

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Statik .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Grundbegriffe.....</b>	<b>1</b>
1.1.1.	Zum Kraftbegriff .....	1
1.1.2	Einteilung der Kräfte, das Schnitt- und das Wechselwirkungsprinzip .....	3
<b>1.2</b>	<b>Kräfte in einem Angriffspunkt .....</b>	<b>6</b>
1.2.1	Zusammensetzen von Kräften .....	6
1.2.2	Zerlegen von Kräften in der Ebene: Komponentendarstellung .....	9
1.2.3	Gleichgewicht von Kräften in einem Angriffspunkt .....	12
1.2.4	Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Haltekraft auf schiefer Ebene .....	14
	Lösung im kartesischen Koordinatensystem .....	14
	Vektorielle Berechnung der Haltekraft.....	15
1.2.5	Zentrale Kräftegruppe im Gleichgewicht: Verkettete Pendelstäbe .....	15
	Lösung im kartesischen Koordinatensystem .....	15
	Stabkräfte vektoriell berechnet.....	17
1.2.6	Zentrale Kräftegruppen im Raum und Vergleich mit zwei Dimensionen.....	18
<b>1.3</b>	<b>Allgemeine Kräftesysteme: Gleichgewicht des starren Körpers .....</b>	<b>20</b>
1.3.1	Moment beliebig verteilter Kräftegruppen in der Ebene.....	20
	Zwei zueinander parallele Kräfte .....	20
	Definition des Momentes einer Kraft .....	23
	Zum Gesamtmoment ebener Kräftesysteme.....	24
	Kräfte an einer Sechseckscheibe .....	24
	Beispiel: Das Moment eines Kräftepaares.....	24
1.3.2	Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräftesysteme in der Ebene .....	26
1.3.3	Gleichgewicht illustriert an einem System von Pendelstäben.....	28
1.3.4	Vektorielle Deutung des Momentes .....	29
	Definition des Momentenvektors .....	29
	Bemerkungen zum Kreuzprodukt von Vektoren.....	30
	Ein Quader unter dem Einfluss äußerer Kräfte .....	33

1.3.5	Allgemeine Kräftegruppen im Raum .....	34
	Zusammenfassung der Gleichgewichtsbedingungen .....	34
	Rahmen im Raum .....	35
<b>1.4.</b>	<b>Der Schwerpunkt</b> .....	<b>37</b>
1.4.1	Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte .....	37
1.4.2	Spezielle Linienkräfte (Streckenlasten): Gleichstrecken- und Dreieckslast .....	39
1.4.3	Massenschwerpunkt eines Volumens .....	40
1.4.4	Zum Flächenschwerpunkt .....	44
	Flächenschwerpunkt eines Dreiecks .....	46
	Flächenschwerpunkt einer Parabel .....	48
	Flächenschwerpunkt eines Halbkreises .....	49
1.4.5	Zum Linienschwerpunkt .....	50
<b>1.5</b>	<b>Lager, Trag- und Fachwerke</b> .....	<b>52</b>
1.5.1	Freiheitsgrade, Lager und ihre technische Realisierung .....	52
	Einwertige Lager .....	52
	Zweiwertige Lager .....	52
	Dreiwertige Lager .....	53
1.5.2	Tragwerke .....	54
1.5.3	Fachwerke .....	55
	Definition des idealen Fachwerks .....	55
	Prinzipielle Berechnung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren .....	57
	Der RITTERSche Schnitt .....	59
<b>1.6</b>	<b>Der biegesteife Träger</b> .....	<b>60</b>
1.6.1	Schnittgrößen – Begriffsbildung .....	60
1.6.2	Zur Berechnung von Schnittgrößen am geraden Balken .....	62
	Gerader Balken unter Einzellasten .....	62
	Balken auf zwei Stützen unter Einzellast (Dreipunktbiegeprobe) .....	65
	Kragträger unter Einzellast und Momentenwirkung .....	67
	Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen .....	68
	Integration der Differentialgleichungen für Querkraft- und Momentenfläche .....	69
	Randbedingungen für die Querkraft- und für die Momentenfläche .....	69

Übergangsbedingungen für die Querkraft- und für die Momentenfläche .....	70
Momentenfläche bei komplizierteren Belastungen .....	72
Ein vergleichendes Beispiel.....	74
1.6.3 Zur Berechnung von Schnittgrößen am Rahmentragwerk .....	78
Der rechtwinklige Rahmen.....	78
Beliebiger geknickter Träger.....	80
Der stetig gekrümmte Träger — Theorie .....	81
Ein Halbkreisbogen .....	83
<b>1.7. Reibungsphänomene.....</b>	<b>84</b>
1.7.1 Gleitreibung und Haftreibung.....	84
1.7.2 Reibung an der schiefen Ebene .....	88
1.7.3 Spezielle Anwendungen des Reibungsphänomens.....	90
Der PRONYsche Zaum (Reibungsbremse) .....	90
Schraube .....	92
Umschlingungsreibung.....	97
Seilbremse .....	98
Reibung am Keil.....	101
<b>2 Festigkeitslehre.....</b>	<b>103</b>
<b>2.1 Einführung; Begriffe .....</b>	<b>103</b>
2.1.1 Aufgabe der Festigkeitslehre .....	103
2.1.2 Beanspruchungsarten.....	104
2.1.3 Begriff der Spannung.....	105
<b>2.2 Zug- und Druckbeanspruchung .....</b>	<b>107</b>
2.2.1 Zug- und Druckspannung in Bauteilen.....	107
2.2.2 Beispiel: Spannungsverteilung in einem konischen Stab .....	109
2.2.3 Beispiel: Stab gleicher Festigkeit .....	110
2.2.4 Die Längenänderung des Zug- oder Druckstabes.....	111
2.2.5 Die Querdehnung des Zug- oder Druckstabes.....	114
2.2.6 Verformung statisch bestimmter Stabsysteme .....	115
2.2.7 Statisch unbestimmte Stabsysteme.....	116
2.2.8 Behinderte Wärmeausdehnung.....	118

<b>2.3</b>	<b>Schubbeanspruchung und HOOKEsches Gesetz.....</b>	<b>119</b>
2.3.1	Spannungen infolge Schublast .....	119
2.3.2	Verformung infolge Schublast .....	119
<b>2.4</b>	<b>Biegebeanspruchung des Balkens .....</b>	<b>120</b>
2.4.1	Biegespannungsformel .....	120
2.4.2	Trägheits- und Widerstandsmomente für einfache Querschnittsformen .....	123
2.4.3	Satz von STEINER .....	125
2.4.4	Die Normalspannungen im Balken infolge Querkraftbiegung .....	128
<b>2.5</b>	<b>Schub infolge Querkraft beim Biegeträger .....</b>	<b>130</b>
2.5.1	Ingenieurformel für die Schubspannungen .....	130
2.5.2	Berechnung der Schubspannungen für spezielle Trägerformen .....	132
2.5.3	Schubspannungen im geschweißten, geklebten und genieteten Träger .....	134
2.5.4	Schubmittelpunkt .....	136
<b>2.6</b>	<b>Die elastische Linie des Biegeträgers (Biegelinie).....</b>	<b>137</b>
2.6.1	Die Differenzialgleichung der Biegelinie .....	137
2.6.2	Beispiel: Der eingespannte Balken .....	140
2.6.3	Beispiel: Träger auf zwei Stützen .....	141
2.6.4	Anwendung auf statisch unbestimmte Systeme .....	143
2.6.5	Ermittlung von Verformungen mit Hilfe des Superpositionsprinzips .....	144
2.6.6	Schiefe Biegung (Begriff der Hauptträgheitsachsen).....	145
<b>2.7</b>	<b>Axiale Verdrehung/Torsion .....</b>	<b>151</b>
2.7.1	Schubspannungen am Kreisquerschnitt .....	151
2.7.2	Polares Trägheitsmoment für Kreisprofile .....	153
2.7.3	Dünnwandige geschlossene Hohlprofile und dünnwandige offene Profile .....	154
2.7.4	Beliebige offene Profile, dickwandige Hohlprofile .....	157
2.7.5	Verformung infolge Torsion, Verdrehwinkel .....	158
	Spezifischer Winkel, Drehfederkonstante .....	160
	Darstellung des Torsionsmomentes ( $M_T$ -Fläche).....	160
<b>2.8</b>	<b>Zusammengesetzte Beanspruchung .....</b>	<b>161</b>
2.8.1	Einführung.....	161

2.8.2	Normalspannungen aus Normalkräften und Biegung .....	162
2.8.3	Schubspannungen aus Querkraft und Torsion.....	164
2.8.4	Begriff des Spannungstensors im ebenen Fall.....	165
2.8.5	Begriff des Spannungstensors im räumlichen Fall.....	169
2.8.6	Der MOHRsche Kreis .....	171
2.8.7	Vergleichsspannungen.....	177
2.8.8	Spannungstensor für den Balken .....	178
<b>2.9</b>	<b>Stabilitätsprobleme .....</b>	<b>184</b>
2.9.1	Einführung.....	184
2.9.2	Ein erstes Stabilitätsproblem .....	185
2.9.3	Zur Phänomenologie von Stabilitätsproblemen .....	186
2.9.4	Die EULERSche Knickgleichung.....	186
2.9.5	Die vier EULERSchen Knicktypen.....	189
<b>3</b>	<b>Dynamik.....</b>	<b>193</b>
<b>3.1</b>	<b>Punktförmige Masse .....</b>	<b>193</b>
3.1.1	Kinematik eines einzelnen Massenpunktes .....	193
	Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Eindimensionalen .....	193
	Beispiele zur eindimensionalen Bewegung.....	196
	Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung im Raum .....	202
	Koordinatensysteme .....	204
3.1.2	Kinetik des Massenpunktes .....	208
	Die NEWTONschen Gesetze .....	208
	Dynamik des freien Massenpunktes .....	209
	Geführte Bewegungen .....	211
	Bewegungen unter dem Einfluss von Reibungskräften.....	215
3.1.3	Der Impulssatz.....	218
3.1.4	Energiesatz der Mechanik .....	221
3.1.5	Drehimpuls und Momentensatz.....	226
<b>3.2</b>	<b>Die Dynamik von Massenpunktsystemen .....</b>	<b>226</b>
3.2.1	Kinematik .....	226
3.2.2	Kinetik .....	228

3.2.3	Impuls- und Schwerpunktsatz für Massenpunktsysteme .....	230
3.2.4	Drehimpulssatz für Massenpunktsysteme .....	231
3.2.5	Der Energie- und Arbeitssatz für Massenpunktsysteme .....	235
3.2.6	Eine Anwendung des Impuls- und des Energiesatzes: zentrische Stöße zwischen kugelförmigen Massen .....	236
3.2.7	Körper mit zeitveränderlicher Masse .....	239
<b>3.3</b>	<b>Die Dynamik des starren Körpers .....</b>	<b>242</b>
3.3.1	Starrkörperkinematik.....	242
	Freiheitsgrade des starren Körpers.....	242
	Translation des starren Körpers.....	243
	Rotation des starren Körpers um eine feste Achse.....	244
	Allgemeine Bewegung des starren Körpers in der Ebene.....	246
	Zwei Beispiele zur Kinematik des starren Körpers.....	249
	Der Momentanpol .....	252
3.3.2	Starrkörperkinetik.....	253
	Einleitende Bemerkungen .....	253
	Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse.....	253
	Ein Beispiel zur Aufstellung der Bewegungsgleichung von um eine feste Achse rotierenden Körpern .....	257
	Energie- und Arbeitssatz bei Rotation um eine feste Achse .....	258
	Weitere Beispiele zur Bewegung starrer Körper: Reibungsbremse und Walze .....	259
	Analogie zwischen der geradlinigen Bewegung eines Massenpunktes und der Starrkörperrotation um eine feste Achse .....	262
	Kinetik von ebenen starren Körpern (Scheiben).....	263
	Beispiel I zur Starrkörperbewegung von Scheiben .....	265
	Beispiel II zur Starrkörperbewegung von Scheiben: Die ATWOODSche Fallmaschine .....	268
	Beispiel III zur Starrkörperbewegung von Scheiben: Das Jojo .....	269
	Beispiel IV zur Starrkörperbewegung von Scheiben .....	269
	Impuls-, Arbeits- und Energiesatz bei der Bewegung starrer Körper in der Ebene .....	272
	Ein Beispiel zum Energiesatz ebener starrer Körper .....	274

<b>3.4</b>	<b>Schwingungen</b> .....	<b>276</b>
3.4.1	Grundbegriffe der Schwingungslehre.....	276
3.4.2	Freie, ungedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad .....	279
	Bewegungsgleichungen und ihre Lösung.....	279
	Alternativen und ergänzende Betrachtungen mit Hilfe des Energiesatzes .....	281
	Beispiele für die freie ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad .....	283
	Federkonstanten.....	284
3.4.3	Freie, gedämpfte Schwingungen mit einem Freiheitsgrad .....	288
	COULOMBreibung.....	288
	Geschwindigkeitsproportionale Reibung: Der lineare Dämpfer (Dashpot).....	289
	Ein komplizierteres Beispiel für eine Schwingung mit Dämpfung .....	294
3.4.4	Angefachte Schwingungen .....	295
	Angefachte Schwingungen ohne Dämpfung .....	295
	Angefachte Schwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung .....	298
3.4.5	Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden.....	302
	Motivation und Erinnerung .....	302
	Bewegungsgleichung der freien, ungedämpften Schwingung mit zwei Freiheitsgraden .....	303
	Erzwungene Schwingung mit zwei Freiheitsgraden .....	308
<b>4</b>	<b>Kontinuumsmechanik</b> .....	<b>311</b>
<b>4.1</b>	<b>Bilanzgleichungen der Masse</b> .....	<b>311</b>
4.1.1	Bilanzgleichung der Masse in globaler Form.....	311
4.1.2	Massendichte und Umschreibung der globalen Massenbilanz.....	312
4.1.3	LEIBNIZsche Regel zur Differentiation von Parameterintegralen und REYNOLDSSches Transporttheorem .....	314
4.1.4	Lokale Massenbilanz in regulären Punkten.....	318
4.1.5	Alternativschreibweisen der Massenbilanz in regulären Punkten; Endziel des Mechanikers .....	320
<b>4.2</b>	<b>Bilanzgleichungen des Impulses</b> .....	<b>322</b>
4.2.1	Bilanzgleichung des Impulses in globaler Form .....	322

4.2.2	Das CAUCHYSche Tetraederargument .....	325
4.2.3	Bilanzgleichung des Impulses in lokaler Form .....	326
4.2.4	Eine Bemerkung zum REYNOLDSSchen Transporttheorem .....	328
<b>4.3</b>	<b>Einfache Materialgleichungen .....</b>	<b>330</b>
4.3.1	Das reibungsfreie Fluid .....	330
4.3.2	Das NAVIER-STOKES-Fluid .....	331
4.3.3	Der linear-elastische HOOKESche Körper .....	331
<b>4.4</b>	<b>Bilanzgleichungen des Drehimpulses .....</b>	<b>336</b>
4.4.1	Die lokale Bilanz des Drehimpulses .....	336
4.4.2	Die globale Bilanz des Drehimpulses .....	338
<b>4.5</b>	<b>Einführung in die lineare Elastizitätstheorie .....</b>	<b>339</b>
4.5.1	Der eindimensionale Zugstab neu gesehen .....	339
4.5.2	Die LAMÉ-NAVIERSchen Gleichungen .....	341
4.5.3	Der axial schwingende Zugstab .....	346
4.5.4	Die Schwingungsgleichung der Geigensaiten .....	348
4.5.5	Die Schwingungsgleichung einer Membran .....	352
4.5.6	Der transversal schwingende Balken .....	354
4.5.7	Lösungsmethoden I: Das Verfahren von D'ALEMBERT .....	355
4.5.8	Die Frage der Randbedingungen .....	360
4.5.9	Lösungsmethoden II: Das Verfahren von BERNOULLI .....	362
4.5.10	Zur Äquivalenz der Lösungsverfahren nach D'ALEMBERT und BERNOULLI .....	369
<b>4.6</b>	<b>Einführung in die Hydromechanik .....</b>	<b>372</b>
4.6.1	Massenbilanz bei der Rohrströmung .....	372
4.6.2	Der hydrostatische Druck .....	375
4.6.3	Die BERNOULLISCHE Gleichung .....	376
4.6.4	Der Auftrieb nach ARCHIMEDES .....	378
<b>5</b>	<b>Energiemethoden .....</b>	<b>381</b>
<b>5.1</b>	<b>Energiebilanzen .....</b>	<b>381</b>
5.1.1	Lokale und globale Bilanz der kinetischen Energie .....	381
5.1.2	Zum Begriff der inneren Energie .....	383
5.1.3	Gesamtbilanz der Energie oder Energieerhaltungssatz .....	383



5.1.4	Bilanz der inneren Energie .....	386
5.1.5	Energiebilanz bei der Rohrströmung.....	388
<b>5.2</b>	<b>Entropiebilanz und zweiter Hauptsatz .....</b>	<b>389</b>
5.2.1	Globale und lokale Entropiebilanz .....	389
5.2.2	Die GIBBSsche Gleichung.....	391
5.2.3	Eine Anwendung der GIBBSschen Gleichung: Gummielastizität vs. HOOKESches Gesetz .....	393
<b>5.3</b>	<b>Die Sätze von Castigliano, Betti und Maxwell.....</b>	<b>400</b>
5.3.1	Potenzialcharakter von Formänderungsenergie, komplementärer Formänderungsenergie, freier Energie und freier Enthalpie .....	400
5.3.2	Die Formänderungsenergiegedichte linear-elastischer Körper .....	404
5.3.3	Komplementäre Formänderungsenergiegedichte linear-elastischer Körper.....	407
5.3.4	Formänderungsenergiegedichte für Balken.....	408
5.3.5	Formänderungsenergie in der Elastostatik .....	410
5.3.6	Die Sätze von MAXWELL und BETTI .....	411
5.3.7	Anwendung der Sätze von BETTI und MAXWELL auf statisch bestimmte und unbestimmte Systeme .....	415
5.3.8	Die Sätze von CASTIGLIANO für diskret belastete Systeme.....	418
5.3.9	Eine Anwendung der Sätze von CASTIGLIANO auf ein statisch bestimmtes System .....	420
<b>5.4</b>	<b>Energiefunktionale und ihre Extrema .....</b>	<b>421</b>
5.4.1	Eine erste Motivation zur Minimierung von Energieausdrücken.....	421
5.4.2	Hinführung zur Variationsrechnung.....	423
5.4.3	Die EULERSche Variationsgleichung .....	425
<b>5.5</b>	<b>Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV) .....</b>	<b>429</b>
5.5.1	Das PdvV in der elementaren technischen Mechanik .....	429
5.5.2	Das PdvV in der höheren technischen Mechanik.....	431
5.5.3	Das PdvV vom Standpunkt der Variationsrechnung.....	434
5.5.4	Das PdvV – Statik starrer Systeme.....	436
5.5.5	Beispiele zum PdvV in der Statik starrer Systeme.....	437
	Berechnung von Kräften und Momenten .....	437
	Berechnung von stabilen Lagen .....	440
	Das Prinzip von TORRICELLI .....	441

Der GERBERträger .....	441
5.5.6 Das PdvV – Statik deformierbarer Systeme.....	442
5.5.7 Ein Beispiel zum PdvV in der Statik deformierbarer Systeme .....	443
5.5.8 PdvV – Allgemeine Belastungsfälle für HOOKESche Balken.....	446
5.5.9 PdvV – Die Näherungsmethoden nach RITZ und GALERKIN.....	450
<b>5.6 Das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK) .....</b>	<b>454</b>
5.6.1 Formulierung des PdvK im Rahmen der elementaren und höheren technischen Mechanik .....	454
5.6.2 Das PdvK vom Standpunkt der Variationsrechnung.....	457
5.6.3 Beispiele zum PdvK .....	459
Verschiebungen in einem statisch bestimmten System.....	459
Lagerreaktionen in einem statisch unbestimmten System .....	460
5.6.4 Eine rezeptmäßige Auswertung des PdvK: das 1-Kraft-Konzept.....	462
<b>5.7 Dynamische Energieprinzip.....</b>	<b>466</b>
5.7.1 Das D’ALEMBERTSche Prinzip in LAGRANGEScher Fassung .....	466
5.7.2 Ableitung der Bewegungsgleichung des starren Körpers mit Hilfe des D’ALEMBERTSchen Prinzips in LAGRANGEScher Fassung .....	468
5.7.3 Ein Beispiel zum D’ALEMBERTSchen Prinzip in LAGRANGEScher Fassung.....	476
5.7.4 Das HAMILTONSche Prinzip und die LAGRANGEFunktion .....	478
5.7.5 Generalisierte Koordinaten .....	480
5.7.6 Die EULER-LAGRANGESchen-Bewegungsgleichungen .....	481
5.7.7 Beispiel I zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Geführte Punktmasse.....	483
5.7.8 Beispiel II zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Massenpunktsystem mit zwei generalisierten Koordinaten .....	484
5.7.9 Beispiel III zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Mehrere Punktmassen im Verbund .....	486
5.7.10 Beispiel IV zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Punktmassen und starrer Körper im Verbund.....	488
5.7.11 Beispiel V zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Konservative Starrkörperbewegung .....	489
5.7.12 Beispiel VI zu den EULER-LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen: Ein nicht konservatives System.....	491
5.7.13 Die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art .....	492
5.7.14 Beispiel I zu den LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art.....	494

---

5.7.15 Beispiel II zu den LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art.....	498
5.7.16 Klassifizierung kinematischer Bedingungen .....	499
5.7.17 Beispiele zu holonom rheonomen Nebenbedingungen.....	502
5.7.18 Die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen.....	504
5.7.19 Beispiel I zu den HAMILTONSchen Gleichungen: Wurf im Schwerefeld der Erde.....	508
5.7.20 Beispiel II zu den HAMILTONSchen Gleichungen: Der 1-D-Massenschwinger .....	510
<b>Stichwort- und Namensregister .....</b>	<b>511</b>