

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	2
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
3 Elementare (endliche) Reihen	16
3.1 Definition einer (endlichen) Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	17
4.1 Algebraische Gleichungen n -ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	18
4.1.5 Biquadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
5 Ungleichungen mit einer Unbekannten	25

6	Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	26
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thales	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
7	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	28
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres n -Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisabschnitt	32
7.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
8	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	33
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszyylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Fass	39
8.18	Torus	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40

9	Koordinatensysteme	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
II	Vektorrechnung	46
1	Grundbegriffe	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und antiparallele Vektoren, inverser Vektor	47
2	Komponentendarstellung eines Vektors	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
3	Vektoroperationen	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
4	Anwendungen	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen	66
4.3.9	Schnittgerade zweier Ebenen	66
III	Funktionen und Kurven	67
1	Grundbegriffe	67
1.1	Definition einer Funktion	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	67
1.2.1	Analytische Darstellung	67
1.2.2	Parameterdarstellung	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten	68
1.2.4	Graphische Darstellung	68
2	Allgemeine Funktionseigenschaften	68
2.1	Nullstellen	68
2.2	Symmetrie	69
2.3	Monotonie	69
2.4	Periodizität	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	70
3	Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion	71
3.1	Grenzwert einer Folge	71
3.2	Grenzwert einer Funktion	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion	74
4	Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)	76
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen)	76
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	76
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	76
4.2.2	Hauptform einer Geraden	76
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	76
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	77

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	77
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	77
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	77
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	78
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	78
4.3.1	Hauptform einer Parabel	78
4.3.2	Produktform einer Parabel	79
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	79
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n -ten Grades)	79
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	79
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	79
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	79
4.5	Horner-Schema	80
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	81
4.7	Interpolationspolynome	82
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	82
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	82
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	84
5	Gebrochenrationale Funktionen	86
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	86
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	87
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	88
6	Potenz- und Wurzelfunktionen	88
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	88
6.2	Wurzelfunktionen	90
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	90
7	Trigonometrische Funktionen	91
7.1	Winkelmaße	91
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	92
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	93
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	94
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	94
7.6	Trigonometrische Formeln	95
7.6.1	Additionstheoreme	95
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	96
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	96
7.6.4	Formeln für Potenzen	97
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	97
7.6.6	Formeln für Produkte	98
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	98
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	98
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	99
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	99
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	99

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	100
8	Arkusfunktionen	101
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	101
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	102
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	103
9	Exponentialfunktionen	104
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	104
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	105
9.2.1	Abklingfunktion	105
9.2.2	Sättigungsfunktion	105
9.2.3	Wachstumsfunktion	106
9.2.4	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	106
9.2.5	Kettenlinie	106
10	Logarithmusfunktionen	107
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	107
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	107
11	Hyperbelfunktionen	108
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	108
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	109
11.3	Formeln	110
11.3.1	Additionstheoreme	110
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	110
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	111
11.3.4	Formeln für Potenzen	111
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	112
11.3.6	Formeln für Produkte	112
11.3.7	Formel von Moivre	112
12	Areafunktionen	113
12.1	Definition der Areafunktionen	113
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	114
13	Kegelschnitte	115
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	115
13.2	Kreis	115
13.2.1	Geometrische Definition	115
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	116
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobener Kreis)	116
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	116
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises	116

13.3	Ellipse	117
13.3.1	Geometrische Definition	117
13.3.2	Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	117
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Ellipse)	117
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	118
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	118
13.4	Hyperbel	119
13.4.1	Geometrische Definition	119
13.4.2	Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	119
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Hyperbel)	119
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	120
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	121
13.4.6	Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	121
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	121
13.5	Parabel	122
13.5.1	Geometrische Definition	122
13.5.2	Scheitelgleichung einer Parabel	122
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform, verschobene Parabel)	122
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	123
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	123
14	Spezielle Kurven	124
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	124
14.2	Epizykloide	124
14.3	Hypozykloide	125
14.4	Astroide (Sternkurve)	126
14.5	Kardioiden (Herzkurve)	126
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	127
14.7	Strophoide	127
14.8	Cartesisches Blatt	128
14.9	„Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern	128
14.10	Spiralen	129
14.10.1	Archimedische Spirale	129
14.10.2	Logarithmische Spirale	129
IV	Differentialrechnung	130
1	Differenzierbarkeit einer Funktion	130
1.1	Differenzenquotient	130
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	130
1.3	Ableitungsfunktion	130
1.4	Höhere Ableitungen	131
1.5	Differential einer Funktion	131
2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	132

3	Ableitungsregeln	133
3.1	Faktorregel	133
3.2	Summenregel	133
3.3	Produktregel	133
3.4	Quotientenregel	134
3.5	Kettenregel	134
3.6	Logarithmische Differentiation	136
3.7	Ableitung der Umkehrfunktion	136
3.8	Implizite Differentiation	137
3.9	Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	137
3.10	Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve	138
4	Anwendungen der Differentialrechnung	138
4.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	138
4.2	Tangente und Normale	139
4.3	Linearisierung einer Funktion	139
4.4	Monotonie und Krümmung einer Kurve	140
4.4.1	Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	140
4.4.2	Krümmung einer ebenen Kurve	141
4.5	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	142
4.6	Wendepunkte, Sattelpunkte	144
4.7	Kurvendiskussion	145
V	Integralrechnung	147
1	Bestimmtes Integral	147
1.1	Definition eines bestimmten Integrals	147
1.2	Berechnung eines bestimmten Integrals	148
1.3	Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	149
2	Unbestimmtes Integral	150
2.1	Definition eines unbestimmten Integrals	150
2.2	Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	150
2.3	Tabelle der Grund- oder Stammintegrale	152
3	Integrationsmethoden	153
3.1	Integration durch Substitution	153
3.1.1.	Allgemeines Verfahren	153
3.1.2	Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	154
3.2	Partielle Integration (Produktintegration)	156
3.3	Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	157
3.3.1	Partialbruchzerlegung	157
3.3.2	Integration der Partialbrüche	160
3.4	Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	161
3.5	Numerische Integration	161
3.5.1	Trapezformel	161
3.5.2	Simpsonsche Formel	162
3.5.3	Romberg-Verfahren	164

4 Uneigentliche Integrale	167
4.1 Unendliches Integrationsintervall	167
4.2 Integrand mit einer Unendlichkeitsstelle (Pol)	167
5 Anwendungen der Integralrechnung	168
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	168
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	169
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion	169
5.3.1 Linearer Mittelwert	169
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	169
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	169
5.4 Flächeninhalt	170
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	171
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	172
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	173
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	173
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	175
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	175
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	176
VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen	178
1 Unendliche Reihen	178
1.1 Grundbegriffe	178
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	178
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	178
1.2 Konvergenzkriterien	179
1.2.1 Quotientenkriterium	179
1.2.2 Wurzelkriterium	180
1.2.3 Vergleichskriterien	180
1.2.4 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	181
1.2.5 Eigenschaften konvergenter bzw. absolut konvergenter Reihen	181
1.3 Spezielle konvergente Reihen	181
2 Potenzreihen	182
2.1 Definition einer Potenzreihe	182
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	183
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	183
3 Taylor-Reihen	184
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	184
3.1.1 Taylorsche Formel	184
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	184
3.2 Taylorsche Reihe	185
3.3 Mac Laurinsche Reihe	185
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	186
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	188

4	Fourier-Reihen	190
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	190
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	193
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	195
VII	Lineare Algebra	198
1	Reelle Matrizen	198
1.1	Grundbegriffe	198
1.1.1	n -dimensionale Vektoren	198
1.1.2	Definition einer reellen Matrix	200
1.1.3	Spezielle Matrizen	201
1.1.4	Gleichheit von Matrizen	201
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	201
1.2.1	Diagonalmatrix	202
1.2.2	Einheitsmatrix	202
1.2.3	Dreiecksmatrix	202
1.2.4	Symmetrische Matrix	202
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	202
1.2.6	Orthogonale Matrix	203
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	203
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	203
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	203
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	204
1.4	Reguläre Matrix	205
1.5	Inverse Matrix	205
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	205
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	206
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	206
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	206
1.6	Rang einer Matrix	207
1.6.1	Definitionen	207
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	207
1.6.1.2	Rang einer Matrix	207
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	207
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	208
1.6.2.1	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix \mathbf{A} unter Verwendung von Unterdeterminanten	208
1.6.2.2	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix \mathbf{A} mit Hilfe elementarer Umformungen	208
2	Determinanten	209
2.1	Zweireihige Determinanten	209
2.2	Dreireihige Determinanten	210
2.3	Determinanten höherer Ordnung	211
2.3.1	Unterdeterminante D_{ik}	211
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}	211
2.3.3	Definition einer n -reihigen Determinante	211

2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	212
2.5	Rechenregeln für n -reihige Determinanten	212
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	214
2.6.1	Elementare Umformungen einer n -reihigen Determinante	214
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer n -reihigen Determinante	214
3	Lineare Gleichungssysteme	215
3.1	Grundbegriffe	215
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	215
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	215
3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	216
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	216
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	216
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	217
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	218
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n) -Systems	218
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	218
3.5	Cramersche Regel	221
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	221
4	Komplexe Matrizen	222
4.1	Definition einer komplexen Matrix	222
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	223
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	223
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	224
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	224
4.5.1	Hermiteische Matrix	224
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	224
4.5.3	Unitäre Matrix	225
5	Eigenwertprobleme	225
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	225
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n -reihiger Matrizen	227
VIII	Komplexe Zahlen und Funktionen	228
1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	228
1.1	Algebraische oder kartesische Form	228
1.2	Polarformen	229
1.2.1	Trigonometrische Form	229
1.2.2	Exponentialform	229
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	230
1.3.1	Polarform \rightarrow Kartesische Form	230
1.3.2	Kartesische Form \rightarrow Polarform	230

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen	231
2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	231
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen	231
2.3 Division komplexer Zahlen	232
3 Potenzieren	233
4 Radizieren (Wurzelziehen)	234
5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	235
6 Ortskurven	236
6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	236
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	236
6.3 Inversion einer Ortskurve	237
7 Komplexe Funktionen	238
7.1 Definition einer komplexen Funktion	238
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	238
7.2.1 Trigonometrische Funktionen	238
7.2.2 Hyperbelfunktionen	238
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)	239
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln	239
7.3.1 Eulersche Formeln	239
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	239
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	239
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument	239
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument	240
8 Anwendungen in der Schwingungslehre	240
8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	240
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)	241
IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	243
1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	243
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	243
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	243
1.2.1 Analytische Darstellung	243
1.2.2 Graphische Darstellung	244
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	244
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme	244
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm	244

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	245
1.3.1	Ebenen	245
1.3.2	Rotationsflächen	245
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	245
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	246
2	Partielle Differentiation	247
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	247
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	247
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	248
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	249
2.3	Verallgemeinerte Kettenregel (Differentiation nach einem Parameter)	250
2.4	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	251
2.5	Anwendungen	253
2.5.1	Linearisierung einer Funktion	253
2.5.2	Relative Extremwerte (relative Maxima, relative Minima)	254
2.5.3	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Lagrangesches Multiplikatorverfahren)	255
3	Mehrfachintegrale	257
3.1	Doppelintegrale	257
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	257
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten ..	258
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	260
3.1.4	Anwendungen	261
3.1.4.1	Flächeninhalt	261
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	261
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	262
3.2	Dreifachintegrale	263
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	263
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	264
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	266
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten	266
3.2.5	Anwendungen	267
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	267
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	268
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	269
X	Gewöhnliche Differentialgleichungen	270
1	Grundbegriffe	270
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung	270
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	270
1.3	Anfangswertprobleme	270
1.4	Randwertprobleme	271

2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	271
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	271
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	272
2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	273
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	274
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	274
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	274
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	274
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	274
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	275
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	275
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	277
2.5.1	Streckenzugverfahren von Euler	277
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	279
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	280
3	Differentialgleichungen 2. Ordnung	283
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen	283
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	284
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	284
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	284
3.2.2.1	Wronski-Determinante	284
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	284
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	285
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	288
4	Anwendungen	291
4.1	Mechanische Schwingungen	291
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	291
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	291
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	292
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	292
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	293
4.1.3.3	Aperiodisches Verhalten bei starker Dämpfung (Kriechfall)	293
4.1.4	Erzwungene Schwingung	294
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	294
4.1.4.2	Stationäre Lösung	294
4.2	Elektrische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	295
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	296
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	296

5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	296
5.2.1	Wronski-Determinante	296
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	297
5.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	298
6	Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	300
6.1	Grundbegriffe	300
6.2	Integration des homogenen linearen Systems	300
6.3	Integration des inhomogenen linearen Systems	301
6.3.1	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	301
6.3.2	Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	302
XI	Fehler- und Ausgleichsrechnung	304
1	Gaußsche Normalverteilung	304
2	Auswertung einer Messreihe	305
3	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	308
3.1	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen	308
3.2	Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen	310
4	Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz	310
5	Ausgleichskurven	312
5.1	Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate	312
5.2	Ausgleichs- oder Regressionsgerade	313
5.3	Ausgleichs- oder Regressionsparabel	315
XII	Fourier-Transformationen	316
1	Grundbegriffe	316
2	Spezielle Fourier-Transformationen	321
3	Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen	323
3.1	Sprungfunktionen	323
3.2	Rechteckige Impulse	325
3.3	Diracsche Deltafunktion	326
4	Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)	329
4.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	329
4.2	Ähnlichkeitssatz	329
4.3	Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz)	330
4.4	Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz)	331

4.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	332
4.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	332
4.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	333
4.6	Integrationssätze	334
4.7	Faltungssatz	334
4.8	Vertauschungssatz	335
5	Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	336
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren	336
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	336
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	337
6	Tabellen spezieller Fourier-Transformationen	338
XIII	Laplace-Transformationen	344
1	Grundbegriffe	344
2	Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)	345
2.1	Linearitätssatz (Satz über Linearkombinationen)	345
2.2	Ähnlichkeitssatz	346
2.3	Verschiebungssätze	347
2.4	Dämpfungssatz	348
2.5	Ableitungssätze (Differentiationssätze)	348
2.5.1	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Originalfunktion	348
2.5.2	Ableitungssatz (Differentiationssatz) für die Bildfunktion	350
2.6	Integrationssätze	350
2.6.1	Integrationssatz für die Originalfunktion	350
2.6.2	Integrationssatz für die Bildfunktion	351
2.7	Faltungssatz	352
2.8	Grenzwertsätze	353
3	Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	354
4	Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse)	355
5	Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme	360
5.1	Allgemeines Lösungsverfahren	360
5.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	361
5.3	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	362
6	Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	363

XIV Vektoranalysis	368
1 Ebene und räumliche Kurven	368
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	368
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	369
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	369
1.2.2 Tangentenvektor	369
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	369
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	370
1.3 Bogenlänge einer Kurve	371
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	371
1.5 Krümmung einer Kurve	372
2 Flächen im Raum	374
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	374
2.2 Flächenkurven	375
2.3 Flächennormale und Flächenelement	375
2.4 Tangentialebene	376
2.4.1 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$	376
2.4.2 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $z = f(x; y)$	377
2.4.3 Tangentialebene einer Fläche vom Typ $F(x; y; z) = 0$	377
3 Skalar- und Vektorfelder	378
3.1 Skalarfelder	378
3.2 Vektorfelder	378
4 Gradient eines Skalarfeldes	380
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	382
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	382
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	383
5.3 Spezielle Vektorfelder	384
6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen	385
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	385
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	387
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	390
7 Linien- oder Kurvenintegrale	392
7.1 Linienintegral in der Ebene	392
7.2 Linienintegral im Raum	394
7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	394
7.4 Konservative Vektorfelder	395
7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	396

8 Oberflächenintegrale	397
8.1 Definition eines Oberflächenintegrals	397
8.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals	398
8.2.1 Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten	398
8.2.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	399
9 Integralsätze von Gauß und Stokes	400
9.1 Gaußscher Integralsatz	400
9.2 Stokesscher Integralsatz	401
XV Wahrscheinlichkeitsrechnung	403
1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik	403
1.1 Permutationen	403
1.2 Kombinationen	404
1.3 Variationen	404
2 Grundbegriffe	405
3 Wahrscheinlichkeit	407
3.1 Absolute und relative Häufigkeit	407
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	408
3.3 Laplace-Experimente	408
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	409
3.5 Multiplikationssatz	409
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse	410
3.7 Mehrstufige Zufallsexperimente	410
4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	412
4.1 Zufallsvariable	412
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	413
4.3 Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	415
5 Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	417
5.1 Binomialverteilung	417
5.2 Hypergeometrische Verteilung	419
5.3 Poisson-Verteilung	421
5.4 Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	422
6 Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	423
6.1 Gaußsche Normalverteilung	423
6.1.1 Allgemeine Normalverteilung	423
6.1.2 Standardnormalverteilung	424

6.1.3	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	425
6.1.4	Quantile der Standardnormalverteilung	426
6.2	Exponentialverteilung	427
7	Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	428
7.1	Mehrdimensionale Zufallsvariable	428
7.2	Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen	430
7.2.1	Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen	430
7.2.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	431
7.2.3	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe	431
8	Prüf- oder Testverteilungen	432
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung („ χ^2 -Verteilung“)	432
8.2	t -Verteilung von Student	434
XVI	Grundlagen der mathematischen Statistik	436
1	Grundbegriffe	436
1.1	Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	436
1.2	Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	437
1.3	Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben	439
2	Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	442
2.1	Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	442
2.2	Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion	444
2.3	Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	445
3	Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen“)	446
3.1	Aufgaben der Parameterschätzung	446
3.2	Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen“)	446
3.2.1	Schätz- und Stichprobenfunktionen	446
3.2.2	Schätzungen für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2	447
3.2.3	Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	448
3.2.4	Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen	448
3.3	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen“)	449
3.3.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle	449
3.3.2	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	450
3.3.3	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	451

3.3.4	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert μ bei einer beliebigen Verteilung	452
3.3.5	Vertrauensintervalle für die unbekanntem Varianz σ^2 einer Normalverteilung	453
3.3.6	Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	454
3.3.7	Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls	455
4	Statistische Prüfverfahren für unbekanntem Parameter („Parametertests“)	456
4.1	Statistische Hypothesen und Parametertests	456
4.2	Spezielle Parametertests	457
4.2.1	Test für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekanntem Varianz σ^2	457
4.2.2	Test für den unbekanntem Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekanntem Varianz σ^2	459
4.2.3	Tests für die Gleichheit der unbekanntem Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen („Differenzentests“)	460
4.2.3.1	Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben	461
4.2.3.2	Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben	462
4.2.4	Tests für die unbekanntem Varianz σ^2 einer Normalverteilung ...	466
4.2.5	Tests für den unbekanntem Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	468
4.2.6	Musterbeispiel für einen Parametertest	470
5	Chi-Quadrat-Test	471