

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	<b>17</b>
Über dieses Buch .....	17
Konventionen in diesem Buch .....	17
Was Sie nicht lesen müssen .....	18
Törichte Annahmen über die Leser .....	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist .....	19
Teil I: Was Sie alles brauchen – die Zutaten .....	19
Teil II: Was, bitteschön, sind Differenzialgleichungen? .....	19
Teil III: Differenzialgleichungen – rechnerisch gelöst .....	20
Teil IV: Die große weite Welt der Differenzialgleichungen .....	20
Teil V: Der Top-Ten-Teil .....	20
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden .....	20
Wie es weitergeht .....	21
 <b>TEIL I</b>	
<b>WAS SIE ALLES BRAUCHEN – DIE ZUTATEN</b> .....	<b>23</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Elementare Funktionen – Elementares über Funktionen</b> .....	<b>25</b>
Was ist überhaupt eine Funktion? .....	25
Polynome – anständige Funktionen .....	29
So sehen sie aus .....	29
Der Definitionsbereich .....	33
Nullstellen von Polynomen – das Mitternachtskapitel .....	34
Das Ausklammern – die Faktorzerlegung .....	34
Verhalten von Polynomen für $x$ gegen Unendlich .....	37
Gebrochen rationale Funktionen – komplizierte Zeitgenossen .....	38
Alles, was erlaubt ist, der Definitionsbereich .....	39
Linearfaktorzerlegung von Zähler und Nenner .....	40
Wenn der Zähler Null wird, aber nicht der Nenner .....	42
Wenn der Nenner Null wird, aber nicht der Zähler .....	42
Wenn Zähler und Nenner gleichzeitig Null werden .....	44
Exponential- und Logarithmusfunktionen – wie Feuer und Wasser .....	47
Die allgemeine Exponentialfunktion .....	48
Der Logarithmus .....	50
Die $e$ -Funktion .....	52
Definitions- und Wertebereich der $e$ -Funktion .....	52
Rechenbeispiele .....	55
Trigonometrische Funktionen – ein ewiges Auf und Ab .....	58
Grundlegendes über die Hauptdarsteller Sinus und Kosinus .....	58
Spezielle Funktionswerte .....	60
Die wichtigste Sinus-Kosinus-Formel der Welt .....	61
Betragsfunktionen – sie sehen in allem nur das Positive .....	61

## 10 Inhaltsverzeichnis

Kreise und Ellipsen – jetzt geht's rund .....	64
Kreise – runder geht's nicht .....	64
Ellipsen – naja, bessere Eier halt. ....	66

### Kapitel 2

#### Strecken, spiegeln, schieben und schunkeln

<b>mit Funktionen .....</b>	<b>69</b>
Spieglein, Spieglein .....	70
Symmetrien .....	70
Rauf und runter .....	71
Rechts und links .....	71
Strecken und stauchen in $y$ -Richtung .....	73
Strecken und Stauchen in $x$ -Richtung .....	74
Alles zusammen .....	76
Funktionenschar – die Blumensträuße unter den Funktionen .....	79
Beispiele .....	80

### Kapitel 3

#### Differenzieren – die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch ..... 83

Was ist denn eine Ableitung? .....	83
Schreibweisen der ersten Ableitung .....	85
Schreibweise der höheren Ableitungen .....	85
Ableitungen der elementaren Funktionen .....	86
Ableitungsregeln .....	89
Summen- und Faktorregel .....	89
Produktregel .....	89
Quotientenregel .....	90
Kettenregel .....	92
Alles zusammen .....	98
Noch ein letztes Beispiel .....	99
Geometrische Bedeutung von $f'(x)$ , $f''(x)$ und $f'''(x)$ .....	100
$f(x)$ und $f'(x)$ – mal Hochgebirge, mal Sandstrand .....	100
$f''(x)$ – krumme Dinger .....	100
Ganz besondere Punkte .....	103
Hoch-, Tief- und Sattelpunkte .....	103
Wendepunkte .....	106

### Kapitel 4

#### Integrieren – genauso wichtig wie das Differenzieren ..... 109

Unbestimmtes Integral .....	109
Schreibweise mit Schlangenzeichen .....	112
Bestimmtes Integral .....	113
Drei Methoden, mit denen Sie (fast) jedes Integral knacken .....	115
Integration durch Substitution .....	116
Substitution am bestimmten Integral .....	116

Substitution am unbestimmten Integral .....	117
Partielle Integration.....	118
Partielle Integration – die Vorgehensweise .....	119
Integralberechnung mittels Partialbruchzerlegung.....	121
Partialbruchzerlegung – die Vorgehensweise .....	121
Numerisches Integrieren – so macht's der Computer.....	127
Einfachste Näherung: Trapezregel.....	127
Zweiteinfachste Näherung: Keplersche Fassregel .....	129

## Kapitel 5

### Komplexe Zahlen? Ja! Komplexe Sache? Nein!..... 131

Welche Zahlen gibt es? .....	132
Was sind komplexe Zahlen?.....	135
Die drei Darstellungen.....	137
Die kartesische Darstellung mit $x$ und $y$ .....	137
Die Polardarstellung mit $r$ , $\varphi$ , Sinus und Kosinus .....	138
Die exponentielle Darstellung mit $r$ , $\varphi$ und der $e$ -Funktion.....	139
Umrechnung der Darstellungen .....	139
Umrechnung von exponentiell (beziehungsweise polar) in kartesisch .....	140
Umrechnung von kartesisch in exponentiell (bzw. polar).....	140
Rechnen mit komplexen Zahlen.....	141
Die konjugiert komplexe Zahl .....	142
Das Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen .....	143
Das Multiplizieren komplexer Zahlen .....	143
Das Dividieren komplexer Zahlen .....	144
Das Potenzieren komplexer Zahlen mit reellen Potenzen.....	145
Die $n$ Lösungen der Gleichung $z^n = w$ .....	145
Die 2 Lösungen der Mitternachtsformel .....	147

## Kapitel 6

### Nicht nur Angeber sagen Vektoren statt Pfeile ..... 149

Was hat es mit diesen Pfeilen auf sich? .....	150
Vektoren addieren, subtrahieren und mit Zahlen multiplizieren.....	152
Addition von Vektoren.....	152
Subtraktion von Vektoren.....	154
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar .....	156
Der Betrag eines Vektors.....	157
Das Skalarprodukt und das Vektorprodukt.....	159
Das Skalarprodukt .....	159
Das Vektorprodukt.....	162

## Kapitel 7

### Matrizen und nicht Matratzen ..... 167

Grundlegendes zu den Matrizen.....	168
Besondere Matrizen .....	169

**12 Inhaltsverzeichnis**

Rechnen mit Matrizen .....	171
Addieren und Subtrahieren von Matrizen .....	171
Multiplizieren von Matrizen .....	172
Transponieren von Matrizen .....	175
Determinante .....	176
Berechnung einer $(2 \times 2)$ -Determinante .....	176
Berechnung einer $(3 \times 3)$ -Determinante .....	176
Sarrus-Regel .....	177
Berechnung einer $(n \times n)$ -Determinante .....	179
Inverse Matrix .....	182
Lineare Gleichungssysteme .....	184

**Kapitel 8**  
**Eigenwertprobleme sind keine Probleme ..... 189**

Was sind Eigenwertprobleme, wenn es keine Probleme sind? .....	189
Berechnung der Eigenwerte .....	190
Berechnung von Eigenvektoren .....	192
Berechnung reeller Eigenvektoren .....	192
Berechnung komplexer Eigenvektoren .....	195

**TEIL II**  
**WAS, BITTESCHÖN, SIND DIFFERENZIALGLEICHUNGEN? ..... 197**

**Kapitel 9**  
**Was sind Differenzialgleichungen? ..... 199**

Zusammenhang zwischen Ableitungen, Steigungen, Krümmungen, Zu- und Abnahmen sowie Geschwindigkeit und Beschleunigung .....	200
Ort – Geschwindigkeit – Beschleunigung .....	202
Differenzialgleichungen – Anfangswertprobleme – Randwertprobleme .....	209
Unterschied zwischen der allgemeinen Lösung und der Lösung eines Anfangswertproblems .....	211
Differenzialgleichungssysteme .....	212
Gekoppelte Differenzialgleichungen .....	212
Lineare Systeme – Matrizen .....	214

**Kapitel 10**  
**Für jede Differenzialgleichung gibt es eine  
passende Schublade ..... 217**

Differenzialgleichungen klassifizieren .....	217
Gewöhnlich / partiell .....	218
Linearität .....	218
Homogenität .....	219
Ordnung .....	220
Beispiele .....	221
Differenzialgleichungssysteme klassifizieren .....	222

## Kapitel 11

### Verschiedene Lösungsmethoden ..... 225

Ratender Zugang – nicht nur für Glücksspieler.....	226
Grafischer Zugang – nicht nur für Grafikdesigner.....	228
Numerischer Zugang – nicht nur für Numeriker.....	228
Rechnerischer Zugang – nicht nur für Spitzenmathematiker.....	230

## Kapitel 12

### Grafischer Zugang zu Differenzialgleichungen

#### erster Ordnung..... 231

Das Richtungsfeld zeigt, wo's lang geht.....	231
Erstes Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen.....	232
Einmal rückwärts: Von der allgemeinen Lösung zur Differenzialgleichung.....	235
Zweites Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen.....	237
Drittes Beispiel zum Zeichnen, Staunen, Vermuten und Überprüfen.....	239

## TEIL III

### DIFFERENZIALGLEICHUNGEN – RECHNERISCH GELÖST..... 241

## Kapitel 13

### Differenzialgleichungen erster Ordnung

#### (homogen und inhomogen)..... 243

Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	245
Trennung der Variablen für homogene Differenzialgleichungen	
erster Ordnung.....	246
Variation der Konstanten.....	250
Berechnung der allgemeinen Lösung der linearen Differenzialgleichung	
erster Ordnung $y'(x) + g(x) \cdot y(x) = r(x)$ .....	255
Nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	259
Lösen mittels TdV.....	260

## Kapitel 14

### Anfangswertprobleme in Handarbeit und mit

#### Herrn Eulers Verfahren lösen ..... 265

Anfangswertprobleme sind auch keine Probleme.....	266
Erstes Beispiel eines Anfangswertproblems.....	267
Zweites Beispiel eines Anfangswertproblems.....	268
Das Eulerverfahren – unglaublich, schon wieder Herr Euler!.....	269
Anschauliche Beschreibung der Methode.....	269
Die Methode in Formeln.....	270
Beispiel für eine Anwendung des Eulerverfahrens.....	272
Wettkampf: Hand gegen Rechner.....	273
Die exakte Lösung von Hand.....	273
Die Näherungslösung vom Rechner.....	274
Der Vergleich.....	275

## Kapitel 15

<b>Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....</b>	<b>277</b>
Grundlegendes und Wissenswertes.....	278
Stufe 1: Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung .....	280
Charakteristisches Polynom.....	281
Stufe 2: Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung .....	289
Ansatz für $y_p(x)$ .....	289
Bestimmung der Konstanten aus dem Ansatz .....	294
Beispiele – Beispiele – Beispiele .....	297
Erstes Beispiel .....	297
Abschließendes Beispiel der übleren Sorte .....	299

## Kapitel 16

<b>Differenzialgleichungssysteme .....</b>	<b>303</b>
Die Metamorphose: Verwandlung einer Differenzialgleichung in ein Differenzialgleichungssystem .....	304
Beispiel 1 für die sagenhafte Umwandlung.....	304
Beispiel 2 für die sagenhafte Umwandlung.....	305
Lösen von linearen homogenen Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten .....	306
Mit dem richtigen Ansatz zum Ziel finden.....	308
Beispiel zu reellen und verschiedenen Eigenwerten .....	310
Beispiel zu reellen und teilweise gleichen Eigenwerten.....	312
Beispiel zu teilweise konjugiert komplexen Eigenwerten .....	314

## Kapitel 17

<b>Anfangswertprobleme von Differenzialgleichungssystemen von Hand, mit Herrn Euler und MATLAB gelöst.....</b>	<b>319</b>
Anfangswertprobleme von Hand gelöst.....	320
Anfangswertprobleme mit Herrn Eulers Verfahren gelöst.....	324
Anschauliche Beschreibung der Methode .....	324
Die Methode in Formeln.....	324
Beispiel für eine Anwendung des Eulerverfahrens .....	325
Anfangswertprobleme mit MATLAB gelöst.....	327

## TEIL IV

### **DIE GROÖE WEITE WELT DER DIFFERENZIALGLEICHUNGEN.....**

## Kapitel 18

<b>Anwendungen aus der Physik .....</b>	<b>333</b>
Der radioaktive Zerfall.....	334
Herleitung der Differenzialgleichung .....	334
Lösen der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	335

Das Federpendel .....	336
Herleitung der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter	
Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	337
Lösen der homogenen Differenzialgleichung .....	338
Lösen einer inhomogenen Differenzialgleichung.....	339
Der elektrische Schwingkreis .....	341
Herleitung einer inhomogenen Differenzialgleichung.....	342

## Kapitel 19

### Anwendungen aus Biologie, Chemie, Ökonomie

und Alltag .....	345
Biologie: Räuber-Beute-Modell.....	346
Und so hilft MATLAB beim Lösen .....	347
Chemie: Reaktionen 2. Ordnung $A + B \rightarrow D + E$ .....	351
So kommt die Differenzialgleichung zustande .....	351
Und so lösen Sie sie .....	352
Ökonomie: Das Wechselspiel zwischen Zinsen und Konjunktur .....	356
So kommt das Differenzialgleichungssystem zustande.....	356
Und so lösen Sie es.....	357
Alltag: Verbreitung von Gerüchten.....	361
So kommt die Differenzialgleichung zustande .....	361
Und so lösen Sie sie .....	362
Differenzialgleichungen selbst gemacht.....	365

## TEIL V

### DER TOP-TEN-TEIL.....369

## Kapitel 20

### Zehn Dinge, die Sie über Differenzialgleichungen

wissen MÜSSEN .....	371
Nahe Verwandte .....	371
Die Erbanlage .....	371
Tage der Vernunft.....	371
Eulers Großeltern.....	372
Ein besonderer Acker .....	372
Typisch Mathematiker .....	372
Persönlichkeitsstörung .....	372
Exotische Vögel .....	372
Aufgaben der Bäume .....	372
Unerwartete Gemeinsamkeiten.....	372

### Stichwortverzeichnis.....375