Forschung am IVW Köln, 6/2013

Institut für Versicherungswesen

Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette

Ralf Knobloch

Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Zusammenfassung

In den Wirtschaftswissenschaften liegen die für Bewertungen benötigten Daten normalerweise als Jahreswerte vor, z.B. Zinssätze oder Sterblichkeiten in der Finanz- und Versicherungsmathematik. Darauf aufbauend lassen sich Markov-Ketten mit einem jährlichen Zeitraster konstruieren. Zu bewertende Zahlungen hingegen erfolgen meist unterjährlich. Der vorliegende Artikel beschäftigt sich mit der Frage, wie aus einer Markov-Kette mit jährlichem Zeitraster, eine Markov-Kette mit unterjährlichem Zeitraster konstruiert werden kann. Dabei stehen Markov-Ketten, deren Übergangsmatrizen als obere Dreiecksmatrizen gegeben sind, im Mittelpunkt des Interesses. Es werden zwei Ansätze und deren Anwendung dargestellt. Der erste Ansatz basiert auf der T-ten Wurzel der Übergangsmatrizen, der zweite Ansatz auf einer Linearisierung der Übergangsmatrizen.

Abstract

In economics the used data for evaluation are normally given for a full year, e.g. interest rates or probabilities for death in finance and insurance. Based on this data, Markov chains with annual time periods can be designed. However, the payments are allocated during the year. The present paper engages with the question, how a Markov chain with periods less than a year can be designed from a given Markov chain with annual time periods. In the centre of attention are Markov chains whose matrices of transition probabilities are given by upper triangle matrices. In this paper, two approaches and their applications will be presented. The first approach is based on the Tth root of the transition probability matrices, the second one on a linearization of the transition probability matrices.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In den Wirtschaftswissenschaften basieren Berechnungen i.d.R. auf jährlichen Betrachtungen: Bilanzen von Unternehmen werden jährlich erstellt, volkswirtschaftliche Kennzahlen auf Jahresbasis ermittelt. Auch in der Finanzmathematik dominiert die jährliche Sichtweise. So ist die jährliche Verzinsung mit Zinseszins das wichtigste Zinsmodell. Alle anderen Modelle bauen darauf auf oder werden daran mithilfe des Effektivzinses gemessen. Im Bereich der Versicherungsmathematik ist es ähnlich. So werden in der Personenversicherungsmathematik zur Tarifkalkulation und zur Reserveberechnung neben einem Zinsmodell biometrische Rechnungsgrundlagen, z.B. Invalidisierungs- und Sterbewahrscheinlichkeiten, benötigt. Diese biometrischen Rechnungsgrundlagen basieren ebenfalls auf jährlichen Beobachtungen.

Im Unterschied dazu liegen in der Praxis bei finanz- und versicherungsmathematischen Berechnungen oft unterjährliche Sachverhalte zugrunde. So werden z.B. Kredite unterjährlich bedient und Lebensversicherungen unterjährlich angespart bzw. bei Rentenzahlung unterjährlich ausgezahlt. Daher benötigt man sowohl bei den Zinsmodellen als auch bei den biometrischen Rechnungsgrundlagen unterjährliche Ansätze. Bei der Zinsrechnung führt dies zu dem relativen und zu dem konformen Zinssatz (vgl. [1] S.20ff). In der Personenversicherungsmathematik wird der unterjährlichen Zahlweise durch versicherungstechnische Approximationen, z.B. durch die Verwendung des Restglieds (vgl. [10], [11]) oder durch die Anwendung des Invarianzsatzes (vgl. [12]), Rechnung getragen.

In [6] und [7] wird gezeigt wie bei risikobehafteten Zahlungsströme, z.B. in der Personenversicherungsmathematik, gedächtnislose Modelle bzw. Markov-Ketten zur Bewertung eingesetzt werden können. Aber auch hier ergibt sich das Problem, dass die Ausgangsmodelle auf jährlichen Beobachtungen beruhen, d.h. es handelt sich um Markov-Ketten mit einem jährlichen Zeitraster, die zu bewertenden Zahlungsströme hingegen meist eine unterjährliche Zahlweise haben. In [8] wird untersucht, wie sich dies bei bestimmten Annahmen über die unterjährlichen Zinsen und die unterjährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten auf die Bewertungsformeln auswirkt.

In diesem Zusammenhang (vgl. [8] S. 8) stellt sich die grundsätzliche Frage, wie aus einer gegebenen jährlichen Markov-Kette eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert werden kann. Das in dieser Arbeit dargestellte Konstruktionsprinzip wird als eine Anwendung des Satzes von Kolmogorov aufgebaut (vgl. [3] S.257ff). Dabei stehen Markov-Ketten, deren Übergangsmatrizen obere Dreiecksmatrizen sind, im Mittelpunkt des Interesses. Durch die Modellierung mit oberen Dreiecksmatrizen ergibt sich eine strenge Hierarchie der Zustände, d.h. wenn die Möglichkeit des Übergangs von Zustand $\mathbf{i}$ nach Zustand $\mathbf{j}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit gegeben ist, so hat die umgekehrte Richtung (Übergang von Zustand $\mathbf{j}$ nach Zustand $\mathbf{i}$) die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{0}$. Solche Modelle werden insbesondere in der Personenversicherungsmathematik angewendet.

2. Das jährliche Modell

Zunächst wird das jährliche Modell wie folgt definiert.

Es sei

$$(\mathbf{X_k})_{\mathbf{k} \in \mathbf{IN_0}}$$

eine inhomogene Markov-Kette mit Zustandsraum $\mathbf{S} = \{\mathbf{0,1,2,\ldots,N}\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten seien gegeben durch die stochastischen (N+1)x(N+1)-Matrizen bzw. die Übergangsmatrizen

$$\mathbf{Q(k)} = (\mathbf{q_{i,j}(k)}), \mathbf{k} = \mathbf{1,2,3,\ldots},$$

d.h. $\mathbf{P}(\mathbf{X_k} = \mathbf{j} | \mathbf{X_{k-1}} = \mathbf{i}) = \mathbf{q_{i,j}(k)}$ für alle $\mathbf{i,j} \in \{\mathbf{0,1,2,\ldots,N}\}$.

Ferner sei $\mathbf{P_k}$ die Verteilung der Zufallsvariablen $\mathbf{X_k}$, $\mathbf{k} = \mathbf{0,1,2,\ldots}$. Mit der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [9] S.14, [13] S.185f) ergibt sich für $\mathbf{k} = \mathbf{0,1,2,\ldots}$

$$\mathbf{P_k} = \mathbf{P_0} \cdot \prod_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{k}} \mathbf{Q(j)} .$$

(vgl. [6] S.3). D.h. die Verteilung $\mathbf{P_k}$ ergibt sich durch Multiplikation der Anfangsverteilung $\mathbf{P_0}$ mit dem Produkt der Übergangsmatrizen.

3. Stochastische Matrizen

Bevor wir uns mit der Konstruktion der unterjährlichen Markov-Kette beschäftigen können, müssen einige Ergebnisse über stochastische Matrizen bereitgestellt werden. Eine quadratische $\mathbf{n \times n}$-Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$ heißt stochastische Matrix, wenn

1. alle Einträge der Matrix größer oder gleich $\mathbf{0}$ sind, d.h. $\mathbf{a_{ij}} \geq \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{i,j} \in \{\mathbf{1,2,\ldots,n}\}$,

   und

2. die Zeilensummen $\mathbf{1}$ sind, d.h. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

(vgl. [2] S.1)

Es sei M_n die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Zeilensummen gleich 1. Es sei D_n die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen aus M_n, d.h. die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen mit Zeilensumme gleich 1. Ferner sei S_n die Menge aller stochastischen $n \times n$-Matrizen.

Satz 1: Es seien $A, B \in M_n$. Es gilt:

a) $A \cdot B \in M_n$

b) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \in M_n$

c) $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot B \in M_n$

Beweis:

a) Es sei $C := A \cdot B$.

Dann gilt für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot 1) = 1$$

(vgl. [2] S.2)

b) Da die Determinante der Matrix A ungleich 0 ist, existiert deren Inverse A^{-1}. Es sei $C := A^{-1}$ und E die Einheitsmatrix. Mit dieser Notation hat man $C \cdot A = E$. Dann gilt für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$:

$$1 = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ik} \cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\left(c_{ik} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} (c_{ik} \cdot 1) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}$$

c) $\det(A) \neq 0$, $A, B \in M_N \overset{b)}{\Rightarrow} A^{-1}, B \in M_N \overset{a)}{\Rightarrow} A^{-1} \cdot B \in M_N$

□

Da sowohl das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen als auch die Inverse einer oberen Dreiecksmatrix mit Determinante ungleich $\mathbf{0}$ wieder eine obere Dreieckmatrix ist und $\mathbf{D_n}$ eine Teilmenge von $\mathbf{M_n}$ ist, gelten für $\mathbf{D_n}$ die gleichen Aussagen wie für $\mathbf{M_n}$.

Satz 2: Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{D_n}$. Es gilt:

a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{D_n}$

b) $\mathbf{det(A)} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \in \mathbf{D_n}$

c) $\mathbf{det(A)} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{D_n}$

Wie das folgende Beispiel zeigt, gelten für $\mathbf{S_n}$ nicht alle diese Aussagen.

Beispiel 1:

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbf{S_2}$ gegeben durch $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\mathbf{A}^{-1} \notin \mathbf{S_2}$.

Es sei ferner $\mathbf{B} \in \mathbf{S_2}$ gegeben durch $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Als Produkt der inversen Matrix von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{B}$ ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{S_2}.$$

Es gilt somit lediglich die folgende Aussage.

Satz 3: $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{S_n} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbf{S_n}$

Beweis:

Wegen $\mathbf{S_n} \subset \mathbf{M_n}$ und der Aussage aus Satz 1a) reicht es zu zeigen, dass alle Einträge des Matrizenprodukts größer oder gleich $\mathbf{0}$ sind.

Es sei $\mathbf{C} := \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Für alle $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, \mathbf{n}\}$ gilt: $\mathbf{c_{ij}} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_{ik}} \cdot \mathbf{b_{kj}} \geq \mathbf{0}$ (vgl. [2] S.2).

□

4. Stochastische obere Dreiecksmatrizen

In der Praxis werden häufig jährliche Markov-Ketten verwendet, bei denen die Übergangsmatrizen als obere Dreiecksmatrizen geschrieben werden können. D.h. es handelt sich um Elemente der Schnittmenge $\mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$. Durch die Verwendung von oberen Dreiecksmatrizen bei der Modellierung ergibt sich - wie in der Einleitung erwähnt - eine strenge Hierarchie der Zustände. Im Folgenden werden daher mit Blick auf das im nächsten Abschnitt verwendete Konstruktionsprinzip Beispiele behandelt, in denen sich ein gegebenes Elemente aus $\mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$ als Produkt von mehreren Elementen aus $\mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$ schreiben lässt.

Wir betrachten die folgende Ausgangssituation: Gegeben sei eine stochastische obere Dreiecksmatrix $\mathbf{Q}$, d.h. $\mathbf{Q} \in \mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$. Es sei $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$.

Ein triviales Produkt mit $\mathbf{T}$ Faktoren erhält man mittels der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ durch

$$\mathbf{Q} = \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \cdot \cdots \cdot \mathbf{E}}_{\mathbf{T-1\ mal}} \cdot \mathbf{Q}.$$

Selbstverständlich ist auch jedes andere Produkt, in dem $\mathbf{T-1}$-mal der Faktor $\mathbf{E}$ und einmal der Faktor $\mathbf{Q}$ vorkommt, als triviale Zerlegung geeignet.

Zur Konstruktion von nichttrivialen Zerlegungen versuchen wir als naheliegende Möglichkeit zunächst die $\mathbf{T}$-te Wurzel aus $\mathbf{Q}$ zu ziehen, d.h. eine Matrix $\mathbf{Q_T} \in \mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{Q} = \underbrace{\mathbf{Q_T} \cdot \mathbf{Q_T} \cdot \cdots \cdot \mathbf{Q_T}}_{\mathbf{T\,mal}}$$

zu finden. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies für $\mathbf{n = 2}$ immer möglich ist.

Beispiel 2:

$\mathbf{Q} \in \mathbf{D_2} \cap \mathbf{S_2}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{1-a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{Q_T} \in \mathbf{D_2} \cap \mathbf{S_2}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q_T} = \begin{pmatrix} \sqrt[T]{1-a} & 1-\sqrt[T]{1-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis der Gleichung $(\mathbf{Q_T})^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}$ benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1:

Für $\mathbf{k} \in \mathbf{IN}$ gilt: $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \alpha^{\mathbf{k}} & 1-\alpha^{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis:

Der Beweis wird mit Induktion nach $\mathbf{k}$ geführt.

$\mathbf{k} = 1$: Hier ist die Aussage trivialerweise erfüllt.

$\mathbf{k} \to \mathbf{k}+1$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{k}+1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{k}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{\mathbf{k}} & 1-\alpha^{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^{\mathbf{k}+1} & \alpha^{\mathbf{k}}(1-\alpha)+1-\alpha^{\mathbf{k}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{\mathbf{k}+1} & 1-\alpha^{\mathbf{k}+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Setze $\alpha = \sqrt[T]{1-a}$ und $\mathbf{k} = \mathbf{T}$. Damit ergibt sich

$$(\mathbf{Q_T})^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \sqrt[T]{1-a} & 1-\sqrt[T]{1-a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt[T]{1-a}\right)^{\mathbf{T}} & 1-\left(\sqrt[T]{1-a}\right)^{\mathbf{T}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}.$$

Für $\mathbf{n} = 3$ ist die Konstruktion der $\mathbf{T}$-ten Wurzel nicht ganz so einfach, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3:

Es sei $\mathbf{T} = 2$. Die Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbf{D_3} \cap \mathbf{S_3}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ 0 & 1-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $(1 - a - b) + (1 - c) > 0$. Es sei ferner

$$\mathbf{Q_2} := \begin{pmatrix} \sqrt{1-a-b} & \dfrac{a}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} & d \\ 0 & \sqrt{1-c} & \dfrac{c}{1+\sqrt{1-c}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$d = \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-a-b}\right)} \cdot \left(b - \frac{a \cdot c}{\left(\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}\right) \cdot \left(1+\sqrt{1-c}\right)} \right).$$

Wegen

$$\sqrt{1-a-b} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} + \frac{a}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} \cdot \sqrt{1-c} = a \ ,$$

$$\sqrt{1-a-b} \cdot d + \frac{a}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} \cdot \frac{c}{1+\sqrt{1-c}} + d \cdot 1 = b$$

und

$$\sqrt{1-c} \cdot \frac{c}{1+\sqrt{1-c}} + \frac{c}{1+\sqrt{1-c}} \cdot 1 = c$$

folgt $(\mathbf{Q_2})^2 = \mathbf{Q}$. Ferner sind wegen

$$\sqrt{1-c} + \frac{c}{1+\sqrt{1-c}} = \frac{\sqrt{1-c} \cdot \left(1+\sqrt{1-c}\right)+c}{1+\sqrt{1-c}} = \frac{\sqrt{1-c}+1-c+c}{1+\sqrt{1-c}} = 1$$

und

$$\left(1+\sqrt{1-a-b}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{1-a-b} - \frac{a}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} \right) = 1-1+a+b-\frac{a \cdot \left(1+\sqrt{1-a-b}\right)}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} =$$

$$= b - \frac{a \cdot \left(1+\sqrt{1-a-b}-\sqrt{1-a-b}-\sqrt{1-c}\right)}{\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}} = b - \frac{a \cdot \left(1-\sqrt{1-c}\right) \cdot \left(1+\sqrt{1-c}\right)}{\left(\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}\right) \cdot \left(1+\sqrt{1-c}\right)} =$$

$$= b - \frac{a \cdot c}{\left(\sqrt{1-a-b}+\sqrt{1-c}\right) \cdot \left(1+\sqrt{1-c}\right)} = \left(1+\sqrt{1-a-b}\right) \cdot d$$

alle Zeilensummen der Matrix $\mathbf{Q_2}$ gleich $\mathbf{1}$. Insgesamt erhält man die Aussage

$$\mathbf{Q_2} \in \mathbf{D_3} \cap \mathbf{S_3} \Leftrightarrow \mathbf{d} \geq \mathbf{0}.$$

Wählt man z.B. $\mathbf{a = 0{,}3; b = 0{,}2; c = 0{,}5}$, so ist $\mathbf{d \approx 0{,}0808 > 0}$ und somit folgt $\mathbf{Q_2} \in \mathbf{D_3} \cap \mathbf{S_3}$. Setzt man $\mathbf{a = 0{,}8; b = 0{,}2; c = 0{,}5}$, so ist $\mathbf{d \approx -0{,}1314 < 0}$ und man erhält $\mathbf{Q_2} \notin \mathbf{D_3} \cap \mathbf{S_3}$.

Zur Interpretation der Bedingung $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ betrachten wir die Gleichung, die sich aus $(\mathbf{Q_2})^2 = \mathbf{Q}$ bei Multiplikation der ersten Zeile von $\mathbf{Q_2}$ mit der dritten Spalte von $\mathbf{Q_2}$ ergibt:

$$\sqrt{\mathbf{1-a-b}} \cdot \mathbf{d} + \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{1-a-b}} + \sqrt{\mathbf{1-c}}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{1-c}}} + \mathbf{d} = \mathbf{b}.$$

Dies ist äquivalent mit

$$\sqrt{\mathbf{1-a-b}} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{1-a-b}} + \sqrt{\mathbf{1-c}}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{1} + \sqrt{\mathbf{1-c}}} - \mathbf{d}.$$

Wir setzen $\sqrt{\mathbf{1-a-b}} > \mathbf{0}$ voraus. Interpretiert man $\mathbf{Q}$ als jährliche Übergangsmatrix und $\mathbf{Q_2}$ als halbjährliche Übergangsmatrix, so steht auf der rechten Seite die Differenz der jährlichen Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $\mathbf{1}$ nach Zustand $\mathbf{3}$ und den Wahrscheinlichkeiten diesen Übergang in zwei (halbjährlichen) Schritten durch $\mathbf{1 \to 2 \to 3}$ oder $\mathbf{1 \to 3 \to 3}$ zu erreichen. Nur wenn diese Differenz positiv ist, bleibt noch eine positive Wahrscheinlichkeit für den Übergang $\mathbf{1 \to 1 \to 3}$ übrig.

Bezeichnet man nun die $\mathbf{T}$-te Wurzel der Matrix $\mathbf{Q}$ gemäß der Notation bei reellen Zahlen mit $\mathbf{Q}^{1/\mathbf{T}}$, so lässt sich das Produkt der ersten $\mathbf{s}$ Matrizen wie folgt schreiben:

$$\underbrace{\mathbf{Q_T} \cdot \mathbf{Q_T} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Q_T}}_{\mathbf{s\,mal}} = \underbrace{\mathbf{Q}^{1/\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}^{1/\mathbf{T}} \cdot \ldots \cdot \mathbf{Q}^{1/\mathbf{T}}}_{\mathbf{s\,mal}} = \mathbf{Q}^{\mathbf{s}/\mathbf{T}}$$

Die Tangente der reellen Funktion $\mathbf{f(x) = x^{\beta}, x > 0,}$ an der Stelle $\mathbf{x = 1}$ hat die Gestalt $\mathbf{t(x)} = \beta \cdot \mathbf{x} + \mathbf{1} - \beta$. Wendet man diese Tangente im Kontext der Matrizen an, so erhält man als Linearisierung von $\mathbf{Q}^{\mathbf{s}/\mathbf{T}}$ die Matrix

$$\mathbf{U(s,T)} := \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} \approx \mathbf{Q}^{\mathbf{s}/\mathbf{T}}.$$

Es sei $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ mit $\mathbf{s} \leq \mathbf{T}$. Die Matrix $\mathbf{U(s,T)}$ ist wie die Matrix $\mathbf{Q}$ ein Element der Schnittmenge $\mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$:

1. $\mathbf{U(s,T)}$ ist eine obere Dreieckmatrix, da $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{E}$ obere Dreiecksmatrizen sind.

2. Für alle $\mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{u_{ij}(s,T)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathbf{q_{ij}} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e_{ij}} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} = \mathbf{1}$.

3. Für alle $\mathbf{i,j} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$ gilt: $\mathbf{u_{ij}(s,T)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{q_{ij}} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e_{ij}} \geq \mathbf{0}$.

Wegen $\mathbf{U(0,T) = E}$ ist die Invertierbarkeit für $\mathbf{s = 0}$ trivialerweise erfüllt. Für die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{Q}$ gilt $\mathbf{q_{ii} \geq 0}$ für alle $\mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$. Somit erhält man für $\mathbf{s = 1,2,\ldots T-1}$

$$\mathbf{u_{ii}(s,T)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{q_{ii}} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e_{ii}} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{q_{ii}} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \geq \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} > \mathbf{0}$$

für alle $\mathbf{i} \in \{\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\}$. Damit folgt

$$\mathbf{det(U(s,T))} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{u_{ii}(s,T)} > \mathbf{0},$$

d.h. die Matrix $\mathbf{U(s,T)}$ ist auch für $\mathbf{s = 1,2,\ldots T-1}$ invertierbar.

Somit ist die Matrix $\mathbf{U(s,T)}$ für $\mathbf{s = 1,2,\ldots T-1}$ eine invertierbare stochastische obere Dreiecksmatrix. Die Inverse $\mathbf{(U(s,T))^{-1}}$ muss zwar keine stochastische Matrix sein, ist aber wegen Satz 2 eine obere Dreiecksmatrix mit Zeilensumme $\mathbf{1}$, d.h. ein Element der Menge $\mathbf{D_n}$. Für die Produktzerlegung der Matrix $\mathbf{Q}$ wird nun der Ansatz

$$\mathbf{Q} = \underbrace{\mathbf{(U(0,T))^{-1}}}_{=\mathbf{E}} \cdot \mathbf{U(1,T)} \cdot \mathbf{(U(1,T))^{-1}} \cdot \mathbf{U(2,T)} \cdot \ldots \cdot \mathbf{(U(T-1,T))^{-1}} \cdot \underbrace{\mathbf{U(T,T)}}_{=\mathbf{Q}} =$$
$$= \prod_{s=0}^{T-1} \left[\mathbf{(U(s,T))^{-1}} \cdot \mathbf{U(s+1,T)}\right]$$

gewählt. Somit stehen zur Bildung des Produkts die Matrizen

$$\mathbf{(U(s,T))^{-1}} \cdot \mathbf{U(s+1,T)},\ \mathbf{s} \in \mathbf{IN_0},\ \mathbf{T} \in \mathbf{IN},\ \mathbf{0 \leq s < T},$$

im Mittelpunkt des Interesses. Wiederum wegen Satz 2 sind dies obere Dreiecksmatrizen mit Zeilensumme $\mathbf{1}$, d.h. ein Elemente der Menge $\mathbf{D_n}$. In Beispiel 4 wird gezeigt, dass bei 2x2-Matrizen die Produkte $\mathbf{(U(s,T))^{-1}} \cdot \mathbf{U(s+1,T)}$ immer auch stochastische Matrizen sind. Wohingegen dies bei 3x3-Matrizen nicht immer der Fall ist (vgl. Beispiel 5).

Beispiel 4:

$\mathbf{Q} \in \mathbf{D_2} \cap \mathbf{S_2}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{1-a} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\mathbf{U(s,T)} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{T-s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{s \cdot (1-a) + T - s}}{\mathbf{T}} & \frac{\mathbf{s \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T - s \cdot a}}{\mathbf{T}} & \frac{\mathbf{s \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ mit $\mathbf{0 \le s \le T}$ und

$$\left(\mathbf{U(s,T)}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{s \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{T - s \cdot a}}{\mathbf{T}} \end{pmatrix} =$$

für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ mit $\mathbf{0 \le s < T}$. Daraus ergibt sich

$$\left(\mathbf{U(s,T)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{U(s+1,T)} = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\frac{\mathbf{s \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{T - s \cdot a}}{\mathbf{T}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T - (s+1) \cdot a}}{\mathbf{T}} & \frac{\mathbf{(s+1) \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T - (s+1) \cdot a}}{\mathbf{T}} & \frac{\mathbf{(s+1) \cdot a}}{\mathbf{T}} - \frac{\mathbf{s \cdot a}}{\mathbf{T}} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{T - s \cdot a}}{\mathbf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{T - (s+1) \cdot a}}{\mathbf{T - s \cdot a}} & \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ mit $\mathbf{0 \le s < T}$.

Wegen $\frac{\mathbf{T - (s+1) \cdot a}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \ge \mathbf{0}$ und $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{T - s \cdot a}} \ge \mathbf{0}$ handelt es sich bei $\left(\mathbf{U(s,T)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{U(s+1,T)}$ für alle $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ und $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$ mit $\mathbf{0 \le s < T}$ um eine stochastische Matrix, d.h. es gilt $\left(\mathbf{U(s,T)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{U(s+1,T)} \in \mathbf{D_n} \cap \mathbf{S_n}$.

Beispiel 5:

Die Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbf{D_3} \cap \mathbf{S_3}$ sei gegeben durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1-a-b & a & b \\ 0 & 1-c & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$U(s,T) = \frac{s}{T} \cdot Q + \frac{T-s}{T} \cdot E = \frac{1}{T} \cdot \begin{pmatrix} s \cdot (1-a-b) + T - s & s \cdot a & s \cdot b \\ 0 & s \cdot (1-c) + T - s & s \cdot c \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \begin{pmatrix} T - s \cdot a - s \cdot b & s \cdot a & s \cdot b \\ 0 & T - s \cdot c & s \cdot c \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}$$

für alle $s \in IN_0$ und $T \in IN$ mit $0 \le s \le T$.

Es sei $0 \le s < T$ und $D := T \cdot (T - s \cdot c) \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b)$. Wegen $a + b \le 1, c \le 1$ gilt $D > 0$ und man erhält

$$\begin{pmatrix} T \cdot (T - s \cdot c) & -T \cdot s \cdot a & s \cdot c \cdot (s \cdot a + s \cdot b) - T \cdot s \cdot b \\ 0 & T \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) & -s \cdot c \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) \\ 0 & 0 & (T - s \cdot c) \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} T - s \cdot a - s \cdot b & s \cdot a & s \cdot b \\ 0 & T - s \cdot c & s \cdot c \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}}_{= T \cdot U(s,T)} =$$

$$= \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich als Inverse von $U(s,T)$

$$\frac{1}{(T - s \cdot c) \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b)} \cdot \begin{pmatrix} T \cdot (T - s \cdot c) & -T \cdot s \cdot a & s \cdot c \cdot (s \cdot a + s \cdot b) - T \cdot s \cdot b \\ 0 & T \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) & -s \cdot c \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) \\ 0 & 0 & (T - s \cdot c) \cdot (T - s \cdot a - s \cdot b) \end{pmatrix}$$

für alle $s \in IN_0$ und $T \in IN$ mit $0 \le s < T$.

Damit ergibt sich

$$(U(s,T))^{-1} \cdot U(s+1,T) =$$

$$= \frac{1}{(T-s\cdot c)\cdot(T-s\cdot a-s\cdot b)} \cdot \begin{pmatrix} T\cdot(T-s\cdot c) & -T\cdot s\cdot a & s\cdot c\cdot(s\cdot a+s\cdot b)-T\cdot s\cdot b \\ 0 & T\cdot(T-s\cdot a-s\cdot b) & -s\cdot c\cdot(T-s\cdot a-s\cdot b) \\ 0 & 0 & (T-s\cdot c)\cdot(T-s\cdot a-s\cdot b) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\frac{1}{T} \cdot \begin{pmatrix} T-(s+1)\cdot a-(s+1)\cdot b & (s+1)\cdot a & (s+1)\cdot b \\ 0 & T-(s+1)\cdot c & (s+1)\cdot c \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{T-(s+1)\cdot(a+b)}{T-s\cdot(a+b)} & \frac{T\cdot a}{(T-s\cdot c)\cdot(T-s\cdot(a+b))} & \frac{T\cdot b-s\cdot c\cdot(a+b)}{(T-s\cdot c)\cdot(T-s\cdot(a+b))} \\ 0 & \frac{T-(s+1)\cdot c}{T-s\cdot c} & \frac{c}{T-s\cdot c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: Q^*$$

für alle $s \in IN_0$ und $T \in IN$ mit $0 \le s < T$.

Wegen $a+b \le 1, c \le 1$ und $0 \le s < T$ gilt $q_{11}^*, q_{12}^*, q_{22}^*, q_{23}^* \ge 0$. Damit ist Q^* genau dann eine stochastische Matrix wenn

$$q_{13}^* = \frac{T\cdot b-s\cdot c\cdot(a+b)}{(T-s\cdot c)\cdot(T-s\cdot(a+b))} \ge 0.$$

Da der Nenner dieses Bruchs positiv ist, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$T\cdot b-s\cdot c\cdot(a+b) \ge 0$$

bzw. äquivalent zu

$$b \ge \frac{s\cdot c\cdot a}{T-s\cdot c}.$$

Die folgenden Zahlenbeispiele verdeutlichen die Aussage:

1. $T = 2; s = 1; a = 0,3; b = 0,1; c = 0,4$

$$(U(s,T))^{-1} \cdot U(s+1,T) = \frac{1}{64} \cdot \begin{pmatrix} 48 & 15 & 1 \\ 0 & 48 & 16 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

2. $T = 2; s = 1; a = 0,35; b = 0,05; c = 0,4$

$$\left(U(s,T)\right)^{-1} \cdot U(s+1,T) = \frac{1}{128} \cdot \begin{pmatrix} 96 & 35 & -3 \\ 0 & 96 & 32 \\ 0 & 0 & 128 \end{pmatrix}$$

Als Fazit lässt sich festhalten, das bei 3x3-Matrizen für $s = 0,1,\ldots,T-1$ das Produkt $\left(U(s,T)\right)^{-1} \cdot U(s+1,T)$ genau dann eine stochastische Matrix ist, wenn

$$b \geq \frac{s \cdot c \cdot a}{T - s \cdot c} .$$

5. Konstruktion eines unterjährlichen Modells

Das zentrale Ergebnis zur Konstruktion der unterjährlichen Markov-Kette ist der Satz von Kolmogorov ([3] S.257ff). Dieser Satz besagt, dass zu jedem vorgegebenen System von verträglichen endlich-dimensionalen Randverteilungen ein stochastischer Prozess existiert und das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß eindeutig ist. Im Anhang wird dargestellt, wie mit diesem Ergebnis aus einer vorgegebenen abzählbaren Menge von stochastischen Matrizen eine Markov-Kette konstruiert werden kann. Daher reicht es zur Konstruktion des unterjährlichen Modells, ausgehend vom jährlichen Modell eine dem unterjährlichen Zeitraster entsprechende abzählbare Menge von stochastischen Matrizen zu definieren. Man erhält das folgende Ergebnis.

Satz 4:

Es sei $T \in \mathrm{IN}$. Für alle $k \in \mathrm{IN}$ gebe es T stochastische Matrizen

$$R(1,k), R(2,k), \ldots, R(T,k)$$

mit

$$Q(k) = \prod_{s=1}^{T} R(s,k).$$

Dann existiert eine unterjährliche Markov-Kette

$$Y_0, Y_{1/T}, Y_{2/T}, \ldots, Y_{(T-1)/T}, Y_1, Y_{1+1/T}, \ldots, Y_{1+(T-1)/T}, Y_2, Y_{2+1/T}, \ldots$$

mit der Anfangsverteilung P_0 und den Übergangsmatrizen

$$R(s,k+1) = \left(r_{i,j}(s,k+1)\right), s = 1,\ldots,T, k = 0,1,2,3,\ldots,$$

d.h. $\mathbf{P}\left(\mathbf{Y}_{\mathbf{k}+{}^{\mathbf{s}}\!/_{\mathbf{T}}} = \mathbf{j} \,\middle|\, \mathbf{X}_{\mathbf{k}+{}^{\mathbf{s}}\!/_{\mathbf{T}}-{}^{\mathbf{1}}\!/_{\mathbf{T}}} = \mathbf{i}\right) = \mathbf{r}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}(\mathbf{s},\mathbf{k}+\mathbf{1})$ für alle $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots,\mathbf{N}\}$.

Beweis:

Definiere eine abzählbare Menge von (N+1)x(N+1)-Matrizen durch

$$\Lambda_{\mathbf{k}+{}^{\mathbf{s}}\!/_{\mathbf{T}}} := \mathbf{R}(\mathbf{s},\mathbf{k}+\mathbf{1}),\ \mathbf{s}=\mathbf{1},\ldots,\mathbf{T},\mathbf{k}=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\ldots$$

und eine Anfangsverteilung auf dem Zustandsraum $\mathbf{S}$ durch $\pi_{\mathbf{0}} := \mathbf{P}_{\mathbf{0}}$. Da alle Matrizen $\Lambda_{\mathbf{k}+{}^{\mathbf{s}}\!/_{\mathbf{T}}}$ stochastische Matrizen sind, folgt die Behauptung aus der Anwendung des Satzes von Kolmogorov (vgl. Anhang).

□

Die folgenden Beispiele verdeutlichen die Anwendung von Satz 4 für den Fall, dass die Übergangsmatrizen der jährlichen Markov-Kette obere Dreiecksmatrizen sind.

Beispiel 6:

Es sei $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$. Die Übergangsmatrizen seien stochastische obere Dreiecksmatrizen, d.h. $\mathbf{Q}(\mathbf{k}) \in \mathbf{D}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}} \cap \mathbf{S}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}}$ für alle $\mathbf{k}=\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots$. Es gebe stochastische obere Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{T}}(\mathbf{k}) \in \mathbf{D}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}} \cap \mathbf{S}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}}$$

mit

$$\mathbf{Q}(\mathbf{k}) = (\mathbf{Q}_{\mathbf{T}}(\mathbf{k}))^{\mathbf{T}}.$$

Nach Satz 4 gibt es dann eine unterjährliche Markov-Kette mit den entsprechenden Übergangsmatrizen.

Gilt $\mathbf{N}+\mathbf{1}=\mathbf{2}$, so ist es immer möglich, die Übergangsmatrizen in dieser Form multiplikativ zu zerlegen (vgl. Beispiel 2). Für $\mathbf{N}+\mathbf{1}=\mathbf{3}$ ist dies im Fall $\mathbf{T}=\mathbf{2}$ bei bestimmten Koeffizientenkonstellationen möglich (vgl. Beispiel 3).

Beispiel 7:

Es sei $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$. Die Übergangsmatrizen seien wiederum stochastische obere Dreiecksmatrizen, d.h. $\mathbf{Q}(\mathbf{k}) \in \mathbf{D}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}} \cap \mathbf{S}_{\mathbf{N}+\mathbf{1}}$ für alle $\mathbf{k}=\mathbf{1},\mathbf{2},\ldots$. Wir definieren die Matrizen

$$\mathbf{U}(\mathbf{s},\mathbf{T},\mathbf{k}) := \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{k}+\mathbf{1}) + \frac{\mathbf{T}-\mathbf{s}}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{E}\ ,$$

$\mathbf{k} \in \mathbf{IN}_{\mathbf{0}}$, $\mathbf{s} \in \mathbf{IN}_{\mathbf{0}}$ mit $\mathbf{0} \le \mathbf{s} \le \mathbf{T}$.

Gemäß den Ergebnissen des letzten Abschnitts sind diese Matrizen für $0 \le s < T$ invertierbar. Die Übergangsmatrizen haben für alle $k \in IN$ die Produktdarstellung

$$Q(k) = \prod_{s=0}^{T-1} \left[\left(U(s,T,k-1)\right)^{-1} \cdot U(s+1,T,k-1) \right],$$

d.h. mit der Notation aus Satz 4 gilt

$$R(s,k) := \left(U(s-1,T,k-1)\right)^{-1} \cdot U(s,T,k-1).$$

Aus dem letzten Abschnitt ist bekannt, dass diese Matrizen obere Dreiecksmatrizen mit Zeilensumme 1 sind. Gilt $N+1=2$, so sind es auch stochastische Matrizen (vgl. Beispiel 4) und Satz 4 ist anwendbar. Für $N+1=3$ ist dies dann der Fall, wenn

$$q_{1,3}(k) \ge \frac{s \cdot q_{2,3}(k) \cdot q_{1,2}(k)}{T - s \cdot q_{2,3}(k)}$$

für alle $k \in IN$, $s \in IN_0$ mit $0 \le s < T$.

Bemerkungen:

a) Gegeben sei der Fall $N+1=2$ mit der Anfangsverteilung $P_0 = (1\ 0)$, d.h. der Anfangszustand sei der Zustand 0. Ferner seien die Übergangsmatrizen obere Dreiecksmatrizen, d.h. $Q(k) \in D_2 \cap S_2$ für alle $k \in IN$. Wir definieren mit

$$Z = S_j + S_u$$

den zufälligen Zeitpunkt des Übergangs von Zustand 0 zu Zustand 1. Dabei steht S_j für die vollen Jahre und S_u für den Jahresbruchteil. Die Verteilung der Zufallsvariablen S_u gegeben $\{S_j = k\}$ sei gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$F_k(t) = P(S_u \le t \mid S_j = k) = \frac{P(S_u \le t,\ S_j = k)}{P(S_j = k)}.$$

Mit dieser Notation gilt:

$$P\left(Y_{k+s/T+1/T} = 1 \mid Y_{k+s/T} = 0 \right) = P\left(Z \le k + \frac{s+1}{T} \mid Z > k + \frac{s}{T} \right) =$$

$$= \frac{P\left(k + \frac{s}{T} < Z \le k + \frac{s+1}{T} \right)}{P\left(Z > k + \frac{s}{T} \right)} = \frac{P\left(S_j = k,\ \frac{s}{T} < S_u \le \frac{s+1}{T} \right)}{P\left(S_j > k\right) + P\left(S_j = k,\ S_u > \frac{s}{T} \right)} =$$

$$= \frac{P\left(S_j = k\right)\cdot\left(F_k\left(\frac{s+1}{T}\right) - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)}{P\left(S_j > k\right) + P\left(S_j = k\right)\cdot\left(1 - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)} =$$

$$= \frac{q_{0,1}(k+1)\cdot\prod_{j=1}^{k} q_{0,0}(j)\cdot\left(F_k\left(\frac{s+1}{T}\right) - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)}{\prod_{j=1}^{k+1} q_{0,0}(j) + q_{0,1}(k+1)\cdot\prod_{j=1}^{k} q_{0,0}(j)\cdot\left(1 - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)} =$$

$$= \frac{q_{0,1}(k+1)\cdot\left(F_k\left(\frac{s+1}{T}\right) - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)}{q_{0,0}(k+1) + q_{0,1}(k+1)\cdot\left(1 - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)} = \frac{q_{0,1}(k+1)\cdot\left(F_k\left(\frac{s+1}{T}\right) - F_k\left(\frac{s}{T}\right)\right)}{1 - q_{0,1}(k+1)\cdot F_k\left(\frac{s}{T}\right)}$$

Wählt man als Verteilung für die Zufallsvariable S_u gegeben $\{S_j = k\}$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0,1]$, d.h.

$$F_k(t) = 1_{[0,1]}(t)\cdot t + 1_{(1,\infty)}(t),$$

so korrespondiert dies mit der Linearisierung der Übergangsmatrizen.

Der Ansatz mit den T-ten Wurzeln der Übergangsmatrizen entspricht dem Fall, dass gegeben $\{S_j = k\}$ die Zufallsvariable S_u die Verteilungsfunktion

$$F(t) = 1_{[0,1]}(t)\cdot\frac{1 - q_{0,0}(k+1)^t}{q_{0,1}(k+1)} + 1_{(1,\infty)}(t)$$

besitzt.

b) Wenn die unterjährliche Markov-Kette gemäß Beispiel 7 durch Linearisierung der Übergangsmatrizen aus der jährlichen Markov-Kette konstruiert werden kann, so ergibt sich als Übergangsmatrix vom Zeitpunkt $k \in IN_0$ zum Zeitpunkt $k + {}^{s}\!/_{T}$ die folgende Matrix:

$$\prod_{t=1}^{s} R(t,k+1) = \prod_{t=1}^{s}\left(U\left(t-1,T,k\right)\right)^{-1}\cdot U\left(t,T,k\right) =$$
$$= \left(U\left(0,T,k\right)\right)^{-1}\cdot U\left(s,T,k\right) = E\cdot U\left(s,T,k\right) = \frac{s}{T}\cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T}\cdot E$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2 aus [8] erfüllt, d.h. bei konstanten Leistungsvektoren kann die Bewertung eines unterjährlichen Zahlungsstroms auf die Bewertung eines jährlichen Zahlungsstroms zurückgeführt werden. Verwendet man als unterjährliches Zinsmodell die relativ gemischte Verzinsung, so gelten die in [8], S.13ff, besprochenen Ergebnisse bezüglich Restglied und Invarianzsatz.

6. Anwendungsbeispiel: Personenversicherungsmathematik

In der Personenversicherungsmathematik wird i.d.R. zunächst von einem jährlichen Modell ausgegangen, z.B. in Form von Sterbetafeln auf jährlicher Basis. Zu bewerten sind allerdings oft unterjährliche Zahlungsströme. Mit dem im letzten Abschnitt dargestellten Prinzip kann unter den Voraussetzungen von Satz 4 aus einer jährlichen Markov-Kette eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert werden. Anschließend kann die Bewertung mithilfe der unterjährlichen Markov-Kette erfolgen (vgl. [8]). Im Folgenden wird diese Vorgehensweise bei drei Beispielen aus der Personenversicherungsmathematik angewendet.

Beispiel 8:

Gegeben sei eine Person A vom Alter $\mathbf{x} \in \mathbf{IN_0}$. Diese Person erhalte lebenslängliche Zahlungen aus einer Lebensversicherung oder einer betrieblichen Altersversorgung. Eine Hinterbliebenenversorgung ist nicht zugesagt. Die Sterbewahrscheinlichkeit im Alter $\mathbf{x}+\mathbf{k} \in \mathbf{IN_0}$ sei gegeben durch $\mathbf{q_{x+k}}$. Die Gesamtheit der Sterbewahrscheinlichkeiten wird als Sterbetafel bezeichnet und ω sei dabei das letzte mögliche Alter d.h. insbesondere gilt $\mathbf{q_\omega} = \mathbf{1}$. Für diese Person A kann mithilfe der Übergangsmatrizen

$$\mathbf{Q(k)} := \begin{pmatrix} \mathbf{1-q_{x+k-1}} & \mathbf{q_{x+k-1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{k = 1,2,,\ldots\omega - x + 1},$$

($\mathbf{Q(k)} := \mathbf{E}, \mathbf{k} > \omega - \mathbf{x} + \mathbf{1}$) eine jährliche Markov-Kette definiert werden. Dabei hat der Zustandsraum $\mathbf{S}$ die beiden folgenden Elemente:

Zustand $\mathbf{0}$: Die Person A lebt.

Zustand $\mathbf{1}$: Die Person A ist tot.

Es sei $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$. Da es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen um 2x2-Matrizen bzw. obere Dreiecksmatrizen handelt, kann die unterjährliche Markov-Kette zum einen mithilfe der $\mathbf{T}$-ten Wurzeln, d.h.

$$\mathbf{Q_T(k)} = \begin{pmatrix} \sqrt[\mathbf{T}]{\mathbf{1-q_{x+k-1}}} & \mathbf{1} - \sqrt[\mathbf{T}]{\mathbf{1-q_{x+k-1}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{k = 1,2,\ldots,\omega - x + 1},$$

konstruiert werden (vgl. Beispiel 2). Zum anderen gibt es die Möglichkeit die unterjährliche Markov-Kette mithilfe des Linearisierungsansatzes zu konstruieren, d.h.

$$(\mathbf{U(s,T,k)})^{-1} \cdot \mathbf{U(s+1,T,k)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{T-(s+1)\cdot q_{x+k}}}{\mathbf{T-s\cdot q_{x+k}}} & \dfrac{\mathbf{q_{x+k}}}{\mathbf{T-s\cdot q_{x+k}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{k = 0,1,2,,\ldots\omega - x}$, $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ mit $\mathbf{0 \le s < T}$ (vgl. Beispiel 4).

Beispiel 9:

Gegeben sei wiederum eine Person A vom Alter $\mathbf{x} \in \mathbf{IN_0}$. Diese Person erhalte wie im letzten Beispiel lebenslängliche Zahlungen aus einer Lebensversicherung oder einer betrieblichen Altersversorgung. Diesmal ist zusätzlich eine Hinterbliebenenversorgung in Form einer lebenslänglichen Rente an eine Person B zugesagt. Die Sterbewahrscheinlichkeit der Person A im Alter $\mathbf{x}+\mathbf{k} \in \mathbf{IN_0}$ sei gegeben durch $\mathbf{q_{A,x+k}}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Tod der Person A im Alter $\mathbf{x}+\mathbf{k} \in \mathbf{IN_0}$ eine Hinterbliebenenleistung an Person B auslöst, sei $\mathbf{h_{x+k}}$. Keine Hinterbliebenenversorgung wird ausgelöst, wenn die Person B vor der Person A stirbt oder die Anspruchsberechtigung für die Hinterbliebenenleistung erlischt, z.B. aufgrund einer Scheidung bei Ehepaaren. Diese beiden und weitere denkbare Möglichkeiten sind in der Wahrscheinlichkeit $\mathbf{1-h_{x+k}}$ enthalten. Der Altersunterschied zwischen der Person A und der Person B sei gegeben durch die ganze Zahl δ. Die Sterbewahrscheinlichkeit von Person B im Alter $\mathbf{y} \in \mathbf{IN_0}$ sei $\mathbf{q_{B,y}}$. Für die Person A sei $\omega_\mathbf{A}$ das letzte mögliche Alter, d.h. insbesondere gilt $\mathbf{q_{A,\omega_A}} = \mathbf{1}$. Für die Person B sei $\omega_\mathbf{B}$ das letzte mögliche Alter, d.h. insbesondere gilt $\mathbf{q_{B,\omega_B}} = \mathbf{1}$. Wir setzen $\omega := \mathbf{max}(\omega_\mathbf{A}, \omega_\mathbf{B} + \delta)$, d.h. insbesondere gilt $\mathbf{q_{A,\omega}} = \mathbf{q_{B,\omega-\delta}} = \mathbf{1}$.

Der Zustandsraum $\mathbf{S}$ besteht dann aus den folgenden drei Elementen:

Zustand $\mathbf{0}$: Die Person A lebt.

Zustand $\mathbf{1}$: Die Person A ist tot, aber die Person B lebt und hat Anspruch auf Hinterbliebenenleistung.

Zustand $\mathbf{2}$: Die Person A ist tot und Person B ist tot oder hat keinen Anspruch auf Hinterbliebenenleistung.

Für diese Situation kann mithilfe der Übergangsmatrizen

$$\mathbf{Q(k)} := \begin{pmatrix} \mathbf{1-q_{A,x+k-1}} & \mathbf{h_{x+k-1} \cdot q_{A,x+k-1}} & \mathbf{(1-h_{x+k-1}) \cdot q_{A,x+k-1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1-q_{B,x+k-1-\delta}} & \mathbf{q_{B,x+k-1-\delta}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{k = 1,2,\ldots,\omega - x+1},$$

($\mathbf{Q(k)} := \mathbf{E}, \mathbf{k} > \omega - \mathbf{x} + \mathbf{1}$) eine jährliche Markov-Kette definiert werden.

Es sei $\mathbf{T} \in \mathbf{IN}$. Da es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen um 3x3-Matrizen bzw. obere Dreiecksmatrizen handelt, kann mithilfe der Linearisierung eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert werden, falls

$$\mathbf{q_{1,3}(k)} \geq \frac{\mathbf{s \cdot q_{2,3}(k) \cdot q_{1,2}(k)}}{\mathbf{T - s \cdot q_{2,3}(k)}}$$

(vgl. Beispiel 5) bzw.

$$\left(1-h_{x+k-1}\right)\cdot q_{A,x+k-1} \geq \frac{s\cdot q_{B,x+k-1-\delta}\cdot h_{x+k-1}\cdot q_{A,x+k-1}}{T-s\cdot q_{B,x+k-1-\delta}}$$

für alle $k=1,2,\ldots,\omega-x+1$, $s\in IN_0$ mit $0\leq s<T$ erfüllt ist.

Beispiel 10:

Gegeben sei wiederum eine Person A vom Alter $x\in IN_0$. Diese Person erhält im Falle der Invalidität eine lebenslängliche Rente. Die Sterbewahrscheinlichkeit der Person A im Alter $x+k\in IN_0$ ohne vorherige Invalidität sei gegeben durch $q_{1,x+k}$. Die Sterbewahrscheinlichkeit der Person A im Alter $x+k\in IN_0$ nach vorheriger Invalidität sei gegeben durch $q_{2,x+k}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Person A im Alter $x+k\in IN_0$ invalide wird, sei gegeben durch i_{x+k}. Es sei wiederum ω das letzte mögliche Alter, d.h. insbesondere gilt $q_{1,\omega}=q_{2,\omega}=1$. Der Zustandsraum S besteht dann aus den folgenden drei Elementen:

Zustand 0: Die Person A lebt und ist nicht invalide.

Zustand 1: Die Person A lebt und ist invalide.

Zustand 2: Die Person A ist tot.

Für diese Situation kann mithilfe der Übergangsmatrizen

$$Q(k):=\begin{pmatrix} 1-i_{x+k-1}-q_{1,x+k-1} & i_{x+k-1} & q_{1,x+k-1} \\ 0 & 1-q_{2,x+k-1} & q_{2,x+k-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k=1,2,\ldots,\omega-x+1,$$

($Q(k):=E, k>\omega-x+1$) eine jährliche Markov-Kette definiert werden. Es sei $T\in IN$. Da es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen um 3x3-Matrizen bzw. obere Dreiecksmatrizen handelt, kann mithilfe der Linearisierung eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert werden, falls

$$q_{1,3}(k)\geq \frac{s\cdot q_{2,3}(k)\cdot q_{1,2}(k)}{T-s\cdot q_{2,3}(k)}$$

(vgl. Beispiel 5) bzw.

$$q_{1,x+k-1}\geq \frac{s\cdot q_{2,x+k-1}\cdot i_{x+k-1}}{T-s\cdot q_{2,x+k-1}}$$

für alle $k=1,2,\ldots,\omega-x+1$, $s\in IN_0$ mit $0\leq s<T$ erfüllt ist.

Bemerkung:

In der Pensionsversicherungsmathematik wird in den üblichen Modellen der Sachverhalt berücksichtigt, dass Hinterbliebene im Jahr des Auslösens der Hinterbliebenenleistung und Invalide im Jahr der Invalidität bis zum Jahresende versterben können und somit in dem auf den Leistungsfall folgenden Jahr keine Zahlungen zu leisten sind (vgl. [5] S.32ff). Diese zusätzliche Variation kann auch in den Übergangsmatrizen der Beispiele 9 und 10 berücksichtigt werden. Die Bedingung für die Linearisierung der Übergangsmatrizen durch stochastische Matrizen muss dann entsprechend angepasst werden.

7. Anwendungsbeispiel: Forderungsausfall

Ein Unternehmen A habe eine Forderung gegenüber einem Unternehmen B. Diese soll in den nächsten $\mathbf{n}$ Perioden durch die Zahlungen $\mathbf{Z_1, Z_2, \dots, Z_n > 0}$ beglichen werden. Dabei steht $\mathbf{Z_k}$ für die Zahlung im $\mathbf{k}$-ten Jahr. Das Unternehmen A geht davon aus, dass es Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{0 < q_1 \le q_2 \le \dots \le q_n < 1}$ gibt, mit denen die Zahlungen zu einem bestimmten Zeitpunkt ausfallen, d.h.

$$\mathbf{q_k = P(\text{keine Zahlung im Jahr } k)}, \quad \mathbf{k = 1,2,\dots,n} .$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Zahlungen nach einem Ausfall nicht wieder aufgenommen werden. Dieser Sachverhalt kann mit einer jährlichen Markov-Kette modelliert werden kann (vgl. [6] S.6ff). Der Zustandsraum wird dabei mit $\mathbf{S = \{0,1\}}$ gewählt, wobei der Zustand $\mathbf{1}$ dafür steht, dass keine Zahlung erfolgt (Ausfall). Zustand $\mathbf{0}$ bedeutet, dass die Zahlung erfolgt (kein Ausfall). Die Übergangsmatrizen sind durch

$$\mathbf{Q(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1 - \dfrac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}} & \mathbf{\dfrac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{k = 1,2,\dots,n,}$$

($\mathbf{q_0 := 0, Q(k) := E, k > n}$) gegeben. Die Anfangsverteilung ist gegeben durch $\mathbf{P_0 = (1 \ \ 0)}$.

Es sei $\mathbf{T \in IN}$. Da es sich bei den jährlichen Übergangsmatrizen um 2x2-Matrizen bzw. obere Dreiecksmatrizen handelt, kann die unterjährliche Markov-Kette zum einen mithilfe der $\mathbf{T}$-ten Wurzeln, d.h.

$$\mathbf{Q_T(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{\sqrt[T]{1 - \dfrac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}}} & \mathbf{1 - \sqrt[T]{1 - \dfrac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{k = 1,2,\dots,n,}$$

konstruiert werden (vgl. Beispiel 2). Zum anderen gibt es die Möglichkeit die unterjährliche Markov-Kette mithilfe des Linearisierungsansatzes zu konstruieren, d.h.

$$(\mathbf{U}(\mathbf{s},\mathbf{T},\mathbf{k}))^{-1} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{s}+1,\mathbf{T},\mathbf{k}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\mathbf{T}-(\mathbf{s}+1)\cdot\dfrac{\mathbf{q_{k+1}}-\mathbf{q_k}}{1-\mathbf{q_k}}}{\mathbf{T}-\mathbf{s}\cdot\dfrac{\mathbf{q_{k+1}}-\mathbf{q_k}}{1-\mathbf{q_k}}} & \dfrac{\dfrac{\mathbf{q_{k+1}}-\mathbf{q_k}}{1-\mathbf{q_k}}}{\mathbf{T}-\mathbf{s}\cdot\dfrac{\mathbf{q_{k+1}}-\mathbf{q_k}}{1-\mathbf{q_k}}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{k} = \mathbf{0,1,2,\ldots,n-1}$, $\mathbf{s} \in \mathbf{IN_0}$ mit $\mathbf{0} \le \mathbf{s} < \mathbf{T}$ (vgl. Beispiel 4). Durch Anwendung der Ergebnisse aus [8] kann auch in diesem Fall eine Bewertung bei unterjährlicher Zahlweise mithilfe von Markov-Ketten durchgeführt werden.

8. Ausblick

Bei der Bewertung von Zahlungsströmen werden in den Wirtschaftswissenschaftlichen Annahmen i.d.R. aufgrund jährlicher Beobachtungen getroffen. Oft aber haben die zu bewertenden Sachverhalten einen unterjährlichen Charakter. Dieses Problem führt bei der Anwendung von Markov-Ketten zu der Frage, wie aus einer jährlichen Markov-Kette eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird hierzu als Anwendung des Satzes von Kolmogorov eine unterjährliche Markov-Kette konstruiert. Im Wesentlichen werden darauf aufbauend zwei Fälle behandelt, zum einen der Ansatz der unterjährlichen Übergangsmatrizen als $\mathbf{T}$-te Wurzeln der jährlichen Übergangsmatrizen und zum anderen der Ansatz der Linearisierung der jährlichen Übergangsmatrizen. Es zeigt sich, dass bei zweielementigen Zustandsräumen beide Ansätze funktionieren. Hat der Zustandsraum aber mehr als zwei Elemente, so ist dies nicht immer gewährleistet. Wenn die Linearisierung aber zu stochastischen Matrizen bzw. zu unterjährlichen Übergangsmatrizen führt, so können insbesondere die in [8] hergeleiteten Bewertungsformeln für risikobehaftete Zahlungsströme bei unterjährlicher Zahlweise angewendet werden. Es stellt sich nun die Frage, welcher der beiden in dieser Arbeit dargestellten Ansätze sinnvoller ist. Für den Linearisierungsansatz spricht neben der Anwendbarkeit der Ergebnisse aus [8] die EDV-technische Umsetzungsbarkeit.

Im zentralen Ergebnis dieser Arbeit (vgl. Satz 4) benötigt man zur Konstruktion der unterjährlichen Markov-Kette eine Produktzerlegung der jährlichen Übergangsmatrizen. Jede Produktzerlegung liefert somit einen anderen Ansatz für die unterjährliche Markov-Kette. Da die beiden in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze schon bei einem drei-elementigen Zustandsraum nicht immer sinnvoll umsetzbar sind, sollten weitere Produktzerlegungen und damit weitere Ansätze in Betracht gezogen werden. Insbesondere sind solche Ansätze von Interesse, die bei allen endlichen Zustandsräumen zu sinnvollen unterjährlichen Markov-Ketten führen.

9. Anhang: Konstruktion einer Markov-Kette aus einer abzählbaren Menge von stochastischen Matrizen

Die folgende Konstruktion ist eine Anwendung des Satzes von Kolmogorov (vgl. [3] S.257ff).

Gegeben sei eine endlicher Zustandsraum $\Sigma = \{0,1,2,\dots,N\}$ und eine Verteilung π_0 auf dem Zustandsraum Σ. Gegeben sei eine abzählbare Indexmenge, o.B.d.A. sei dies die Menge $\mathbb{N}_0$. Gegeben sei ferner eine Menge von stochastischen Matrizen $\Lambda_m, m \in \mathbb{N}$. Mit diesen stochastischen Matrizen und der Verteilung π_0 wird ein System von endlich-dimensionalen Randverteilungen $p_{t_1,t_2,\dots,t_n}$ wie folgt definiert:

1. Für $s,t \in \mathbb{N}_0$ mit $s \le t$ sei $\left(\lambda_{i,j}(s,t)\right)_{i,j\in\Sigma} = \Lambda(s,t) := \prod_{m=s+1}^{t} \Lambda_m$.
2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $t_1,t_2,\dots,t_n \in \mathbb{N}_0$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ definieren wir

   $$p_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,x_2,\dots,x_n) :=$$
   $$\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdot \dots \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n}$$

   für $x_1,x_2,\dots,x_n \in \Sigma$.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien $t_1,t_2,\dots,t_n \in \mathbb{N}_0$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. Ferner seien gegeben $x_1,x_2,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n \in \Sigma$. Dann gilt

$$\sum_{l=0}^{N} p_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1,x_2,\dots,x_{j-1},l,x_{j+1},\dots x_n) =$$
$$= \sum_{l=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdot \dots$$
$$\dots \cdot \lambda(t_{j-1},t_j)_{x_{j-1},l} \cdot \lambda(t_j,t_{j+1})_{l,x_{j+1}} \cdot \dots \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdot \dots$$
$$\dots \cdot \lambda(t_{j-1},t_j)_{x_{j-1},l} \cdot \lambda(t_j,t_{j+1})_{l,x_{j+1}} \cdot \dots \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdots$$

$$\cdots \left(\sum_{l=0}^{N} \lambda(t_{j-1},t_j)_{x_{j-1},l} \cdot \lambda(t_j,t_{j+1})_{l,x_{j+1}} \right) \cdots \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \lambda(t_2,t_3)_{x_2,x_3} \cdots$$

$$\cdots \lambda(t_{j-1},t_{j+1})_{x_{j-1},x_{j+1}} \cdots \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} =$$

$$= p_{t_1,t_2,\ldots t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots x_n)$$

Da die Indexmenge abzählbar ist, folgt daraus per Induktion die Verträglichkeit der Randverteilungen $p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}$. Mit dem Satz von Kolmogorov ergibt sich:

1. Es gibt ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß, das zu den endlich-dimensionalen Randverteilungen passt.
2. Es gibt einen stochastischen Prozess $(Y_m)_{m \in IN_0}$, mit

$$P(Y_{t_1} = x_1, Y_{t_2} = x_2, \ldots, Y_{t_n} = x_n) = p_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

für alle $t_1,t_2,\ldots,t_n \in IN_0$ mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \Sigma$.

Dieser Prozess $(Y_m)_{m \in IN_0}$ erfüllt, wie die folgende Rechnung zeigt, die Markov-Eigenschaft und ist somit eine Markov-Kette mit der Anfangsverteilung π_0 und den Übergangsmatrizen $\Lambda_m, m \in IN$. Dabei steht Λ_m für den Übergang von $m-1$ nach m.

Es seien $n \in IN$, $t_1,t_2,\ldots,t_n \in IN_0$ mit $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ und $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \Sigma$.

$$P(Y_{t_n} = x_n \mid Y_{t_1} = x_1, Y_{t_2} = Y_2, \ldots, Y_{t_{n-1}} = x_{n-1}) =$$

$$= \frac{P(Y_{t_1} = x_1, Y_{t_2} = x_2, \ldots, Y_{t_n} = x_n)}{P(Y_{t_1} = x_1, Y_{t_2} = x_2, \ldots, Y_{t_{n-1}} = x_{n-1})} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n}}{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} \cdot \sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{m,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}}{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_1)_{k,x_1} \cdot \lambda(t_1,t_2)_{x_1,x_2} \cdot \ldots \cdot \lambda(t_{n-2},t_{n-1})_{x_{n-2},x_{n-1}}} =$$

$$= \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} = \frac{\lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n} \cdot \sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}}{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}} \cdot \lambda(t_{n-1},t_n)_{x_{n-1},x_n}}{\sum_{k=0}^{N} \pi_0(k) \cdot \lambda(0,t_{n-1})_{k,x_{n-1}}} =$$

$$= \frac{P(Y_{t_{n-1}} = x_{n-1}, Y_{t_n} = x_n)}{P(Y_{t_{n-1}} = x_{n-1})} = P\left(Y_{t_n} = x_n \mid Y_{t_{n-1}} = x_{n-1}\right)$$

Somit müssen zur Konstruktion einer Markov-Kette lediglich die Übergangsmatrizen als abzählbare Menge von stochastischen Matrizen und die Anfangsverteilung definiert werden.

Literaturverzeichnis

[1] *Arrenberg, Jutta* Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München 2011.

[2] *Fritz, Franz-Josef; Huppert, Bertram; Wilems, Wolfgang* Stochastische Matrizen, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1979.

[3] *Gänssler, Peter; Stute, Winfried* Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.

[4] *Gerber, Hans U.* Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986.

[5] *Heubeck, Klaus* Richttafeln 2005G,Textband und Programm Heurika 2,Verlag: Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln 2005.

[6] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am IVW Köln, Band 3/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98 (Stand 14. Februar 2013).

[7] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 4/2011, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100 (Stand 14. Februar 2013).

[8] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2012, Köln 2012, http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204 (Stand 14. Februar 2013).

[9] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.

[10] *Milbrodt, Hartmut; Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der Personenversicherungsmathematik, Walter de Gruyter, Berlin New York 1999.

[11] *Neuburger, Edgar (Hrsg.)* Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik Heft 25, Verlag Versicherungswirtschaft e.V. Karlsruhe 1997.

[12] *Neuburger, Edgar* Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise, Blätter der DGVFM, Bd. XIX, Heft 3, S.257 – S.267, 1990

[13] *Ross, Sheldon M.* Indroduction to Probability Modells, Eighth Edition, Academic Press, Amsterdam e.a. 2003.

Impressum

*Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe **„Forschung am IVW Köln"**.*

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de abgerufen werden.

*Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**. Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (http://www.vvw.de/).*

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html

Köln, März 2013

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275 - 3425
Fax +49 221 8275 - 3135

Mail ralf.knobloch@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479