Über die Splitting-Eigenschaft der Approximationszahlen von Matrix-Folgen: l^1-Theorie

D I P L O M A R B E I T

Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

eingereicht von Markus Seidel

geboren am 27. April 1981 in Zwickau

Betreuer: Herr Prof. Dr. Bernd Silbermann

Chemnitz, den 16. Januar 2006

Kurzfassung

Bei der Anwendung von Diskretisierungsverfahren auf operatortheoretische Probleme entstehen im Allgemeinen Folgen von Operatoren auf jeweils endlichdimensionalen Räumen. Als Beispiel sei hier die finite-section-Methode für Toeplitzoperatoren auf den Räumen l^p genannt. In dieser Arbeit wird das asymptotische Verhalten der Approximationszahlen für Operatorfolgen aus einer speziellen Klasse von Folgenalgebren untersucht. Es werden hier bemerkenswerte Eigenschaften der Approximationszahlen solcher Folgen gezeigt, unter ihnen die sogenannte k-splitting-Eigenschaft. Diese abstrakten Ergebnisse kommen anschließend bei den finite sections von (matrixwertigen) Toeplitzoperatoren über den Räumen l^p_N, $1 \leq p \leq \infty$ mit zulässigen stetigen Erzeugerfunktionen zur Anwendung. Die Räume l^1_N und l^∞_N sind nicht reflexiv, und deshalb mit vergleichsweise größeren Schwierigkeiten behaftet. Die bislang bekannten Ergebnisse bezüglich der Approximationszahlen werden hier erstmals auf diese Fälle übertragen.

Schlüsselwörter

Approximationszahlen, Operatorfolgen, k-splitting-Eigenschaft, Toeplitzoperatoren.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Es seien $\mathbf{E}$ ein Banachraum, $\{\mathbf{E}_n\}$ eine Folge endlichdimensionaler Teilräume von $\mathbf{E}$ und $\{L_n\}$ eine Folge surjektiver Projektoren $L_n : \mathbf{E} \to \mathbf{E}_n$, die stark gegen den identischen Operator $I \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ konvergiert. Die Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $\{A_n\}$ von linearen Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$, für die gilt

$$\|\{A_n\}\|_{\mathcal{F}} := \sup_n \|A_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} < \infty,$$

wird, versehen mit dieser Norm und den gliedweise definierten Operationen

$$\alpha\{A_n\} + \beta\{B_n\} := \{\alpha A_n + \beta B_n\}, \{A_n\}\{B_n\} := \{A_n B_n\},$$

zu einer Banachalgebra.

In der vorliegenden Arbeit soll das Verhalten der Approximationszahlen $s_k(A_n)$ (deren Definition findet man in Abschnitt 2.3) der Operatoren A_n für Folgen $\{A_n\}$ aus gewissen Teilalgebren von $\mathcal{F}$ untersucht werden. Im Vordergrund steht dabei die sogenannte k-splitting-Eigenschaft. Man sagt, die Approximationszahlen einer Folge $\{A_n\}$ haben die k-splitting-Eigenschaft, wenn es eine ganze Zahl $k \geq 0$ gibt, so dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_k(A_n) = 0 \text{ und } \liminf_{n\to\infty} s_{k+1}(A_n) > 0.$$

Aufgabe und Teil dieser Arbeit ist dabei in besonderer Weise, den Fall der finite sections von Toeplitzoperatoren über den Räumen l^1 und l^∞ zu behandeln.

Die Grundlage für die Ergebnisse in den folgenden Kapiteln ist eine Arbeit von A. Rogozhin und B. Silbermann (vgl. [9]) zu diesem Thema. Einige Resultate und Beweise wurden weitgehend übernommen und gegebenenfalls angepasst, andere wurden wesentlich verallgemeinert oder basieren auf neuen Ideen.

Ist $\mathbf{E}$ ein Hilbertraum und die L_n sind orthogonale Projektoren, dann ist auf $\mathcal{F}$ durch $\{A_n\}^* := \{A_n^*\}$ eine Involution erklärt und $\mathcal{F}$ wird zu einer C^*-Algebra. In diesem Fall sind die Approximationszahlen der Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$ gerade die Singulärwerte der A_n, d.h. die Eigenwerte von $(A_n^* A_n)^{1/2}$. Erste Ergebnisse über die k-splitting-Eigenschaft gehen auf Roch und Silbermann [7], [8] zurück, und sind z.B. für den Toeplitzfall von folgender Gestalt: Ist $a \in PC$ und $T(a) \in \mathcal{L}(l^2)$ Fredholmoperator mit Index k, dann besitzen die Singulärwerte (und damit die Approximationszahlen) der Operatoren $T_n(a)$ die $|k|$-splitting-Eigenschaft. In [3] wurden sie in allgemeiner Form wie folgt dargestellt:

Eine C^*-Teilalgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ wird Standardalgebra genannt, wenn sie folgenden Axiomen genügt:

1. Es gibt eine Menge T und für jedes $t \in T$ einen Hilbertraum H^t und eine Folge (E_n^t) von Homomorphismen $E_n^t : H^t \to H$ mit $E_n^t(E_n^t)^* E_n^t = E_n^t$, so dass gilt
   - $(E_n^t)^* E_n^t$ konvergiert stark gegen $I^t \in \mathcal{L}(H^t)$,
   - $E_n^t(E_n^t)^*$ stimmt mit P_n überein, und
   - es ist die folgende Separationsbedingung erfüllt:
   $$(E_n^s)^* E_n^t \rightharpoonup_n 0 \text{ schwach, für alle } s \neq t.$$
2. Für jedes $t \in T$ und jede Folge $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ existieren die starken Grenzwerte
   $$W^t\{A_n\} := \text{s-lim}(E_n^t)^* A_n E_n^t.$$
3. $\mathcal{A}$ enthält die Eins $\{L_n\}$. Darüber hinaus enthält $\mathcal{A}$ alle Folgen $\{E_n^t K (E_n^t)^*\}$ mit $K \in \mathcal{K}(H^t)$, sowie alle Folgen aus dem Ideal $\mathcal{G}$. Die Abschließung der linearen Hülle aller dieser Folgen bildet ein abgeschlossenes Ideal $\mathcal{J}$ von $\mathcal{A}$.
4. Eine Folge $\{A_n\}$ ist stabil, genau dann, wenn alle zugehörigen Operatoren $W^t\{A_n\}$ invertierbar sind auf H^t.

Das Hauptresultat zu dieser Klasse von Algebren ist wie folgt: Zu jeder Standardalgebra $\mathcal{A}$ lässt sich ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal $\mathcal{J}^T := \mathcal{J}^T(\mathcal{A})$ konstruieren, so dass das folgende Theorem gilt:

Theorem 1. *(vgl. [3]). Sei $\{A_n\}$ Folge aus einer Standardalgebra $\mathcal{A}$.*

- *Wenn die Restklasse $\{A_n\} + \mathcal{J}^T$ invertierbar ist in der Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}^T$, dann sind alle Operatoren $W^t\{A_n\}$ Fredholmsch auf H^t, die Anzahl der nichtinvertierbaren Operatoren unter diesen ist endlich, und die Singulärwerte der Folge $\{A_n\}$ besitzen die k-splitting-Eigenschaft mit*
  $$k = \sum_{t \in T} \dim \ker W^t\{A_n\}.$$
- *Ist $W^t\{A_n\}$ nicht Fredholmsch für ein $t \in T$, dann gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$:*
  $$s_l(A_n) \to_n 0.$$

Dieser Zugang erlaubte es im Übrigen, auch Blocktoeplitzoperatoren zu behandeln.

Böttcher [1] gelang es, davon inspiriert, unter Verwendung anderer Methoden den Fall skalarwertiger Toeplitzoperatoren sogar auf den Räumen l^p $(1 < p < \infty)$ zu betrachten, mit vergleichbaren Resultaten. Die dabei verwendeten Beweisideen waren jedoch schwer übertragbar z.B. auf matrixwertige Toeplitzoperatoren.

Eine Verallgemeinerung der Ergebnisse zu Standardalgebren auf den Fall, wo **E** nun tatsächlich ein Banachraum ist, ist bei Rogozhin und Silbermann [9] zu finden.

In Analogie zur Definition der Standardalgebren wird auch in dieser Arbeit [9] eine Familie $\{W^t\}$ von Homomorphismen

$$W^t\{A_n\} = \text{s-lim}(E_n^t)^{-1} A_n E_n^t$$

eingeführt, wobei die E_n^t invertierbare Homomorphismen zwischen $\mathbf{E}_n$ und Teilräumen gewisser Banachräume $\mathbf{E}^t$ sind und die Bedingung $\sup_n \|E_n^t\|\|(E_n^t)^{-1}\| < \infty$ erfüllen. Die Separationsbedingung ist von folgender Gestalt:

$$\frac{1}{\|(E_n^s)^{-1}\|\|E_n^t\|}(E_n^s)^{-1}E_n^t \rightharpoonup_n 0 \text{ schwach, für alle } s \neq t.$$

Bemerkenswert ist, dass hier nun auch Abschätzungen für die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximationszahlen gezeigt werden. Diese Theorie ist insbesondere anwendbar auf die finite sections gewisser Klassen von Toeplitzoperatoren über l^p_N mit $1 < p < \infty$, jedoch leider nicht auf die Fälle $p \in \{1, \infty\}$.

Dies war Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit. Im Vergleich zu [9] gibt es hier im Wesentlichen zwei Verallgemeinerungen:

- Zum Ersten werden hier invertierbare Homomorphismen E_n^t behandelt, die direkt zwischen $\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$ (der Algebra der linearen Operatoren auf $\mathbf{E}_n$) und der Algebra der linearen Operatoren auf Teilräumen der $\mathbf{E}^t$ vermitteln (die Homomorphismen der Gestalt $A_n \mapsto (E_n^t)^{-1}A_nE_n^t$ sind davon Sonderfälle). Diese Verallgemeinerung ist vorrangig ästhetischer Natur und folgendermaßen begründet: in [9] und auch hier passiert, grob gesagt, folgendes: Es werden Operatorfolgen und deren Eigenschaften untersucht, und zwar dadurch, dass die Folgen modifiziert, bzw. transformiert werden, in Folgen, die schon stark konvergieren, so dass schließlich aus den Eigenschaften der Limitoperatoren Aussagen gewonnen werden können.

  Diese Transformationen sind in [9] von der Gestalt $A_n \mapsto (E_n^t)^{-1}A_nE_n^t$, also eher Transformationen der Räume, auf denen die Operatoren der Folge agieren. In der vorliegenden Arbeit werden tatsächlich die Operatoren der Folge transformiert. Diese Betrachtungsweise ist also gewissermaßen natürlicher. Weiterhin führt dieser neue, etwas allgemeinere Ansatz zu einer neuen Beweisidee, nämlich dem Konzept der Projektorensysteme, das die bestehenden Zusammenhänge zwischen den Operatorfolgen und den Limitoperatoren sehr anschaulich verdeutlicht. Es sei hier aber noch vermerkt, dass zum gegenwärtigen Zeitpunkt keine konkrete Anwendung diese Erweiterung erforderlich macht.

- Der Grund dafür, dass [9] den Fall der Toeplitzoperatoren auf l^1 nicht abdeckt, ist der, dass dort die bereits erwähnte Separationsbedingung, genauer die geforderte schwache Konvergenz, nicht mehr gegeben ist. Deshalb wird diese Bedingung in der vorliegenden Arbeit entsprechend abgeschwächt, so dass noch vergleichbare Resultate gezeigt werden können, aber nun schon keine solche schwache Konvergenz mehr gegeben sein muss, und Problemklassen, wie der Toeplitz-l^1-Fall, behandelt werden können.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Einige grundlegende Resultate der Funktionalanalysis und Operatortheorie sind im Kapitel 1 zusammengetragen. Darüber hinaus sind hier einfache Resultate zur Basiswahl und zu Projektoren für endlichdimensionale Räume zu finden.

Im Kapitel 2 wird eine allgemeine Theorie über gewisse Klassen von Folgenalgebren, über eine Fredholmeigenschaft von Operatorfolgen und über die zugehörigen Approximationszahlen dargelegt. Dort wird zunächst eine Klasse von Teilalgebren $\mathcal{F}^T$ der Algebra $\mathcal{F}$ sowie eine Familie $\{W^t\}$ von Homomorphismen von $\mathcal{F}^T$ in Algebren beschränkter linearer Operatoren auf Banachräumen $\mathbf{E}^t$ eingeführt. Diese Homomorphismen gestatten es, anschaulich gesprochen, die Folgen $\{A_n\}$ aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten. Anschließend wird untersucht, wie sich einige Eigenschaften der Operatoren $W^t\{A_n\}$ mit Hilfe gewisser Projektoren auf die Folgen $\{A_n\}$ aus der Algebra $\mathcal{F}^T$ transportieren lassen. Dies führt zu ersten Resultaten über den Zusammenhang zwischen den Approximationszahlen der $\{A_n\}$ und den Operatoren $W^t\{A_n\}$. Weiterhin wird, wie auch schon in [9], Abschnitt 5, eine Klasse von Fredholmfolgen eingeführt, hier allerdings in einer etwas allgemeineren Form. Auch in diesem Kontext lässt sich die k-splitting-Eigenschaft für die Approximationszahlen einer Fredholmfolge zeigen, und diese ist auch hier durch die Fredholmeigenschaften der Limitoperatoren $W^t\{A_n\}$ beschrieben.

Im Kapitel 3 findet diese allgemeine Theorie Anwendung zur Beschreibung der k-splitting-Eigenschaft bei finite sections von (matrixwertigen) Toeplitzoperatoren auf l^p_N mit Symbolen aus $(C_p + \overline{H^\infty_p})_{N\times N}$, wobei hier nicht nur die Fälle $1 < p < \infty$ wie in [9], Abschnitt 8 behandelt werden können, sondern auch auch die Fälle $p \in \{1, \infty\}$ (hier stimmt dann $(C_p + \overline{H^\infty_p})_{N\times N}$ mit $W_{N\times N}$ überein).

1 Grundlagen

1.1 Begriffe, Definitionen und Resultate

In diesem ersten Abschnitt sind wichtige Begriffe und Sätze zusammengestellt, die in der vorliegenden Arbeit Verwendung finden werden. Diese Resultate sind wohlbekannt und in nahezu jedem Lehrbuch zur Funktionalanalysis samt Beweis zu finden. Sie werden aber dennoch hier aufgeführt, um dem Leser die Arbeit mit den nachfolgenden Kapiteln zu erleichtern.

Sei $\mathbf{X}$ Banachraum. Ein abgeschlossener Teilraum $X_1 \subset \mathbf{X}$ heißt komplementierbar, wenn ein anderer abgeschlossener Teilraum $X_2 \subset \mathbf{X}$ existiert, so dass $\mathbf{X} = X_1 \dot{+} X_2$. X_2 heißt dann Komplement von X_1.

Ein linearer Operator $P : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ heißt Projektor, wenn $P^2 = P$.

Lemma 1.1.1. *Sei $\boldsymbol{X}$ Banachraum und $X_1 \subset \boldsymbol{X}$ abgeschlossener Teilraum.*

1. *Wenn $\dim X_1 < \infty$, dann ist X_1 komplementierbar.*
2. *Wenn $\dim(\boldsymbol{X}/X_1) < \infty$, dann ist X_1 komplementierbar.*
3. *Wenn X_1 komplementierbar ist und X_2 ein Komplement, dann sind die zugehörigen Projektoren $P_1 : \boldsymbol{X} \to X_1,\ P_2 : \boldsymbol{X} \to X_2,\ P_1 + P_2 = I$ beschränkt.*

Seien $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ Banachräume. $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezeichne entsprechend die Banachalgebra der beschränkten Operatoren und $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ das Ideal der kompakten Operatoren. Für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ seien der Kern und das Bild von A definiert durch

$$\begin{aligned} \ker A &:= \{x \in \mathbf{X} : Ax = 0\}, \\ \operatorname{im} A &:= A(\mathbf{X}) = \{Ax : x \in \mathbf{X}\}. \end{aligned}$$

Ist $\operatorname{im} A$ abgeschlossen, so sei noch $\operatorname{coker} A := \mathbf{Y}/\operatorname{im} A$, der sogenannte Kokern. Wenn $\operatorname{im} A$ abgeschlossen ist, dann nennt man A auch normal auflösbar.

Lemma 1.1.2. *Wenn $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ normal auflösbar ist und $\dim \ker A = \infty$, dann gilt dies auch für $A + K$ für alle $K \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.*

Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ heißt Fredholmoperator , falls

$$A \text{ normal auflösbar ist, } \dim \ker A < \infty, \text{ und } \dim \operatorname{coker} A < \infty.$$

Ist A Fredholmoperator, so wird der Index von A definiert durch

$$\operatorname{ind} A := \dim \ker A - \dim \operatorname{coker} A.$$

Lemma 1.1.3. *Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ Banachräume und $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.*
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. *A ist Fredholmsch.*
2. *Es gibt Operatoren $R, L \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, so dass $AR - I_{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{Y})$ und $LA - I_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})$.*
3. *Es gibt einen Operator $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$, so dass $AB - I_{\boldsymbol{Y}} \in \mathcal{K}_0(\boldsymbol{Y})$, $BA - I_{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{K}_0(\boldsymbol{X})$ ($\mathcal{K}_0$ bezeichne hier jeweils die Menge der Operatoren mit endlichem Rang).*

Ist eine diese Bedingungen erfüllt, so gilt:

- *Für alle $K \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ist $A + K$ Fredholmsch und $\operatorname{ind} A + K = \operatorname{ind} A$.*
- *Die Menge der Fredholmoperatoren ist offen und die Abbildung ind ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente dieser Menge. Insbesondere gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass alle $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ mit $\|A - B\| < \epsilon$ Fredholmoperatoren sind, und $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} B$ gilt.*
- *(Atkinson's Theorem). Sei $\boldsymbol{Z}$ ein Banachraum und $B \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ Fredholmsch. Dann ist $BA \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$ Fredholmsch und $\operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A$.*

Die Menge $\mathbf{X}^* := \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ der stetigen linearen Funktionale auf $\mathbf{X}$ bildet mit den üblichen Operationen ebenfalls einen Banachraum, den dualen Raum. Der adjungierte Operator $A^* : \mathbf{Y}^* \to \mathbf{X}^*$ zu $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist definiert durch $A^* f = f \circ A$.

Theorem 1.1.1. *Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ Banachräume und $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.*

1. *Die Abbildung $A \mapsto A^*$ ist lineare Isometrie, insbesondere gilt $A^* \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$ und $\|A^*\| = \|A\|$.*
2. *$K \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ ist genau dann kompakt, wenn $K^* \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}^*, \boldsymbol{X}^*)$ kompakt ist.*
3. *$\operatorname{im} A$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{im} A^*$ abgeschlossen ist.*
4. *Ist $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ und $\operatorname{im} A$ abgeschlossen, dann gilt*
   - $\dim \ker A = \dim \operatorname{coker} A^*$
   - $\dim \operatorname{coker} A = \dim \ker A^*$,

   wobei auch ∞ zulässig ist.

Beweis. Der Beweis der letzten Behauptung basiert auf folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\ker A =& \{x \in \mathbf{X} : Ax = 0\} = \{x \in \mathbf{X} : f(Ax) = 0 \;\forall f \in \mathbf{X}^*\} \\ =& \{x \in \mathbf{X} : (A^* f)x = 0 \;\forall f \in \mathbf{X}^*\} = \{x \in \mathbf{X} : \hat{f}x = 0 \;\forall \hat{f} \in \operatorname{im} A^*\} \text{ und} \\ \ker A^* =& \{f \in \mathbf{X}^* : A^* f = 0\} = \{f \in \mathbf{X}^* : f(Ax) = 0 \;\forall x \in \mathbf{X}\} \\ =& \{f \in \mathbf{X}^* : f(\hat{x}) = 0 \;\forall \hat{x} \in \operatorname{im} A\}.\end{aligned}$$

□

Die Behauptungen 3 und 4 zeigen außerdem, dass A genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn A^* Fredholmoperator ist.

Man sagt, eine Folge $\{A_n\}$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ konvergiert gegen einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

1. *schwach*, wenn $f(A_n x) - f(Ax) \to 0$ für jedes $x \in \mathbf{X}$ und jedes $f \in \mathbf{Y}^*$,

2. *stark*, wenn $\|A_n x - Ax\|_{\mathbf{Y}} \to 0$ für jedes $x \in \mathbf{X}$ (schreiben dann auch s-lim),

3. *gleichmäßig*, wenn $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \to 0$.

Theorem 1.1.2. *(Banach-Steinhaus).*
Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ Banachräume und $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ Folge linearer Operatoren. Ist $\{A_n x\}$ für jedes $x \in \boldsymbol{X}$ konvergente Folge in $\boldsymbol{Y}$, dann gilt $\sup_n \|A_n\| < \infty$, der Operator A, der durch $Ax := \lim_n A_n x$ definiert ist, gehört zu $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ und $\|A\| \leq \liminf_n \|A_n\|$.

Theorem 1.1.3. *(Banach).*
Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ Banachräume und $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ bijektiv. Dann ist der inverse Operator A^{-1} stetig, d.h. $A^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$.

Theorem 1.1.4. *(wichtige Folgerung des Hahn-Banach-Theorems).*
Seien $\boldsymbol{Y}$ normierter Vektorraum, $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ ein Teilraum und f stetiges lineares Funktional auf $\boldsymbol{X}$. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional F auf $\boldsymbol{Y}$ mit

$$F|_{\mathbf{X}} = f \text{ und } \|F\| = \|f\|.$$

Lemma 1.1.4. *(Neumann).*
Sei $\boldsymbol{X}$ Banachraum und $A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$ mit $\|A\| < 1$. Dann ist $I - A$ invertierbar und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Insbesondere gilt für die Norm der Inversen die Abschätzung

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass starke Konvergenz auf kompakten Mengen gleichmäßig ist, und wird in dieser Arbeit an vielen Stellen eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 1.1.5. *Seien $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ Banachräume.*
Wenn $A, A_n \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$, $B^*, B_n^* \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X}_4^*, \boldsymbol{X}_3^*)$, $K \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3)$, und $A_n \to_n A$ stark, sowie $B_n^* \to B^*$ stark, dann gilt $\|A_n K B_n - AKB\| \to_n 0$.

1.2 Basen und Projektoren

Wir zeigen in diesem Abschnitt einige einfache und nützliche Resultate über die Wahl von Basen in Teilräumen von Banachräumen. Aus Lemma 1.1.1 ist bereits bekannt, dass stets beschränkte Projektoren auf endlichdimensionale Teilräume existieren. Hier sollen nun auch konkrete Schranken für solche Projektoren angegeben werden.

Lemma 1.2.1. *(Auerbach's Lemma)*
Sei $\boldsymbol{X}$ ein m-dimensionaler normierter Raum. Dann gibt es eine Basis $\{x_i\}_{i=1}^m$ von $\boldsymbol{X}$ und Funktionale $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \boldsymbol{X}^*$, so dass

$$\|x_i\| = 1, \ \|f_i\| = 1 \text{ für alle } i, \text{ und } f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Beweis. (Dieser Beweis ist aus [4], B.4.8.).
Sei $\{z_j\}_{j=1}^m$ Basis von $\mathbf{X}$. Definieren

$$d(g_1, ..., g_n) := |\det(g_i(z_j))| \text{ für alle } g_i \in \mathbf{X}^* \text{ mit } \|g_i\| \leq 1.$$

Da d offenbar stetig ist, gibt es Funktionale f_i, $\|f_i\| \leq 1$, $i = 1, ..., m$, so dass

$$d(f_1, ..., f_n) = \max_{g_i \in \mathbf{X}^*, \|g_i\| \leq 1} d(g_1, ..., g_n) > 0.$$

Wir können nun $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{X}$ derart wählen, dass

$$\sum_{i=1}^m f_i(z_j) x_i = z_j \text{ für } j = 1, ..., m. \tag{1.1}$$

Erhalten so für alle i, j

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wegen (1.1) gilt für beliebige $\{g_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{X}^*$ mit $\|g_k\| \leq 1$

$$\sum_{i=1}^m f_i(z_j) g_k(x_i) = g_k\left(\sum_{i=1}^m f_i(z_j) x_i\right) = g_k(z_j),$$

damit folgt

$$|\det(f_i(z_j))||\det(g_k(x_i))| = \left|\det\left(\sum_{i=1}^m f_i(z_j) g_k(x_i)\right)\right| = |\det(g_k(z_j))| \leq |\det(f_i(z_j))|$$

und schließlich $|\det(g_k(x_i))| \leq 1$.

Nun folgt $\|x_i\| \leq 1$, denn: für jedes beliebige Funktional g, $\|g\| \leq 1$ setze man gerade $g_i := g$ und $g_k := f_k$ (für $k \neq i$) und erhält $|g(x_i)| = |\det(g_k(x_j))| \leq 1$. Wegen $1 = f_i(x_i) \leq \|f_i\| \|x_i\| \leq 1$ folgt nun die Behauptung. □

Folgerung 1.2.1. *Es sei $\boldsymbol{Y}$ ein Banachraum und $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ ein m-dimensionaler Teilraum. Dann existiert eine normierte Basis $\{x_i\}_{i=1}^m$ in $\boldsymbol{X}$, so dass für alle Mengen $\{y_i\}_{i=1}^m \subset \boldsymbol{Y}$ mit der Eigenschaft $\|x_i - y_i\| \leq (2m)^{-1}$ ($\forall\, i = 1, ..., m$) und für alle Skalare α_j gilt:*

$$|\alpha_p| \leq 2\|\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j\| \text{ für alle } p = 1, ..., m. \tag{1.2}$$

Beweis. Seien $\{x_i\}_{i=1}^m$ Basis von $\mathbf{X}$ und $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{X}^*$ Funktionale wie in Auerbach's Lemma 1.2.1. Dann gilt für beliebige Skalare α_j und alle $p = 1, ..., m$

$$\|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\| = \|f_p\|\|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\| \geq |f_p(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j)| = |\alpha_p|$$

und somit auch für alle $\{y_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{Y}$ (mit $\|y_i - x_i\| \leq (2m)^{-1}, i = 1, ..., m$) und alle $p = 1, ..., m$

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j\| &\geq \|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\| - \sum_{j=1}^m |\alpha_j|\|(x_j - y_j)\| \\
&\geq \|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\| - \sum_{j=1}^m (\|\sum_{l=1}^m \alpha_l x_l\|)(2m)^{-1} \\
&= \|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\| - \|\sum_{l=1}^m \alpha_l x_l\|/2 \\
&= \|\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j\|/2 \geq |\alpha_p|/2.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 1.2.2. *Sei $\boldsymbol{Y}$ ein Banachraum und $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ ein m-dimensionaler Teilraum. Dann gibt es einen Projektor $P \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y})$, $\operatorname{im} P = \boldsymbol{X}$ mit $\|P\| \leq m$.*

Beweis. Seien $\{x_i\}_{i=1}^m$ Basis von $\mathbf{X}$ und $\{f_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{X}^*$ Funktionale wie in Auerbach's Lemma 1.2.1. Die Funktionale f_i können nach dem Satz von Hahn-Banach (Theorem 1.1.4) auf ganz $\mathbf{Y}$ fortgesetzt werden:

$$f_i \in \mathbf{Y}^*, \text{ und } \|f_i\| = 1 \text{ für alle } i.$$

Definieren nun einen Operator $P \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ durch

$$Px := \sum_{i=1}^m f_i(x) x_i.$$

Dies ist offenbar ein Projektor, $\operatorname{im} P = \mathbf{X}$ und $\|P\| \leq m$. □

In [4], 28.2.6. wird gezeigt, dass es sogar einen Projektor $P \in \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ gibt, mit im $P = \mathbf{X}$ und $\|P\| \leq \sqrt{m}$. Dies ist für den allgemeinen Fall das bestmögliche Resultat.
In spezielleren Situationen gibt es möglicherweise bessere Abschätzungen. Im Hilbertraumfall haben beispielsweise alle Orthoprojektoren Norm 1.

Die beiden Folgerungen können, mit gröberen Abschätzungen, auch direkt bewiesen werden:

Lemma 1.2.2. *Es sei $\boldsymbol{Y}$ ein Banachraum und $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ ein m-dimensionaler Teilraum. Dann existiert eine normierte Basis $\{x_i\}_{i=1}^m$ in $\boldsymbol{X}$, so dass für alle Mengen $\{y_i\}_{i=1}^m \subset \boldsymbol{Y}$ mit der Eigenschaft $\|x_i - y_i\| \leq 2^{-m}/m$ ($\forall\ i = 1, ..., m$) und für alle Skalare α_j gilt:*

$$\|\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j\| \geq 2^{-m}|\alpha_p| \text{ für alle } p = 1, ..., m. \tag{1.3}$$

Beweis. Zeigen zunächst per Induktion die Existenz einer normierten Basis $\{x_i\}_{i=1}^m$, so dass für alle $1 \leq i \leq k \leq m$ und alle Skalare α_j gilt

$$\|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^k \alpha_j x_j\| \geq 2^{i-k}. \tag{1.4}$$

Fixieren dazu ein $x_1, \|x_1\| = 1$ (dies erfüllt (1.4)) und nehmen an, auch $x_1, ..., x_{n-1}$ wurden so gewählt, dass (1.4) erfüllt ist für $1 \leq i \leq k \leq n-1$.
Seien $\mathbf{X}_{n-1} :=$ span$\{x_1, ..., x_{n-1}\}$ und $x \notin \mathbf{X}_{n-1}$. Wählen $z \in \mathbf{X}_{n-1}$ derart, dass

$$\|x - z\| = \inf_{y \in \mathbf{X}_{n-1}} \|x - y\|.$$

Ein solches z existiert, weil $\mathbf{X}_{n-1}$ abgeschlossen ist. Da $x \notin \mathbf{X}_{n-1}$, gilt $\|x - z\| > 0$. Setzen

$$x_n := \frac{x - z}{\|x - z\|}.$$

Dann gilt für alle Skalare α_j

$$\begin{aligned} \|x_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j x_j\| &\geq \inf_{y \in \mathbf{X}_{n-1}} \|x_n - y\| = \inf_{y \in \mathbf{X}_{n-1}} \left\| \frac{x - z}{\|x - z\|} - y \right\| \\ &= \inf_{\tilde{y} \in \mathbf{X}_{n-1}} \frac{\|x - z - \tilde{y}\|}{\|x - z\|} = \inf_{\hat{y} \in \mathbf{X}_{n-1}} \frac{\|x - \hat{y}\|}{\|x - z\|} = \frac{\|x - z\|}{\|x - z\|} = 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dies ist (1.4) für $i = k = n$. Sei nun $1 \leq i < k = n$ und $\alpha_n \neq 0$. Dann gilt

$$\|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^n \alpha_j x_j\| \geq \|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \alpha_j x_j\| - |\alpha_n| \|x_n\| \geq 2^{i-n+1} - |\alpha_n|,$$

und wegen (1.5) auch

$$\|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j\| = |\alpha_n| \|x_n + \sum_{j=1, j\neq i}^{n-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_n} x_j + \frac{1}{\alpha_n} x_i\| \geq |\alpha_n|.$$

Somit ist

$$\|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j\| \geq 2^{i-n+1} - \|x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j\|$$

und die Beziehung (1.4) folgt nun leicht.

Für $\{y_i\}_{i=1}^m \subset \mathbf{Y}$ mit $\|x_i - y_i\| \leq 2^{-m}/m$ $(i = 1, ..., m)$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\| &\leq \|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\| + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \|(x_j - y_j)\| \\
&\leq \|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\| + \sum_{j=1}^{m} (2^{m-1} \|\sum_{l=1}^{m} \alpha_l x_l\|)(2^{-m}/m) \\
&= \|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\| + \|\sum_{l=1}^{m} \alpha_l x_l\|/2
\end{aligned}$$

und damit für alle Skalare α_j und alle $p = 1, ..., m$ die Beziehung (1.3), denn für $|\alpha_p| = 0$ ist dies trivial, für $|\alpha_p| > 0$ gilt nach (1.4)

$$\|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\| \geq \|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\|/2 \geq |\alpha_p| \|x_p + \sum_{j=1, j\neq p}^{m} \frac{\alpha_j}{\alpha_p} x_j\|/2 \geq 2^{-m} |\alpha_p|.$$

□

Folgerung 1.2.3. *Sei* $\boldsymbol{Y}$ *ein Banachraum und* $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{Y}$ *ein* m*-dimensionaler Teilraum. Dann gibt es einen Projektor* $P \in \mathcal{L}(\boldsymbol{Y})$, $\operatorname{im} P = \boldsymbol{X}$ *mit* $\|P\| \leq 2^m m$.

Beweis. Wählen eine Basis $\{x_i\}_{i=1}^m$ in $\mathbf{X}$ wie in Lemma 1.2.2 und führen Funktionale $f_j : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ ein durch

$$f_j \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \right) := \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Nach Lemma 1.2.2 gilt, dass $\|f_j\| \leq 2^m$. Analog zum Beweis der Folgerung 1.2.2 werden diese Funktionale auf $\mathbf{Y}$ fortgesetzt und ein Projektor mit den gewünschten Eigenschaften eingeführt. □

2 Folgenalgebren und Approximationszahlen

2.1 Folgenalgebren

Sei $\mathbf{E}$ ein Banachraum, $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf $\mathbf{E}$ und $I \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ der identische Operator in $\mathbf{E}$, $\{\mathbf{E}_n\}$ eine Folge endlichdimensionaler Teilräume von $\mathbf{E}$ und $\{L_n\}$ eine Folge surjektiver Projektoren $L_n : \mathbf{E} \to \mathbf{E}_n$, die stark gegen I konvergiert. Man überprüft leicht, dass die Menge $\mathcal{F}$ aller Folgen $\{A_n\}$ von linearen Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$, für die gilt

$$\|\{A_n\}\|_{\mathcal{F}} := \sup_n \|A_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} < \infty,$$

versehen mit dieser Norm und den gliedweise definierten Operationen

$$\alpha\{A_n\} + \beta\{B_n\} := \{\alpha A_n + \beta B_n\}, \{A_n\}\{B_n\} := \{A_n B_n\},$$

zu einer Banachalgebra mit Eins $\{L_n\}$ wird. Die Menge

$$\mathcal{G} := \{\{G_n\} \in \mathcal{F} : \|G_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})} \to_n 0\}$$

bildet ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{F}$.

Sei nun T eine (möglicherweise unendliche) Indexmenge und für jedes $t \in T$ sei $\mathbf{E}^t$ unendlichdimensionaler Banachraum, $I^t \in \mathcal{L}(\mathbf{E}^t)$ entsprechend der identische Operator und $\{L_n^t\}$ eine Folge von Projektoren in $\mathbf{E}^t$, die stark gegen I^t konvergiert. Nach dem Banach-Steinhaus-Theorem (1.1.2) gilt

$$c^t := \sup_n \|L_n^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}^t)} < \infty.$$

Weiterhin existiere für jedes $t \in T$ eine Folge $\{E_n^t\}$ invertierbarer Homomorphismen

$$E_n^t : \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t) \to \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n) = \mathcal{L}(\mathbf{E}_n),$$

so dass (mit der Bezeichnung $E_n^{-t} := (E_n^t)^{-1}$) gelte

$$M^t := \sup_n \max\{\|E_n^t\|, \|E_n^{-t}\|\} < \infty. \tag{I}$$

Bezeichnen mit $\mathcal{F}^T$ die Menge aller Folgen $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in T$ ein Operator $W^t\{A_n\} \in \mathcal{L}(\mathbf{E}^t)$ existiert mit

$$A_n^{(t)} := E_n^{-t}(A_n)L_n^t \to W^t\{A_n\} \text{ stark.}$$

Man kann leicht zeigen, dass $\mathcal{F}^T$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{F}$ bildet, und sowohl die Eins $\{L_n\}$, als auch das Ideal $\mathcal{G}$ enthält.

Im Weiteren wird, wo dies klar ist, die Spezifizierung der Normen (z.B. $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E})}$) weggelassen und einfach $\|\cdot\|$ geschrieben.

Die Homomorphismen E_n^t bieten, anschaulich gesprochen, die Möglichkeit, jede Folge $\{A_n\}$ aus $\mathcal{F}^T$ zu transformieren und so gewissermaßen aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten. Jede dieser Perspektiven liefert einen Limitoperator $W^t\{A_n\}$. Anhand der Eigenschaften dieser Limitoperatoren sollen Rückschlüsse auf Eigenschaften der ursprünglichen Folge $\{A_n\}$ gezogen werden. Das Verhalten der E_n^t ist deshalb selbstverständlich von großem Interesse:

Haben für alle $B_n \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t)$

$$\begin{aligned} E_n^t(B_n) &= E_n^t(L_n^t B_n) = E_n^t(L_n^t)E_n^t(B_n) \\ &= E_n^t(B_n L_n^t) = E_n^t(B_n)E_n^t(L_n^t). \end{aligned}$$

Da die E_n^t invertierbar sind, gilt stets $\{E_n^t(L_n^t)\} = \{L_n\}$. Man überprüft leicht, dass auch die Abbildungen $W^t : \mathcal{F}^T \to \mathcal{L}(\mathbf{E}^t), \{A_n\} \mapsto W^t\{A_n\}$ Algebrahomomorphismen sind mit $W^t\{L_n\} = I^t$.

Zeigen noch, dass die E_n^t rangerhaltend sind, d.h. für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t \in T$ und $A \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t)$ gilt stets

$$\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} E_n^t(A). \tag{2.1}$$

Lemma 2.1.1. *Seien $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ Banachräume und $E : \mathcal{L}(\boldsymbol{X}) \to \mathcal{L}(\boldsymbol{Y})$ invertierbarer Homomorphismus. Dann gilt:* $\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} E(A)\ \forall A \in \mathcal{L}(\boldsymbol{X})$.

Beweis. Dies ist klar für $A = 0$. Sei nun $A \neq 0$. Dann gilt zunächst

$$\dim \operatorname{im} A = 1 \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{L}(\mathbf{X})\ \exists \alpha_B, \text{ so dass } ABA = \alpha_B A.$$

„$\Rightarrow$“ ist offensichtlich.
Für „$\Leftarrow$“ nehmen wir an dass es $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ gibt, so dass $y_1 := Ax_1, y_2 := Ax_2$ linear unabhängig sind. Sei X_1 ein Komplement von $\operatorname{span}\{y_1, y_2\}$. Definieren $B : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ durch $By_1 := x_1$, $By_2 := -x_2$ und $B(X_1) = \{0\}$. Erhalten damit leicht einen Widerspruch, denn $ABAx_1 = ABy_1 = Ax_1$ und $ABAx_2 = ABy_2 = -Ax_2$.

Haben nun für alle $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$: $\dim \operatorname{im} A = 1 \Leftrightarrow \dim \operatorname{im} E(A) = 1$, denn wegen der Invertierbarkeit von E gilt

$$\begin{aligned} ACA = \alpha_C A\ \forall C \in \mathbf{X} &\Leftrightarrow E(ACA) = \alpha_C E(A)\ \forall C \in \mathbf{X} \\ &\Leftrightarrow E(A)E(C)E(A) = \alpha_C E(A)\ \forall C \in \mathbf{X} \\ &\Leftrightarrow E(A)DE(A) = \alpha_D E(A)\ \forall D \in \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Sei $\dim \operatorname{im} A = n$. Dann ist $A = \sum_{i=1}^n A_i$ mit gewissen $A_i \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$, $\dim \operatorname{im} A_i = 1$. Erhalten so

$$\dim \operatorname{im} E(A) = \dim \operatorname{im} E(\sum_{i=1}^n A_i) = \dim \operatorname{im} \sum_{i=1}^n E(A_i) \leq n = \dim \operatorname{im} A.$$

Analog zeigt man für die Inverse E^{-1}: $\dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{im} E^{-1}(E(A)) \leq \dim \operatorname{im} E(A)$.
Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die Tatsache, dass die Homomorphismen E_n^t rangerhaltend sind, wird in den weiteren Betrachtungen eine große Rolle spielen. Es wird sich nämlich zeigen, dass sich z.B. der Kern eines Operators $W^t\{A_n\}$ überführen lässt in, grob gesagt, gewisse Teilräume von $\mathbf{E}$ mit der selben Dimension wie der Kern, so dass die Einschränkung der $\{A_n\}$ auf diese Räume eine Nullfolge bildet.

2.2 Projektorensysteme

Für ein $t \in T$ sei $\mathbf{X}^t$ ein m-dimensionaler Teilraum von $\mathbf{E}^t$ und $P^t \in \mathcal{L}(\mathbf{E}^t)$ beschränkter Projektor mit $\operatorname{im} P^t = \mathbf{X}^t$. Setzen $\hat{P}^t := I^t - P^t$ und erhalten daraus leicht die Beziehung

$$I^t - (I^t - L_n^t)P^t = L_n^t P^t + \hat{P}^t.$$

P^t ist offenbar kompakt, und weil $I^t - L_n^t \to_n 0$ stark, gilt sogar $\|(I^t - L_n^t)P^t)\| \to_n 0$ (nach Lemma 1.1.5). Es existiert somit ein $n_t \in \mathbb{N}$, so dass $\|(I^t - L_n^t)P^t)\| < 1$ für alle $n \geq n_t$. Nun folgt aber (für $n \geq n_t$) die Invertierbarkeit von $I^t - (I^t - L_n^t)P^t$, und die Inversen sind

$$(I^t - (I^t - L_n^t)P^t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k$$

(vgl. Lemma 1.1.4). Dies erlaubt (für $n \geq n_t$) folgende Definition:

$$I^t = \underbrace{L_n^t P^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k}_{=:P_n^t} + \underbrace{\hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k}_{=:\hat{P}_n^t}.$$

Für diese Operatoren gilt

$$\begin{aligned}
\hat{P}_n^t \hat{P}^t &= \hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k \hat{P}^t = \hat{P}^t \left(I^t \hat{P}^t + 0\right) = \hat{P}^t, \\
\hat{P}^t \hat{P}_n^t &= \hat{P}^t \hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k = \hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k = \hat{P}_n^t \text{ und} \\
\hat{P}_n^t \hat{P}_n^t &= \hat{P}_n^t \hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k = \hat{P}^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k = \hat{P}_n^t.
\end{aligned}$$

Nach der dritten Beziehung sind die $\hat{P}_n^t$ Projektoren, und aus den beiden ersten Gleichungen folgt leicht, dass $\operatorname{im} \hat{P}_n^t = \operatorname{im} \hat{P}^t$. Folglich sind auch die $P_n^t \in \mathcal{L}(\mathbf{E}^t)$ Projektoren und $\dim \operatorname{im} P_n^t = m$. Außerdem gilt offenbar $\operatorname{im} P_n^t \subset \operatorname{im} L_n^t$. Schließlich folgt (wieder mit

Lemma 1.1.5), dass

$$\begin{aligned}\|P^t - P_n^t\| &= \|P^t - L_n^t P^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k\| \\ &= \|P^t - P^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k + (I^t - L_n^t)P^t \sum_{k=0}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k\| \\ &= \| - P^t \left(\sum_{k=1}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k\right) + \sum_{k=1}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k\| \\ &= \|\hat{P}^t \left(\sum_{k=1}^{\infty}((I^t - L_n^t)P^t)^k\right)\| \leq \|\hat{P}^t\| \left(\frac{\|(I^t - L_n^t)P^t\|}{1 - \|(I^t - L_n^t)P^t\|}\right) \to_n 0.\end{aligned}$$

Was ist damit gezeigt?
Ausgehend von einem gewissen m-dimensionalen Teilraum $\mathbf{X}^t$ von $\mathbf{E}^t$ haben wir (für $n \geq n_t$) eine gleichmäßig beschränkte Folge $\{P_n^t\}$ von Projektoren erzeugt, deren Bilder jeweils in im L_n^t liegen, Dimension m besitzen und $\mathbf{X}^t$ in gewisser Weise approximieren ($P_n^t \to P^t$ gleichmäßig).
Die P_n^t können nun als Projektoren aus $\mathcal{L}(\text{im}\, L_n^t)$ aufgefaßt werden und lassen sich deshalb durch die Homomorphismen E_n^t in $\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$ liften. Setzen dazu

$$R_n^t := E_n^t(P_n^t L_n^t).$$

Dies sind offenbar Projektoren aus $\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$, es gilt $\dim \text{im}\, R_n^t = \dim \text{im}\, P_n^t = m$ (vgl. (2.1)) und außerdem ist $\{R_n^t\}$ gleichmäßig beschränkt, denn

$$\|R_n^t\| = \|E_n^t(P_n^t L_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \leq \|E_n^t\| \|P_n^t L_n^t\|_{\mathcal{L}(\text{im}\, L_n^t)} \leq \|E_n^t\| \|P_n^t L_n^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}^t)} \leq M^t c^t \|P_n^t\|.$$

Definition 2.2.1. Für ein $t \in T$ sei $\mathbf{X}^t$ m-dimensionaler Teilraum von $\mathbf{E}^t$. Eine so erzeugte Familie $(P^t, \hat{P}^t, P_n^t, \hat{P}_n^t, R_n^t)$ $(n \geq n_t)$ von Operatoren nennen wir im Weiteren ein zu $\mathbf{X}^t$ gehörendes Projektorensystem.

Das nachfolgende Resultat offenbart, dass sich mit Hilfe dieser Projektoren gewisse Beschränktheits- und Konvergenzeigenschaften der Limitoperatoren $W^t\{A_n\}$ auf die Folgen $\{A_n\}$ übertragen lassen.

Lemma 2.2.1. *Seien $\boldsymbol{X}^t$ m-dimensionaler Teilraum von $\boldsymbol{E}^t$, $(P^t, \hat{P}^t, P_n^t, \hat{P}_n^t, R_n^t)$ ein zu $\boldsymbol{X}^t$ gehörendes Projektorensystem und $\{A_n\} \in \mathcal{F}^T$. Dann gilt*

$$\limsup_n \|A_n R_n^t\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E}_n)} \leq M^t c^t \|W^t\{A_n\}P^t\|.$$

Im Falle $\boldsymbol{X}^t \subset \ker W^t\{A_n\}$ gilt für alle $n \geq n_t$ folgende Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit:

$$\|A_n R_n^t\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{E}_n)} \leq \frac{M^t c^t}{1 - \|(I^t - L_n^t)P^t\|} \|A_n^{(t)} P^t\| \to_n 0.$$

Beweis. Aus den obigen Überlegungen, der Kompaktheit der Operatoren P^t und Lemma 1.1.5 folgt

$$\begin{aligned}
\|A_n R_n^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} &= \|A_n E_n^t (P_n^t L_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&= \|A_n E_n^t (L_n^t P^t (I^t - (I^t - L_n^t)P^t)^{-1} L_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&= \|E_n^t (A_n^{(t)} P^t (I^t - (I^t - L_n^t)P^t)^{-1} L_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&\leq M^t c^t \|A_n^{(t)} P^t \sum_{k=0}^{\infty} ((I^t - L_n^t)P^t)^k\| \\
&\leq \frac{M^t c^t}{1 - \|(I^t - L_n^t)P^t\|} \|A_n^{(t)} P^t\| \to_n M^t c^t \|W^t\{A_n\}P^t\|.
\end{aligned}$$

Falls $\mathbf{X}^t \subset \ker W^t\{A_n\}$, ist dieser Grenzwert offenbar gleich 0. □

2.3 Die Approximationszahlen der $\{A_n\} \in \mathcal{F}^T$ und die Operatoren $W^t\{A_n\}$

Wollen uns in diesem Abschnitt den sogenannten Approximationszahlen zuwenden. Die hier bewiesenen Resultate sind so schon in [9], Abschnitt 3 für die dortige speziellere Situation zu finden. Die Beweisideen hier folgen dem Konzept der Projektorensysteme, sind aber an einigen Stellen an die Beweise in [9] angelehnt.

Definition 2.3.1. Sei $\mathbf{X}$ ein m-dimensionaler normierter Raum. Die k-te Approximationszahl ($k = 0, 1, ..., m$) eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ ist definiert als

$$s_k(A) := \operatorname{dist}(A, \mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X})) := \inf\{\|A - F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} : F \in \mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X})\},$$

wobei $\mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X})$ die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ bezeichnet, deren Bild höchstens $(m-k)$-dimensional ist.

Man kann zeigen, dass (vgl. [1], Proposition 9.2)

$$s_1(A) = \begin{cases} 1/\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} & \text{falls } A \text{ invertierbar ist} \\ 0 & \text{falls } A \text{ nicht invertierbar ist.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Außerdem gilt für die adjungierten Operatoren $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{X}^*)$

$$\begin{aligned}
s_k(A^*) &= \inf\{\|A^* - F^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}^*)} : F^* \in \mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X}^*)\} \\
&= \inf\{\|(A - F)^*\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}^*)} : F \in \mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X})\} \\
&= \inf\{\|A - F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X})} : F \in \mathcal{F}_{m-k}(\mathbf{X})\} = s_k(A).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Theorem 2.3.1. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{F}^T$ und $k \in \mathbb{N}$. Wenn es einen Index $t \in T$ gibt, so dass $k \leq \dim\ker W^t\{A_n\}$, dann gilt*

$$s_k(A_n) \to_n 0. \tag{2.4}$$

Wenn für ein $t \in T$ $\dim\ker W^t\{A_n\} = \infty$ gilt, oder $W^t\{A_n\}$ nicht normal auflösbar ist, dann folgt für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$s_l(A_n) \to_n 0. \tag{2.5}$$

Beweis. Sei $\mathbf{X}^t$ ein m-dimensionaler Teilraum von $\ker W^t\{A_n\}$ und $(P^t, \hat{P}^t, P_n^t, \hat{P}_n^t, R_n^t)$ ein zu $\mathbf{X}^t$ gehörendes Projektorensystem. Für die m-ten Approximationszahlen der A_n gilt dann (für $n \geq n_t$)

$$\begin{aligned} s_m(A_n) &= \inf\{\|A_n + F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - m}(\mathbf{E}_n)\} \\ &\leq \|A_n - A_n(L_n - R_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\ &= \|A_n R_n^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dies liefert mit Lemma 2.2.1 offenbar sofort die Behauptung (2.4) und die Behauptung (2.5) für den Fall $\dim\ker W^t\{A_n\} = \infty$.

Es verbleibt, (2.5) für den Fall zu untersuchen, wo $W^t\{A_n\}$ nicht normal auflösbar ist und $\dim\ker W^t\{A_n\} < \infty$. Nehmen an, es gibt $\delta > 0$ und $l \in \mathbb{N}$, so dass $s_l(A_n) > \delta$ für unendlich viele n.

Im Beweis von [9], Theorem 3.2. wird für diesen Fall (und jedes hinreichend kleine, fixierte $\epsilon > 0$) die Existenz von Vektoren $z_1, ..., z_l \in \mathbf{E}^t$ gezeigt, für die gilt

$$\|z_j\| = 1, \ \|W^t\{A_n\}z_j\| \leq \epsilon, \text{ für alle } 1 \leq j \leq l \text{ und}$$
$$(4c^t)^{-l} \sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \leq \| \sum_{j=1}^{l} \alpha_j z_j\| \text{ für alle Skalare } \alpha_j.$$

Wählen wir

$$0 < \epsilon < \frac{\delta}{2M^t c^t l (4c^t)^l},$$

$\mathbf{X}^t := \operatorname{span}\{z_1, ..., z_l\}$ und $(P^t, \hat{P}^t, P_n^t, \hat{P}_n^t, R_n^t)$ ein zu $\mathbf{X}^t$ gehörendes Projektorensystem mit $\|P^t\| \leq l$ (vgl. Folgerung 1.2.2), so folgt für beliebige Skalare α_j

$$\frac{\|W^t\{A_n\}(\sum_{j=1}^l \alpha_j z_j)\|}{\|\sum_{j=1}^l \alpha_j z_j\|} \leq \frac{\sum_{j=1}^l |\alpha_j|\epsilon}{(4c^t)^{-l}\sum_{j=1}^l |\alpha_j|} = \epsilon(4c^t)^l < \frac{\delta}{2M^t c^t l}.$$

Erhalten nun

$$2M^t c^t \|W^t\{A_n\}P^t\| \leq 2M^t c^t \|W^t\{A_n\}P^t\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}^t)}\|P^t\| < \frac{2M^t c^t \delta \|P^t\|}{2M^t c^t l} \leq \delta,$$

und somit wieder nach Lemma 2.2.1 und Gleichung (2.6), dass $s_l(A_n) < \delta$ für große n. Dieser Widerspruch vervollständigt den Beweis. □

Es sei hier noch vermerkt, dass für die Fälle, wo $\mathbf{X}^t \subset \ker W^t\{A_n\}$ gilt, durch die Gleichung (2.6) und Lemma 2.2.1 eine Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit der Approximationszahlen gegeben ist ($n \geq n_t$):

$$s_m(A_n) \leq \frac{M^t c^t}{1 - \|(I^t - L_n^t)P^t\|} \|A_n^{(t)} P^t\| \to_n 0.$$

In vielen konkreten Situationen (beispielsweise dem C^*-Fall, dem Hilbertraumfall, oder ganz speziell in den Fällen $\mathbf{E} = l^p$, $1 < p < \infty$, die in Kapitel 3 exemplarisch genauer behandelt werden) kann die Aussage des Theorems verschärft werden, weil zusätzlich die starke Konvergenz gewisser relevanter Folgen von adjungierten Operatoren gegeben ist:

Theorem 2.3.2. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{F}^T$ und es gelte zusätzlich $L_n^* \to I^*$, $(L_n^t)^* \to (I^t)^*$ und $(A_n^{(t)})^* = (E_n^{-t}(A_n)L_n^t)^* \to (W^t\{A_n\})^*$ stark (für alle $t \in T$).*
Wenn es ein $t \in T$ gibt, so dass $W^t\{A_n\}$ nicht Fredholmsch ist, so gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$s_l(A_n) \to_n 0. \tag{2.7}$$

Beweis. $\mathbf{E}^*$ ist ein Banachraum und $\{\mathbf{E}_n^*\}$ kann aufgefasst werden als eine Folge endlichdimensionaler Teilräume von $\mathbf{E}^*$ im Sinne der Einbettung $f \in \mathbf{E}_n^* \mapsto f \circ L_n \in \mathbf{E}^*$. Zunächst ist L_n^* ($L_n^* f := f \circ L_n$) aus $\mathcal{L}(\mathbf{E}_n^*, \mathbf{E}^*)$ für alle n. L_n^* kann aber auf natürliche Weise auf $\mathbf{E}^*$ fortgesetzt werden: Setzen dazu $L_n^*(f) := f \circ L_n$ für alle $f \in \mathbf{E}^*$. Erhalten insbesondere

$$L_n^*(f \circ L_n) = f \circ L_n \circ L_n = L_n^*(f) \text{ und } L_n^*(f \circ (I - L_n)) = f \circ (I - L_n) \circ L_n = 0.$$

Dies zeigt, dass die $L_n^* f$ gerade die Funktionale aus E_n^* sind, und wir können $\{L_n^*\}$ nun auch verstehen als eine Folge (surjektiver) Projektoren

$$L_n^* : \mathbf{E}^* \to \mathbf{E}_n^*,$$

die nach Voraussetzung stark gegen I^* konvergiert. Weiterhin ist $(\mathbf{E}^t)^*$ für jedes $t \in T$ ein unendlichdimensionaler Banachraum und $\{(L_n^t)^*\}$ wieder eine Folge von Projektoren, die stark gegen $(I^t)^*$ konvergiert, und deren Bilder gerade den Räumen $(\operatorname{im} L_n^t)^*$ entsprechen.

Für endlichdimensionale Banachräume $\mathbf{X}$ kann bekanntermaßen der biduale Raum $\mathbf{X}^{**}$ mit $\mathbf{X}$ selbst identifiziert werden. In diesem Sinne werden nun Operatoren

$$E_n^{t,*} : \mathcal{L}((\operatorname{im} L_n^t)^*) \to \mathcal{L}((\operatorname{im} L_n)^*)$$

wie folgt erklärt:
Ist $C \in \mathcal{L}((\operatorname{im} L_n^t)^*)$ (oder $\mathcal{L}((\operatorname{im} L_n)^*)$), dann können wir C^* auffassen als Operator aus $\mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t)$ (bzw. $\mathcal{L}(\operatorname{im} L_n)$). $E_n^{t,*}$ wird nun definiert durch

$$E_n^{t,*}(C) := (E_n^t(C^*))^*.$$

Man überprüft leicht, dass dies invertierbare Homomorphismen sind, die die Bedingung

$$M^t = \sup_n \max\{\|E_n^{t,*}\|, \|(E_n^{t,*})^{-1}\|\} < \infty$$

erfüllen. Die Inversen $(E_n^{t,*})^{-1}$ sind gerade die Abbildungen $D \mapsto (E_n^{-t}(D^*))^*$.

$\tilde{\mathcal{F}}^T$ bezeichne (in Analogie zu $\mathcal{F}^T$) die Menge aller Folgen $\{B_n\}$ von linearen Operatoren $B_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_n^*)$, für die für alle $t \in T$ Operatoren $V^t\{B_n\} \in \mathcal{L}((\mathbf{E}^t)^*)$ existieren, mit

$$(E_n^{t,*})^{-1}(B_n)(L_n^t)^* \to V^t\{B_n\} \text{ stark.}$$

Dieses „duale System“ $\mathbf{E}^*, \mathbf{E}_n^*, L_n^*, (\mathbf{E}^t)^*, (L_n^t)^*, E_n^{t,*}$ erfüllt somit alle Voraussetzungen der bisherigen Theorie.
Außerdem gilt $\{A_n^*\} \in \tilde{\mathcal{F}}^T$ mit $V^t\{A_n^*\} = (W^t\{A_n\})^*$, denn

$$(E_n^{t,*})^{-1}(A_n^*)(L_n^t)^* = (L_n^t E_n^{-t}(A_n) L_n^t)^* = (A_n^{(t)})^* \to (W^t\{A_n\})^*.$$

Deshalb ist das Theorem 2.3.1 ebenfalls anwendbar für $\{A_n^*\}$.

Sei nun $W^t\{A_n\}$ nicht Fredholmsch.
Dann ist $W^t\{A_n\}$ nicht normal auflösbar, oder $\dim\ker W^t\{A_n\} = \infty$ (und die Behauptung folgt schon mit Theorem 2.3.1), oder es gilt $\dim\operatorname{coker} W^t\{A_n\} = \infty$ und somit auch $\dim\ker(W^t\{A_n\})^* = \infty$. Dann liefert Theorem 2.3.1 (bezüglich des „dualen Problems“) die Behauptung für $s_l(A_n^*)$. Wegen der Gleichung (2.3) stimmen diese Approximationszahlen aber mit den $s_l(A_n)$ überein, und Behauptung (2.7) ist gezeigt. □

2.4 Fredholmfolgen

In diesem Abschnitt werden Klassen von sogenannten Fredholmfolgen für gewisse Teilalgebren $\mathcal{A}^T$ von $\mathcal{F}^T$ eingeführt. Eine Folge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ wird Fredholmfolge genannt werden, wenn sie invertierbar ist, bis auf eine Folge aus einem gewissen Ideal $\mathcal{J}^T \subset \mathcal{A}^T$, das verknüpft ist mit Idealen kompakter Operatoren auf den Räumen $\mathbf{E}^t$. Dabei erweist es sich als sinnvoll, zu fordern, dass (anschaulich gesprochen) die „Blickrichtungen“, aus denen die Folgen aus $\mathcal{A}^T$ betrachtet werden können, und die durch die E_n^t vermittelt werden, nicht zu ähnlich sind.

Es sei deshalb im Weiteren zusätzlich die folgende Separationsbedingung erfüllt:

Für alle $t \in T$ und alle $K^t \in \mathcal{K}^t$ gelte $\{E_n^t(L_n^t K^t L_n^t)\} \in \mathcal{F}^T$ und

$$W^\tau\{E_n^t(L_n^t K^t L_n^t)\} = \begin{cases} K^t & \text{falls } t = \tau \\ 0 & \text{falls } t \neq \tau, \end{cases} \tag{II}$$

wobei $\mathcal{K}^t$ für jedes $t \in T$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $\mathcal{L}(\mathbf{E}^t)$ sei mit

$$\{A L_k^t : A \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_k^t), k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K}^t \subset \mathcal{K}(\mathbf{E}^t).$$

Definition 2.4.1. Setzen

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^t &:= \{\{E_n^t(L_n^t K^t L_n^t)\} + \{G_n\} : K^t \in \mathcal{K}^t, \|G_n\| \to 0\} \ (\forall t \in T),\\ \mathcal{J}_0^T &:= \left\{\sum_{i=1}^m \{J_n^{t_i}\} : m \in \mathbb{N},\ t_i \in T,\ \{J_n^{t_i}\} \in \mathcal{J}^{t_i}\right\} \text{ und}\\ \mathcal{J}^T &:= \operatorname{clos}_{\mathcal{F}^T} \mathcal{J}_0^T.\end{aligned}$$

Lemma 2.4.1. *(Eigenschaften der J^t, J^T)*
$\mathcal{J}^T$ und die $\mathcal{J}^t$, $t \in T$ bilden abgeschlossene Teilalgebren von $\mathcal{F}^T$ und $\{L_n\} \notin \mathcal{J}^T$.

Beweis. Zunächst gilt nach dem Banach-Steinhaus-Theorem 1.1.2 und der Bedingung I

$$\|W^t\{A_n\}\| \leq \liminf_n \|A_n^{(t)}\| \leq \liminf_n \|E_n^{-t}(A_n)\|_{\mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t)} \|L_n^t\| \leq M^t c^t \|\{A_n\}\|_{\mathcal{F}}. \tag{2.8}$$

Offenbar ist $\mathcal{J}^t$ für alle $t \in T$ ein linearer Raum. Mit Lemma 1.1.5 folgt für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^t$

$$\begin{aligned}(E_n^t(L_n^t K_1^t L_n^t))(E_n^t(L_n^t K_2^t L_n^t)) &= E_n^t(L_n^t K_1^t K_2^t L_n^t - L_n^t K_1^t (I^t - L_n^t) K_2^t L_n^t) \text{ und}\\ \|E_n^t(L_n^t K_1^t (I^t - L_n^t) K_2^t L_n^t)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} &\leq M^t \|L_n^t\| \|K_1^t\| \|(I^t - L_n^t) K_2^t\| \|L_n^t\|\\ &\leq M^t (c^t)^2 \|K_1^t\| \|(I^t - L_n^t) K_2^t\| \to_n 0,\end{aligned} \tag{2.9}$$

also ist $(E_n^t(L_n^t K_1^t L_n^t))(E_n^t(L_n^t K_2^t L_n^t)) \in \mathcal{J}^t$ und $\mathcal{J}^t$ folglich sogar eine Algebra.

Sei $(\{J_n^k\})_{k \in \mathbb{N}} = (\{E_n^t(L_n^t K_k^t L_n^t)\} + \{G_n^k\})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}^t$ Cauchyfolge. Haben wegen (2.8)

$$\begin{aligned}\|K_k^t - K_l^t\| =& \|W^t\left(\{E_n^t(L_n^t(K_k^t - K_l^t)L_n^t)\} + \{G_n^k\} - \{G_n^l\}\right)\|\\ \leq& M^t c^t \|(\{E_n^t(L_n^t K_k^t L_n^t)\} + \{G_n^k\}) - (\{E_n^t(L_n^t K_l^t L_n^t)\} + \{G_n^l\})\|.\end{aligned}$$

Folglich besitzt $\{K_k^t\}_{k \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert $K^t \in \mathcal{K}^t$, da $\mathcal{K}^t$ abgeschlossen ist. Weil

$$\begin{aligned}\|\{G_n^k\} - \{G_n^l\}\| \leq& \|(\{E_n^t(L_n^t K_k^t L_n^t)\} + \{G_n^k\}) - (\{E_n^t(L_n^t K_l^t L_n^t)\} + \{G_n^l\})\|\\ &+ \|\{E_n^t(L_n^t(K_l^t - K_k^t)L_n^t)\}\|\\ \leq& \|(\{E_n^t(L_n^t K_k^t L_n^t)\} + \{G_n^k\}) - (\{E_n^t(L_n^t K_l^t L_n^t)\} + \{G_n^l\})\|\\ &+ M^t(c^t)^2 \|(K_l^t - K_k^t)\|,\end{aligned}$$

folgt auch, dass $\{G_n^k\}$ gegen ein gewisses $\{G_n\} \in \mathcal{G}$ konvergiert.
Wie man leicht sieht, ist $\{E_n^t(L_n^t K^t L_n^t)\} + \{G_n\} \in \mathcal{J}^t$ nun gerade der Grenzwert von $(\{J_n^k\})_k$. Damit ist gezeigt, dass alle $\mathcal{J}^t$ abgeschlossen sind.

Wegen der Bedingung II und Lemma 1.1.5 gilt für alle $t \neq \tau$, $K^t \in \mathcal{K}^t$ und $K^\tau \in \mathcal{K}^\tau$

$$\begin{aligned}\|(E_n^t(L_n^t K^t L_n^t))(E_n^\tau(L_n^\tau K^\tau L_n^\tau))\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} &= \|E_n^\tau(E_n^{-\tau}(E_n^t(L_n^t K^t L_n^t))L_n^\tau K^\tau L_n^\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)}\\ &\leq M^\tau c^\tau \|\left[E_n^{-\tau}(E_n^t(L_n^t K^t L_n^t))L_n^\tau\right] K^\tau\| \to_n 0.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dass $\mathcal{J}_0^T$ (und damit auch $\mathcal{J}^T$) Algebra ist, folgt nun leicht.

Nehmen an, $\{L_n\} \in \mathcal{J}^T$. Dann gibt es ein $\{J_n\} \in \mathcal{J}_0^T$ mit $\|\{L_n\} - \{J_n\}\| < 1/2$. Das $\{J_n\}$ ist also invertierbar in $\mathcal{F}^T$ (vgl. Lemma 1.1.4). Dann sind aber auch die $W^t\{J_n\}$ invertierbar, im Widerspruch zur Kompaktheit der $W^t\{J_n\} \in \mathcal{K}(\mathbf{E}^t)$. □

Definition 2.4.2. Sei $\mathcal{A}^T \subset \mathcal{F}^T$ eine Banachalgebra mit Eins $\{L_n\}$, so dass $\mathcal{J}^T$ und die $\mathcal{J}^t$ ($\forall t \in T$) abgeschlossene zweiseitige Ideale von $\mathcal{A}^T$ bilden. Nennen eine Folge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmsch, wenn $\{A_n\} + \mathcal{J}^T$ invertierbar ist in $\mathcal{A}^T/\mathcal{J}^T$.

Offenbar gelten folgende einfache Aussagen:

- Die Fredholmfolgen bilden eine offene Menge in $\mathcal{A}^T$.
- Die Summe einer Fredholmfolge und einer Folge aus $\mathcal{J}^T$ ist Fredholmsch.
- Das Produkt zweier Fredholmfolgen ist Fredholmsch.

Das folgende Beispiel zeigt, dass stets derartige Algebren $\mathcal{A}^T$ existieren. Betrachten

$$\mathcal{A}^T := \{\alpha\{L_n\} + \{J_n\} : \{J_n\} \in \mathcal{J}^T\}.$$

Dies ist offenbar eine Algebra, $\{L_n\} \in \mathcal{A}^T$, es gilt $\mathcal{J}^t, \mathcal{J}^T \subset \mathcal{A}^T$ (für alle $t \in T$) und $d := \operatorname{dist}(\{L_n\}, \mathcal{J}^T) > 0$. Zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}^T$:
Sei dazu $(\alpha^k\{L_n\} + \{J_n^k\})_k$ eine Cauchyfolge und $\{A_n\} \in \mathcal{F}^T$ ihr Grenzwert. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l > n_0$ gilt:

$$\epsilon > \|(\alpha^k\{L_n\} + \{J_n^k\}) - (\alpha^l\{L_n\} + \{J_n^l\})\| = \|(\alpha^k - \alpha^l)\{L_n\} + \{J_n^k - J_n^l\}\|.$$

Für $\alpha^k \neq \alpha^l$ folgt daraus

$$\epsilon > |\alpha^k - \alpha^l| \|\{L_n\} + \frac{1}{\alpha^k - \alpha^l}\{J_n^k - J_n^l\}\| \geq |\alpha^k - \alpha^l| d.$$

Also ist auch (α^k) Cauchyfolge mit einem gewissen Grenzwert α. Nun ist leicht zu sehen, dass $\{A_n - \alpha L_n\}$ der Grenzwert der Folge $(\{J_n^k\})_k$ ist und deshalb in $\mathcal{J}^T$ liegt. Somit gilt $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ und die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}^T$ ist gezeigt.

$\mathcal{J}^T \subset \mathcal{A}^T$ ist offenbar ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. Es verbleibt zu zeigen, dass die $\mathcal{J}^t$ zweiseitige Ideale bilden. Dazu genügt es, zu zeigen, dass für alle $t \in T$, $\{K_n^t\} \in \mathcal{J}^t$ und $\{J_n\} \in \mathcal{J}^T$ gilt:

$$\{K_n^t\}\{J_n\}, \{J_n\}\{K_n^t\} \in \mathcal{J}^t.$$

$\{J_n\}$ kann beliebig genau approximiert werden durch Folgen $\{J_n^0\} \in \mathcal{J}_0^T$ und es gilt $\{J_n^0\}\{K_n^t\} \in \mathcal{J}^t$ nach den Gleichungen (2.9) und (2.10). Folglich lässt sich $\{J_n\}\{K_n^t\}$ approximieren durch Folgen aus $\mathcal{J}^t$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{J}^T$ gilt nun aber $\{J_n\}\{K_n^t\} \in \mathcal{J}^t$. Analog folgt $\{K_n^t\}\{J_n\} \in \mathcal{J}^t$.

In den nachfolgenden Sätzen soll der Zusammenhang zwischen der Fredholmeigenschaft der Folgen $\{A_n\}$ und der Fredholmeigenschaft der Operatoren $W^t\{A_n\}$ näher untersucht werden. Es wird sich zeigen, dass die Bezeichnung „Fredholmfolge“ durchaus gerechtfertigt ist, da zum Einen eine sehr enge Beziehung zwischen den Fredholmfolgen und Fredholmoperatoren besteht, und zum Zweiten bei den Folgen gewisse Analoga zu Kern- und Cokerndimension und zum Index der Fredholmoperatoren eingeführt werden können, mit verblüffend ähnlichen Eigenschaften.

Wir starten mit einem Resultat über eine Eigenschaft von Fredholmfolgen, die vergleichbar ist mit der Regularisierung bei Fredholmoperatoren. Der Beweis gründet auf den Ideen von [9], Theorem 5.1.

Lemma 2.4.2. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmfolge. Dann gibt es ein $\delta > 0$ und endliche Teilmengen $\{t_1, ..., t_m\}, \{\tau_1, ..., \tau_l\}$ von T, so dass folgendes gilt:*
Für jedes $\{\tilde{A}_n\} \in \mathcal{A}^T$ mit $\|\{A_n\} - \{\tilde{A}_n\}\| < \delta$ existieren Folgen $\{B_n\}, \{C_n\} \in \mathcal{A}^T$ und $\{G_n\}, \{\hat{G}_n\} \in \mathcal{G}$, sowie Operatoren $K^{t_i} \in \mathcal{K}^{t_i}, K^{\tau_i} \in \mathcal{K}^{\tau_i}$, so dass

$$\{B_n\}\{\tilde{A}_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{m}\{E_n^{t_i}(L_n^{t_i}K^{t_i}L_n^{t_i})\} + \{G_n\} \tag{2.11}$$

$$\{\tilde{A}_n\}\{C_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{l}\{E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i}K^{\tau_i}L_n^{\tau_i})\} + \{\hat{G}_n\}. \tag{2.12}$$

Insbesondere sind die $W^t\{\tilde{A}_n\}$ invertierbar für alle $t \in T\backslash(\{t_1, ..., t_m\} \cup \{\tau_1, ..., \tau_l\})$.

Beweis. Ist $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmsch, so gibt es Folgen $\{\hat{A}_n\} \in \mathcal{A}^T$, $\{J_n\}, \{K_n\} \in \mathcal{J}^T$, so dass

$$\{\hat{A}_n\}\{A_n\} = \{L_n\} + \{J_n\} \text{ und } \{A_n\}\{\hat{A}_n\} = \{L_n\} + \{K_n\}.$$

Nach Definition des Ideals $\mathcal{J}^T$ gibt es endliche Teilmengen $\{t_1, ..., t_m\}, \{\tau_1, ..., \tau_l\}$ von T, sowie Folgen $\{\hat{J}_n^{t_i}\} \in \mathcal{J}^{t_i}, \{\hat{K}_n^{\tau_i}\} \in \mathcal{J}^{\tau_i}$ und $\{\hat{J}_n\}, \{\hat{K}_n\} \in \mathcal{J}^T$ mit $\|\{\hat{J}_n\}\|, \|\{\hat{K}_n\}\| < 1/4$, so dass

$$\{J_n\} = \sum_{i=1}^{m}\{\hat{J}_n^{t_i}\} + \{\hat{J}_n\} \text{ und } \{K_n\} = \sum_{i=1}^{l}\{\hat{K}_n^{\tau_i}\} + \{\hat{K}_n\}.$$

Setzen $\delta := 1/(4\|\{\hat{A}_n\}\|)$ und für $\{\tilde{A}_n\} \in \mathcal{A}^T$ mit $\|\{A_n\} - \{\tilde{A}_n\}\| < \delta$ sei

$$\{D_n\} := \{A_n\} - \{\tilde{A}_n\} \quad (\text{dann ist } \|\{D_n\}\| < \delta).$$

Haben dann

$$\{\hat{A}_n\}\{\tilde{A}_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{m}\{\hat{J}_n^{t_i}\} + \{\hat{J}_n\} + \{\hat{A}_n\}\{D_n\}$$

$$\{\tilde{A}_n\}\{\hat{A}_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{l}\{\hat{K}_n^{\tau_i}\} + \{\hat{K}_n\} + \{D_n\}\{\hat{A}_n\}$$

wobei $\|\{\hat{J}_n\} + \{\hat{A}_n\}\{D_n\}\|, \|\{\hat{K}_n\} + \{D_n\}\{\hat{A}_n\}\| < 1/2$. Nach Lemma 1.1.4 sind die Folgen $\{L_n\} + \{\hat{J}_n\} + \{\hat{A}_n\}\{D_n\}$ und $\{L_n\} + \{\hat{K}_n\} + \{D_n\}\{\hat{A}_n\}$ invertierbar in $\mathcal{A}^T$. Definieren nun

$$\begin{aligned}
\{B_n\} &:= (\{L_n\} + \{\hat{J}_n\} + \{\hat{A}_n\}\{D_n\})^{-1}\{\hat{A}_n\} \in \mathcal{A}^T \\
\{C_n\} &:= \{\hat{A}_n\}(\{L_n\} + \{\hat{K}_n\} + \{D_n\}\{\hat{A}_n\})^{-1} \in \mathcal{A}^T \\
\{J_n^{t_i}\} &:= (\{L_n\} + \{\hat{J}_n\} + \{\hat{A}_n\}\{D_n\})^{-1}\{\hat{J}_n^{t_i}\} \in \mathcal{J}^{t_i}, i = 1, ..., m \\
\{K_n^{\tau_i}\} &:= \{\hat{K}_n^{\tau_i}\}(\{L_n\} + \{\hat{K}_n\} + \{D_n\}\{\hat{A}_n\})^{-1} \in \mathcal{J}^{\tau_i}, i = 1, ..., l.
\end{aligned}$$

Nun gibt es, aufgrund der Definition der Ideale $\mathcal{J}^t$, gewisse Folgen $\{G_n\}, \{\hat{G_n}\} \in \mathcal{G}$ und Operatoren $K^{t_i} \in \mathcal{K}^{t_i},\ K^{\tau_i} \in \mathcal{K}^{\tau_i}$, so dass

$$\{B_n\}\{\tilde{A}_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{m}\{J_n^{t_i}\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{m}\{E_n^{t_i}(L_n^{t_i}K^{t_i}L_n^{t_i})\} + \{G_n\},$$
$$\{\tilde{A}_n\}\{C_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{l}\{K_n^{\tau_i}\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{l}\{E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i}K^{\tau_i}L_n^{\tau_i})\} + \{\hat{G_n}\}.$$

Anwenden von W^t auf diese Gleichungen liefert mit der Bedingung II für alle $t \in T$

$$\begin{aligned} W^t\{B_n\}W^t\{\tilde{A}_n\} &= \begin{cases} I^t & \text{falls } t \notin \{t_1, ..., t_m\} \\ I^{t_i} + K^{t_i} & \text{falls } t = t_i \in \{t_1, ..., t_m\}, \end{cases} \\ W^t\{\tilde{A}_n\}W^t\{C_n\} &= \begin{cases} I^t & \text{falls } t \notin \{\tau_1, ..., \tau_l\} \\ I^{\tau_i} + K^{\tau_i} & \text{falls } t = \tau_i \in \{\tau_1, ..., \tau_l\} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.13}$$

und so die Invertierbarkeit von $W^t\{\tilde{A_n}\}$ für alle $t \in T\backslash(\{t_1, ..., t_m\} \cup \{\tau_1, ..., \tau_l\})$. □

Mit den Gleichungen (2.13) ist auch das folgende Theorem bewiesen:

Theorem 2.4.1. *Ist $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmfolge, dann sind alle Operatoren $W^t\{A_n\}$ Fredholmsch auf $\boldsymbol{E}^t$ und die Anzahl der nichtinvertierbaren Operatoren unter ihnen ist endlich.*

Definition 2.4.3. Führen nun für alle Fredholmfolgen $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ jeweils die drei folgenden (endlichen) Zahlen ein:

$$\begin{aligned} \alpha(\{A_n\}) &:= \sum_{t\in T} \dim\ker W^t\{A_n\}, \\ \beta(\{A_n\}) &:= \sum_{t\in T} \dim\operatorname{coker} W^t\{A_n\} \text{ und} \\ \operatorname{ind}(\{A_n\}) &:= \alpha(\{A_n\}) - \beta(\{A_n\}). \end{aligned}$$

$\operatorname{ind}(\{A_n\})$ heißt Index der Fredholmfolge $\{A_n\}$.

Lemma 2.4.3. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmsch und $\{B_n\} \in \mathcal{A}^T$. Dann gilt:*

1. *Ist $\|\{B_n\}\|$ hinreichend klein, so gilt $\alpha(\{A_n\} + \{B_n\}) \leq \alpha(\{A_n\})$, $\beta(\{A_n\} + \{B_n\}) \leq \beta(\{A_n\})$ und $\operatorname{ind}(\{A_n\} + \{B_n\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\})$.*
2. *Ist $\{B_n\} \in \mathcal{J}^T$, so gilt $\operatorname{ind}(\{A_n\} + \{B_n\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\})$.*
3. *Ist $\{B_n\}$ Fredholmsch, so gilt $\operatorname{ind}(\{A_n\}\{B_n\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\}) + \operatorname{ind}(\{B_n\})$.*

Beweis. (Skizze).
In Lemma 1.1.3 sind die Eigenschaften von Fredholmoperatoren aufgeführt.
Offenbar ist $\operatorname{ind}(\{A_n\}) = \sum_{t\in T} \operatorname{ind}(W^t\{A_n\})$, woraus dann die dritte Behauptung folgt. Nach Lemma 2.4.2 erhalten alle, bis auf endlich viele, der $W^t(\{A_n\} + \{B_n\})$ ihre Invertierbarkeit bei kleinen Störungen $\{B_n\}$. Ist $t \in T$ derart, dass $W^t(\{A_n\} + \{B_n\})$ oder $W^t\{A_n\}$ nicht invertierbar ist, dann ist nach Gleichung (2.8)

$$\|W^t(\{A_n\} + \{B_n\}) - W^t\{A_n\}\| = \|W^t\{B_n\}\| \leq M^t c^t \|\{B_n\}\|.$$

Ist dies für alle diese t hinreichend klein, so folgt aus den bekannten Eigenschaften der Fredholmoperatoren $W^t(\{A_n\} + \{B_n\})$,bzw. $W^t\{A_n\}$ die erste Behauptung.

Nach der Definition von $\mathcal{J}^T$ läßt sich $\{B_n\} \in \mathcal{J}^T$ für jedes $\epsilon > 0$ schreiben als

$$\{B_n\} = \{\tilde{J}_n^k\} + \{\hat{J}_n^k\}, \text{ wobei } \{\tilde{J}_n^k\} \in \mathcal{J}_0^T, \|\{\hat{J}_n^k\}\| < \epsilon$$

und aufgrund der Separationsbedingung II gilt: $W^t\{\tilde{J}_n^k\} \in \mathcal{K}(\mathbf{E}^t)$. Eine Störung von $\{A_n\}$ aus $\mathcal{J}^T$ bewirkt also eine kompakte Störung endlich vieler $W^t\{A_n\}$, plus eine hinreichend kleine Störung. Da der Index von Fredholmoperatoren konstant unter kompakten Störungen ist, folgt mit der ersten Behauptung auch die zweite:

$$\operatorname{ind}(\{A_n\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\} + \{\hat{J}_n^k\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\} + \{\tilde{J}_n^k\} + \{\hat{J}_n^k\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\} + \{B_n\}).$$

□

Wir kommen nun wieder zurück zu den Approximationszahlen der Operatoren A_n, und zu einem erstaunlichen Resultat für Fredholmfolgen $\{A_n\}$, das in den beiden nachfolgenden Abschnitten bewiesen werden soll (vgl. Lemma 2.5.2 und Lemma 2.6.2).

Theorem 2.4.2. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmfolge. Dann haben die Approximationszahlen der A_n die k-splitting-Eigenschaft mit $k = \alpha(\{A_n\})$, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} s_{\alpha(\{A_n\})}(A_n) = 0 \text{ und } \liminf_{n\to\infty} s_{\alpha(\{A_n\})+1}(A_n) > 0.$$

2.5 Die $\alpha(\{A_n\})$te Approximationszahl einer Fredholmfolge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$

Sei $\{A_n\}$ Fredholmfolge. Mit den Bezeichnungen und der Gleichung (2.11)

$$\{B_n\}\{A_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{m} \{E_n^{t_i}(L_n^{t_i} K^{t_i} L_n^{t_i})\} + \{G_n\}$$

aus Lemma 2.4.2 folgt sofort, dass die Operatoren $W^t\{A_n\}$ für alle $t \in T\backslash\{t_1, ..., t_m\}$ einen trivialen Kern besitzen. Setzen $k_i := \dim\ker W^{t_i}\{A_n\}$ für $i = 1, ..., m$ und erhalten

$$\alpha(\{A_n\}) = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

Seien für alle $i = 1, ..., m$ jeweils $\mathbf{X}^i := \ker W^{t_i}\{A_n\}$ und $(P^i, \hat{P}^i, P_n^i, \hat{P}_n^i, R_n^i)$ ein zu $\mathbf{X}^i$ gehörendes Projektorensystem. Setzen noch $\tilde{P}_n^i := L_n^{t_i} P^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|P^i - \tilde{P}_n^i\| &= \|(I^{t_i} - L_n^{t_i})P^i\| \to_n 0, \\ \|P^i - P_n^i\| &\to_n 0, \text{ und folglich} \\ \|P_n^i - \tilde{P}_n^i\| &\to_n 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nach Lemma 2.2.1 gilt für alle i und $n \geq n_{t_i}$ außerdem die folgende Abschätzung:

$$\|A_n R_n^i\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \leq \frac{M^{t_i} c^{t_i}}{1 - \|(I^{t_i} - L_n^{t_i})P^i\|} \|A_n^{(t_i)} P^i\| \to_n 0. \tag{2.15}$$

Für jedes $i = 1, ..., m$ und alle $n \geq \max_i n_{t_i}$ sei $\{x_{i,l}^n\}_{l=1}^{k_i}$ Basis von $\operatorname{im} R_n^i$, die wie in Folgerung 1.2.1 gewählt werde: Für alle Mengen $\{y_{i,l}^n\}_{l=1}^{k_i} \subset \mathbf{E}$ mit der Eigenschaft $\|x_{i,l}^n - y_{i,l}^n\| \leq (2k_i)^{-1}$, $(l = 1, ..., k_i)$ und für alle Skalare $\alpha_{i,j}^n$ gilt:

$$|\alpha_{i,p}^n| \leq 2\|\sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j}^n y_{i,j}^n\| \text{ für alle } p = 1, ..., k_i. \tag{2.16}$$

Lemma 2.5.1. *Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j = 1, ..., m$, $k = 1, ..., k_j$, $n \geq N$ und alle Skalare $\alpha_{i,l}$ gilt*

$$|\alpha_{j,k}| \leq \gamma \|\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} x_{i,l}^n\|, \text{ wobei } \gamma = 4 \max_{i=1,...,m} M^{t_i} (c^{t_i})^3 \|P^i\|.$$

Beweis. Schritt 1: Wegen (2.14) gibt es ein $p \in \mathbb{N}$ so dass $\|P^i(P^i - \tilde{P}_p^i)\| \leq (4k_i M^{t_i} c^{t_i})^{-1}$ für alle $i = 1, ..., m$. Damit gilt zunächst

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P_n^i - P_n^i\| &= \|\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P^i + \tilde{P}_n^i L_p^{t_i} (P_n^i - P^i) - P_n^i\| \\ &= \|\tilde{P}_n^i \tilde{P}_p^i + \tilde{P}_n^i L_p^{t_i} (P_n^i - P^i) - P_n^i\| \\ &= \|\tilde{P}_n^i P^i + \tilde{P}_n^i (\tilde{P}_p^i - P^i) + \tilde{P}_n^i L_p^{t_i} (P_n^i - P^i) - P_n^i\| \\ &= \|\tilde{P}_n^i - P_n^i + \tilde{P}_n^i (\tilde{P}_p^i - P^i) + \tilde{P}_n^i L_p^{t_i} (P_n^i - P^i)\| \\ &\leq \|\tilde{P}_n^i - P_n^i\| + \|\tilde{P}_n^i (P^i - \tilde{P}_p^i)\| + \|\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} (P_n^i - P^i)\| \\ &\to_n \|P^i (P^i - \tilde{P}_p^i)\| \leq (4k_i M^{t_i} c^{t_i})^{-1}. \end{aligned}$$

Deshalb muss es weiterhin ein N_p geben, so dass $\|\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P_n^i - P_n^i\| \leq (2k_i M^{t_i} c^{t_i})^{-1}$ für $i = 1, ..., m$ und alle $n \geq N_p$. Setzen $S_{n,p}^i := E_n^{t_i} (\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} L_n^{t_i})$ und erhalten dann mit der Tatsache, dass $x_{i,l}^n = R_n^i x_{i,l}^n$ für alle i und l die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|S_{n,p}^i x_{i,l}^n - x_{i,l}^n\| &= \|(S_{n,p}^i R_n^i - R_n^i) x_{i,l}^n\| = \|E_n^{t_i} ((\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} L_n^{t_i} P_n^i - P_n^i) L_n^{t_i}) x_{i,l}^n\| \\ &= \|E_n^{t_i} ((\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P_n^i - P_n^i) L_n^{t_i}) x_{i,l}^n\| \leq \|E_n^{t_i} (\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P_n^i - P_n^i)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\ &\leq M^{t_i} c^{t_i} \|\tilde{P}_n^i L_p^{t_i} P_n^i - P_n^i\| \leq (2k_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Erhalten damit aus Gleichung (2.16) die Beziehung

$$2\|\sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} S^i_{n,p} x^n_{i,l}\| \geq |\alpha_{i,k}| \text{ für } i = 1, ..., m,\ k = 1, ..., k_i \text{ und alle } n \geq N_p. \tag{2.17}$$

Schritt 2: Weiter ist $P^i L_p^{t_i} \in \mathcal{K}^i$ für alle $i = 1, ..., m$ und wegen der Bedingung II gilt für alle $j \neq i$, dass $E_n^{-t_j}(E_n^{t_i}(L_n^{t_i} P^i L_p^{t_i} L_n^{t_i}))L_n^{t_j} \to_n 0$ stark. Nach Lemma 1.1.5 und Gleichung (2.14) gilt dann sogar

$$\begin{aligned}
&\|S^i_{n,p} R^j_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&\leq \|E_n^{t_i}(\tilde{P}^i_n L_p^{t_i} L_n^{t_i}) E_n^{t_j}(\tilde{P}^j_n L_n^{t_j})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} + \|E_n^{t_i}(\tilde{P}^i_n L_p^{t_i} L_n^{t_i}) E_n^{t_j}((P^j_n - \tilde{P}^j_n) L_n^{t_j})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&\leq M^{t_j} c^{t_j} \|E_n^{-t_j}(E_n^{t_i}(\tilde{P}^i_n L_p^{t_i} L_n^{t_i})) L_n^{t_j} P^j\| + M^{t_i} c^{t_i} \|L_n^{t_i} P^i L_p^{t_i}\| M^{t_j} c^{t_j} \|P^j_n - \tilde{P}^j_n\| \\
&\leq M^{t_j} c^{t_j} \|E_n^{-t_j}(E_n^{t_i}(L_n^{t_i} P^i L_p^{t_i} L_n^{t_i})) L_n^{t_j} P^j\| + M^{t_i} (c^{t_i})^3 \|P^i\| M^{t_j} c^{t_j} \|P^j_n - \tilde{P}^j_n\| \to_n 0,
\end{aligned}$$

und es gibt somit ein $N \geq N_p$, so dass gilt

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{m} k_j \|S^i_{n,p} R^j_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \leq 1/4 \text{ für alle } i = 1, ..., m \text{ und alle } n \geq N. \tag{2.18}$$

Schritt 3: Seien nun $\alpha_{i,l}$ beliebige, fixierte Skalare und i_0, l_0 derart, dass $|\alpha_{i_0,l_0}| = \max_{i,l} |\alpha_{i,l}|$. Dann folgt mit den Gleichungen (2.17) und (2.18)

$$\begin{aligned}
\|S^{i_0}_{n,p}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \|\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} x^n_{i,l}\| &\geq \|\sum_{l=1}^{k_{i_0}} \alpha_{i,l} S^{i_0}_{n,p} x^n_{i,l}\| - \|\sum_{i=1, i\neq i_0}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} S^{i_0}_{n,p} x^n_{i,l}\| \\
&\geq 1/2|\alpha_{i_0,l_0}| - |\alpha_{i_0,l_0}| \sum_{i=1, i\neq i_0}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \|S^{i_0}_{n,p} R^i_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\
&\geq 1/2|\alpha_{i_0,l_0}| - 1/4|\alpha_{i_0,l_0}| \\
&= 1/4|\alpha_{i_0,l_0}|.
\end{aligned}$$

Da

$$\|S^i_{n,p}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} = \|E_n^{t_i}(\tilde{P}^i_n L_p^{t_i} L_n^{t_i})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \leq M^{t_i} c^{t_i} \|L_n^{t_i} P^i L_p^{t_i}\| \leq M^{t_i} (c^{t_i})^3 \|P^i\|,$$

gilt schließlich für alle $n \geq N$, für alle $j = 1, ..., m$ und alle $k = 1, ..., k_j$

$$|\alpha_{j,k}| \leq |\alpha_{i_0,l_0}| \leq 4\|S^{i_0}_{n,p}\| \|\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} x^n_{i,l}\| \leq 4 \max_i \left(M^{t_i} (c^{t_i})^3 \|P^i\|\right) \cdot \|\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_i} \alpha_{i,l} x^n_{i,l}\|.$$

□

Nach diesem Lemma garantiert also die Separationsbedingung II, dass diese Basiselemente (wenn n groß ist) allesamt linear unabhängig sind, d.h. mit anderen Worten, die gelifteten Projektoren R^i_n sind „wesentlich verschieden“ und ihre Bilder spannen einen Raum der Dimension $\alpha(\{A_n\})$ auf.

Kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts:

Lemma 2.5.2. *Ist* $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ *Fredholmfolge, so gilt* $s_{\alpha(\{A_n\})}(A_n) \to_n 0$.

Beweis. Führen Funktionale $f_{i,j}^n : \operatorname{span}\{x_{1,1}^n, ..., x_{m,k_m}^n\} \to \mathbb{C}$ ein, durch

$$f_{i,j}^n \left(\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{k_k} \alpha_{k,l}^n x_{k,l}^n \right) := \alpha_{i,j}^n \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le k_i.$$

Wegen des vorhergehenden Lemmas gilt $\|f_{i,j}^n\| \le \gamma$ für $n \ge N$. Die Funktionale können nach dem Satz von Hahn-Banach (Theorem 1.1.4) auf ganz $\mathbf{E}$ fortgesetzt werden:

$$f_{i,j}^n \in \mathbf{E}^* \text{ und } \|f_{i,j}^n\| \le \gamma.$$

Definieren nun für $n \ge N$ Operatoren $S_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E})$ und $R_n \in \mathcal{L}(\mathbf{E}_n)$ durch

$$S_n x := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} f_{i,j}^n(x) x_{i,j}^n \text{ und } R_n := L_n S_n L_n.$$

Die Operatoren R_n bilden eine Folge gleichmäßig beschränkter Projektoren mit der Eigenschaft $\dim \operatorname{im} R_n = \alpha(\{A_n\})$. Für $x \in \mathbf{E}_n$ gilt nun (wegen $x_{i,j}^n = R_n^i x_{i,j}^n$)

$$\begin{aligned} \|A_n R_n x\| &= \|A_n \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} f_{i,j}^n(x) x_{i,j}^n\| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \|f_{i,j}^n\| \|x\| \|A_n R_n^i x_{i,j}^n\| \\ &\le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \gamma \|x\| \|A_n R_n^i\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \|x_{i,j}^n\| = \gamma \|x\| \sum_{i=1}^{m} k_i \|A_n R_n^i\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \end{aligned} \tag{2.19}$$

und somit wegen Gleichung (2.15)

$$\|A_n R_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \le \gamma \sum_{i=1}^{m} k_i \|A_n R_n^i\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \le \gamma \sum_{i=1}^{m} \frac{M^{t_i} c^{t_i} k_i}{1 - \|(I^{t_i} - L_n^{t_i}) P^i\|} \|A_n^{(t_i)} P^i\| \to_n 0.$$

Erhalten so

$$\begin{aligned} s_{\alpha(\{A_n\})}(A_n) &= \inf\{\|A_n + F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - \alpha(\{A_n\})}(\mathbf{E}_n)\} \\ &\le \|A_n - A_n(L_n - R_n)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \\ &= \|A_n R_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \to_n 0. \end{aligned}$$

□

Es sei hier ebenfalls noch vermerkt, dass damit für $n \ge N$ auch folgende Abschätzung für die Konvergenzgeschwindigkeit gegeben ist:

$$\begin{aligned} s_{\alpha(\{A_n\})}(A_n) &\le 4 \max_{i=1,\dots,m} \left(M^{t_i} (c^{t_i})^3 \|P^i\| \right) \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{M^{t_i} c^{t_i} k_i}{1 - \|(I^{t_i} - L_n^{t_i}) P^i\|} \|A_n^{(t_i)} P^i\| \\ &\le \text{ const } \sum_{i=1}^{m} \|A_n^{(t_i)} P^i\| \to_n 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aus dem Beweis ist erkennbar, wie die Größe des N genauer bestimmt werden könnte.

2.6 Die $(\alpha(\{A_n\})+1)$te Approximationszahl einer Fredholmfolge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$

Die Ergebnisse dieses Abschnitts basieren auf den Ideen in [9], Abschnitt 7, der Beweis des folgenden Lemmas wurde aber verändert und an die „neue Situation“ angepasst.

Lemma 2.6.1. *Sei $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ Fredholmfolge. Dann gilt* $\liminf_n s_{\beta(\{A_n\})+1}(A_n) > 0$.

Beweis. Aus den Bezeichnungen und der Gleichung (2.12)

$$\{A_n\}\{C_n\} = \{L_n\} + \sum_{i=1}^{l} \{E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i})\} + \{G_n\}$$

aus Lemma 2.4.2 ergibt sich sofort, dass die Operatoren $W^t\{A_n\}$ für alle $t \in T\backslash\{\tau_1, ..., \tau_l\}$ einen trivialen Cokern besitzen und

$$\beta(\{A_n\}) = \sum_{i=1}^{l} \dim \operatorname{coker} W^{\tau_i}\{A_n\}.$$

Nach Theorem 2.4.1 ist außerdem für alle τ_i der Operator $W^{\tau_i}\{A_n\}$ normal auflösbar, $\dim\ker W^{\tau_i}\{A_n\} < \infty$ und $\dim \operatorname{coker} W^{\tau_i}\{A_n\} < \infty$. Kern und Bild des Operators sind somit komplementierbar (vgl. Lemma 1.1.1).

Seien $(P^i, \hat{P}^i, P_n^i, \hat{P}_n^i, R_n^i)$ ein zu $\operatorname{coker} W^{\tau_i}\{A_n\}$ gehörendes Projektorensystem und $\hat{\mathbf{E}}^{\tau_i}$ ein Komplement von $\ker W^{\tau_i}\{A_n\}$ in $\mathbf{E}^{\tau_i}$.

Der Operator $W^{\tau_i}\{A_n\}|_{\hat{\mathbf{E}}^{\tau_i}} : \hat{\mathbf{E}}^{\tau_i} \to \operatorname{im} W^{\tau_i}\{A_n\}$ ist ein bijektiver Homomorphismus zwischen Banachräumen, der nach dem Isomorphiesatz von Banach (vgl. Theorem 1.1.3) schon ein Isomorphismus ist, d.h. es gibt in $\mathcal{L}(\operatorname{im} W^{\tau_i}\{A_n\}, \hat{\mathbf{E}}^{\tau_i})$ einen zu $W^{\tau_i}\{A_n\}$ inversen Operator $(W^{\tau_i}\{A_n\})^{-1}$. Setzen $W^{-\tau_i} := (W^{\tau_i}\{A_n\})^{-1}\hat{P}^i \in \mathcal{L}(\mathbf{E}^{\tau_i})$ und erhalten

$$W^{\tau_i}\{A_n\}W^{-\tau_i} = W^{\tau_i}\{A_n\}(W^{\tau_i}\{A_n\})^{-1}\hat{P}^i = \hat{P}^i.$$

Setzen nun weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n := C_n - \sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}),$$

und erhalten wegen der Bedingung I leicht, dass $\|\{B_n\}\| < \infty$.

Es gilt $\{A_n E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) - E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} \hat{P}^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i})\} \in \mathcal{G}$, denn

$$\begin{aligned}
&\| \left(A_n E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) - E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} \hat{P}^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i})\right) L_n\| \\
&= \| \left(E_n^{\tau_i}(A_n^{(\tau_i)} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) - E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} W^{\tau_i}\{A_n\} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i})\right) L_n\| \\
&= \|E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i}(A_n^{(\tau_i)} - W^{\tau_i}\{A_n\}) W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) L_n\| \\
&\leq M^{\tau_i} \|L_n^{\tau_i}(A_n^{(\tau_i)} - W^{\tau_i}\{A_n\}) W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}\|_{\mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^{\tau_i})} \|\{L_n\}\| \\
&\leq M^{\tau_i} \|L_n^{\tau_i}\| \|(A_n^{(\tau_i)} - W^{\tau_i}\{A_n\}) W^{-\tau_i} K^{\tau_i}\| \|L_n^{\tau_i}\| \|\{L_n\}\| \to_n 0,
\end{aligned}$$

weil $A_n^{(\tau_i)} K \to W^{\tau_i}\{A_n\}K$ gleichmäßig für jedes kompakte K (vgl. Lemma 1.1.5).

Damit ist nun

$$\begin{aligned}
A_n B_n &= A_n C_n - \sum_{i=1}^{l} A_n E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} W^{-\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) \\
&= L_n + \sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) - \sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} \hat{P}^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) + \hat{G}_n \\
&= L_n + \sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} P^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) + \hat{G}_n
\end{aligned}$$

mit einem $\{\hat{G}_n\} \in \mathcal{G}$.

Es gilt offenbar $\dim \operatorname{im} P^i = \dim \operatorname{coker} W^{\tau_i}\{A_n\}$ für alle i. Haben folglich

$$\dim \operatorname{im} \left(\sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} P^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i}) \right) \le \beta(\{A_n\}).$$

Schließlich ist $\|\hat{G}_n\| < 1/2$ für genügend große n, und Lemma 1.1.4 und Gleichung (2.2) liefern

$$\begin{aligned}
1/2 &\le (\|(L_n + \hat{G}_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)})^{-1} = s_1(L_n + \hat{G}_n) \\
&= \inf\{\|L_n + \hat{G}_n + F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - 1}(\mathbf{E}_n)\} \\
&\le \inf\{\|L_n + \hat{G}_n + F + \sum_{i=1}^{l} E_n^{\tau_i}(L_n^{\tau_i} P^i K^{\tau_i} L_n^{\tau_i})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - \beta(\{A_n\}) - 1}(\mathbf{E}_n)\} \\
&= \inf\{\|A_n B_n + F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - \beta(\{A_n\}) - 1}(\mathbf{E}_n)\} \\
&\le \inf\{\|A_n B_n + F B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - \beta(\{A_n\}) - 1}(\mathbf{E}_n)\} \\
&\le \|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} \inf\{\|A_n + F\|_{\mathcal{L}(\mathbf{E}_n)} : F \in \mathcal{F}_{\dim \mathbf{E}_n - \beta(\{A_n\}) - 1}(\mathbf{E}_n)\} \\
&\le \|\{B_n\}\| s_{\beta(\{A_n\})+1}(A_n).
\end{aligned}$$

□

Theorem 2.6.1. *Der Index einer Fredholmfolge ist stets gleich* 0.

Beweis. Das vorhergehende Lemma zusammen mit Lemma 2.5.2 zeigen, dass für den Index jeder Fredholmfolge $\{A_n\}$ gilt $\operatorname{ind}\{A_n\} \le 0$. Ist $\{A_n\}$ Fredholmsch, so gibt es ein $\{B_n\}$ mit $\{A_n\}\{B_n\} - \{L_n\} = \{J_n\}, \{B_n\}\{A_n\} - \{L_n\} = \{K_n\}$ und $\{J_n\}, \{K_n\} \in \mathcal{J}^T$. Damit ist aber $\{B_n\}$ selbst eine Fredholmfolge. Da

$$\operatorname{ind}(\{A_n\}) + \operatorname{ind}(\{B_n\}) = \operatorname{ind}(\{A_n\}\{B_n\}) = \operatorname{ind}(\{L_n\} + \{J_n\}) = \operatorname{ind}(\{L_n\}) = 0$$

(vgl. Lemma 2.4.3), folgt $\operatorname{ind}(\{A_n\}) = -\operatorname{ind}(\{B_n\}) \ge 0$, und die Behauptung. □

Nun gilt offenbar:

Lemma 2.6.2. *Ist* $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ *Fredholmfolge, dann ist* $\liminf_n s_{\alpha(\{A_n\})+1}(A_n) > 0$.

3 Beispiel: finite sections von Toeplitzoperatoren

3.1 Toeplitzoperatoren

Definition 3.1.1. Sei l_N^∞ der Banachraum aller Folgen $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}^N$, so dass

$$\|x\|_{l_N^\infty} := \sup_{i\in\mathbb{Z}_+} \|x_i\|_\infty < \infty, \text{ wobei } \|x_i\|_\infty = \max_{j=1..N} |x_i^j|,$$

und $l_N^0 \subset l_N^\infty$ der (abgeschlossene) Teilraum aller Nullfolgen.

Für $1 \le p < \infty$ bezeichne l_N^p den Banachraum aller Folgen $x : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C}^N$, für die

$$\|x\|_{l_N^p} := \left(\sum_{i=0}^\infty \|x_i\|_p^p \right)^{1/p} < \infty,$$

wobei $\|x\|_p^p = \|(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^N)\|_p^p = |x_i^1|^p + |x_i^2|^p + ... + |x_i^N|^p$.

Für $a \in L^\infty(\mathbb{T})$ seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ die Fourierkoeffizienten und weiter

$$\begin{aligned}
W &:= \{a \in L^\infty(\mathbb{T}) : \|a\|_W := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty\} \\
M^p &:= \{a \in L^\infty(\mathbb{T}) : \|a\|_{M^p} := \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^p)} < \infty,\ T(a) : x \mapsto (\sum_{j=0}^\infty a_{i-j}x_j)_{i=0}^\infty\} \\
C^p &:= \mathrm{clos}_{M^p}\{\text{trigonometrische Polynome}\} \\
\overline{H^\infty} &:= \{a \in L^\infty(\mathbb{T}) : a_i = 0\ \forall i \in \mathbb{Z}_+\} \\
\overline{H_p^\infty} &:= \overline{H^\infty} \cap M^p \\
C_p + \overline{H_p^\infty} &:= \{f + g : f \in C^p, g \in \overline{H_p^\infty}\}.
\end{aligned}$$

W, M^p und $C_p + \overline{H_p^\infty}$ sind Banachalgebren (vgl. [2], 2.5 und 2.53 und Lemma 3.1.1). $(C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$ bezeichne die Menge der $N \times N$-Matrizen mit Einträgen aus $C_p + \overline{H_p^\infty}$. Versehen mit der Norm $\|a\|_{(C_p+\overline{H_p^\infty})_{N\times N}} := \sum_{i,j=1}^N \|a^{i,j}\|_{M^p}$ wird diese zu einer Banachalgebra mit Eins. Ebenso $W_{N\times N}$ mit der Norm $\|a\|_{W_{N\times N}} := \sum_{i,j=1}^N \|a^{i,j}\|_W$.

Für $a \in (C_p+\overline{H_p^\infty})_{N\times N}$ seien der Toeplitzoperator $T(a)$ und der Hankeloperator $H(a)$ auf l_N^p definiert durch

$$T(a) : l_N^p \to l_N^p,\ x \mapsto \left(\sum_{j=0}^\infty a_{i-j}x_j \right)_{i=0}^\infty \quad \text{und } H(a) : l_N^p \to l_N^p,\ x \mapsto \left(\sum_{j=0}^\infty a_{i+j+1}x_j \right)_{i=0}^\infty.$$

Für die finite sections führen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ Projektoren P_n, W_n ein durch

$$\begin{aligned} P_n x = P_n(x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...) &:= (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, 0, 0, ...), \\ W_n x = W_n(x_0, x_1, ...x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...) &:= (x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_0, 0, 0, ...). \end{aligned}$$

$T_n(a)$ bezeichne den (eingeschränkten) Toeplitzoperator $P_n T(a) P_n|_{\operatorname{im} P_n}$.

Die Fälle $p \in \{0, 1, \infty\}$ bedürfen für das Weitere einer etwas genaueren Betrachtung:

Lemma 3.1.1. *Sei $p \in \{0, 1, \infty\}$. Dann gilt $M^p = W$ und $\|a\|_{M^p} = \|a\|_W$. (Folglich ist auch $(C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N} = W_{N\times N}$ und $\|a\|_{(C_p+\overline{H_p^\infty})_{N\times N}} = \|a\|_{W_{N\times N}}$). Weiterhin gilt für alle $a \in W_{N\times N}$ stets, dass*

$$\begin{aligned} &\|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_N^p)} \le \|a\|_{W_{N\times N}} \text{ und} \\ &T(a) \in \mathcal{L}_{N\times N}(V) := (\operatorname{clos}\{\textit{Polynome in } V\})_{N\times N}, \end{aligned}$$

wobei $V, V^{(-1)}, V^n \in \mathcal{L}(l_1^p)$ definiert werden durch

$$\begin{aligned} V(x_0, x_1, x_2, ...) &= (0, x_0, x_1, x_2, ...), \\ V^{(-1)}(x_0, x_1, x_2, ...) &= (x_1, x_2, ...), \\ V^n &= \begin{cases} (V)^n & : n \ge 0 \\ (V^{(-1)})^{|n|} & : n < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

und Polynome in V Operatoren der Gestalt $\sum_{i=-n}^{n} a_i V^i$ sind.

Beweis. Sei $a \in W$. Dann ist $a \in M^p$, denn (mit $\chi_i(t) := t^i$ $(t \in \mathbb{T})$)

$$\|a\|_{M^p} = \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^p)} \le \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| \|T(\chi_i)\|_{\mathcal{L}(l_1^p)} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| = \|a\|_W < \infty.$$

Sei nun $a \in M^1$. Dann ist auch $a \in W$, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=-k}^{\infty} |a_i| = \|T(a)e_k\|_{l_1^1} \le \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^1)} \|e_k\|_{l_1^1} = \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^1)} = \|a\|_{M^1}.$$

Da bekanntermaßen gilt $(l_1^0)^* = l_1^1$ und $(T(a))^* = T(\bar{a})$, folgt $W \subset M^0$, denn $\forall\, k$ gilt:

$$\sum_{i=-\infty}^{k} |a_i| = \sum_{i=-\infty}^{k} |\bar{a}_i| = \|T(\bar{a})e_k\|_{l_1^1} \le \|T(\bar{a})\|_{\mathcal{L}(l_1^1)} = \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^0)} = \|a\|_{M^0}.$$

$W \subset M^\infty$ gilt, denn $l_1^0 \subset l_1^\infty$ und somit

$$\|a\|_W = \|a\|_{M^0} = \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^0)} \le \|T(a)\|_{\mathcal{L}(l_1^\infty)} = \|a\|_{M^\infty}.$$

Sei nun $p = 1, a \in W_{N\times N}$ und $x \in l^1_N$ beliebig. Gilt

$$\begin{aligned}\|T(a)x\|_{l^1_N} &= \sum_{i=0}^{\infty} \| \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j}x_j\|_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N} | \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{N} a^{k,l}_{i-j}x^l_j| \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{N}\sum_{i=0}^{\infty} | \sum_{j=0}^{\infty} a^{k,l}_{i-j}x^l_j| = \sum_{k,l=1}^{N} \|T(a^{k,l})x^l\|_{l^1_1} \\ &\leq \sum_{k,l=1}^{N} \|T(a^{k,l})\|_{\mathcal{L}(l^1_1)}\|x^l\|_{l^1_1} \leq \|a\|_{W_{N\times N}}\|x\|_{l^1_N}\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|T(a)\|_{\mathcal{L}(l^1_N)} \leq \|a\|_{W_{N\times N}}$. Für $p \in \{0, \infty\}$ zeigt man dies analog.

Wenn $a \in W_{N\times N}$, dann gibt es eine Folge $\{p_n\} \subset W_{N\times N}$ matrixwertiger Polynome p_n, so dass $\|a - p_n\|_{W_{N\times N}} \to_n 0$ und somit auch

$$\|T(a^{k,l}) - T(p^{k,l}_n)\|_{\mathcal{L}(l^p_1)} = \|a^{k,l} - p^{k,l}_n\|_W \to_n 0 \ \forall l, k = 1, ..., N.$$

Offenbar ist $T(p^{k,l}_n)$ ein Polynom in V und deshalb $T(a^{k,l}) \in \operatorname{clos}\{\text{Polynome in } V\}$. Dies zeigt $T(a) \in \mathcal{L}_{N\times N}(V)$. □

Hier ist nun eine Kollektion interessanter und relevanter Resultate über Toeplitzoperatoren und deren finite sections:

Theorem 3.1.1. *Sei $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ und $a, b \in (C_p + \overline{H^\infty_p})_{N\times N}$.*

1. *$T(a)$ ist Fredholmoperator genau dann, wenn a invertierbar ist in $(C_p + \overline{H^\infty_p})_{N\times N}$. Falls $p \in \{0, 1, \infty\}$, dann gilt dies genau dann, wenn* $\dim\ker T(a) < \infty$ *und* $\operatorname{im} T(a)$ *abgeschlossen sind.*
2. *$T(ab) = T(a)T(b) + H(a)H(\tilde{b})$, wobei $\tilde{b}(t) := b(1/t), (t \in \mathbb{T})$*
3. *$T_n(ab) = T_n(a)T_n(b) + P_nH(a)H(\tilde{b})P_n + W_nH(\tilde{a})H(b)W_n$*
4. *$W^2_n = P_n, W_nP_n = P_nW_n = W_n, P^*_n = P_n, W^*_n = W_n, \|P_n\| = \|W_n\| = 1$,*
   $W_nT(a)W_n = T_n(\tilde{a})$

Beweis. 1. Gilt: a ist invertierbar in $(C_p+\overline{H^\infty_p})_{N\times N} \Leftrightarrow \det a$ ist invertierbar in $C_p+\overline{H^\infty_p}$. ($C_p + \overline{H^\infty_p}$ ist eine Banachalgebra. Die Behauptung „⇒" ist dann trivial und „⇐" folgt aus der Darstellung der Inversen a^{-1} durch die Matrix der Adjunkten der Einträge von a multipliziert mit $(\det a)^{-1}$). Der Rest folgt aus [2], 2.94, bzw. [5], 4.108.

2. nach [2], 2.14 und 2.92

3. nach [2], 7.7

4. überprüft man leicht durch einfaches ausrechnen. □

Bevor wir uns den Approximationszahlen zuwenden, wollen wir im nächsten Abschnitt zunächst genauer untersuchen, welche kompakten Operatoren in den Algebren auftauchen, die durch diese Toeplitzoperatoren erzeugt werden.

3.2 Kompakte Operatoren

Es sei $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$.

Definition 3.2.1. Setzen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}^p := \text{alg}\{T(a) : a \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}\},\\
&\mathcal{Q}^p : \text{ das kleinste abgeschlossene zweiseitige Ideal von } \mathcal{T}^p, \text{ das } P_1 \text{ enthält und}\\
&\mathcal{K}^p := \{K \in \mathcal{K}(l_N^p) : \|K(I-P_n)\|, \|(I-P_n)K\| \to_n 0\},
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{K}(l_N^p)$ die Menge der kompakten Operatoren auf l_N^p bezeichnet.

Lemma 3.2.1. *(Eigenschaften von $\mathcal{K}^p$).*

1. *$\mathcal{K}^p = \mathcal{Q}^p$ und stimmt für $1 < p < \infty$ außerdem mit $\mathcal{K}(l_N^p)$ überein.*
2. *$\mathcal{K}^p$ enthält $H(a)H(\tilde{b})$ und $H(\tilde{b})H(a)$ für alle $a, b \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$.*
3. *$(\mathcal{K}^p)^* = \mathcal{K}^q$, für $1 \le p < \infty, 1/p + 1/q = 1$, bzw. $p = 0, q = 1$.*
4. *Für $1 \le p < \infty$ gilt $W_n K W_n \to_n 0$ stark für alle $K \in \mathcal{K}^p$.*

Beweis. 1. (Die Aussagen ist wohlbekannt, und z.B. in [2] oder [5] zu finden).
Führen Operatoren V^n wie in (3.1) ein und setzen $V_N^n := \text{diag}(V^n, ..., V^n)$. Erhalten so

$$P_{n+1} = I - V_N^{n+1}V_N^{-(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} V_N^i(I - V_N^1 V_N^{-1})V_N^{-i} = \sum_{i=0}^{n} V_N^i P_1 V_N^{-i} \in \mathcal{Q}^p.$$

Sei weiterhin $\delta_{i,k}$ das Kronecker-Delta und $a^{(k,l)} := (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{i,j=1}^N$. Man rechnet leicht nach, dass für $A^{(m,n,k,l)} := P_{n+1}V_N^n T(a^{(k,l)})V_N^{-m}P_{m+1}$ gilt

$$(A^{(m,n,k,l)}x)_i^j = \begin{cases} x_m^l & \text{falls } i = n, j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$A^{(m,n,k,l)}$ ist also ein Operator aus $\mathcal{Q}^p$ und die Komponenten von $A^{(m,n,k,l)}$ sind, bis auf eine, gleich 0. Durch Linearkombination solcher Operatoren lassen sich alle P_nAP_n erzeugen (für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Operatoren A), und liegen somit in $\mathcal{Q}^p$.
Speziell für $K \in \mathcal{K}^p$ gilt nun, dass

$$\|K - P_nKP_n\| \le \|K(I-P_n)\| + \|(I-P_n)K\|\|P_n\| \to_n 0, \tag{3.2}$$

und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{Q}^p$ folgt somit auch $K \in \mathcal{Q}^p$.
Sei nun $K \in \mathcal{Q}^p$. Dann ist K offenbar kompakt. Zeigen $K \in \mathcal{K}^p$.
Für $1 < p < \infty$ gilt $P_n \to I$ und $P_n^* \to I^*$ jeweils stark, und somit auch $\|L(I-P_n)\|$ sowie $\|(I-P_n)L\| \to 0$ für alle $L \in \mathcal{K}(l_N^p)$ (vgl. Lemma 1.1.5), also $\mathcal{K}^p = \mathcal{K}(l_N^p)$ und

folglich auch $K \in \mathcal{K}^p$.
Für $p \in \{0, 1, \infty\}$ betrachten wir zunächst $A \in \mathcal{T}^p$ beliebig. Für gegebenes $\epsilon > 0$ sei

$$\hat{A}_\epsilon = \sum_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} T(a_{i,j}) \text{ mit } a_{i,j} \in W_{N\times N} \text{ und } \|A - \hat{A}_\epsilon\| < \epsilon/2.$$

Können das $\hat{A}_\epsilon$ wegen Lemma 3.1.1 nun aber wiederum approximieren durch

$$A_\epsilon = \sum_{i=1}^{u} \prod_{j=1}^{v} T(p_{i,j}), \text{ mit } p_{i,j} \text{ - matrixwertige Polynome und } \|\hat{A}_\epsilon - A_\epsilon\| < \epsilon/2.$$

Man sieht leicht ein, dass $(I - P_n)A_\epsilon P_1 = 0$ für n groß genug. Folglich gilt dann auch $\|(I - P_n)AP_1\| \leq \epsilon$ und, da ϵ beliebig gewählt wurde, muss $\|(I - P_n)AP_1\| \to_n 0$ gelten. Sei nun $K_\epsilon \in \mathcal{Q}^p$ für gegebenes $\epsilon > 0$ von der Gestalt

$$K_\epsilon = \sum_{j=1}^{r} B_j P_1 C_j \text{ mit } B_j, C_j \in \mathcal{T}^p \text{ und } \|K - K_\epsilon\| < \epsilon.$$

Nach den obigen Überlegungen gilt $\|(I - P_n)K_\epsilon\| \to_n 0$. Da ϵ wieder beliebig gewählt wurde, folgt schließlich, dass $\|(I - P_n)K\| \to_n 0$. Analog zeigt man $\|K(I - P_n)\| \to_n 0$. Also gilt $K \in \mathcal{K}^p$. Damit ist gezeigt, dass für alle $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ gilt $\mathcal{K}^p = \mathcal{Q}^p$.

2. Für $p \in \{0, 1, \infty\}$ ist $(C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N} = W_{N\times N}$ und es gibt Folgen trigonometrischer Polynome $\{a_k\}, \{b_k\} \subset W_{N\times N}$, mit $\|a - a_k\|, \|b - b_k\| \to_k 0$. Da $H(a_k)H(\tilde{b}_k) \in \mathcal{K}^p$ und

$$\begin{aligned}
&\|H(a)H(\tilde{b}) - H(a_k)H(\tilde{b}_k)\}\| = \\
&= \|T(ab) - T(a)T(b) - T(a_k b_k) + T(a_k)T(b_k)\| \\
&\leq \|T(ab) - T(a_k b_k)\| + \|T(a)(T(b) - T(b_k))\| + \|(T(a) - T(a_k))T(b_k)\| \\
&\leq \|ab - a_k b_k\| + \|a\|\|b - b_k\| + \|a - a_k\|\|b_k\| \to_k 0,
\end{aligned}$$

folgt $H(a)H(\tilde{b}) \in \mathcal{K}^p$ und ebenso $H(\tilde{b})H(a) \in \mathcal{K}^p$. Für $1 < p < \infty$ kann man zeigen, dass $H(a)$ stets kompakt ist, die Behauptung folgt dann aus 1.

3. Sei $\hat{K} \in \mathcal{K}^q$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $P_n\hat{K}P_n \in \mathcal{K}^q$ und offenbar gibt es stets ein $K_n \in \mathcal{K}^p$ mit $K_n^* = P_n\hat{K}P_n$. Wegen (3.2) sind $(P_n\hat{K}P_n), (K_n)$ Cauchyfolgen, die gegen $\hat{K} \in \mathcal{K}^q$, bzw. ein gewisses $K \in \mathcal{K}^p$ konvergieren, und es gilt $K^* = \hat{K}$, denn

$$\|K^* - \hat{K}\| \leq \|K^* - K_n^*\| + \|K_n^* - \hat{K}\| = \|K - K_n\| + \|P_n\hat{K}P_n - \hat{K}\| \to_n 0.$$

Also ist $\mathcal{K}^q \subset (\mathcal{K}^p)^*$. Die Umkehrung ist offensichtlich.

4. Da $\|W_n\| = 1$ für alle n, gilt für $K \in \mathcal{K}^p$, $x \in l_N^p$

$$\begin{aligned}
\|W_n K W_n x\| &\leq \|W_n K P_l W_n x\| + \|W_n K(I - P_l)W_n x\| \\
&\leq \|W_n\|\|K\| \left(\sum_{i=1}^{\min(n,l)} \|x_{n-i}\|_p^p \right)^{1/p} + \|W_n\|^2 \|K(I - P_l)\|\|x\| \\
&\to_{n\to\infty} \|K(I - P_l)\|\|x\|,
\end{aligned}$$

wobei $l \in \mathbb{N}$ beliebig ist, also muss wegen $\|K(I - P_l)\| \to_l 0$ die Behauptung gelten. □

3.3 Die Approximationszahlen der finite sections

Hier ist der Hauptsatz dieses Abschnitts:

Theorem 3.3.1. *Sei $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ und $\{A_n\} := \{T_n(a) + P_nKP_n + W_nLW_n + G_n\}$ mit $a \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$, $K, L \in \mathcal{K}^p$ und $\|G_n\| \to_n \infty$.*

- *Wenn die Funktion a invertierbar ist in $(C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$, dann sind die Operatoren $T(a) + K$ und $T(\tilde{a}) + L$ Fredholmsch auf l_N^p und die Approximationszahlen der A_n besitzen die k-splitting-Eigenschaft mit*

$$k = \dim\ker(T(a) + K) + \dim\ker(T(\tilde{a}) + L).$$

- *Andernfalls gilt $s_l(A_n) \to_n 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.*

Zum Beweis dieses Theorems findet die Theorie aus Kapitel 2 Anwendung.
Setzen dazu $T := \{1, 2\}$ und

$$\begin{aligned} &E = E^t := l_N^p && E_n := \operatorname{im} P_n \\ &L_n = L_n^t := P_n && \mathcal{K}^t := \mathcal{K}^p \\ &E_n^1(C) := P_nCP_n && E_n^2(C) := W_nCW_n \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^1 :=& \{\{P_nKP_n\} + \{G_n\} : K \in \mathcal{K}^p, \|G_n\| \to_n 0\} \\ \mathcal{J}^2 :=& \{\{W_nLW_n\} + \{G_n\} : L \in \mathcal{K}^p, \|G_n\| \to_n 0\} \\ \mathcal{A}_p^T :=& \operatorname{clos}_{\mathcal{F}^T}\{\{T_n(a)\} + \{P_nKP_n\} + \{W_nLW_n\} + \{G_n\} : \\ & a \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}, K, L \in \mathcal{K}^p, \|G_n\| \to_n 0\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.3.1. *Für $1 \le p < \infty$ ist die Theorie aus Kapitel 2 anwendbar.*
Präziser: Die L_n, L_n^t konvergieren dann jeweils stark gegen die Identitäten, die Bedingungen I und II sind erfüllt, $\mathcal{A}_p^T \subset \mathcal{F}^T$ ist eine Banachalgebra mit Eins $\{L_n\}$ und $\mathcal{J}^T, \mathcal{J}^1$, sowie $\mathcal{J}^2$ sind abgeschlossene zweiseitige Ideale von $\mathcal{A}_p^T$.

Beweis. Die starke Konvergenz der L_n, L_n^t, sowie die Bedingung I sind offensichtlich. Weiter ist $\mathcal{K}^t$ nach Lemma 3.2.1(1) Banachalgebra und

$$\{AL_k^t : A \in \operatorname{im} L_k^t, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K}^t \subset \mathcal{K}(\mathbf{E}^t) \text{ für } t = 1, 2.$$

Mit Lemma 3.2.1(4) gilt für beliebige $K^t \in \mathcal{K}^t,\ t = 1, 2$

$$\begin{aligned} W^1\{E_n^1(L_n^1K^1)\} =& \operatorname{s-lim} P_nP_nK^1P_nP_n = K^1 \\ W^2\{E_n^2(L_n^2K^2)\} =& \operatorname{s-lim} W_nW_nK^2W_nW_n = \operatorname{s-lim} P_nK^2P_n = K^2 \\ W^2\{E_n^1(L_n^1K^1)\} =& \operatorname{s-lim} W_nP_nK^1P_nW_n = \operatorname{s-lim} W_nK^1W_n = 0 \\ W^1\{E_n^2(L_n^2K^2)\} =& \operatorname{s-lim} P_nW_nK^2W_nP_n = \operatorname{s-lim} W_nK^2W_n = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

also ist auch die Bedingung II erfüllt, und es gilt $\mathcal{A}_p^T \subset \mathcal{F}^T$, denn

$$\begin{aligned} W^1\{T_n(a)\} &= \text{s-lim}\, P_nP_nT(a)P_nP_n = T(a) \text{ und} \\ W^2\{T_n(a)\} &= \text{s-lim}\, W_nP_nT(a)P_nW_n = T(\tilde{a}) \end{aligned}$$

für alle $a \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$. Für alle $K, L \in \mathcal{K}^p$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} \{T_n(a)W_nKW_n\} =& \{W_nW_nT(a)W_nKW_n\} = \{W_nP_nT(\tilde{a})P_nKW_n\} \\ =& \{W_nT(\tilde{a})KW_n\} - \{W_nT(\tilde{a})(I-P_n)KW_n\} \in \mathcal{J}^2 \\ \{W_nKW_nT_n(a)\} =& \{W_nKT(\tilde{a})W_n\} - \{W_nK(I-P_n)T(\tilde{a})W_n\} \in \mathcal{J}^2 \\ \{T_n(a)P_nKP_n\} =& \{P_nT(a)KP_n\} - \{P_nT(a)(I-P_n)KP_n\} \in \mathcal{J}^1 \\ \{P_nKP_nT_n(a)\} =& \{P_nKT(a)P_n\} - \{P_nK(I-P_n)T(a)P_n\} \in \mathcal{J}^1 \\ \{W_nLW_nW_nKW_n\} =& \{W_nLKW_n\} - \{W_nL(I-P_n)KW_n\} \in \mathcal{J}^2 \\ \{P_nLP_nP_nKP_n\} =& \{P_nLKP_n\} - \{P_nL(I-P_n)KP_n\} \in \mathcal{J}^1 \\ \{W_nKW_nP_nLP_n\} =& \{(W_nKW_nL)P_n\} \in \mathcal{G} \\ \{P_nKP_nW_nLW_n\} =& \{W_n(W_nKW_nL)W_n\} \in \mathcal{G} \end{aligned} \tag{3.4}$$

nach Lemma 3.2.1(1) und (4). Schließlich gilt für alle $a, b \in (C_p+\overline{H_p^\infty})_{N\times N}$ (vgl. Theorem 3.1.1(3))

$$T_n(a)T_n(b) = T_n(ab) - P_nH(a)H(\tilde{b})P_n - W_nH(\tilde{a})H(b)W_n$$

und $H(a)H(\tilde{b}), H(\tilde{a})H(b) \in \mathcal{K}^p$ (vgl. Lemma 3.2.1(2)). Dies zeigt nun, zusammen mit den Gleichungen (3.4) und der Tatsache, dass $\mathcal{G}$ abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{F}^T$ ist, dass

$$\{\{T_n(a)\} + \{P_nKP_n\} + \{W_nLW_n\} + \{G_n\} : a \in (C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}, K, L \in \mathcal{K}^p, \|G_n\| \to_n 0\}$$

eine Algebra mit Eins $\{L_n\}$ ist, und die $\mathcal{J}^t$ darin zweiseitige Ideale bilden. Lemma 2.4.1 besagt, dass $\mathcal{J}^T, \mathcal{J}^1$ und $\mathcal{J}^2$ automatisch abgeschlossen sind, und so folgt nun, dass $\mathcal{A}_p^T \subset \mathcal{F}^T$ eine Banachalgebra mit Eins $\{L_n\}$ ist und $\mathcal{J}^T, \mathcal{J}^1$ und $\mathcal{J}^2$ abgeschlossene zweiseitige Ideale von $\mathcal{A}_p^T$ bilden. □

An dieser Stelle ist nun auch leicht zu sehen, warum der Fall l^1 mit der Theorie aus [9] nicht behandelt werden konnte, und warum dies durch eine Abschwächung der Separationsbedingung, wie in der vorliegenden Arbeit, gerade ermöglicht wird. Die Schwierigkeit besteht darin, dass die W_n für $1 < p < \infty$ schwach gegen 0 konvergieren, dies für $p = 1$ aber nicht mehr der Fall ist, denn die Folge $(1, 1, 1, ...) \in l^\infty$ definiert zum Beispiel ein stetiges lineares Funktional f auf l^1 und es gilt $f(W_n(1, 0, 0, ...)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb ist im Falle $p = 1$ die Separationsbedingung aus [9]

$$\frac{1}{\|(E_n^\tau)^{-1}\|\|E_n^t\|}(E_n^\tau)^{-1}E_n^t \to 0 \text{ schwach, für } n \to \infty \text{ und alle } t \neq \tau \tag{3.5}$$

nicht erfüllt und die dortige Theorie nicht anwendbar.

[9], Lemma 5.2. zeigt, dass (3.5) äquivalent ist zu folgender Bedingung

$$\begin{aligned}&\text{Für alle } t \in T \text{ und jeden kompakten Operator } K \in \mathcal{K}(\mathbf{E}^t) \text{ gilt}\\ &\{E_n^t L_n^t K^t E_n^{-t}\} \in \mathcal{F}^T, \text{ und für alle } \tau \in T \text{ ist}\\ &W^\tau\{E_n^t L_n^t K^t E_n^{-t}\} = \begin{cases} K^t & \text{falls } t = \tau \\ 0 & \text{falls } t \neq \tau. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.6}$$

(Achtung: E_n^t sind hier invertierbare Homomorphismen $E_n^t : \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n^t) \to \mathbf{E}_n$.)
Auf diesem Weg wird die Problematik noch anschaulicher: Die Mengen $\mathcal{J}^t$ enthalten hier de facto die Liftings sämtlicher kompakter Operatoren und sind damit im Fall l^1 gewissermaßen zu groß, denn wie die Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts zeigen, tauchen in der Algebra der Toeplitzoperatoren garnicht alle kompakten Operatoren auf, sondern nur die aus $\mathcal{K}^1$ (vgl. Lemma 3.2.1(1)). Deshalb sind die Mengen $\mathcal{J}^t$ auch nicht mehr „separierbar“. Mit der Bedingung II aus der vorliegenden Arbeit kann man sich nun auf die besser geeignete Teilmenge $\mathcal{K}^1$ beschränken und die Schwierigkeiten können so vermieden werden, weil dann nach Lemma 3.2.1(4) das benötigte Konvergenzverhalten noch gesichert ist (vgl. Gleichungen 3.3).

Die Fälle l^0, l^∞ werden im nun folgenden Beweis des Hauptsatzes 3.3.1 mit Hilfe ihrer Dualität zum l^1 behandelt:

Beweis. Sei zunächst $1 \leq p < \infty$. Ist a invertierbar in $(C_p + \overline{H_p^\infty})_{N\times N}$, so gilt

$$\{P_n\} - \{T_n(a)\}\{T_n(a^{-1})\} = \{P_n H(a) H(\widetilde{a^{-1}}) P_n\} + \{W_n H(\tilde{a}) H(a^{-1}) W_n\} \in \mathcal{J}^T \text{ und}$$
$$\{P_n\} - \{T_n(a^{-1})\}\{T_n(a)\} = \{P_n H(a^{-1}) H(\tilde{a}) P_n\} + \{W_n H(\widetilde{a^{-1}}) H(a) W_n\} \in \mathcal{J}^T$$

nach Theorem 3.1.1(3) und Lemma 3.2.1(2). Folglich ist $\{T_n(a^{-1})\} + \mathcal{J}^T$ die Inverse von $\{A_n\} + \mathcal{J}^T$ in $\mathcal{A}_p^T/\mathcal{J}^T$, d.h. $\{A_n\}$ ist Fredholmfolge. Theorem 2.4.2 liefert nun sofort die k-splitting-Eigenschaft mit

$$k = \dim\ker(T(a) + K) + \dim\ker(T(\tilde{a}) + L).$$

Sei a nicht invertierbar.
Im Falle $p = 1$ folgt aus Theorem 3.1.1(1), dass $T(a)$ nicht normal auflösbar ist, oder einen unendlichdimensionalen Kern besitzt. Das gleiche gilt dann für $T(a) + K$ (vgl. Lemma 1.1.2) und Theorem 2.3.1 zeigt, dass $s_l(A_n) \to_n 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$.
Für $1 < p < \infty$ gilt offenbar $L_n^* \to I^*$, $(L_n^t)^* \to (I^t)^*$ und auch $(A_n^{(t)})^* \to (W^t\{A_n\})^*$ stark für alle $t \in T$, denn

$$(A_n^{(1)})^* = P_n^* A_n^* P_n^* = T_n(a^*) + P_n^* K^* P_n^* + W_n^* L^* W_n^* + G_n^* \to T(a^*) + K^* \text{ und}$$
$$(A_n^{(2)})^* = W_n^* A_n^* W_n^* = T_n(\tilde{a}^*) + W_n^* K^* W_n^* + P_n^* L^* P_n^* + G_n^* \to T(\tilde{a}^*) + L^* \text{ stark.}$$

Da nach Theorem 3.1.1(1) $T(a)$, und somit auch $T(a) + K$, keine Fredholmoperatoren sind, folgt die Behauptung aus Theorem 2.3.2.

Betrachten nun die Fälle $p \in \{0, \infty\}$ und dazu zur Folge $\{A_n\}$ zusätzlich die Folge

$$\{A_n^*\} = \{T_n(a^*) + P_n^* K^* P_n^* + W_n^* L^* W_n^* + G_n^*\}.$$

Wegen Lemma 3.1.1 gilt

$$\begin{aligned}\{T(a) : a \in W_{N\times N}\} &= \{T(a) : a \in (C_0 + \overline{H_0^\infty})_{N\times N}\} \\ &= \{T(a) : a \in (C_1 + \overline{H_1^\infty})_{N\times N}\} \\ &= \{T(a) : a \in (C_\infty + \overline{H_\infty^\infty})_{N\times N}\}\end{aligned}$$

und aus Lemma 3.2.1(3) folgt, dass $(\mathcal{K}^0)^* = \mathcal{K}^1, (\mathcal{K}^1)^* = \mathcal{K}^\infty$. Deshalb gilt, falls $p = 0$ ist, $\{A_n^*\} \in \mathcal{A}_1^T$ und falls $p = \infty$ ist, gilt $\{(A_n^*)^*\} = \{A_n\}$, wobei wiederum $\{A_n^*\} \in \mathcal{A}_1^T$. Aus dem bisher bewiesenen (für den Fall $p = 1$ und die Folge $\{A_n^*\}$) folgt sofort, dass $T(a^*)+K^*$ und $T(\tilde{a}^*)+L^*$ Fredholmoperatoren sind und $\{A_n^*\}$ die k-splitting-Eigenschaft mit $k = \dim\ker(T(a^*)+K^*)+\dim\ker(T(\tilde{a}^*)+L^*)$ besitzt, falls $a^* \in W_{N\times N}$ invertierbar ist. Andernfalls gilt $s_k(A_n^*) \to_n 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Nun ist aber $a^* \in W_{N\times N}$ genau dann invertierbar, wenn auch $a \in W_{N\times N}$ invertierbar ist. Weiterhin ist ein Operator A genau dann Fredholmsch, wenn der adjungierte Operator A^* Fredholmsch ist und insbesondere gilt wegen Theorem 1.1.1(4) und weil $\operatorname{ind}(\{A_n\}) = 0$, dass

$$\begin{aligned}k &= \dim\ker(T(a^*) + K^*) + \dim\ker(T(\tilde{a}^*) + L^*) \\ &= \dim\operatorname{coker}(T(a^*) + K^*) + \dim\operatorname{coker}(T(\tilde{a}^*) + L^*) \\ &= \dim\ker(T(a) + K) + \dim\ker(T(\tilde{a}) + L).\end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.3) stimmen schließlich die Approximationszahlen von A_n und A_n^* überein, und das Theorem ist damit vollständig bewiesen. □

Die Konvergenzabschätzung (2.20) für die $\alpha\{A_n\}$-te Approximationszahl ist in diesem Falle von der Gestalt ($n \geq N$)

$$s_{\alpha(\{A_n\})}(A_n) \leq 4\max\{\|P^1\|, \|P^2\|\}\left(\frac{k_1\|A_nP^1\|}{1 - \|(I-P_n)P^1\|} + \frac{k_2\|W_nA_nW_nP^2\|}{1-\|(I-P_n)P^2\|}\right) \to_n 0,$$

wobei $k_1 := \dim\ker T(a) + K$, $k_2 := \dim\ker T(\tilde{a}) + L$ und P^1, P^2 beliebige Projektoren auf $\ker T(a) + K$, bzw. $\ker T(\tilde{a}) + L$ sind.

Abschließende Bemerkungen

Es sollen hier noch einige Bemerkungen zum Begriff der Fredholmfolge, wie er in dieser Arbeit eingeführt wurde, ergänzt werden. Zur Erinnerung: Eine Folge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ heißt Fredholmfolge, wenn die Restklasse $\{A_n\} + \mathcal{J}^T$ invertierbar ist in $\mathcal{A}^T/\mathcal{J}^T$.

Ausgehend von einer gegebenen Indexmenge T, von Banachräumen $\mathbf{E}^t$ $(t \in T)$, den zugehörigen Homomorphismen E_n^t (vgl. Seite 13) und von gewissen Algebren $\mathcal{K}^t$ kompakter Operatoren auf $\mathbf{E}^t$ (vgl. Seite 20) wurden, durch „Lifting" dieser kompakten Operatoren, die $\mathcal{J}^t$ und $\mathcal{J}^T$ de facto als Algebren „kompakter Folgen" in $\mathcal{F}^T$ erzeugt.

Die Banachalgebra $\mathcal{A}^T \subset \mathcal{F}^T$ muss die Eins $\{L_n\}$ enthalten, und sowohl $\mathcal{J}^T$ als auch $\mathcal{J}^t$ $(\forall t \in T)$ müssen abgeschlossene zweiseitige Ideale von $\mathcal{A}^T$ bilden. Im Rahmen dieser Bedingungen kann die Algebra aber beliebig gewählt werden.

Diese Konstruktion bringt sowohl Vor- als auch Nachteile mit sich:

Der Umstand, dass die Fredholmeigenschaft einer Folge $\{A_n\} \in \mathcal{A}^T$ davon abhängig ist, wie die „Blickrichtungen" auf die Folge (d.h. T, $\mathbf{E}^t$, E_n^t und $\mathcal{K}^t$), und schließlich auch die Algebra $\mathcal{A}^T$ selbst, gewählt wurden, ist sicherlich noch unbefriedigend. Es zeigt sich aber, dass die Zahlen $\alpha(\{A_n\})$, $\beta(\{A_n\})$ und $\mathrm{ind}(\{A_n\})$ unabhängig von diesen Faktoren sind. Präziser: Seien T_1, T_2 zwei Indexmengen mit den zugehörigen Familien von Banachräumen $\mathbf{E}_1^t$ (bzw. $\mathbf{E}_2^t$), Homomorphismen $E_{1,n}^t$ (bzw. $E_{2,n}^t$) und kompakten Operatoren $\mathcal{K}_1^t$ (bzw. $\mathcal{K}_2^t$). Weiterhin seien $\mathcal{A}^{T_1}$ und $\mathcal{A}^{T_2}$ entsprechende Teilalgebren von $\mathcal{F}$ und $\{A_n\} \in \mathcal{A}^{T_1} \cap \mathcal{A}^{T_2}$, so dass $\{A_n\} + \mathcal{J}^{T_1}$ invertierbar ist in $\mathcal{A}^{T_1}/\mathcal{J}^{T_1}$ und $\{A_n\} + \mathcal{J}^{T_2}$ invertierbar ist in $\mathcal{A}^{T_2}/\mathcal{J}^{T_2}$.
(M.a.W.: $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ sei eine Folge, die auf diese zwei (möglicherweise sehr verschiedenen) Arten betrachtet wird, und sich in beiden Fällen als Fredholmsch (in dem jeweiligen Sinne) erweist.)
Nun sind auch in beiden Fällen jeweils die Zahlen $\alpha_1(\{A_n\})$, $\beta_1(\{A_n\})$ und $\mathrm{ind}_1(\{A_n\})$, bzw. $\alpha_2(\{A_n\})$, $\beta_2(\{A_n\})$ und $\mathrm{ind}_2(\{A_n\})$ erklärt.

Nach Theorem 2.4.2 besitzt $\{A_n\}$ die splitting-Eigenschaft, d.h. es gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} s_k(A_n) = 0 \text{ und } \liminf_{n\to\infty} s_{k+1}(A_n) > 0,$$

und es gilt sogar noch mehr, nämlich $\alpha_1(\{A_n\}) = k = \alpha_2(\{A_n\})$.
Nach Theorem 2.6.1 ist $\mathrm{ind}_1(\{A_n\}) = 0 = \mathrm{ind}_2(\{A_n\})$.
Damit folgt nun auch $\beta_1(\{A_n\}) = 0 = \beta_2(\{A_n\})$.

Aus eben diesen Gründen wäre es wünschenswert, eine Fredholmtheorie so zu entwickeln, dass auch die Fredholmeigenschaft einer Folge $\{A_n\}$, wie die Zahlen $\alpha(\{A_n\})$, $\beta(\{A_n\})$ und $\mathrm{ind}(\{A_n\})$, eine universelle Eigenschaft ist.

Ein Weg, dies zu bewerkstelligen, könnte vielleicht so aussehen, dass ein Ideal $\mathcal{J}$ „kompakter Folgen" nicht „von außen" (wie oben durch die Homomorphismen E_n^t und die Mengen $\mathcal{K}^t$), sondern „von innen" konstruiert wird (z.b. erzeugt durch Folgen, deren Glieder Rang 1 haben, o.ä.). Ausgehend von einem solchen Ideal könnte dann versucht werden, wieder Operatoren $W^t\{A_n\}$ $(t \in T)$ über einer gewissen Indexmenge T zu erklären, die die Verbindung zu den Zahlen $\alpha(\{A_n\})$, $\beta(\{A_n\})$ und $\mathrm{ind}(\{A_n\})$ herstellen und deren Fredholmeigenschaft korrespondiert mit der Fredholmeigenschaft der Folge $\{A_n\}$.

Für den Fall, wo $\mathbf{E}$ separabler Hilbertraum, und somit $\mathcal{F}$ C^*-Algebra ist, wurden solche Überlegungen durchgeführt. Dazu sei auf [6] verwiesen.

Andererseits deckt die Konstruktion, wie sie hier gemacht wurde, ein breites Spektrum von konkreten Problemen ab, darunter nicht nur den Hilbert-, sondern auch den Banachraumfall und, aufgrund der Flexibilität der $\mathcal{K}^t$, auch solche etwas „exotischen" Fälle, wie den der Toeplitzoperatoren auf l^1.

Symbolverzeichnis

Index

Literaturverzeichnis

[1] A. Böttcher, On the approximation numbers of large Toeplitz operators, *Documenta Mathematica* 2 (1997), 1-29

[2] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators* Akademie-Verlag, Berlin, 1989 und Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990

[3] R. Hagen, S. Roch, B. Silbermann, *C^*-Algebras and Numerical Analysis* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001

[4] A. Pietsch, *Operator Ideals* Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978

[5] S. Prössdorf, B. Silbermann, *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1991

[6] S. Roch, *Algebras of approximation sequences: Fredholmness* J. Oper. Theory, 48 (2002), 121-149

[7] S. Roch, B. Silbermann *Index calculus for approximation methods and singular value decomposition* J. Math. Anal. Appl., 225 (1998), 401-426

[8] S. Roch, B. Silbermann *A note on singular values of Cauchy-Toeplitz matrices* J. Math. Anal. Appl., 225 (1998), 401-426

[9] A. Rogozhin, B. Silbermann, *Banach algebras of operator sequences: Approximation numbers*

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 16. Januar 2006 Markus Seidel