

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorworte</b>	<b>i</b>
<b>Einleitung</b>	<b>xi</b>
<b>1 Grundlagen der Vektoralgebra</b>	<b>1</b>
1.1 Elementare Begriffe	1
1.1.1 Maßzahlkollektive	1
Skalare, Vektoren, Tensoren	1
1.1.2 Betrag und Einsvektor	2
1.1.3 Vergleiche	3
Parallele Vektoren	3
Komplanare Vektoren	3
1.2 Elementare Operationen	4
1.2.1 Grafische Addition und Subtraktion	4
1.2.2 Teilvektor und Richtungskosinus	6
1.2.3 Matrixdarstellung	8
1.2.4 Numerische Addition und Subtraktion	8
1.2.5 Ortsvektor	10
1.2.6 Multiplikation mit Skalaren	11
1.2.7 Anwendungen in der Planimetrie	12
<b>2 Produkte aus Vektoren</b>	<b>13</b>
2.1 Punktprodukt	13
2.1.1 Definition	13
2.1.2 Merkmale	15
2.1.3 Anwendungen in der ebenen Trigonometrie	15
2.2 Kreuzprodukt	17
2.2.1 Definition	17
2.2.2 Merkmale	19
2.2.3 Anwendung in der Goniometrie	20
2.3 Elementare Vektorgleichungen	20
2.3.1 Auflösung nach Vektoren	20
2.3.2 Auflösung nach Skalaren	21
2.4 Spatprodukt	23
2.4.1 Definition	23

2.4.2	Merkmale . . . . .	23
2.4.3	Reziproke Dreibeine . . . . .	25
2.4.4	Anwendung in der Algebra . . . . .	26
2.5	Mehrfache Kreuzprodukte . . . . .	27
2.5.1	Kreuz-Kreuz-Produkt . . . . .	27
2.5.2	Kreuz-Punkt-Kreuz-Produkt . . . . .	29
	Anwendungen in der sphärischen Trigonometrie . . . . .	30
2.5.3	Kreuz-Kreuz-Kreuz-Produkt . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Analytische Geometrie</b>	<b>33</b>
3.1	Gerade . . . . .	33
3.1.1	Algebraische Darstellung . . . . .	33
3.1.2	Abstand zwischen Gerade und Punkt . . . . .	34
3.1.3	Abstand zwischen 2 Geraden . . . . .	35
3.1.4	Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	36
	Anwendung in der Navigation . . . . .	37
3.2	Ebene . . . . .	37
3.2.1	Algebraische Darstellung . . . . .	37
3.2.2	Schnittpunkt von Ebene und Gerade . . . . .	39
3.2.3	Schnittgerade zweier Ebenen . . . . .	40
3.2.4	Schnittpunkt dreier Ebenen . . . . .	41
3.3	Kegelschnitte . . . . .	42
3.4	Lineare Transformationen kartesischer Koordinaten . . . . .	43
3.4.1	Translation . . . . .	44
3.4.2	Drehung . . . . .	44
3.4.3	Anwendung auf Kegelschnitte . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Feldtheorie</b>	<b>49</b>
4.1	Grundlagen der Vektoranalysis . . . . .	49
4.2	Örtliche Differenzialoperationen 1. Ordnung . . . . .	51
4.2.1	Gradient . . . . .	51
	Anwendungen in der Geometrie . . . . .	52
	Relative Extrema räumlicher Flächen . . . . .	53
4.2.2	Divergenz . . . . .	54
	Anwendung in der Gasdynamik . . . . .	55
4.2.3	Rotor . . . . .	55
4.2.4	Besondere Vektorfelder . . . . .	57
	Wirbel- und wirbelfreie Felder . . . . .	57
	Echte und unechte Wirbelfelder . . . . .	57
	Quellenfreie Felder . . . . .	58
	Quellen- und wirbelfreie Felder . . . . .	58
4.2.5	Nabla-Operator . . . . .	58

4.2.6	Nabla-Kalkül . . . . .	60
4.3	Anwendungen in Mathematik und Physik . . . . .	63
4.3.1	Orthogonaltrajektorien . . . . .	63
4.3.2	Einhüllende . . . . .	64
4.3.3	Extrapolation . . . . .	65
4.3.4	Energiesatz der klassischen Dynamik . . . . .	67
4.3.5	Poyntingscher Satz der Elektrodynamik . . . . .	68
4.3.6	Eulersche Grundgleichung der Hydrodynamik . . . . .	69
	Toricellisches Theorem . . . . .	69
	Bernoullische Gleichung . . . . .	70
	Helmholtzscher Wirbelsatz (Differenzialform) . . . . .	70
4.4	Örtliche Differenzialoperationen 2. Ordnung . . . . .	71
4.4.1	Laplace-Operator . . . . .	71
4.4.2	Anwendungen in Akustik und Optik . . . . .	72
	Schallwellen . . . . .	72
	Elektromagnetische Wellen . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Differenzialgeometrie</b>	<b>75</b>
5.1	Räumliche Kurven und Bahnen . . . . .	75
5.1.1	Tangentenvektor . . . . .	76
5.1.2	Hauptnormalenvektor und Krümmung . . . . .	77
5.1.3	Binormalenvektor und Windung . . . . .	79
5.1.4	Frenetsche Formeln . . . . .	80
5.2	Krumme Flächen . . . . .	81
5.2.1	Darstellungsformen . . . . .	81
5.2.2	1. Grundform der Flächentheorie . . . . .	81
5.2.3	Anwendung der Metrik . . . . .	83
	Längen, Winkel, Oberflächen . . . . .	83
5.2.4	2. Grundform der Flächentheorie . . . . .	84
5.2.5	Satz von Meusnier . . . . .	85
5.2.6	Krümmungsmaße . . . . .	86
5.2.7	Satz von Euler . . . . .	88
5.2.8	Geometrieklassen . . . . .	89
5.2.9	Formel von Rodrigues . . . . .	90
5.2.10	Theorema egregium . . . . .	91
5.2.11	Regelflächen und Torsen . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Krummlinige rechtwinklige Koordinaten <math>u, v, w</math></b>	<b>95</b>
6.1	Transformation von $x, y, z$ zu $u, v, w$ . . . . .	95
6.1.1	Geometrische Grundlagen . . . . .	95
6.1.2	Gradient . . . . .	98
6.1.3	Divergenz . . . . .	98

6.1.4	Rotor . . . . .	98
6.1.5	Laplace-Operator . . . . .	100
6.2	Spezielle Koordinaten . . . . .	100
6.2.1	Zylinderkoordinaten ( $u = \rho, v = \varphi, w = z$ ) . . . . .	100
	Anwendung in der Kreiselltheorie . . . . .	102
6.2.2	Kugelkoordinaten ( $u = r, v = \vartheta, w = \varphi$ ) . . . . .	103
	Anwendung in der Differenzialgeometrie . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Vektorielle Integrale</b>	<b>107</b>
7.1	Grundregeln . . . . .	107
7.2	Linien- und Umlaufintegrale . . . . .	108
7.3	Flächen- und Hüllenintegrale . . . . .	110
7.3.1	Inhalte ebener Flächen . . . . .	110
7.3.2	Oberflächen krummer Flächen . . . . .	111
	Anwendung in der Stereometrie . . . . .	113
7.4	Schwerpunkte . . . . .	115
7.4.1	Körperschwerpunkt . . . . .	115
	Anwendung in der Stereomechanik . . . . .	116
7.4.2	Flächenschwerpunkt . . . . .	116
7.5	Integration vektorieller Differenzialgleichungen . . . . .	117
7.5.1	Anwendung auf Bahnen im Schwerkraftfeld der Erde . . . . .	117
	Freier Fall . . . . .	117
	Ballistische Flugbahn . . . . .	118
7.5.2	Anwendung auf Bahnen im Schwerkraftfeld der Sonne . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Integralsätze</b>	<b>121</b>
8.1	Satz von Stokes . . . . .	121
8.1.1	Herleitung . . . . .	121
8.1.2	Folgerungen . . . . .	123
8.1.3	Anwendung in der Elektrodynamik . . . . .	124
8.2	Satz von Gauß . . . . .	125
8.2.1	Herleitung . . . . .	125
8.2.2	Folgerungen . . . . .	126
8.2.3	Anwendung in Hydro- und Elektrodynamik . . . . .	127
	Archimedisches Prinzip . . . . .	127
	Kontinuitätsgleichungen . . . . .	128
8.3	Formel von Gauß . . . . .	129
8.3.1	Herleitung . . . . .	129
8.3.2	Folgerungen . . . . .	129
8.4	Satz von Green . . . . .	130

<b>9</b>	<b>Potenzialtheorie</b>	<b>133</b>
9.1	Grundlagen . . . . .	133
9.1.1	Skalares Potenzial . . . . .	133
9.1.2	Vektorpotenzial . . . . .	134
9.1.3	Bedeutung der Potenziale . . . . .	134
9.1.4	Ebene, quellen- und wirbelfreie Vektorfelder . . . . .	135
9.2	Singuläre Wirbel- und Quellgebiete . . . . .	136
9.2.1	Ebene Zirkulationsströmung . . . . .	136
9.2.2	Ebene Quellströmung . . . . .	137
9.2.3	Räumliche Quellströmung . . . . .	138
9.2.4	Anwendung in der Aerodynamik . . . . .	139
9.3	Greensche Funktion . . . . .	142
9.3.1	Integration der poissonschen Differenzialgleichung . . . . .	142
	Anwendung in der Elektrodynamik . . . . .	145
9.3.2	Integration der laplaceschen Differenzialgleichung . . . . .	146
	Dirichletsches Kreismodell . . . . .	146
	Dirichletsches Kugelmodell . . . . .	148
	Mittelwertsätze der Potenzialtheorie . . . . .	149
9.3.3	Integration der helmholtzschen Differenzialgleichung . . . . .	150
<b>10</b>	<b>Variable Integrationsbereiche</b>	<b>155</b>
10.1	Linienintegrale . . . . .	155
10.1.1	Sonderfälle . . . . .	155
10.1.2	Anwendung in der Strömungslehre . . . . .	156
10.2	Flächenintegrale . . . . .	157
10.2.1	Sonderfälle . . . . .	157
10.2.2	Anwendung in der Elektrodynamik . . . . .	158
10.3	Raumintegrale . . . . .	158
<b>11</b>	<b>Variationsrechnung</b>	<b>161</b>
11.1	Geschichte . . . . .	161
11.2	Probleme <i>ohne</i> Nebenbedingungen . . . . .	162
11.2.1	Eulersche Differenzialgleichung . . . . .	162
11.2.2	Variable Randpunkte . . . . .	163
11.2.3	Zweidimensionale Probleme . . . . .	164
11.2.4	Anwendung in der Geometrie . . . . .	165
11.2.5	Anwendungen in der Strahlenoptik . . . . .	166
	Fermatsches Prinzip . . . . .	166
	Lichtstrahl-Geometrie . . . . .	167
	Snelliussches Brechungsgesetz . . . . .	167
11.2.6	Anwendungen in der Mechanik . . . . .	169
	Hamiltonsches Prinzip . . . . .	169

	Brachistochrone . . . . .	171
	Kettenlinie und Katenoid . . . . .	172
11.2.7	Singuläre Extremalen . . . . .	174
11.3	Probleme <i>mit</i> Nebenbedingungen . . . . .	175
11.3.1	Nebenbedingungen in Gleichungsform . . . . .	175
11.3.2	Nebenbedingungen in Integralform . . . . .	176
11.3.3	Anwendungen in der Geometrie . . . . .	176
	Geodätische Linien . . . . .	176
	Problem der Dido . . . . .	177
<b>12</b>	<b>Elemente der Tensorrechnung</b>	<b>179</b>
12.1	Grundlagen . . . . .	179
12.1.1	Lineare Vektor-Transformation . . . . .	179
12.1.2	Tensor . . . . .	180
	Tensormerkmale . . . . .	180
	Tensorstufen . . . . .	181
12.1.3	Beispiele aus der 3-dimensionalen Vektorrechnung . . . . .	182
	Parallele Vektoren . . . . .	182
	Kreuzprodukt . . . . .	182
	Vektorfeld . . . . .	182
	Rotor . . . . .	183
12.1.4	Beispiele aus der klassischen Physik . . . . .	183
	Kristalloptik . . . . .	183
	Stereomechanik . . . . .	183
	Elastomechanik . . . . .	184
12.1.5	Skalare Produkte polarer Vektoren . . . . .	185
12.2	Wechsel des Bezugssystems . . . . .	186
12.2.1	Alternativen der Vektorzerlegung . . . . .	186
	Kontravariante Komponenten . . . . .	186
	Kovariante Komponenten . . . . .	187
12.2.2	Riemannsche Geometrie . . . . .	188
12.3	Orthogonale Transformation . . . . .	189
12.3.1	Drehung . . . . .	189
12.3.2	Tensortransformation . . . . .	191
12.3.3	Lorentz-Transformation . . . . .	192
	Anwendung in der Elektrodynamik . . . . .	195
	Anwendung in der Mechanik . . . . .	196
12.4	Eigensystem . . . . .	198
12.4.1	Eigenvektoren . . . . .	198
12.4.2	Tensorfläche . . . . .	199
12.4.3	Invarianten . . . . .	201

<b>Anhang: Lösung der Aufgaben</b>	<b>203</b>
Zu Kapitel 1: Grundlagen der Vektoralgebra . . . . .	203
Zu Kapitel 2: Produkte aus Vektoren . . . . .	204
Zu Kapitel 3: Analytische Geometrie . . . . .	220
Zu Kapitel 4: Feldtheorie . . . . .	230
Zu Kapitel 5: Differenzialgeometrie . . . . .	243
Zu Kapitel 6: Krummlinige rechtwinklige Koordinaten $u, v, w$ . . . . .	259
Zu Kapitel 7: Vektorielle Integrale . . . . .	268
Zu Kapitel 8: Integralsätze . . . . .	278
Zu Kapitel 9: Potenzialtheorie . . . . .	281
Zu Kapitel 10: Variable Integrationsbereiche . . . . .	294
Zu Kapitel 11: Variationsrechnung . . . . .	295
Zu Kapitel 12: Elemente der Tensorrechnung . . . . .	299
 <b>Stichwortverzeichnis</b>	 <b>311</b>