

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Logische Grundlagen	2
1.2 Grundlagen der Mengenlehre	8
1.3 Abbildungen	15
1.4 Die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion	16
1.5 Ganze, rationale und reelle Zahlen	22
1.6 Ungleichungen und Beträge	27
1.7 Komplexe Zahlen	36
1.8 Aufgaben	54
2 Analysis von Funktionen einer Veränderlichen	55
2.1 Begriff der Funktion	56
2.2 Eigenschaften von Funktionen	62
2.3 Elementare Funktionen	65
2.4 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen	69
2.5 Eigenschaften stetiger Funktionen	89
2.6 Differenzierbarkeit von Funktionen	95
2.7 Lineare Approximation und Differential	101
2.8 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen	105
2.9 TAYLOR-Formel und der Satz von TAYLOR	111
2.10 Extremalprobleme	116
2.11 BANACHScher Fixpunktsatz und NEWTON-Verfahren	120
2.12 Kurven im \mathbb{R}^2	126
2.13 Integralrechnung	137
2.14 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	164
2.15 Parameterintegrale	166
2.16 Uneigentliche Integrale	168
2.17 Numerische Integration	179
2.18 Interpolation	183
2.19 Aufgaben	189
3 Reihen	191
3.1 Zahlenreihen	192
3.2 Funktionenfolgen	201
3.3 Gleichmäßig konvergente Reihen	207
3.4 Potenzreihen	209
3.5 Operationen mit Potenzreihen	212
3.6 Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$, $\sin x$ und $\cos x$	213

3.7	Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen	226
3.8	Konstruktion von Reihen	228
3.9	FOURIER-Reihen	231
3.10	Aufgaben	263
4	Lineare Algebra	265
4.1	Determinanten	271
4.2	CRAMERSche Regel	284
4.3	Matrizen	287
4.4	Lineare Gleichungssysteme und deren Lösung	306
4.5	Allgemeine Vektorräume	314
4.6	Orthogonalisierungsverfahren nach ERHARD SCHMIDT	330
4.7	Eigenwertprobleme	338
4.8	Vektorrechnung im \mathbb{R}^3	354
4.9	Aufgaben	372
5	Analysis im \mathbb{R}^n	375
5.1	Eigenschaften von Punktmenen aus dem \mathbb{R}^n	376
5.2	Abbildungen und Funktionen mehrerer Veränderlicher	381
5.3	Kurven im \mathbb{R}^n	382
5.4	Stetigkeit von Abbildungen	390
5.5	Partielle Ableitung einer Funktion	393
5.6	Ableitungsmatrix und HESSE-Matrix	398
5.7	Differenzierbarkeit von Abbildungen	400
5.8	Differentiationsregeln und die Richtungsableitung	401
5.9	Lineare Approximation	404
5.10	Totales Differential	406
5.11	TAYLOR-Formel und Mittelwertsatz	408
5.12	Satz über implizite Funktionen	412
5.13	Extremalaufgaben ohne Nebenbedingungen	415
5.14	Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen	420
5.15	Ausgleichsrechnung	426
5.16	NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme	430
5.17	Aufgaben	432
6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	435
6.1	Einführung	436
6.2	Allgemeine Begriffe	437
6.3	Allgemeines zu Differentialgleichungen erster Ordnung	438
6.4	Differentialgleichungen erster Ordnung mit trennbaren Variablen	441
6.5	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	444
6.6	Durch Transformationen lösbare Differentialgleichungen	447
6.7	Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	454
6.8	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	470
6.9	Anmerkungen zum "Rechnen" mit Differentialgleichungen	491
6.10	Numerische Lösungsmethoden	493

6.11	Potenzreihen zur Lösung von Differentialgleichungen	503
6.12	BESSELSche und LEGENDRESche Differentialgleichungen	506
6.13	Rand- und Eigenwertprobleme	517
6.14	Nichtlineare Differentialgleichungen	532
6.15	Aufgaben	545
7	Vektoranalysis und Kurvenintegrale	549
7.1	Die grundlegenden Operatoren der Vektoranalysis	550
7.2	Rechenregeln und Eigenschaften der Operatoren der Vektoranalysis	554
7.3	Potential und Potentialfeld	556
7.4	Skalare Kurvenintegrale	557
7.5	Vektoriell Kurvenintegral – Arbeitsintegral	561
7.6	Stammfunktion eines Gradientenfeldes	565
7.7	Berechnungsmethoden für Stammfunktionen	570
7.8	Vektorpotentiale	571
7.9	Aufgaben	573
8	Flächenintegrale, Volumenintegrale und Integralsätze	575
8.1	Flächeninhalt ebener Bereiche	576
8.2	RIEMANNsches Flächenintegral	578
8.3	Flächenintegralberechnung durch Umwandlung in Doppelintegrale	581
8.4	Satz von GREEN	587
8.5	Transformationsformel für Flächenintegrale	592
8.6	Integration über Oberflächen	597
8.7	Satz von STOKES	616
8.8	Volumenintegrale	621
8.9	Transformationsformel für Volumenintegrale	625
8.10	Satz von GAUSS	629
8.11	Aufgaben	638
9	Partielle Differentialgleichungen	641
9.1	Was ist eine partielle Differentialgleichung?	642
9.2	Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung	643
9.3	Beispiele von partiellen Differentialgleichungen aus der Physik . .	646
9.4	Wellengleichung	650
9.5	Wärmeleitungsgleichung	682
9.6	Potentialgleichung	689
9.7	Entdimensionierung von partiellen Differentialgleichungen	696
9.8	Aufgaben	698
10	Funktionentheorie	701
10.1	Komplexe Funktionen	702
10.2	Differentiation komplexer Funktionen	704
10.3	Elementare komplexe Funktionen und Potenzreihen	709
10.4	Konforme Abbildungen	711
10.5	Integration komplexer Funktionen	715

10.6	Reihenentwicklungen komplexer Funktionen	724
10.7	Behandlung von Singularitäten und der Residuensatz	725
10.8	Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes	732
10.9	Harmonische Funktionen	738
10.10	Aufgaben	743
11	Integraltransformationen	745
11.1	Definition von Integraltransformationen	746
11.2	FOURIER-Transformation	748
11.3	Umkehrung der FOURIER-Transformation	753
11.4	Eigenschaften der FOURIER-Transformation	754
11.5	Anwendung der FOURIER-Transformation auf partielle Differenti- algleichungen	756
11.6	LAPLACE-Transformation	758
11.7	Inverse LAPLACE-Transformation	761
11.8	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation	765
11.9	Praktische Arbeit mit der LAPLACE-Transformation und der Rück- transformation	772
11.10	Aufgaben	779
12	Variationsrechnung und Optimierung	781
12.1	Einige mathematische Grundlagen	782
12.2	Funktionale auf BANACH-Räumen	785
12.3	Variationsprobleme auf linearen Mannigfaltigkeiten	798
12.4	Klassische Variationsrechnung	803
12.5	Einige Variationsaufgaben	806
12.6	Natürliche Randbedingungen und Transversalität	813
12.7	Isoperimetrische Variationsprobleme	816
12.8	Funktionale mit mehreren Veränderlichen	818
12.9	Aufgaben	819
13	Elemente der Tensorrechnung	821
13.1	Tensoralgebra	822
13.2	Tensoranalysis	837
13.3	Aufgaben	848
14	Wahrscheinlichkeitsrechnung	849
14.1	Zufällige Ereignisse	850
14.2	Wahrscheinlichkeit zufälliger Ereignisse	856
14.3	Zufallsgrößen	865
14.4	Zufällige Vektoren	881
14.5	Aufgaben	907

15 Statistik	909
15.1 Stichproben	910
15.2 Punktschätzung	913
15.3 Intervallschätzung	919
15.4 Statistische Tests	932
15.5 Korrelations- und Regressionsanalyse	942
15.6 Aufgaben	951
A Formelkompendium	955
B Octave/MATLAB	969
B.1 Eingabekonventionen	969
B.2 Kontrollstrukturen	970
B.3 Vektoren und Matrizen	972
B.4 Allgemeines	973
B.5 Visualisierung: 2-dimensionale Plots	975
B.6 Rechnen mit Matrizen	976
B.7 Funktionen	979
B.8 Rekursionen	980
B.9 Komplexität	981
B.10 Handles	982
B.11 Verschiedenes	983
C Literaturhinweise	985
Index	987