Ein dimensionsunabhängiges topologisches Modell auf der Basis von Simplexen

Frank Sellerhoff, Peter Milbradt, Christoph Lippert

Einleitung

Die geometrische Modellierung hat in den Ingenieurwissenschaften eine große Bedeutung erlangt. Die Visualisierung von zwei- oder dreidimensionalen Problemstellungen ist aus heutigen Anwendungen nicht mehr wegzudenken. Zunehmend rücken Aufgabenstellungen aus dem Bereich der geometrischen Modellierung in den Vordergrund, die über die etablierten Dimensionen 1-3 hinausgehen und die nicht mehr rein geometrischer Natur sind. Hierzu zählen Aufgabenstellungen aus den Bereichen numerische Simulation, Parameteridentifikation und Strukturanalyse. Auf diese nicht-geometrischen Aufgabenstellungen sollen geometrische Verfahren, wie z.B. Triangulation, konvexe Hülle, geometrischer Schnitt und Interpolation angewendet werden. Hierzu ist es jedoch zunächst notwendig, diese Algorithmen, die alle auf der klassischen Geometrie des euklidischen Raumes beruhen, zu überarbeiten.

Grundlagen

Der euklidische Raum ist ein linearer, metrischer Raum, der unseren Erfahrungen entspricht. Es ist zu untersuchen, welche Eigenschaften des euklidischen Raumes für die bekannten geometrischen Verfahren vorauszusetzen sind und wann auf bestimmte Eigenschaften verzichtet werden kann.

euklidischer Raum

Als grundlegende Verfahren betrachten wir die Untersuchung der linearen Abhängigkeit von Elementen, die Bestimmung der konvexen Hülle einer Punktmenge und deren Triangulierung, das Schneiden von Simplexen oder Simplizialkomplexen mit Hyperräumen und die Interpolation von Zwischenwerten aus Stützstellen.

Ein Raum ist eine Menge von Elementen deren Anzahl beliebig sein kann und auf denen bestimmte Eigenschaften und Rechenregeln definiert sind. Ein Raum heißt linearer Raum, wenn auf ihm die Addition der Elemente miteinander und eine skalare Multiplikation definiert ist. Lineare Räume werden häufig durch die Angabe eines Systems linear unabhängiger Elemente (Basiselemente) dargestellt, die den gesamten Raum aufspannen. Elemente eines linearen Raumes heißen linear unabhängig, falls sie sich nicht als Linearkombination untereinander darstellen lassen. Als Basis für einen Unterraum der Dimension n können n linear unabhängige Elemente des Raumes betrachtet werden. Es wird sich zeigen, daß der Begriff des linearen Unterraumes in vielen geometrischen Algorithmen von grundlegender Bedeutung ist.

Raum

linearer Raum

lineare Unabhängigkeit

Basis

Ein weiterer grundlegender Begriff ist die Konvexität. Ein geometrisches Objekt wird als konvex bezeichnet, wenn neben zwei Punkten des Objektes auch die Verbindungsstrecke zwischen diesen Punkten zu ihm gehört. Zu jeder Menge von Elementen des linearen Raumes, läßt sich ein konvexes geometrisches Objekt bestimmen, welches alle Elemente enthält und als konvexe Hülle bezeichnet wird. Die Konstruktion einer konvexen Hülle erfolgt im wesentlichen durch das Bestimmen von Halbräumen, deren begrenzenden Hyperebenen (n-1-dim. Unterräume) sowie deren Durchschnitt. Somit sind für die Bestimmung der konvexen Hülle die Eigenschaften eines linearen Raumes als minimale Voraussetzung ausreichend.

Konvexität

konvexe Hülle

Bei den meisten geometrischen Problemstellungen stellt sich die Frage nach den Beziehungen der Objekte eines Raumes untereinander. Man denke an die Frage, welchen Einfluß die Veränderung einer Eigenschaft auf die Umgebung hat. Zu den einfachsten Beziehungen gehört die Identität und die Eigenschaft benachbart zu sein. Nachbarschaften können durch die Definition einer Metrik definiert werden. Die Axiomatik einer Metrik beinhaltet die Identität, Symmetrie und Dreiecksungleichung,

Identität

Metrik

Durch die Metrik läßt sich eine geometrische Zerlegung des Raumes bezüglich einer Basis-Punktmenge vornehmen, welche als Voronoi-Zerlegung bezeichnet wird. Die Voronoi-Zerlegung besteht aus Voronoi-Regionen. Jedem Basis-Punkt ist eine Voronoi-Region zugeordnet. Eine Voronoi-Region besteht aus allen Punkten des Raumes, die zu diesem Basispunkt einen geringeren Abstand als zu allen anderen Basispunkten haben. In Abbildung 1 gehört der Punkt Q zur V-Region des Basis-Punktes P1, wohingegen R zu zwei V-Regionen gehört. Das topologische Abbild dieser Zerlegung kann durch einen Graphen dargestellt werden (Abb. 3). Es ist zu beobachten, daß es Metriken gibt, bei denen dieser Graph eine Triangulation der Punktmenge darstellt. Im Zusammenhang mit der euklidischen Metrik wird diese Triangulation als Delaunay-Triangulation bezeichnet. Beide Strukturen enthalten lediglich Informationen des linearen, metrischen Raumes. Sie bilden die Grundlage für räumliche Interpolationen bezüglich punktueller Stützstellen. Der Graph erlaubt die linienhafte Interpolation auf den Kanten, die Voronoi- Zerlegung ermöglicht eine höherwertige, flächenbezogene Interpolation (vgl. Sibson [1]).

Voronoi-Zerlegung

Delaunay-Triangulation

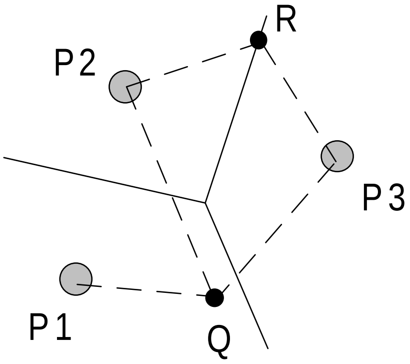
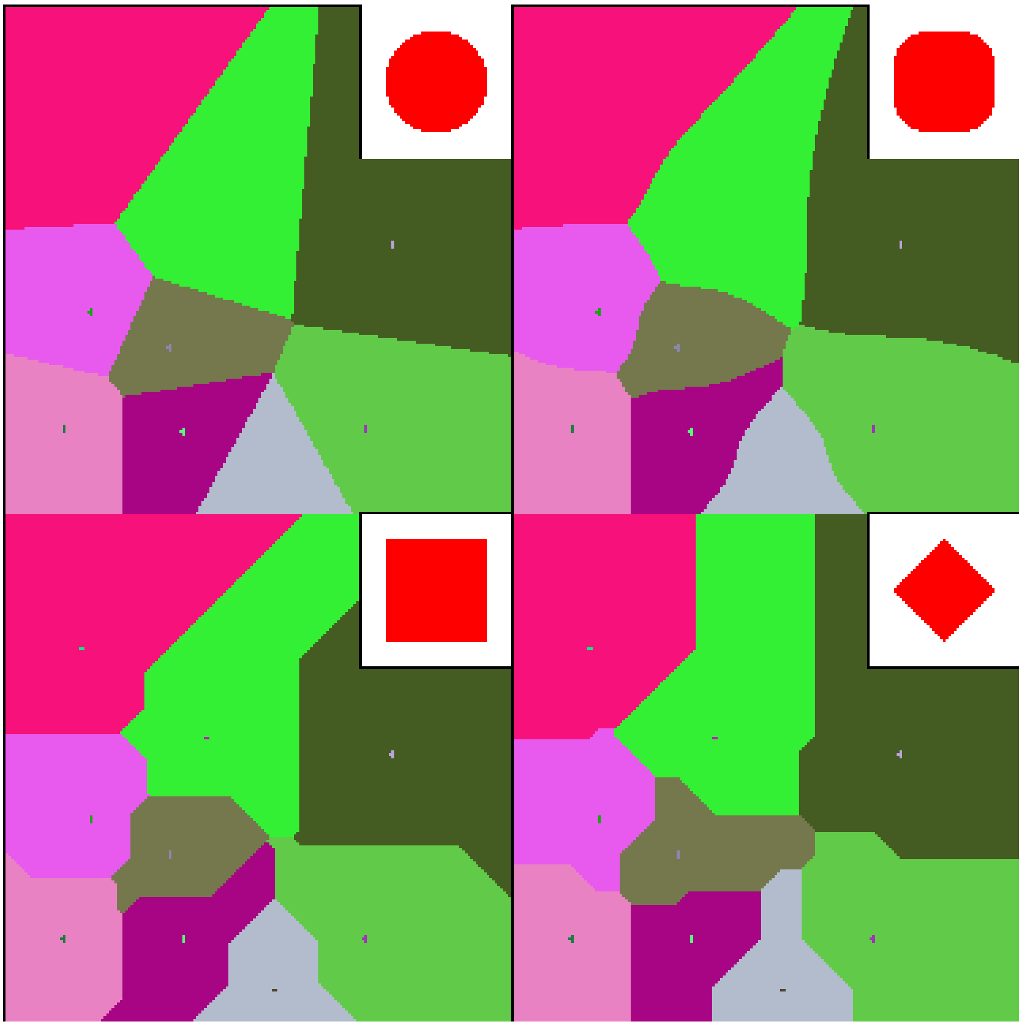


Abbildung 1: Voronoi-Zerlegung von drei Punkten in der Ebene



euklidische Metrik (links)

L_3 - Metrik (rechts)

Maximum-Metrik (links)

Manhattan-Metrik (rechts)

Abbildung 2: Voronoi-Zerlegungen einer Punktmenge für euklidische, L_3-, Manhattan- und Maximum-Metrik [1].

Häufig wird die Triangulierung in einem n-dimensionalen Raum in einen engen Zusammenhang mit der Bestimmung der konvexen Hülle in einem (n+1)-dimensionalen Raum gebracht. Hier ist zu bemerken, daß die Konvexität als einzige Voraussetzung die des linearen Raumes benötigt und keine Abstandsfunktion. Der Einfluß der Metrik erfolgt über die Transformation in den (n+1)-dimensionalen Raum.

Zusammenhang von konvexer Hülle und Triangulation

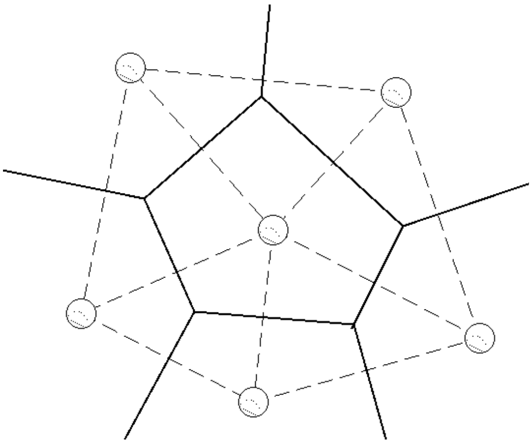


Abbildung 3: Dualität zwischen Voronoi-Diagramm (durchgezogen) und Delaunay-Triangulation (gestrichelt) in euklidischer Metrik.

Will man den Graphen der n-dimensionalen euklidischen Triangulation konstruieren und anwenden, so stellt sich die Aufgabe einer angemessenen Modellvorstellung zur Speicherung dieser Triangulation. Die Modellvorstellung soll so allgemeingültig sein, daß sie es erlaubt Triangulationen beliebiger Dimension abzubilden, es jedoch dennoch gestatten, die herkömmlichen geometrischen Grundaufgaben konvexe Hülle, geometrischer Schnitt, Isolinien, Isoflächen und Interpolation durchzuführen. Für diese Aufgabe erweisen sich Simplexe als sehr geeignet.

Modellvorstellung

Simplexe existieren in verschiedenen Ordnungen. Ein Simplex der Ordnung n, ist eine konvexe Punktmenge aus n+1 Punkten, die nicht in einer (n-1)-dimensionalen Hyperebene liegen. Jedes Simplex besteht aus n+1 Untersimplexen nächst niedrigerer Ordnung.

Simplex

Zur Beschreibung von Triangulationen sowie struktureller Probleme, ist es in der Regel nicht ausreichend einzelne Simplexe zu betrachten, sondern es müssen diese in ihrer Abhängigkeit untereinander erfaßt werden. Hierzu werden die Simplexe als Menge betrachtet. Ihre Abhängigkeiten müssen bestimmte topologische Anforderungen erfüllen: Die Schnittmenge zweier beliebiger Elemente muß entweder ein gemeinsames Untersimplex oder aber die leere Menge sein. Dieses führt zu der Modellvorstellung eines Simplizialkomplexes. Der Simplizialkomplex ist ein Sonderfall eines allgemeinen Zellkomplexes. Die Nachbarschaftsbeziehungen der Simplexe untereinander können vorteilhaft in einem Graph mit den Simplexen als Knoten und den nachbarschaftlichen Verbindungen als Kanten abgelegt werden. Dieser Umstand erlaubt eine angemessene Behandlung auf der Basis der Graphentheorie.

Simplizialkomplex

Zellkomplex

Graphentheorie

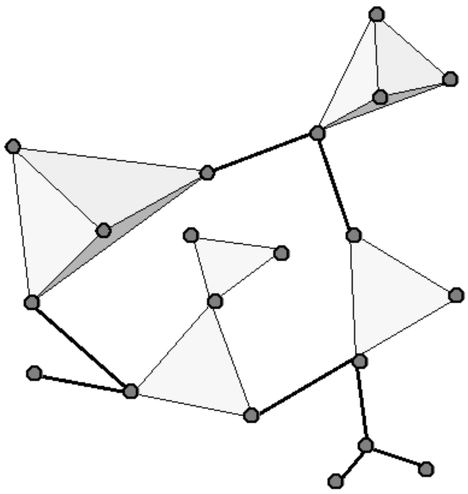


Abbildung 4: Simplizialkomplex dritter Ordnung

Verwendet man bei der Implementierung von geometrischen Algorithmen lediglich minimale Eigenschaften, so erhält man einfache Werkzeuge, die sich auf eine Vielzahl geometrischer und nichtgeometrischer Fragestellungen anwenden lassen.

Parameterinterpolation als Werkzeug zur Eichung von Simulationsmodellen

Im Folgenden soll anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden, wie die oben erläuterten Zusammenhänge für spezielle Probleme (oder Anwendungen) des Ingenieurwesens nutzbar gemacht werden können.

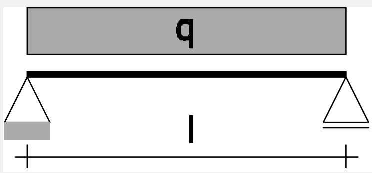
In vielen Bereichen des Ingenieurwesens sind Simulationsmodelle wichtige Werkzeuge für die Beurteilung von Prozessen. Der Vorteil von solchen numerischen Modellen, die versuchen, einen bestimmten Teil der Physik in einem Modell abzubilden, liegt darin, daß sie es gestatten,

- Werkstoffe und Gebäude zerstörungsfrei zu untersuchen,
- natürliche Prozesse experimentell zu erschließen, sowie
- zu erwartenden Naturereignissen Vorhersagen zu geben.

Da die verwendeten Modellvorstellungen im allgemeinen die zu beschreibenden Vorgänge in ihrer ganzen Komplexität nicht widerspiegeln, werden gewisse Einflüsse durch Parametrisierungen beschrieben (Modellparameter). Die das Verhalten des Modells steuernden Eingangsgrößen - im folgenden Steuerparameter genannt - sowie der Gültigkeitsbereich des Modells müssen ebenfalls festgelegt werden. Dieses stellt einen in der Modellfindungsphase besonders häufig anzutreffenden und zeitaufwendigen Vorgang dar (das von dem anwendenden Ingenieur nur mit viel Erfahrung gelöst werden kann).
Die Verifikation von Modellen erfolgt im allgemeinen durch Parameterstudien. Dies bedeutet daß der Einfluß jedes Parameters auf die Lösung festzustellen ist. Aus diesen Studien wird anschließend eine günstig erscheinende Kombination abgeschätzt. In der Regel wird jedoch durch diese Parameterkombination noch keine ausreichende Modellaussage erreicht, so daß weitere Untersuchungen des Einflusses der einzelnen Parameter auf die Lösung durchgeführt werden müssen. Dieses mitunter ungezielte Vorgehen wird solange wiederholt, bis eine als ausreichend definierte Übereinstimmung zwischen (bekannten) Sollwerten und den Ist-Werten des Simulationsmodells ermittelt wurde („Monte Carlo Methode“). Das Ergebnis dieser Bemühungen ist eine (willkürlich gefundene) Parameterkombination. Dieses Verfahren wird mit zunehmender Anzahl von Parametern immer unübersichtlicher und läßt trotz erheblichen Aufwandes nur relativ beschränkte Aussagen zu.
Der Einfluß einzelner Parameter auf das Modell ist erst in zweiter Linie wesentlich. Vielmehr bestimmt die Wechselwirkung der Parameter untereinander und ihre Wirkung auf das Modell im wesentlichen die Lösung. An dieser Stelle ist der Mensch mit seiner Anschauungsfähigkeit überfordert. Er vermag die gegenseitige Beeinflussung von mehr als drei Faktoren nicht wiederzugeben. Unter Verwendung elementarer geometrischer Verfahren kann durch ein gezieltes Vorgehen diese Wechselwirkung berücksichtigt und dadurch die Anzahl der Versuchsläufe erheblich minimiert werden. Ein großer Vorteil dieser Vorgehensweise begründet sich darin, daß alle unternommenen Versuchsrechnungen einen Anteil an der Lösung haben - es gibt also keine unnützen Rechnungen mehr. Durch eine Interpolation kann von einer punktuell vorhanden Information (Versuchsrechnung) auf eine flächenhafte Information (Lösungsgebiet) geschlossen werden. Grundlage für die Interpolation ist eine Interpolationsvorschrift. Als eine solche Vorschrift kann eine d-dimensionale Triangulierung (d=Anzahl der Parameter) und eine lineare Interpolation auf den Dreiecksflächen angesehen werden. Eine Delaunay-Triangulation ist wegen ihrer Eigenschaft, benachbarte Punkte (Parameterkombinationen) zu verbinden, hierfür besonders geeignet.

Beispiel: Für ein Gedankenexperiment sollen folgende Annahmen getroffen werden:

- Die analytische Lösung für die Momentenberechnung eines Balkens auf zwei Stützen sei unbekannt.
- Es existiert für dieses Problem ein Simulationswerkzeug, welches das Moment ermittelt.
- Als Eingangsparameter für das Werkzeug stehen die Systemlänge l und die Flächenlast q zur Verfügung. Die Systemlänge kann Werte von 1.0 - 10.0 m annehmen. Der Untersuchungsbereich der Flächenlast erstreckt sich über das Intervall 1.0 -10.0 KN/m.



Frage: Welche Kombination von Parametern q und l erzeugt ein Feldmittenmoment von 5 KNm?

Die Anzahl der Parameter des obigen Beispiels beträgt n=2. Zunächst werden 2^n Punkte (Parameterkombinationen) festgelegt, die den Untersuchungsbereich in Form eines umschreibenden Kubus repräsentieren. Die Ergebniswerte der Simulationsrechnung für die Punkte des Kubus werden ermittelt. Durch Triangulation dieser Punkte und linearer Interpolation der Simulationsergebnisse erhält man eine erste Approximation des Lösungsraumes. Die Lösung des obigen Beispiels stellt eine Isolinie (M=5KNm) im Parameterraum $q \times l$ dar. Um diese Isolinie zu bestimmen wird ein geometrischer Schnitt des sich ergebenden Simplizialkomplexes im Raum $q \times l \times M$ mit dem Hyperraum durch M=5 vorgenommen.

Als Ergebnis dieser Operation erhält man sämtliche Parameterkombinationen, die in erster Näherung das gesuchte Moment liefern. Im folgenden gilt es diese Näherung systematisch zu verbessern.
Hierzu wird das Ergebnis der Simulation an ausgewählten Punkten der Isolinie überprüft. Kandidaten solcher Parameterkombinationen sind die Schnittpunkte der Isolinie mit den Kanten der Triangulation. Die Punkte und deren zugehörige Simulationsergebnisse werden zu der Triangulation aus dem vorigen Schritt hinzugenommen und ermöglichen, durch erneute Interpolation die Approximation der Lösung zu verbessern. Diese Verfeinerung kann solange durchgeführt werden, bis eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen gesuchter Lösung und Ergebnis der Simulation gegeben ist.

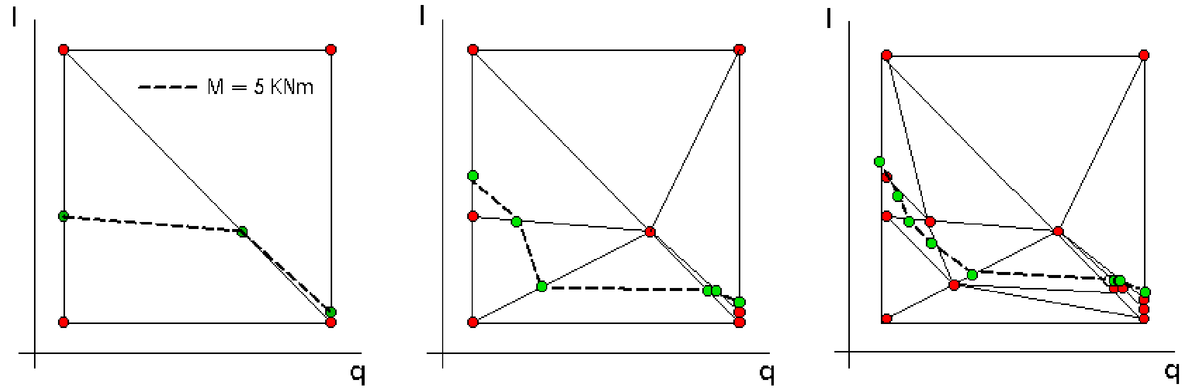


Abbildung 5: Sukzessive Hinzunahme von Schnittpunkten zur Triangulation des Parameterraumes.

Der besondere Vorteil dieser Vorgehensweise ist darin zu sehen, daß nicht nur eine passende Parameterkombination gefunden wird, sondern daß über das gesamte Untersuchungsgebiet verteilt Parameterkombinationen bekannt sind, die die gesuchte Lösung nahezu erfüllen. Abbildung 6 zeigt diese Parameterkombinationen für das vorgestellte Beispiel, nach drei Triangulationen/Interpolationen im Vergleich mit der exakten Lösung.

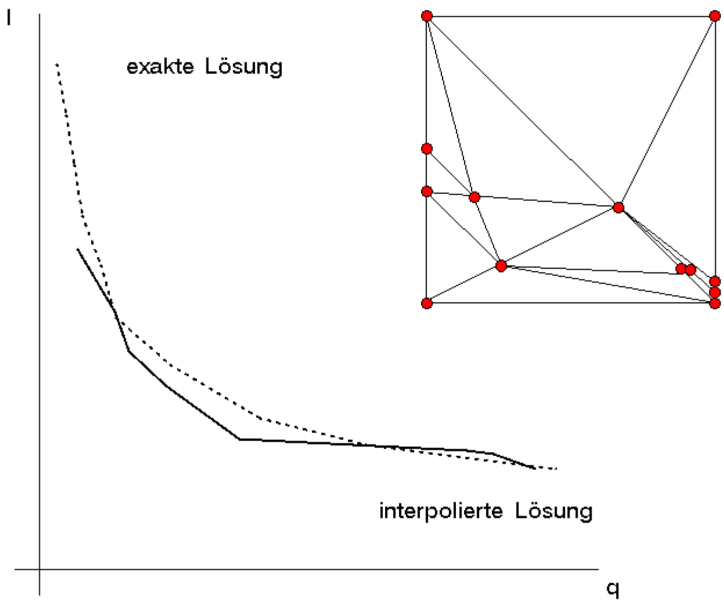


Abbildung 6: Vergleich von interpolierter und exakter Lösung nach 13 Simulationsrechnungen und 3 Triangulationen/Interpolationen.

Das zweite Beispiel zeigt das Ergebnis dieser Vorgehensweise angewandt auf ein etwas komplexeres Beispiel. Die Aufgabenstellung sah vor, für nebenstehendes System (Abb. 7) jene Belastung über dem linken bzw. über dem rechten Feld, in Kombination mit beliebiger linker bzw. rechter Feldlänge zu ermitteln, die über der mittleren Stütze ein Moment von 100 KNm erzeugt. Abbildung 8 zeigt die Ergebnisse dieser Vorgehensweise in Abhängigkeit von den Verfeinerungsschritten. Es läßt sich beobachten, daß mit zunehmender Verdichtung des Parameterraumes die Anzahl der Parameter, die das gesuchte Ergebnis liefern, in erheblichem Maße zunimmt.

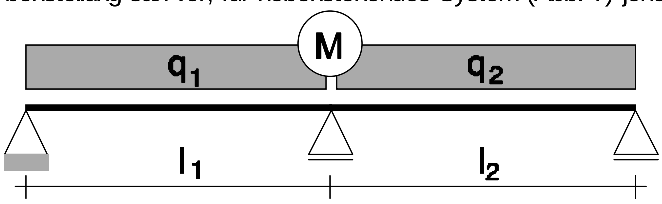


Abbildung 7: Durchlaufträger mit zwei Feldern.

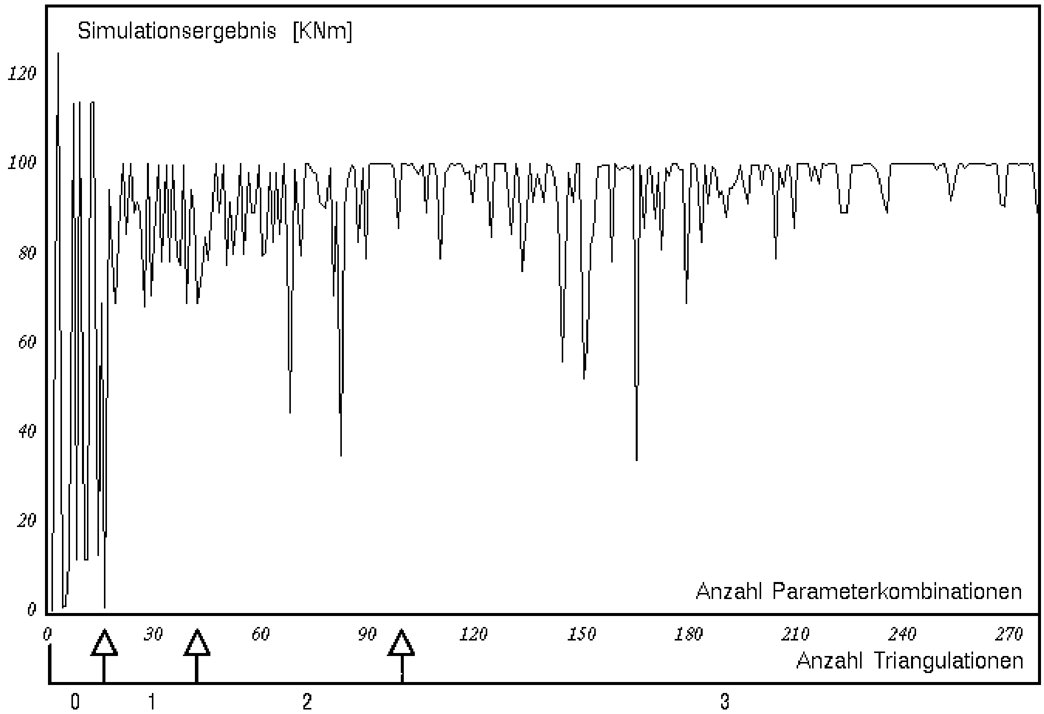


Abbildung 8: Lösungen der Parameterkombinationen in Abhängigkeit von den Triangulationsdurchläufen.

Ausblick

Die vorgestellten Anwendungen sind Repräsentanten für eine Klasse von Problemstellungen des Bauingenieurwesens. Anwendungen aus dem Bereich Küsteningenierwesen sind Gegenstand der laufenden Forschung. Auf deren Vorstellung wurde im Interesse einer überschaubaren Darstellung an dieser Stelle verzichtet. Die Verwendung von Simplizialkomplexen beschränkt sich nicht nur auf Triangulationen und damit zusammenhängender Fragestellungen, sondern eignet sich auch zur Darstellung von Strukturproblemen allgemeiner Art [2].

Literatur

[1] R. Sibson, A brief description of the natural neighbour interpolant, in V. Barnett, ed. Interpolating Multivariate data, Wiley New York 1981.

[2] R. Hüttermann, P. Milbradt , M. Rose, F. Sellerhoff. Entwicklung von Komponenten für den Einsatz bei bauingenieurspezifischen Problemen. 8. Forum Bauinformatik Cottbus, 1996. VDI-Verlag.

[3] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams: A survey of a fundamental geometric data structure. ACM Comput. Surv. , 23:345-405, 1991.

[4] Duden Rechnen und Mathematik. Duden-Verlag, 1994.