Applied Mathematics 25, pp. 93-104 (1989).
- [20] P. Levrie, A. Bultheel: *Matrix Continued Fractions related to first-order linear recurrence systems*. Electronic Transactions on Numerical Analysis 4, pp. 46-63 (1996).
- [21] M. Mederer: *Transient solutions of Markov processes and generalized continued fractions*. Journal of Applied Mathematics 68, pp. 99-118 (2003).
- [22] M.F. Neuts: *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. The John Hopkins University Press, Baltimore, MD (1981).
- [23] O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner, Stuttgart (1954).
- [24] O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen II*. Teubner, Stuttgart (1957).
- [25] P. Pfluger: *Matrizenkettenbrüche*. Dissertation ETH Zürich, Juris Druck + Verlag Zürich (1966).
- [26] A. Pringsheim: *Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern*. Sb. Münch. 35 (1905).
- [27] A. Pringsheim: *Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche*. Sb. Münch. 28 (1908).
- [28] M. Raissouli, A. Kacha: *Convergence of matrix continued fractions*. Linear Algebra and its Applications 320, pp. 115-129 (2000).

- [29] G.M. Rassias: *The mathematical heritage of C.F. Gauss*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991.
- [30] A. Schelling: *Convergence Theorems for Continued Fractions in Banach Algebras*. Journal of Approximation Theory 86, pp. 72-80 (1995).
- [31] E. Seneta: *Non-negative Matrices and Markov Chains*. Springer (1981)
- [32] V.N. Sorokin, J. Van Iseghem: *Matrix Continued Fractions*. Journal of Approximation Theory 96, pp. 237-257 (1999).
- [33] B. Philippe, Y. Saad and W.J. Stewart: *Numerical Methods in Markov Chain Modeling*. Operations Research 40 (6), pp. 1156-1179 (1992).
- [34] W.J. Stewart: *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*. Princeton University Press, 1994.
- [35] P. van der Cruyssen: *Linear Difference Equations and Generalized Continued Fractions*. Computing 22, pp. 269-278 (1979).
- [36] Huan-xi Zhao, Gongqin Zhu: *Matrix-valued continued fractions*. Journal of Approximation Theory 120, pp. 136-152 (2003).