TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

Evolutionsgleichungen und obere Abschätzungen an die Lösungen des Anfangswertproblems

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik
von

Dipl.-Math. Daniel Wingert

Chemnitz, den 28. November 2011

Betreuer: Prof. Dr. Peter Stollmann, TU Chemnitz
Prof. Dr. Daniel Lenz, FSU Jena

Gutachter: Prof. Dr. Peter Stollmann, TU Chemnitz
Prof. Dr. Moritz Kaßmann, Universität Bielefeld

Verteidigung: 5.7.2012, TU Chemnitz

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Funktionalanalytische Grundlagen **7**
1.1 Sesquilinearformen und Halbgruppen in Hilbert-Räumen 7
1.1.1 Sesquilinearformen 7
1.1.2 Zu Sesquilinearformen assoziierte Operatoren 8
1.1.3 Holomorphe Halbgruppen 10
1.2 Approximierende Form 11
1.3 Kriterien für die Halbgruppe 13

2 Spezielle Halbgruppeneigenschaften **19**
2.1 Positivitätserhaltende Halbgruppen 19
2.1.1 Ein Störungsresultat für positivitätserhaltende Halbgruppen . . . 23
2.2 L^1 und L^∞-beschränkte Halbgruppen 27

3 Symmetrische Dirichlet-Formen **33**
3.1 Definitionen und Darstellung 33
3.2 Störungen durch Maße 37
3.3 Das Energiemaß 38
3.4 Produkte von Funktionen 42

4 Obere Schranken für die Halbgruppe **47**
4.1 Ultrakontraktivität 47
4.2 Davies' Methode 49
4.3 Nachweis von Ultrakontraktivität 51
4.3.1 ... mit L^∞-Einbettungen 51
4.3.2 ... mit L^p-Einbettungen 52
4.3.3 ... mit einer Nash-Ungleichung 53
4.3.4 ... mit einer iterierten Nash-Ungleichung 55

5 Anwendungen **59**
5.1 Symmetrische Dirichlet-Formen 59
5.1.1 L^2-Abschätzungen 60
5.1.2 Kernabschätzungen 64
5.2 Laplace Operator auf Gebieten 69
5.3 Dirichlet-Formen auf Graphen 73
5.4 Kernabschätzungen für Formen auf diskreten Mengen 78

5.5 Polynomiell fallende Sprungkerne 80
5.6 Eine singuläre Diffusion auf $\mathbb{R}$ 84

6 Ausblick **89**
6.1 Über L^1-Abschätzungen der Halbgruppe 89
6.2 Verallgemeinerung von Davies' Methode 90
6.3 Zulässigkeit von ϕ 91

A Komplexe Maße **93**

B Notation **99**

C Literaturverzeichnis **101**

Thesen **107**

Selbstständigkeitserklärung **111**

Einleitung

Evolutionsgleichungen, also Differentialgleichungen des Typs $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_t = -Ax_t$, spielen in vielen physikalischen Anwendungen eine wichtige Rolle. Auch in der Stochastik kommen derartige Gleichungen bei der Untersuchung von Markovprozessen zur Anwendung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Lösungen des Anfangswertproblems solcher Differentialgleichungen. Diese werden durch die Operatorenhalbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ beschrieben.

In einigen Spezialfällen ist die Operatorenhalbgruppe bekannt.[1]

- Für den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^d$, $A := -\triangle$, ist e^{-tA} ein Integraloperator mit Kern
$$k_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,.$$

- Ist $\mathbb{H}^3$ der 3-dimensionale hyperbolische Raum mit der konstanten Krümmung -1 und $-A$ der Laplace-Operator auf $\mathbb{H}^3$, so ist e^{-tA} ein Integraloperator mit Kern
$$k_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-t-\frac{d(x,y)^2}{4t}}\,\frac{d(x,y)}{\sinh(d(x,y))}.$$

- Ist $A = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(\cdot,\phi_n)\phi_n$ mit einem Orthonormalsystem $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda_n \in \mathbb{C}$, dann gilt
$$\mathrm{e}^{-tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}(\cdot,\phi_n)\phi_n.$$

Im Allgemeinen ist es nicht möglich die Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ exakt anzugeben. Deshalb ist es notwendig gute Abschätzungen an sie zu finden. Diese Arbeit beschäftigt sich damit solch obere Abschätzungen zu finden. Eine Möglichkeit hierfür ist die Operatornorm abzuschätzen. Wenn e^{-tA} ein Integraloperator ist, kann man auch Schranken an den entsprechenden Kern angeben.

Ist die Halbgruppe L^1-kontraktiv, positivitätserhaltend und sind bestimmte Regularitätsvoraussetzungen erfüllt, so kann mit ihr ein stochastischer Prozess assoziiert werden [MOR95, CM76]. In diesem Fall ist es möglich stochastische Methoden zur Abschätzung der Halbgruppe anzuwenden, siehe unter anderem [GT01, MS00, CK03, BK08, BGK09, CKS10] und die darin enthaltenen Referenzen.

Eine andere oft verwendete Methode ist Davies' Methode, die erstmals 1987 veröffentlicht wurde. Die grundsätzliche Idee ist sehr einfach und allgemein anwendbar und basiert darauf, globale Abschätzungen an eine gestörte Halbgruppe $(\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi)_{t\geq 0}$ zu

[1] Diese Beispiele sind [Gri01] entnommen.

zeigen, um daraus lokale Abschätzungen an die ungestörte Halbgruppe zu erhalten. Globale Abschätzungen hingegen sind oft einfacher zu erhalten: Eine Normabschätzung der Halbgruppe erhält man aus einer simplen Abschätzung des Spektrums des Erzeugers A. Eine globale Schranke an den Kern ist äquivalent zur Ultrakontraktivität des zugehörigen Integraloperators, ein im Kontext der Halbgruppen sehr gut verstandenes Konzept. Es gibt eine ganze Reihe von Verfahren, Ultrakontraktivität mit Hilfe von Funktionalungleichungen nachzuweisen. Dafür werden oft L^1- und L^∞-Abschätzungen der Halbgruppe benötigt.

Davies' Methode wurde vor allem auf die folgenden Situationen angewendet:

- Laplace-Operatoren im $\mathbb{R}^d$ und auf Mannigfaltigkeiten (z.B. [Dav87, ERSZ06]).
- Graphen, insbesondere für Normabschätzungen (z.B. [CKS87, Dav93]).
- Sprungprozesse im $\mathbb{R}^d$ (z.B. [CKS87, CK08]).

Für die letztgenannte Situation benötigt man zusätzlich ein weiteres Störungsresultat, da sich Davies' Methode dort typischerweise nicht direkt auf die entsprechenden Halbgruppen anwenden lässt. Dieses Störungsresultat wurde in [CK08], aufbauend auf der Zerlegung stochastischer Prozesse nach Meyer [Mey75], bewiesen.

Bisher wurden ausschließlich Störungen ϕ betrachtet, die durch eine natürliche Metrik erzeugt werden: für die Laplace-Operatoren die intrinsische Metrik, für Graphen die Graphenmetrik und für die Sprungprozesse im $\mathbb{R}^d$ die euklidische Metrik. In der vorliegenden Arbeit wird Davies' Methode zunächst abstrakt und für allgemeines ϕ formuliert, so dass die notwendigen Voraussetzungen klarer hervortreten. So zeigt sich, dass nicht nur die Raumgeometrie in der Störung ϕ abgebildet werden kann, sondern auch viele weitere Informationen, wie ein vorhandenes Potential oder Randbedingungen.

Das wichtigste Anwendungsfeld in der vorliegenden Arbeit, wie auch in der übrigen Literatur, sind Dirichlet-Formen und die dazu assoziierten Operatoren. In [FLW10] wurden für diese Formen verschiedene Energiemaße definiert und bekannte Konzepte, wie die Produkt- oder Kettenregel verallgemeinert. Außerdem wurden dort Bedingungen angegeben, unter denen das Produkt zweier Funktionen im Definitionsbereich der Form wieder im Definitionsbereich liegt. Zur Vorbereitung der Halbgruppenabschätzungen für Dirichlet-Formen wurden diese Sätze weiter verallgemeinert. Mit deren Hilfe ergeben sich für die Normabschätzungen der Halbgruppe sehr einfach zu formulierende Bedingungen an die Störung ϕ. Auch den Kernabschätzungen kommen diese Vorüberlegungen zugute.

Die Eigenschaften der Positivitätserhaltung und der L^1- und L^∞-Kontraktivität spielen für Kernabschätzungen eine wichtige Rolle. So ist der Kern einer positivitätserhaltenden Halbgruppe automatisch positiv. L^1- und L^∞-Abschätzungen werden, je nach verwendeter Methode, zum Nachweis der Ultrakontraktivität benötigt. Für die approximierenden Formen, die positivitätserhaltende Halbgruppen erzeugen, ist bekannt, dass sie eine Maßdarstellung besitzen. Dies wird in der vorliegenden Arbeit auch für die Formen bewiesen, die eine L^1- oder L^∞-kontraktive Halbgruppe erzeugen. Außerdem wird das oben erwähnte Störungsresultat, das zur Abschätzung der Sprungprozesse im $\mathbb{R}^d$ verwendet wird allgemein für positivitätserhaltende Halbgruppen bewiesen.

In dieser Arbeit wird der Begriff, des (unbeschränkten) komplexen Maßes verwendet für die Formulierung der Maßdarstellungen, um das Energiemaß für Dirichlet-Formen zu definieren und im Beweis, dass Ultrakontraktivität äquivalent zu einer globalen Schranke an den Kern ist. Dieser Begriff wird konform zur Maßtheorie definiert und die grundlegenden Eigenschaften werden bewiesen.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Das erste Kapitel beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie in Hilbert-Räumen. Zuerst werden die grundlegenden in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und ihre Zusammenhänge erläutert: Sesquilinearformen, Operatoren und ihre Resolventen und Halbgruppen. Danach wird eine Möglichkeit angegeben, Sesquilinearformen durch stetige Sesquilinearformen zu approximieren. Diese so genannte approximierende Form stellt ein wichtiges Hilfsmittel zur Arbeit mit Sesquilinearformen dar. Zuletzt wird die Invarianz bestimmter konvexer Mengen anhand von Eigenschaften der Sesquilinearform charakterisiert. Damit können wesentliche Eigenschaften der Halbgruppe an der zugehörigen Form abgelesen werden und umgekehrt anhand von Eigenschaften der Halbgruppe Strukturinformationen über die Form erlangt werden.

Im nächsten Kapitel werden die Ergebnisse des ersten Kapitels für Funktionenräume mit ihrer natürlichen Verbandsstruktur konkretisiert. Zuerst werden positivitätserhaltende Halbgruppen untersucht. Diese haben die besondere Eigenschaft, dass Ungleichungen unter Anwendung der Halbgruppe erhalten bleiben. Diese Eigenschaft wird mit den Resultaten des ersten Kapitels anhand der assoziierten Sesquilinearform charakterisiert. Weiterhin wird die approximierende Maßdarstellung für diese Sesquilinearformen bewiesen. Daraus lassen sich qualitative Aussagen über die entsprechenden Formen ablesen. Es folgt das Störungsresultat für positivitätserhaltende Halbgruppen, mit Hilfe dessen die Kerne zweier positivitätserhaltender Halbgruppen gegeneinander abgeschätzt werden können. Dies ist das erste Resultat aus dem sich Abschätzungen an die Halbgruppen gewisser Operatoren folgern lassen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden dann L^∞- und über die Adjungierte auch L^1-kontraktive Halbgruppen betrachtet und charakterisiert. Wie bereits im ersten Teil des Kapitels wird auch für diese Halbgruppen die approximierende Maßdarstellung bewiesen. Das Kapitel schließt mit einem Störungsresultat für die Normen von Halbgruppen. Mit diesem Resultat können aus Eigenschaften der Form Schranken an die L^1- und L^∞-Normen der Halbgruppe nachgewiesen werden, ein wichtiger Schritt um Abschätzungen der Ultrakontraktivitätsnorm zu erhalten.

Das dritte Kapitel widmet sich dem wichtigsten Anwendungsgebiet dieser Arbeit: den symmetrischen Markov-Halbgruppen und den dazu assoziierten symmetrischen Dirichlet-Formen. Diese vereinen alle drei vorher genannten Eigenschaften: die Positivitätserhaltung und die L^1- und L^∞-Kontraktivität. Konsequenterweise gibt es auch hier eine approximierende Maßdarstellung aus der sich viele weitere Eigenschaften von Dirichlet-Formen ablesen lassen. Im Fall regulärer Dirichlet-Formen existiert sogar eine direkte Integraldarstellung, die Darstellungsformel von Beurling-Deny. Für viele Anwendungen spielen die Störungen regulärer Dirichlet-Formen mit maßwertigen Multiplikationsoperatoren eine wichtige Rolle. Nach einer kurzen Einführung über diese Störungen wird detaillierter auf das Energiemaß eingegangen. Es werden einige Eigenschaften – auch im Kontext der Funktionen lokal im Definitionsbereich – aufgezeigt und bewiesen, wie zum

Beispiel die Produkt- und die Kettenregel. Weiterhin wird die Frage diskutiert, wann das Produkt zweier Funktionen im Definitionsbereich wieder im Definitionsbereich liegt. Dies ist eine der wichtigen Voraussetzungen zur Anwendung von Davies' Methode.

Nunmehr werden im vierten Kapitel L^2-Normabschätzungen an die Halbgruppe und Abschätzungen der Kerne von Halbgruppen bewiesen. Dies geschieht mit Hilfe der Methode von Davies. Da für die Abschätzung der Kerne Ultrakontraktivität die wesentliche Voraussetzung ist, wird diese in der zweiten Hälfte dieses Kapitels intensiver diskutiert und es werden verschiedene Methoden aufgezeigt, mit Funktionalungleichungen der Form Ultrakontraktivität der Halbgruppe nachzuweisen.

Verschiedene teilweise sehr konkrete und teilweise abstraktere Beispiele für die genannten Resultate werden dann im fünften Kapitel präsentiert. Bei der Auswahl wurde darauf geachtet, einfache, vielfältige und in diesem Zusammenhang neue und somit interessante Beispiele darzustellen.

Als erstes werden die Resultate auf Dirichlet-Formen, die durch Maße gestört wurden, angewendet. Die besondere Struktur der symmetrischen Dirichlet-Formen ermöglicht es, einfache und allgemeingültige Halbgruppenabschätzungen zu formulieren. Die Anwendbarkeit dieser L^2-Normabschätzungen und Kernabschätzungen wird durch einfache, teilweise neue Beispiele erläutert.

Die weiteren Beispiele sind konkreterer Natur und sind größtenteils ebenfalls Dirichlet-Formen: Zunächst werden Kernabschätzungen für Differentialoperatoren zweiter Ordnung auf Gebieten des $\mathbb{R}^d$ bewiesen. Besonderes Augenmerk wird dabei auf den Einfluss der Driftterme auf den Kern der Halbgruppe gelegt. Dann werden die L^2-Abschätzungen für Dirichlet-Formen auf Graphen konkretisiert und diese anhand von Beispielen erläutert. Als Nächstes werden Kernabschätzungen für die Halbgruppen allgemeinerer Sesquilinearformen auf abzählbaren Mengen unter der Zusatzvoraussetzung einer Nash-Ungleichung bewiesen. Weiterhin folgt ein Anwendungsbeispiel für das Störungsresultat aus Kapitel 2. Zuletzt werden noch Kernabschätzungen für eine singuläre Diffusion auf $\mathbb{R}$ bewiesen.

Aufgrund der Fülle an Möglichkeiten ist es in dieser Arbeit nicht möglich einen vollständigen Überblick über die Anwendungen zu liefern. Die ausgewählten Beispiele sind rein exemplarisch zu verstehen.

Im letzten Kapitel werden weitere Forschungsmöglichkeiten und Verallgemeinerungen für die hier benutzten Methoden aufgezeigt. Es wird auf die Bedeutung der L^1-Schranken für Halbgruppen eingegangen, eine Verallgemeinerung von Davies' Methode gezeigt und die Bedingung der Zulässigkeit aus Kapitel 4 diskutiert.

Im Anhang werden die in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen benutzten komplexen Maße erklärt. Des Weiteren gibt es eine Auflistung der in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Standardbezeichner und ihre Bedeutung. Auf den Einsatz von Fußnoten wurde weitestgehend verzichtet. Weiterführende Hinweise, Zusammenhänge zu anderen Themengebieten und Literaturangaben die den Lesefluss behindern könnten finden sich am Ende jedes Abschnitts.

Danksagung

Mein Dank richtet sich an meinen Betreuer Peter Stollmann für seine beständige Unterstützung bei meiner Forschung und beim Erstellen dieser Arbeit und für die Wertschätzung, die er mir und meiner Arbeit entgegenbringt und entgegengebracht hat. Weiter danke ich Daniel Lenz für die gute Zusammenarbeit.

Ich danke Christian Seifert für die vielen Diskussionen und für seine endlose Geduld und Korrektur, Marcel Hansmann für das Korrekturlesen dieser Arbeit, sowie allen anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Analysis und Mathematische Physik.

Ich danke der Graduiertenförderung des Freistaates Sachsen für die finanzielle Unterstützung.

Zuletzt danke ich allen, die mich auf meinem Weg zur Promotion begleitet haben, insbesondere meiner Familie, meinen Freunden und den Dozenten und Kollegen der Analysis und Algebra Vorlesung.

Kapitel 1

Funktionalanalytische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen dieser Arbeit dargestellt, die allgemein im Kontext der Hilbert-Räume formuliert werden können. Abschnitt 1.1 erläutert die verwendeten Begriffe und erklärt die grundlegenden Eigenschaften. In Abschnitt 1.2 wird die approximierende Form eingeführt, ein wichtiges Mittel für die Arbeit mit Sesquilinearformen. Zum Schluss werden in Abschnitt 1.3 Eigenschaften der Halbgruppe über ihre Sesquilinearformen charakterisiert, die dann im zweiten Kapitel für Funktionenräume konkretisiert werden.

1.1 Sesquilinearformen und Halbgruppen in Hilbert-Räumen

1.1.1 Sesquilinearformen

Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Eine Abbildung $a : \mathcal{D}(a)\times\mathcal{D}(a) \to \mathbb{C}$ heißt *Sesquilinearform* (oder kurz *Form*) in H, falls $\mathcal{D}(a)$ ein linearer Unterraum von H ist und $a(x,y)$ linear in x und konjugiert linear[1] in y ist. Das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ ist eine spezielle Sesquilinearform.

Die Form a heißt *dicht definiert*, falls $\mathcal{D}(a)$ dicht in H ist. Ferner heißt a *symmetrisch*, falls $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$ für alle $x,y \in \mathcal{D}(a)$ gilt, und a heißt *schiefsymmetrisch*, falls $\overline{a(x,y)} = -a(y,x)$ für alle $x,y \in \mathcal{D}(a)$ gilt. Die *adjungierte* Form zu a ist $a^*(x,y) := \overline{a(y,x)}$, $\mathcal{D}(a^*) := \mathcal{D}(a)$.

Sei $\gamma \in \mathbb{C}$. Die Sesquilinearform γ ist definiert als $\gamma(x,y) = \gamma\cdot(x,y)$. Weiter definiert man $a_\gamma(x,y) := a(x,y) + \gamma(x,y)$.

Eine Sesquilinearform a heißt *von unten beschränkt (durch $-\gamma \in \mathbb{R}$)*, falls $\Re a(x,x) \geq -\gamma\|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{D}(a)$. In diesem Fall schreibt man auch kurz $\Re a \geq -\gamma$.

Ist a symmetrisch, d.h. $a(x,x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathcal{D}(a)$, $a \geq -\gamma$ und $\mathcal{D}(a)$ bezüglich des Skalarproduktes $a_{1+\gamma}$ ein Hilbert-Raum, so heißt a *abgeschlossen*.

Eine Sesquilinearform a heißt *sektoriell*, falls es Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$ und $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathcal{D}(a)$

$$|\Im a(x,x)| \leq C\Re a_\gamma(x,x)$$

[1] D.h. $a(x,\lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}a(x,y_1) + a(x,y_2)$ für alle $x,y_1,y_2 \in \mathcal{D}(a)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

gilt. Ist a sektoriell, so ist $\tilde{a} := \frac{1}{2}(a + a^*)$ symmetrisch und von unten beschränkt und es gilt $\tilde{a}(x,x) = \Re a(x,x)$ für alle $x \in H$. Ist a sektoriell und $\tilde{a}$ abgeschlossen, so heißt auch a *abgeschlossen*. In diesem Fall nennt man $\|\cdot\|_a^2 := \tilde{a}_{1+\gamma}(\cdot,\cdot)$ die *Formnorm* von a. Die Formnorm ist unabhängig (im Sinne der Normäquivalenz) von der Wahl von γ, denn es existiert eine Konstante c (die von C und γ abhängt), so dass für alle $x, y \in \mathcal{D}(a)$

$$|a(x,y)| \leq c(\|x\|_a^2 + \|y\|_a^2). \tag{1.1}$$

Ist a abgeschlossen, so definiert $(\mathcal{D}(a), \|\cdot\|_a)$ einen Hilbert-Raum (mit Skalarprodukt $\tilde{a}_{1+\gamma}(\cdot,\cdot)$).

Oft ist es wichtig für ein bestimmtes Element $x \in H$ nachzuweisen, dass x auch in $\mathcal{D}(a)$ liegt. Das nächste Lemma zeigt eine Möglichkeit dafür auf:

Lemma 1.1.1. *Sei a eine dicht definierte, sektorielle abgeschlossene Form. Sei weiter (x_n) eine bezüglich $\|\cdot\|_a$ beschränkte Folge in $\mathcal{D}(a)$, die in H schwach gegen x konvergiert. Dann ist $x \in \mathcal{D}(a)$, (x_n) konvergiert in $\mathcal{D}(a)$ schwach gegen x und*

$$\|x\|_a \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_a.$$

Beweis. Da (x_n) im Hilbert-Raum $\mathcal{D}(a)$ beschränkt ist, existiert eine in $\mathcal{D}(a)$ schwach konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $y \in \mathcal{D}(a)$. Weil die Skalarprodukte $a_{1+\gamma}(\cdot,\cdot)$ und $a_{2+\gamma}(\cdot,\cdot)$ äquivalent sind, konvergiert auch $(x_{n_k}, z) \to (y, z)$ für alle $z \in \mathcal{D}(a)$. Da $\mathcal{D}(a)$ dicht in H liegt, folgt $x = y$. □

1.1.2 Zu Sesquilinearformen assoziierte Operatoren

Ein linearer Operator $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ heißt *sektoriell*, falls es Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$ und $C > 0$ gibt, so dass $|\Im(Ax,x)| \leq C\big(\Re(Ax,x) + \gamma\|x\|^2\big)$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$. A heißt *m-sektoriell*, falls A sektoriell ist und keine echte sektorielle Erweiterung besitzt.

Sei a eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform. Dann existiert ein m-sektorieller Operator A, so dass:

i) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(a)$ und für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ und $y \in \mathcal{D}(a)$ gilt

$$a(x,y) = (Ax, y).$$

ii) $\mathcal{D}(A)$ liegt bezüglich der Formnorm dicht in $\mathcal{D}(a)$.

iii) Sei $D \subset \mathcal{D}(a)$ dicht bezüglich der Formnorm, $x \in \mathcal{D}(a)$, $z \in H$ und

$$a(x,y) = (z,y)$$

für jedes $y \in D$. Dann ist $x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = z$.

A wird durch i) eindeutig bestimmt und heißt der zu a *assoziierte Operator*. Ist umgekehrt A m-sektoriell und $\mathcal{D}(A)$ dicht in H, so gibt es genau eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform a zu der A assoziiert ist. Der zu a^* assoziierte Operator ist A^*, die Adjungierte von A.

Sei a eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform und A der assoziierte Operator. Weiter sei $\Re a \geq -\gamma$ und $\beta > \gamma$. Dann liegt β in der Resolventenmenge von $-A$ und

$$R_\beta := (\beta + A)^{-1}, \quad R_\beta : H \to \mathcal{D}(A)$$

ist eine *Resolvente* von $-A$. Die Resolventen von $-A$ werden durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$a_\beta(R_\beta x, y) = (x, y)$$

für alle $x \in H$, $y \in \mathcal{D}(a)$. Weiterhin gilt

$$\|R_\beta\| \leq \frac{1}{\beta - \gamma}$$

und

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta R_\beta x = x \quad (x \in H).$$

Der Grenzwert

$$\mathrm{e}^{-tA}\, x := \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t}{n}A + 1\right)^{-n} x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t}R_{\frac{n}{t}}\right)^n x \tag{1.2}$$

existiert für alle $x \in H$ und $t > 0$. Für $t = 0$ definiere $\mathrm{e}^{-tA}\, x := x$. Die so definierte Operatorenfamilie $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ wird die zu A oder a assoziierte *Halbgruppe* genannt und erfüllt folgende Eigenschaften:

i) Für $s, t \geq 0$ gilt $\mathrm{e}^{-tA}\,\mathrm{e}^{-sA} = \mathrm{e}^{-(t+s)A}$.

ii) $\|\,\mathrm{e}^{-tA}\,\| \leq \mathrm{e}^{\gamma t}$ $(t \geq 0)$.

iii) $\lim_{t\searrow 0} \mathrm{e}^{-tA}\, x = x$ $(x \in H)$.

iv) Für $t > 0$ ist $\mathrm{e}^{-tA}\, x \in \mathcal{D}(A)$.

v) Für $x \in \mathcal{D}(A)$ ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-tA}\, x = -A\,\mathrm{e}^{-tA}\, x = -\,\mathrm{e}^{-tA}\, Ax$ $(t \geq 0)$.

Umgekehrt lassen sich die Resolventen auch über die Laplace-Transformation der Halbgruppe darstellen: ist $x \in H$ und $\beta > \gamma$, so gilt

$$R_\beta x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta t}\,\mathrm{e}^{-tA}\, x \,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

1.1.3 Holomorphe Halbgruppen

Die Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ kann auf komplexe Werte erweitert werden: Sei a eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform und A der assoziierte Operator. Seien $\gamma \in \mathbb{R}$, $C > 0$ so gewählt, dass

$$|\Im a| \leq C \Re a_\gamma.$$

Dann besitzt $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ eine holomorphe Erweiterung auf $S(C)$ mit

$$S(C) := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| < \frac{1}{C} \Re z\}.$$

Es gelten die Eigenschaften

i) Für alle $z_1, z_2 \in S(C)$ gilt $\mathrm{e}^{-z_1 A}\,\mathrm{e}^{-z_2 A} = \mathrm{e}^{-(z_1+z_2)A}$.

ii) $\| \mathrm{e}^{-zA} \| \leq \mathrm{e}^{\gamma \Re z}$ $(z \in S(C))$.

iii) $\lim_{z\to 0, z\in S(C)} \mathrm{e}^{-zA}\, x = x$ $(x \in H)$.

iv) $\mathrm{e}^{-zA}\, x \in \mathcal{D}(A)$ $(z \in S(C),\, x \in H)$.

v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, \mathrm{e}^{-zA}\, x = -A\, \mathrm{e}^{-zA}\, x$ $(z \in S(C),\, x \in H)$.

vi) Für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt $A\, \mathrm{e}^{-zA}\, x = \mathrm{e}^{-zA}\, Ax$ $(z \in S(C))$.

Bemerkungen

Der Begriff „sektoriell“ ist in der Literatur nicht einheitlich definiert. Die hier benutzte Definition wurde aus dem Standardwerk [Kat95] übernommen in dem sich auch die Beweise der hier aufgeführten Aussagen finden.

Die Halbgruppe steht in enger Verbindung mit abstrakten Differentialgleichungen: Sei A ein m-sektorieller Operator und folgende Differentialgleichung gegeben: Gesucht ist $x_t \in \mathcal{D}(A)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_t = -A x_t \quad (t > 0)$$

und Anfangswert $x \in H$, d.h. $\lim_{t\searrow 0} x_t = x$. Dann besitzt diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung und diese ist

$$x_t := \mathrm{e}^{-tA}\, x.$$

Die Theorie der stark stetigen Operator-Halbgruppen geht auf Hille, Phillips und Yosida zurück, siehe [Yos48, Hil48, Phi53, HP57, Yos80].

1.2 Approximierende Form

In diesem Abschnitt wird die approximierende Form vorgestellt. Sie stellt eine Möglichkeit dar sektorielle Formen durch stetige Formen zu approximieren. Sie wird im nächsten Abschnitt verwendet um qualitative Aussagen über die Struktur bestimmter Formen zu erhalten.

Es sei a wieder eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform, $\gamma_a \in \mathbb{R}$, $\Re a \geq -\gamma_a$ und A der assoziierte Operator. Seien R_β Resolventen von $-A$ und $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die assoziierte Halbgruppe.

Man betrachte nun die approximierende Form $a^{(\beta)}$ $(\beta > \gamma_a)$:

$$a^{(\beta)}(x,y) := \beta(x - \beta R_\beta x, y) = (A\beta R_\beta x, y), \quad \mathcal{D}(a^{(\beta)}) := H.$$

$a^{(\beta)}$ ist eine stetige Sesquilinearform, d.h. es existiert eine Konstante C mit $a^{(\beta)}(x,y) \leq C\|x\|\|y\|$, und der assoziierte Operator ist

$$A^{(\beta)} := \beta - \beta^2 R_\beta = A\beta R_\beta, \quad \mathcal{D}(A) := H.$$

Theorem 1.2.1. *Es gilt:*

i) für $x \in H$ ist $x \in \mathcal{D}(a)$ genau dann, wenn $\limsup_{\beta\to\infty} \Re a^{(\beta)}(x,x) < \infty$,

ii) für $x, y \in \mathcal{D}(a)$ ist $\lim_{\beta\to\infty} a^{(\beta)}(x,y) = a(x,y)$ und

iii) ist $|\Im a| \leq C\Re a_\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und $C > 0$, so gilt $|\Im a^{(\beta)}| \leq C\left(\Re a^{(\beta)} + \gamma^+ \frac{\beta^2}{(\beta-\gamma_a)^2}\right)$.

Beweis. Aus der Definition für $a^{(\beta)}$ erhält man

$$a^{(\beta)}(x,x) = a^{(\beta)}(x, \beta R_\beta x) + \beta\|x - \beta R_\beta x\|^2$$

und da

$$a^{(\beta)}(x, \beta R_\beta x) = (A\beta R_\beta x, \beta R_\beta x) = a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x)$$

ist, folgt die Gleichung

$$a^{(\beta)}(x,x) = a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x) + \beta\|x - \beta R_\beta x\|^2. \tag{1.4}$$

i) Für $x \in \mathcal{D}(a)$ und $\beta > \gamma_a^+$ gilt gemäß der Definition von $a^{(\beta)}$ und Gleichung (1.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Re a^{(\beta)}(x,x) &= \Re a(\beta R_\beta x, x) \\
&\leq \frac{1}{2}\|\beta R_\beta x\|_a^2 + 2c^2\|x\|_a^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\Re a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x) + \frac{\gamma_a + 1}{2}\|\beta R_\beta x\|^2 + 2c^2\|x\|_a^2
\end{aligned}$$

und weiter mit Gleichung (1.4)

$$\leq \frac{1}{2}\Re a^{(\beta)}(x,x) + \frac{\gamma_a + 1}{2}\|\beta R_\beta x\|^2 + 2c^2\|x\|_a^2.$$

Somit gilt auch die Abschätzung

$$\Re a^{(\beta)}(x,x) \leq (\gamma_a + 1)\|\beta R_\beta x\|^2 + 4c^2\|x\|_a^2.$$

Daraus folgt, dass für $x \in \mathcal{D}(a)$

$$\limsup_{\beta\to\infty} \Re a^{(\beta)}(x,x) < \infty.$$

Sei nun umgekehrt $x \in H$ und $\limsup_{\beta\to\infty} \Re a^{(\beta)}(x,x) < \infty$. Dann gilt mit (1.4) auch

$$\limsup_{\beta\to\infty} \|\beta R_\beta x\|_a < \infty,$$

und da $\beta R_\beta x \to x$ in H, so ist nach Lemma 1.1.1 auch $x \in \mathcal{D}(a)$ und $\beta R_\beta x$ konvergiert in $\mathcal{D}(a)$ schwach gegen x.

ii): Da $\beta R_\beta x$ in $\mathcal{D}(a)$ schwach gegen x konvergiert folgt unmittelbar

$$a^{(\beta)}(x,y) - a(x,y) = a(\beta R_\beta x, y) - a(x,y) \to 0.$$

iii): Sei $\beta > \gamma_a^+$. Dann gilt mit Gleichung (1.4)

$$\begin{aligned}
|\Im a^{(\beta)}(x,x)| &= |\Im a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x)| \leq C\Re a_\gamma(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x) \\
&\leq C\left(\Re a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x) + \gamma^+\|\beta R_\beta x\|^2 + \beta\|x - \beta R_\beta x\|^2\right) \\
&\leq C\left(\Re a^{(\beta)}(x,x) + \gamma^+\left(\frac{\beta}{\beta - \gamma_a}\right)^2\|x\|^2\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Das nächste Lemma beschreibt die Resolvente der approximierenden Form als Transformation der Halbgruppe des ursprünglichen Operators. Dies Aussage wird später im Beweis von Satz 1.3.1 verwendet.

Lemma 1.2.2. *Sei $R_\alpha^{(\beta)} := (A^{(\beta)} + \alpha)^{-1}$ ($\beta > \gamma_a$ und α hinreichend groß) eine Resolvente von $-A^{(\beta)}$. Dann ist*

$$R_\alpha^{(\beta)} = \frac{1}{\alpha + \beta} + \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Der Beweis folgt durch einfache algebraische Umformungen:

$$\begin{aligned} R_\alpha^{(\beta)} &= (\alpha+\beta-\beta^2 R_\beta)^{-1} \\ &= (\beta+A)(\beta+A)^{-1}(\alpha+\beta-\beta^2(\beta+A)^{-1})^{-1} \\ &= (\beta+A)\left((\alpha+\beta)(\beta+A)-\beta^2\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta+A)\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+A\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}\left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+A\right)^{-1} \end{aligned}$$

Die obige Darstellung folgt aus der Gleichung (1.3). □

Bemerkungen

Der Beweis von Theorem 1.2.1 i), ii) wurde aus [MR92] übernommen und an die hier gegebene Situation angepasst.

Theorem 1.2.1 iii) und Lemma 1.2.2, die für den Beweis von Theorem 1.3.1 vi) notwendig sind, wurden in der Literatur nicht gefunden.

Eine andere gebräuchliche approximierende Form ist

$$a^{(t)}(x,y) := \frac{1}{t}(x-\mathrm{e}^{-tA}x, y).$$

1.3 Kriterien für die Halbgruppe

In diesem Abschnitt wird die Invarianz konvexer Teilmengen von H unter Anwendung der Halbgruppe anhand der zugehörigen Form und der approximierenden Form charakterisiert. Das hier beschriebene Theorem findet seine Anwendung im nächsten Kapitel, in dem auf verschiedene Halbgruppeneigenschaften eingegangen wird.

Sei $\mathcal{C}$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H und $\mathcal{P}$ die Projektion auf $\mathcal{C}$, d.h.

$$\mathcal{P}x \in \mathcal{C} \text{ und } \|x-\mathcal{P}x\| = \inf_{y\in\mathcal{C}} \|x-y\|.$$

Es ist wohlbekannt, dass

$$\Re(x-\mathcal{P}x, \mathcal{P}x-y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}. \tag{1.5}$$

Sei a eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform, $\gamma_a \in \mathbb{R}$, $\Re a \geq -\gamma_a$ und A der assoziierte Operator. Seien R_β Resolventen von $-A$ und $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die assoziierte Halbgruppe.

Theorem 1.3.1. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

i) $\mathrm{e}^{-tA}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ *für alle* $t \geq 0$,

ii) $\beta R_\beta \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ *für alle* $\beta > \gamma_a^+$ *(bzw. für alle* $\beta > \beta_0 \geq \gamma_a^+$*)*,

iii) $\mathcal{P}(\mathcal{D}(a)) \subset \mathcal{D}(a)$ *und für alle* $x \in \mathcal{D}(a)$ *ist* $\Re a(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$,

iv) $\mathcal{P}(\mathcal{D}(a)) \subset \mathcal{D}(a)$ *und für alle* $x \in \mathcal{D}(a)$ *ist* $\Re a(x, x - \mathcal{P}x) \geq -\gamma_a \|x - \mathcal{P}x\|^2$,

v) Es existiert eine dichte Teilmenge $D \subset \mathcal{D}(a)$ *(dicht bzgl.* $\|\cdot\|_a$*) mit* $\mathcal{P}(D) \subset \mathcal{D}(a)$ *und für alle* $x \in D$ *ist* $\Re a(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$,

vi) für alle $x \in H$ *und* $\beta > \gamma_a^+$ *ist* $\Re a^{(\beta)}(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$.

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Sei ii) nicht erfüllt. Dann gibt es ein $\beta > \gamma_a^+$ und ein $x \in \mathcal{C}$, so dass $\beta R_\beta x \notin \mathcal{C}$. Mit dem Hahn-Banach Theorem folgt die Existenz einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und eines linearen stetigen Funktionals ϕ, das $\beta R_\beta x$ von $\mathcal{C}$ trennt, d.h.

$$\Re\phi(\beta R_\beta x) > \alpha \geq \Re\phi(y)$$

für jedes $y \in \mathcal{C}$. Mit der Wahl $y = \mathrm{e}^{-tA}\, x \in \mathcal{C}$ und der Gleichung (1.3) folgt der Widerspruch

$$\begin{aligned}\Re\phi(\beta R_\beta x) > \alpha &= \int_0^\infty \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t}\, \alpha \,\mathrm{d}t \\ &\geq \Re\phi\left(\int_0^\infty \beta\, \mathrm{e}^{-\beta t}\, \mathrm{e}^{-tA}\, x \,\mathrm{d}t\right) = \Re\phi(\beta R_\beta x).\end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i): Mit der Definition der Halbgruppe (Gleichung (1.2)) und der Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}$ erhält man i).

ii) $\Rightarrow$ iii): Für $\beta > \beta_0$ und $x \in \mathcal{D}(a)$ gilt

$$0 \leq \beta\|\mathcal{P}x - \beta R_\beta \mathcal{P}x\|^2 = \beta\Re(\mathcal{P}x - \beta R_\beta \mathcal{P}x, \mathcal{P}x - \beta R_\beta \mathcal{P}x),$$

und wegen Ungleichung (1.5) und weil $\beta R_\beta \mathcal{P}x \in \mathcal{C}$ ist, gilt auch

$$0 \leq \beta\Re(\mathcal{P}x - \beta R_\beta \mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x). \tag{1.6}$$

Addiert man beide Ungleichungen und benutzt $I - \beta R_\beta = AR_\beta$, so erhält man

$$0 \leq \Re a(\beta R_\beta \mathcal{P}x, x - \beta R_\beta \mathcal{P}x),$$

und demnach mit Gleichung (1.1)

$$\begin{aligned}\Re a(\beta R_\beta \mathcal{P}x, \beta R_\beta \mathcal{P}x) &\leq \Re a(\beta R_\beta \mathcal{P}x, x) \\ &\leq \frac{1}{2}\|\beta R_\beta \mathcal{P}x\|_a^2 + 2c^2\|x\|_a^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\Re a(\beta R_\beta \mathcal{P}x, \beta R_\beta \mathcal{P}x) + \frac{\gamma_a + 1}{2}\|\beta R_\beta \mathcal{P}x\|^2 + 2c^2\|x\|_a^2.\end{aligned}$$

Dementsprechend gilt auch

$$\Re a(\beta R_\beta \mathcal{P}x, \beta R_\beta \mathcal{P}x) \leq (\gamma_a + 1)\|\beta R_\beta \mathcal{P}x\|^2 + 4c^2\|x\|_a^2.$$

Also ist $\|\beta R_\beta \mathcal{P}x\|_a$ bezüglich β beschränkt. Da $\beta R_\beta \mathcal{P}x$ in H gegen $\mathcal{P}x$ konvergiert folgt mit Lemma 1.1.1 auch $\mathcal{P}x \in \mathcal{D}(a)$.

Die Ungleichung folgt nun sofort mit Theorem 1.2.1 ii) und Ungleichung (1.6), denn

$$\Re a(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) = \lim_{\beta\to\infty} \Re\beta(\mathcal{P}x - \beta R_\beta \mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0.$$

iii) $\Rightarrow$ iv): Die Behauptung ergibt sich aus

$$\Re a(x, x - \mathcal{P}x) = \Re a(x - \mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) + \Re a(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x).$$

iv) $\Rightarrow$ ii): Sei $\beta > \gamma_a^+$ und $x \in \mathcal{C}$. Es ist $AR_\beta = I - \beta R_\beta$ und somit auch $a(R_\beta\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot) - (\beta R_\beta\cdot, \cdot)$. iv) angewandt auf $\beta R_\beta x$ ergibt hiermit

$$\begin{aligned}
0 &\leq \gamma_a\|\beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x\|^2 + \Re a(\beta R_\beta x, \beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x) \\
&\leq \gamma_a^+(\beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x, \beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x) \\
&\quad + \beta\Re(x - \beta R_\beta x, \beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x) \\
&= \beta\Re(x - \mathcal{P}\beta R_\beta x, \beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x) \\
&\quad + (\gamma_a^+ - \beta)(\beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x, \beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x)
\end{aligned}$$

Die beiden letzten Summanden sind nichtpositiv und somit Null, denn aufgrund der Gleichung (1.5) ergibt sich

$$\Re(\beta R_\beta x - \mathcal{P}\beta R_\beta x, \mathcal{P}\beta R_\beta x - y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Demnach ist $\beta R_\beta x = \mathcal{P}\beta R_\beta x \in \mathcal{C}$.

iii) $\Rightarrow$ v): $D := \mathcal{D}(a)$ leistet das Verlangte.

v) $\Rightarrow$ iii): Sei $x \in \mathcal{D}(a)$ und (x_n) eine Folge in D, die x bezüglich $\|\cdot\|_a$ approximiert. Dann ist mit Gleichung (1.1)

$$\begin{aligned}
\Re a(\mathcal{P}x_n, \mathcal{P}x_n) &= \Re a(\mathcal{P}x_n, \mathcal{P}x_n - x_n) + \Re a(\mathcal{P}x_n, x_n) \\
&\leq \Re a(\mathcal{P}x_n, x_n) \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathcal{P}x_n\|_a^2 + 2c^2\|x_n\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\Re a(\mathcal{P}x_n, \mathcal{P}x_n) + \frac{\gamma_a + 1}{2}\|\mathcal{P}x_n\|^2 + 2c^2\|x_n\|^2
\end{aligned}$$

und somit gilt die Abschätzung

$$\Re a(\mathcal{P}x_n, \mathcal{P}x_n) \leq (\gamma_a + 1)\|\mathcal{P}x_n\|^2 + 4c^2\|x_n\|^2.$$

Da nun $\|\mathcal{P}x_n\|_a$ in n gleichmäßig beschränkt ist und $\mathcal{P}x_n \to \mathcal{P}x$ in H konvergiert folgt mit Lemma 1.1.1, dass $\mathcal{P}x \in \mathcal{D}(a)$ ist und $\mathcal{P}x_n \to \mathcal{P}x$ schwach in $\mathcal{D}(a)$. Schließlich ist

$$\Re a(\mathcal{P}x, \mathcal{P}x) \leq \liminf_{n\to\infty} \Re a(\mathcal{P}x_n, \mathcal{P}x_n)$$

und nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
&\leq \liminf_{n\to\infty} \Re a(\mathcal{P}x_n, x_n) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \big(\Re a(\mathcal{P}x_n, x_n - x) + \Re a(\mathcal{P}x_n - \mathcal{P}x, x) + \Re a(\mathcal{P}x, x)\big) \\
&= \Re a(\mathcal{P}x, x).
\end{aligned}$$

i) $\Rightarrow$ vi): Der Beweis folgt analog dem Beweis von i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\beta > \gamma_a^+$, $\mathrm{e}^{-tA}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$, $x \in \mathcal{C}$ und $\alpha R_\alpha^{(\beta)} x \notin \mathcal{C}$ (α hinreichend groß). Dann existieren ein stetiges lineares Funktional ϕ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\Re\phi(\alpha R_\alpha^{(\beta)} x) > \gamma \geq \Re\phi(y) \quad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Mit Lemma 1.2.2 und

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t}\, \mathrm{d}t = 1$$

folgt nun der Widerspruch

$$\begin{aligned}
\Re\phi(\alpha R_\alpha^{(\beta)} x) > \gamma &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\gamma + \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t}\, \gamma\, \mathrm{d}t \\
&\geq \Re\phi\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t}\, \mathrm{e}^{-tA}\, x\, \mathrm{d}t\right) = \Re\phi(\alpha R_\alpha^{(\beta)} x)
\end{aligned}$$

und somit $\alpha R_\alpha^{(\beta)}\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ für α hinreichend groß. Wendet man nun die bereits bewiesene Aussage ii) $\Rightarrow$ iii) auf $a^{(\beta)}$ an, so folgt die Behauptung.

vi) $\Rightarrow$ iii): Sei $\Re a^{(\beta)}(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(a)$ und $\beta > \gamma_a^+$. Zunächst zeigt man, dass für $x \in \mathcal{D}(a)$ auch $\mathcal{P}x \in \mathcal{D}(a)$ liegt: Für $\beta > \gamma_a^+ + 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\Re a^{(\beta)}(\mathcal{P}x, \mathcal{P}x) &\leq \Re a^{(\beta)}(\mathcal{P}x, x) \\
&\leq \frac{1}{2}\|\mathcal{P}x\|_{a^{(\beta)}}^2 + c\|x\|_{a^{(\beta)}}^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\Re a^{(\beta)}(\mathcal{P}x, \mathcal{P}x) + \frac{\gamma_a^+ + 1}{2}\frac{\beta^2}{(\beta-\gamma_a)^2}\|\mathcal{P}x\|^2 + c\|x\|_{a^{(\beta)}}^2
\end{aligned}$$

und mit dem selben Argument wie bisher

$$\leq (\gamma_a^+ + 1)\frac{\beta^2}{(\beta-\gamma_a)^2}\|\mathcal{P}x\|^2 + 2c\|x\|_{a^{(\beta)}}^2.$$

für c hinreichend groß (analog zur den entsprechenden Abschätzung in diesem Beweis, denn $a^{(\beta)}$ ist gemäß Theorem 1.2.1 gleichmäßig sektoriell). Theorem 1.2.1 i) liefert nun $\mathcal{P}x \in \mathcal{D}(a)$. Nun folgt offensichtlich aus Theorem 1.2.1 ii) auch $\Re a(\mathcal{P}x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$. $\square$

Bemerkungen

Dieser Abschnitt folgt im Wesentlichen [Ouh05, Abschnitt 2.1]. Dort wird das Theorem 1.3.1 i) bis v) allerdings nur für $\gamma_a \leq 0$ bewiesen. Man beachte, dass die dort angegebene Bedingung

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}(a)) \subset \mathcal{D}(a) \text{ und für alle } x \in \mathcal{D}(a) \text{ ist } \Re a(x, x - \mathcal{P}x) \geq 0$$

für $\gamma_a > 0$ nicht äquivalent zu den anderen in Theorem 1.3.1 ist. Dies zeigt folgendes Beispiel: Sei $H = \mathbb{C}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathcal{C} = \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$. Hier sind zwar – wie eine kurze Rechnung zeigt – die Bedingungen aus Theorem 1.3.1 erfüllt, für $x = (-1, -2)$ gilt aber $\Re a(x, x - \mathcal{P}x) = -1$.

Die hier angegebene Verallgemeinerung des Theorems 1.3.1 i) bis v) findet sich auch in [MVV05]. Die Äquivalenz i) zu vi), mit deren Hilfe im nächsten Kapitel ein Darstellungssatz für Formen bewiesen wird, die L^1- bzw. L^∞-kontraktive Halbgruppen erzeugen, wurde in der Literatur nicht gefunden.

Für spezielle Wahlen von $\mathcal{C}$ (wie im nächsten Kapitel) gehen diese Kriterien auf Beurling und Deny zurück, die allgemeine hier vorgestellte Behandlung stammt von Ouhabaz (siehe [Ouh05] und darin genannten Quellen).

Kapitel 2

Spezielle Halbgruppeneigenschaften

In diesem Kapitel werden spezielle Eigenschaften von Halbgruppen auf Funktionenräumen betrachtet. Diese grundlegenden Eigenschaften bilden eine wichtige Basis für die Halbgruppenabschätzungen des vierten Kapitels und für das Verständnis der Halbgruppen und ihrer Formen.

Sei in diesem Kapitel $(X, \mathcal{A}, m)$ ein Maßraum und H sei der Hilbert-Raum $L^2 := L^2(X, \mathcal{A}, m)$. Weiter sei eine dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearform a auf H gegeben, A der assoziierte Operator und R_β Resolventen von $-A$ mit zugehöriger Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$.

Im ersten Abschnitt geht es um positivitätserhaltende Halbgruppen. Danach folgt ein Abschnitt über L^1 bzw. L^∞-beschränkte Halbgruppen.

Im weiteren Verlauf werden Maßdarstellungen für die approximierenden Formen solcher Halbgruppen bewiesen. Dafür wird folgende Zusatzbedingung benötigt.

(TX) X ist ein lokal kompakter separabler Hausdorff-Raum, $\mathcal{A}$ die Borelsche σ-Algebra und m ein Radon-Maß.

Die messbaren Mengen endlichen Maßes werden mit $\mathcal{A}_{fin}$ bezeichnet. Gleichungen und Ungleichungen mit messbaren, auf Nullmengen nicht definierten (Äquivalenzklassen von) Funktionen, sind im folgenden entsprechend des Kontextes im Sinne von f.ü. zu verstehen, auch wenn dies nicht immer gesondert erwähnt wird.

Für $p \in [1, \infty]$ bezeichnet $\|\cdot\|_p$ die Norm in $L^p := L^p(X, \mathcal{A}, m)$ bzw. die L^p-Operatornorm. Im Falle $p = 2$ wird auch kurz $\|\cdot\|$ geschrieben.

2.1 Positivitätserhaltende Halbgruppen

Definition 2.1.1. Ein Operator $T : L^2 \to L^2$ heißt *reell*, wenn für alle $u \in L^2$ gilt:

$$\Im u = 0 \quad \Rightarrow \quad \Im Tu = 0.$$

T heißt *positivitätserhaltend*, wenn für alle $u \in L^2$ gilt:

$$u \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Tu \geq 0.$$

Für reelle Halbgruppen ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Proposition 2.1.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) e^{-tA} *ist für alle* $t \geq 0$ *reell,*

ii) R_β *ist für alle* $\beta > \gamma_a^+$ *(bzw. für alle* $\beta > \beta_0 \geq \gamma_a^+$*) reell,*

iii) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $\Re u \in \mathcal{D}(a)$ *und* $\Im a(\Re u, \Im u) \leq 0$*,*

iv) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $\Re u \in \mathcal{D}(a)$ *und für alle reellen* $u, v \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $\Im a(u, v) = 0$*,*

v) für alle $u \in \mathcal{D}(A)$ *gilt* $\Re u \in \mathcal{D}(A)$ *und für alle reellen* $u \in \mathcal{D}(A)$ *gilt* $\Im Au = 0$*,*

vi) e^{-tA^*} *ist für alle* $t \geq 0$ *reell.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen i) bis iii) folgt aus Theorem 1.3.1 mit der Wahl

$$\mathcal{C} := \{u \in L^2 \mid \Im u = 0\}.$$

Die Äquivalenz von iii) und iv) ist offensichtlich. iv) $\Leftrightarrow$ v) folgt daraus, dass A zu a assoziiert ist und $\mathcal{D}(A)$ in $\mathcal{D}(a)$ bzgl. $\|\cdot\|_a$ dicht liegt. i) $\Leftrightarrow$ vi) folgt durch Adjungieren. □

Für positivitätserhaltende Halbgruppen folgt:

Proposition 2.1.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) e^{-tA} *ist für alle* $t \geq 0$ *positivitätserhaltend,*

ii) R_β *ist für alle* $\beta > \gamma_a^+$ *(bzw. für alle* $\beta > \beta_0 \geq \gamma_a^+$*) positivitätserhaltend,*

iii) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $(\Re u)^+ \in \mathcal{D}(a)$ *und* $\Re a((\Re u)^+, u - (\Re u)^+) \geq 0$*,*

iv) e^{-tA} *ist für alle* $t \geq 0$ *reell und für alle reellen* $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $u^+ \in \mathcal{D}(a)$ *und* $a(u^+, u^-) \leq 0$*,*

v) e^{-tA^*} *ist für alle* $t \geq 0$ *positivitätserhaltend,*

vi) $|\mathrm{e}^{-tA} u| \leq \mathrm{e}^{-tA} |u|$ *für alle* $u \in L^2$*,* $t \geq 0$*.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen i) bis iii) folgt wie eben aus Theorem 1.3.1 mit der Wahl

$$\mathcal{C} := \{u \in L^2 \mid u \geq 0\}.$$

Aus iii) folgt iv), da jeder positivitätserhaltende Operator auch reell ist (nutze Proposition 2.1.2). Aus iv) folgt mit den Aussagen aus Proposition 2.1.2 ebenso iii). i) $\Leftrightarrow$ v) folgt durch Adjungieren. i) $\Leftrightarrow$ vi) folgt mit

$$|\mathrm{e}^{-tA} u| = \sup_{|c|=1} \Re c\, \mathrm{e}^{-tA} u \leq \mathrm{e}^{-tA} |u|,$$

da $\Re c\, \mathrm{e}^{-tA} u = \mathrm{e}^{-tA} \Re cu \leq \mathrm{e}^{-tA} |u|$. □

Im restlichen Teil dieses Abschnittes wird es um Maßdarstellungen für die approximierenden Formen positivitätserhaltender Halbgruppen gehen. Die Existenz der Maße wird dabei aus dem folgenden Lemma über Radon-Maß-Erweiterungen von Inhalten folgen. Ein wesentlicher Unterschied dieses, auf dem Darstellungssatz von Riesz aufbauenden, Lemmas zum Erweiterungssatz von Carathéodory ist, dass hier keine σ-Additivität an den Inhalt vorausgesetzt wird. Diese ergibt sich automatisch aus den topologischen Eigenschaften des Inhaltes.

Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ (in einem topologischem Raum) heißt *von innen regulär*, wenn für jedes $M \in \mathcal{R}$ eine Folge kompakter Mengen $K_n \in \mathcal{R}$ existiert mit $K_n \subset M$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(K_n) = \mu(M)$. Ein *Radon-Maß* ist ein von innen reguläres Maß, das auf kompakten Mengen nur endliche Werte annimmt.

Lemma 2.1.4. *Sei Y ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra von Y und $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ ein Ring, der eine topologische Basis von Y enthält. Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ ein von innen regulärer Inhalt. Dann existiert ein Radon-Maß $\tilde{\mu}$ auf Y mit $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$.*

Beweis. Definiere für $f \in C_c(Y)$ das Untersummenintegral

$$\phi(f) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in M_i} f(x)\mu(M_i) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, M_i \in \mathcal{R}, \operatorname{supp} f \subset \cup_{i=1}^{n} M_i \right\}.$$

Es existiert eine Menge $M \in \mathcal{R}$, so dass $\operatorname{supp} f \subset M$. Da bei einer Verfeinerung der M_i die Summe in der Definition von ϕ größer wird, können die $M_i \subset M$ gewählt werden. Somit existiert ϕ und ist endlich, denn die Summe in der Definition ist beschränkt durch

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in M_i} f(x)\mu(M_i) \le \sup_{x\in Y} f(x)\mu(M).$$

Aus der klassischen Integrationstheorie ist bekannt, dass ϕ auf $C_c(Y)$ additiv ist: Für $f, g \in C_c(Y)$ gilt offensichtlich $\phi(f+g) \ge \phi(f) + \phi(g)$, denn

$$\inf_{x\in M_i} (f(x) + g(x)) \ge \inf_{x\in M_i} f(x) + \inf_{x\in M_i} g(x),$$

und die M_i in der Definition von ϕ können so gewählt werden, dass

$$\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g \subset \cup_{i=1}^{n} M_i.$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Mit dem Verfeinerungsargument und da $\mathcal{R}$ eine topologische Basis enthält, können die M_i in der Definition so gewählt werden, dass

$$\sup_{x\in M_i} f(x) - \inf_{x\in M_i} f(x) \le \epsilon$$

ist. Dann gilt auch

$$\inf_{x\in M_i} f(x) + \inf_{x\in M_i} g(x) \ge \inf_{x\in M_i} (f(x) + g(x)) - \epsilon.$$

Also ist $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$.

ϕ ist also ein positives lineares Funktional auf $C_c(Y)$ und der Darstellungssatz von Riesz liefert ein Radon-Maß $\tilde{\mu}$ mit

$$\phi(f) = \int_X f(x)\, \tilde{\mu}(\mathrm{d}x).$$

Behauptung 1: Ist $M \in \mathcal{R}$ relativ kompakt (Teilmenge einer kompakten Menge), so gilt $\mu(M) = \inf\{\mu(U) \mid M \subset U \in \mathcal{R}, U \text{ offen}\}$: Da M relativ kompakt ist existiert eine offene Menge $U \in \mathcal{R}$, $U \supset M$ und aufgrund der inneren Regularität existieren kompakte Mengen $K_n \in \mathcal{R}$, $K_n \subset U \setminus M$, die $U \setminus M$ bezüglich μ approximieren. Also folgt $\mu(U \setminus K_n) \to \mu(M)$.

Da für jedes offene $U \subset X$, jedes kompakte $K \subset U$ und jede stetige Funktion f mit $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_U$ die Ungleichungen $\mu(K) \leq \phi(f) \leq \mu(U)$ erfüllt sind (und immer eine solche stetige Funktion f existiert), folgt mit Behauptung 1, dass

$$\mu(K) = \inf_{f \geq \mathbb{1}_K} \phi(f) = \tilde{\mu}(K)$$

für alle kompakten $K \in \mathcal{R}$. Die zweite Gleichheit folgt, da $\tilde{\mu}$ ein Radon-Maß ist. Da μ von innen regulär ist folgt sogar $\tilde{\mu} \geq \mu$ auf $\mathcal{R}$.

Sei nun $M \in \mathcal{R}$ mit $\tilde{\mu}(M) > \mu(M)$. Weil $\tilde{\mu}$ von innen regulär ist, existiert eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}$, $K \subset M$, so dass $\tilde{\mu}(K) > \mu(M)$ ist. Da K eine relativ kompakte Umgebung in $\mathcal{R}$ besitzt, kann M relativ kompakt angenommen werden. Mit Behauptung 1 existiert eine offene Menge $U \in \mathcal{R}$, $U \supset K$, so dass die Ungleichung $\tilde{\mu}(K) > \mu(U)$ gilt. Den Widerspruch erhält man nun mit einer Funktion $f \in C_c(Y)$, $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_U$, denn dann ist

$$\tilde{\mu}(K) \leq \phi(f) \leq \mu(U).$$

Also ist $\mu = \tilde{\mu}$ in $\mathcal{R}$. □

Als eine Anwendung dieses Lemmas erhält man für stetige positivitätserhaltende Operatoren eine Maßdarstellung:

Lemma 2.1.5. *Sei T ein stetiger positivitätserhaltender Operator auf L^2 und sei (TX) erfüllt. Dann existiert ein Radon-Maß μ auf X^2, so dass*

$$(Tu, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in L^2$ gilt.

Beweis. Für ein Mengensystem $\mathcal{F}$ bezeichne $r(\mathcal{F})$ den durch $\mathcal{F}$ erzeugten Ring. Definiere den Inhalt μ auf dem Ring $\mathcal{R} := r(\{E \times F \mid E, F \in \mathcal{A}_{fin}\})$ durch

$$\mu(E \times F) := (T\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_E).$$

Da m ein Radon-Maß ist, ist μ von innen regulär. Lemma 2.1.4 besagt nun, dass μ auf ein Radon-Maß in X^2 erweitert werden kann für das gilt

$$(Tu, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\,\mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}_{fin}\} =: L$. Für $0 \leq u, v \in L^2(X)$ existieren monoton wachsende Folgen (u_n) und (v_n) aus L, die u und v approximieren. Mit der Stetigkeit von T und monotoner Konvergenz folgt nun die Behauptung. □

Nach dieser Vorbereitung kann nun der Darstellungssatz für die approximierenden Formen positivitätserhaltender Halbgruppen bewiesen werden.

Proposition 2.1.6. *Sei* e^{-tA} *für alle* $t \geq 0$ *positivitätserhaltend und (TX) erfüllt. Dann gibt es eine Familie von reellen signierten Radon-Maßen* μ_β *auf* X^2 *(*$\beta > \gamma_a^+$*) mit*

$$\mu_\beta|_{X^2 \setminus d} \leq 0,$$

so dass

$$a^{(\beta)}(u, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\,\mu_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in L^2$ *gilt.*

Hier bezeichnet d die Diagonale in X^2, also $X^2 \setminus d = \{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\}$.

Beweis. Es ist

$$a^{(\beta)}(u, v) = \beta(u, v) - (\beta^2 R_\beta u, v)$$

und

$$(u, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\,\delta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

mit dem Diagonalmaß

$$\delta(M) = m(\{x \in X \mid (x, x) \in M\}).$$

Da R_β stetig und positivitätserhaltend ist, folgt die Aussage mit Lemma 2.1.5. □

2.1.1 Ein Störungsresultat für positivitätserhaltende Halbgruppen

Als nächstes wird ein Störungsresultat für positivitätserhaltende Halbgruppen formuliert und bewiesen. Es stellt einen Zusammenhang zwischen dem Verhältnis zweier positivitätserhaltender Halbgruppen und dem Verhältnis ihrer erzeugenden Operatoren her. Wie bisher spielt auch hier der Definitionsbereich eine entscheidende Rolle. Es folgt eine Umkehrung der Aussage und ein Korollar über die Kerne solcher Halbgruppen. Ein Anwendungsbeispiel für dieses Störungsresultat findet sich in Abschnitt 5.5.

Proposition 2.1.7. *Seien a und a_0 dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearformen mit positivitätserhaltenden Halbgruppen $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ und $(\mathrm{e}^{-tA_0})_{t\geq 0}$. Es existiere eine Konstante $\omega \in \mathbb{R}$ und eine Konstante $C_\omega > 0$, so dass $\| \mathrm{e}^{-tA} |_{L^1} \|_1 \leq C_\omega \mathrm{e}^{\omega t}$ und $\| \mathrm{e}^{-tA_0} |_{L^\infty} \|_\infty \leq C_\omega \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Weiterhin existiere eine Konstante $C_b \geq 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(A) \cap L^1$ und $v \in \mathcal{D}(A_0^*) \cap L^1$ mit $u, v \geq 0$ die Ungleichung*

$$b(u,v) := (u, A_0^* v) - (Au, v) \leq C_b \|u\|_1 \|v\|_1 \tag{2.1}$$

erfüllt ist.

Dann gilt für alle $0 \leq u \in L^2 \cap L^1$ und $t \geq 0$

$$\mathrm{e}^{-tA}\, u \leq \mathrm{e}^{-tA_0}\, u + C_b C_\omega^2\, \mathrm{e}^{\omega t}\, t \|u\|_1.$$

Bemerkung 2.1.8. Ist b vom Typ

$$b(u,v) = -\int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

mit $\mu \geq 0$, so ist (2.1) automatisch mit $C_b = 0$ erfüllt.

Ist b vom Typ

$$b(u,v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)} j(x,y)\, m^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

mit $0 \leq j \leq C_b$, so ist (2.1) mit der Konstanten C_b erfüllt.

Man beachte, dass (2.1) eine Bedingung an die Formdefinitionsbereiche impliziert und b im allgemeinen nicht identisch zu $a_0 - a$ ist wie das nachfolgende Beispiel zeigt. Falls allerdings $\mathcal{D}(a) = \mathcal{D}(a_0)$ ist, so gilt auch $b = a_0 - a$.

Beispiel 2.1.9. Sei

$$a_0(u,v) := \int_0^1 u'(x)\overline{v'(x)}\, \mathrm{d}x \quad \mathcal{D}(a_0) := H^1([0,1])$$

die klassische Dirichlet-Form auf $[0,1]$ mit Neumann-Randbedingung und

$$a(u,v) := a_0(u,v) \quad \mathcal{D}(a) := \{u \in H^1 \mid u(0) = u(1)\}.$$

Dann ist $b(u,v) = u'(0)\overline{(v(1) - v(0))}$ und b ist nicht identisch zu $a_0 - a = 0$. Außerdem erfüllt b für kein $C_b > 0$ Gleichung (2.1).

Beweis der Proposition. Sei $0 \leq u \in L^2 \cap L^1$ und $0 \leq s \leq t$. Definiere $u_s := \mathrm{e}^{-sA}\, u \geq 0$, sowie $v_s := \mathrm{e}^{-(t-s)A_0}\, u_s \geq 0$. Sei $0 \leq w \in L^2 \cap L^1$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $u_s \in L^1$ und $0 \leq \mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\, w \in L^1$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v_s, w) &= (A_0\, \mathrm{e}^{-(t-s)A_0}\, u_s, w) - (\mathrm{e}^{-(t-s)A_0}\, Au_s, w) \\
&= (u_s, A_0^*\, \mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\, w) - (Au_s, \mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\, w) \\
&\leq C_b \|u_s\|_1 \| \mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\, w\|_1 \\
&\leq C_b C_\omega\, \mathrm{e}^{\omega s}\, \|u\|_1 C_\omega\, \mathrm{e}^{\omega(t-s)}\, \|w\|_1 \\
&\leq C_b C_\omega^2\, \mathrm{e}^{\omega t}\, \|u\|_1 \|w\|_1
\end{aligned}$$

für $0 < s < t$. Die Vertauschung von Differentiation und Skalarprodukt ist möglich, da der Differenzenquotient von v_s im L^2-Sinne konvergiert. Weiterhin ist $(A_0\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0})^* = A_0^*\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}$, weil $A_0\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0}$ und $A_0^*\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}$ stetig sind und für $u \in \mathcal{D}(A_0^*)$

$$(A_0\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0})^* u = \mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\,A_0^* u = A_0^*\,\mathrm{e}^{-(t-s)A_0^*}\,u$$

gilt. Da v_s stetig in $0 \le s \le t$ ist, folgt nun mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{-tA}\,u, w) = (v_t, w) &\le (v_0, w) + C_b C_\omega^2 t\,\mathrm{e}^{\omega t}\,\|u\|_1\|w\|_1\\ &= (\mathrm{e}^{-tA_0}\,u, w) + C_b C_\omega^2\,\mathrm{e}^{\omega t}\,t\|u\|_1(1, w),\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.10. Es gilt auch die Umkehrung der Proposition: Seien a und a_0 dicht definierte, abgeschlossene, sektorielle Sesquilinearformen mit positivitätserhaltenden Halbgruppen $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\ge0}$ und $(\mathrm{e}^{-tA_0})_{t\ge0}$ und sei

$$\mathrm{e}^{-tA}\,u \le \mathrm{e}^{-tA_0}\,u + C\,\mathrm{e}^{\omega t}\,t\|u\|_1$$

für alle $0 \le u \in L^2 \cap L^1$ erfüllt. Dann gilt

$$(u, A_0^* v) - (Au, v) \le C\|u\|_1\|v\|_1$$

für alle $0 \le u \in \mathcal{D}(A) \cap L^1$ und $0 \le v \in \mathcal{D}(A_0^*) \cap L^1$.

Beweis. Aus der Ungleichung folgt

$$\left(u, \frac{v - \mathrm{e}^{-tA_0^*}\,v}{t}\right) - \left(\frac{u - \mathrm{e}^{-tA}\,u}{t}, v\right) \le C\,\mathrm{e}^{\omega t}\,\|u\|_1\|v\|_1$$

für alle $u \in \mathcal{D}(A) \cap L^1$ und $v \in \mathcal{D}(A_0^*) \cap L^1$ mit $u, v \ge 0$. Lässt man nun t gegen Null konvergieren, so erhält man die Behauptung. □

Formuliert man die Ungleichung aus Proposition 2.1.7 als Ungleichung über die Kerne von $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\ge0}$ und $(\mathrm{e}^{-tA_0})_{t\ge0}$, so erhält man das gewünschte Störungsresultat:

Korollar 2.1.11. *Seien die Bedingungen aus Proposition 2.1.7 erfüllt, $(X, \mathcal{A}, m)$ σ-endlich und e^{-tA_0} besitze einen messbaren Kern $k_t^0 : X^2 \to [0, \infty)$, d.h. für alle $u \in L^2 \cap L^1$ gilt*

$$(\mathrm{e}^{-tA_0}\,u)(x) = \int_X u(y) k_t^0(x, y)\,m(\mathrm{d}y).$$

Dann besitzt auch e^{-tA} einen Kern k_t für den gilt

$$k_t \le k_t^0 + C_b C_\omega^2\,\mathrm{e}^{\omega t}\,t.$$

Beweis. Definiere den Inhalt μ auf $\mathcal{R} := r(\{E \times F \mid E, F \in \mathcal{A}_{fin}\})$ durch

$$\mu(E \times F) := (\mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_E, \mathbb{1}_F).$$

Es ist nach Proposition 2.1.7 $\mu \leq \mu^*$ für

$$\mu^*(M) := \int_M \left(k_t^0(x,y) + C_b C_\omega^2\, \mathrm{e}^{\omega t}\, t\right)\, m^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Mit Lemma A.5 folgt nun, dass μ auf ein bezüglich m^2 absolutstetiges Maß $\tilde{\mu}$ erweiterbar ist. Somit existiert ein Kern $k_t \leq k_t^0 + C_b C_\omega^2\, \mathrm{e}^{\omega t}\, t$ mit

$$(\mathrm{e}^{-tA}\, u, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)} k_t(x,y)\, m^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}_{fin}\}$. Mit Stetigkeit von e^{-tA}, monotoner Konvergenz und Fubini folgt der Rest. □

Bemerkungen

Die Bedingungen in Proposition 2.1.3 nennt man auch das erste Beurling-Deny Kriterium (siehe [RS78, Theorem XIII.50]). Die hier vorgestellte Methode zur Charakterisierung positivitätserhaltende Halbgruppen stammt von Ouhabaz ([Ouh05]). Die Charakterisierung selbst ist aber deutlich älter und wurde meist im Kontext der Dirichlet-Formen behandelt (siehe nächstes Kapitel).

Den Riesz'schen Darstellungssatz und den Erweiterungssatz von Carathéodory sowie alle hier verwendeten maßtheoretischen Begriffe findet man z.B. im Lehrbuch von Bauer zur Maßtheorie [Bau92]. Maße bezeichnen dort (wie auch hier) immer positive Maße, wenn nichts weiter spezifiziert ist.

Lemma 2.1.5 findet sich auch in [FŌT94, Lemma 1.4.1]. Der dortige Beweis geht aber einen geringfügig anderen Weg: Es wird ein lineares Funktional auf $C_c(X) \otimes C_c(X)$ definiert anstelle eines Funktionals auf $C_c(X \times X)$ und darauf der Darstellungssatz von Riesz angewandt. Das hier benutzte Lemma 2.1.4 wird im nächsten Abschnitt noch benötigt. Deshalb wurde dieser – auf den ersten Blick aufwendigere – Weg gewählt, um Proposition 2.1.6 zu zeigen. Proposition 2.1.6 ist im Dirichlet-Form-Kontext ebenfalls bekannt.

Laut [Els05, Aufgabe II.2.5] ist jeder endliche von innen reguläre Inhalt σ-additiv. Somit ist der Inhalt μ in Lemma 2.1.4 mit dem Erweiterungssatz von Carathéodory zu einem Maß auf $\mathcal{B}$ erweiterbar. Es muss nur noch gezeigt werden, dass μ zu einem von innen regulären Maß erweiterbar ist.

Das Störungsresultat Proposition 2.1.7 ist eine Verallgemeinerung von [BGK09, Lemma 3.1]. Da der Beweis dort auf Basis der Zerlegung stochastischer Prozesse nach Meyer [Mey75] bewiesen wurde, kann der dort gegebene Beweis nicht auf diesen allgemeinen Kontext übertragen werden. Auch fehlt dort eine klare Aussage über die Bedeutung der

Definitionsbereiche der Formen a und a_0. Das Störungsresultat in der hier angegebenen allgemeinen Form wurde in der Literatur nicht gefunden.

Aus Proposition 2.1.7 folgt auch, dass positive Störungen zu einem Abfall der Halbgruppe führen. Dieses Prinzip ist zwar anschaulich, ein Beweis hierfür wurde in der Literatur aber nur für Spezialfälle gefunden. Es ist nicht zu verwechseln mit dem ähnlichen Prinzip der Domination [Ouh05, Abschnitt 2.3]. *(Errata: Für $C_b = 0$ ist dies Domination.)*

2.2 L^1 und L^∞-beschränkte Halbgruppen

Analog zu Abschnitt 2.1 werden hier zunächst L^1- bzw. L^∞-kontraktive Halbgruppen anhand der Form charakterisiert. Ein Operator T heißt L^p-kontraktiv, wenn $\|T\|_p \leq 1$ ist. Danach wird die Existenz einer Maßdarstellung der zugehörigen approximierenden Formen gezeigt. Der Rest des Abschnittes widmet sich dann allgemeineren Schranken an die L^p-Normen der Halbgruppe. Schranken an die L^1- bzw. L^∞-Norm der Halbgruppe spielen für die Kernabschätzungen in Kapitel 4 eine wichtige Rolle.

L^∞-kontraktive Halbgruppen lassen sich über die Form folgendermaßen charakterisieren:

Proposition 2.2.1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
i) $\mathrm{e}^{-tA}|_{L^\infty}$ *ist für alle* $t \geq 0$ L^∞*-kontraktiv,*
ii) $\beta R_\beta|_{L^\infty}$ *ist für alle* $\beta > \gamma_a^+$ *(bzw. für alle* $\beta > \beta_0 \geq \gamma_a^+$*)* L^∞*-kontraktiv,*
iii) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $\frac{u}{|u|\vee 1} \in \mathcal{D}(a)$ *und* $\Re a\left(\frac{u}{|u|\vee 1}, \frac{|u|\vee 1 - 1}{|u|\vee 1} u\right) \geq 0$.

Beweis. Dies folgt aus Theorem 1.3.1 mit der Wahl

$$\mathcal{C} := \{u \in L^2 \mid |u| \leq 1\}.$$ □

Analog die L^1-kontraktiven Halbgruppen:

Proposition 2.2.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
i) $\mathrm{e}^{-tA}|_{L^1}$ *ist für alle* $t \geq 0$ L^1*-kontraktiv,*
ii) $\beta R_\beta|_{L^1}$ *ist für alle* $\beta > \gamma_a^+$ *(bzw. für alle* $\beta > \beta_0 \geq \gamma_a^+$*)* L^1*-kontraktiv,*
iii) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ *gilt* $\frac{u}{|u|\vee 1} \in \mathcal{D}(a)$ *und* $\Re a\left(\frac{|u|\vee 1 - 1}{|u|\vee 1} u, \frac{u}{|u|\vee 1}\right) \geq 0$.

Beweis. Dies folgt aus der vorherigen Proposition durch Adjungieren. □

Das nächste Lemma beweist die Existenz einer Maßdarstellung für stetige, in gewissem Sinne diagonaldominante, lineare Operatoren. Es dient der Vorbereitung des Darstellungssatzes für die approximierenden Formen L^1- bzw. L^∞-kontraktiver Halbgruppen.

Lemma 2.2.3. *Sei T ein beschränkter Operator auf L^2 mit*

$$\sum_{i=1}^{n} |(T\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_0})| \leq \Re(T\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_0})$$

für alle paarweise disjunkten $E_i \in \mathcal{A}_{fin}$ und sei (TX) erfüllt.
Dann existiert ein komplexes Radon-Maß μ auf X^2 mit

$$|\mu|(E \times X \setminus d) \leq \Re\mu(\{(x,x) \mid x \in E\})$$

für alle $E \in \mathcal{A}$, so dass

$$(Tu, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \mu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u \in L^2 \cap L^\infty$ und $v \in L^2 \cap L^1$ gilt.

d bezeichnet wie vorher die Diagonale in X^2, d.h. $E \times X \setminus d = \{(x,y) \in E \times X \mid x \neq y\}$.

Beweis. Definiere den komplexen Inhalt μ auf dem Ring $\mathcal{R} := r(\{E \times F \mid E, F \in \mathcal{A}_{fin}\})$ durch

$$\mu(E \times F) := (T\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_E).$$

Definiere wie in Abschnitt 2.1.1 $|\mu|$ und entsprechend die positiven und negativen Real- und Imaginärteile $(\Re\mu)^+$, $(\Re\mu)^-$, $(\Im\mu)^+$ und $(\Im\mu)^-$. Es gilt

$$|\mu|(E \times E) = \sup_{E = \cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mu(E_i \times E_j)|.$$

Wegen der Stetigkeit von T und weil m ein Radon-Maß ist sind die Teile von μ von innen regulär. Nun ist für $E \in \mathcal{A}_{fin}$ wegen der Voraussetzung

$$\begin{aligned} |\mu|(E \times E) &\leq 2 \sup_{E = \cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \times E_i)| \\ &\leq 2\|T\| \sup_{E = \cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^n m(E_i) = 2\|T\| m(E) < \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Somit nehmen die Teile von μ nur endliche Werte an und die Voraussetzungen von Lemma 2.1.4 sind erfüllt. Es existieren also Radon-Maß-Erweiterungen μ^{r+}, μ^{r-}, μ^{i+} und μ^{i-} der Teile von μ und eine Radon-Maß-Erweiterung ν von $|\mu|$. Die passende Linearkombination der Maße sei

$$\tilde{\mu} := \mu^{r+} - \mu^{r-} + i\mu^{i+} - i\mu^{i-}.$$

Es gilt

$$(Tu, v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \tilde{\mu}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}_{fin}\}$.

Nun gilt mit Lemma A.5 $|\tilde{\mu}| = \nu$ und somit

$$\begin{aligned}|\tilde{\mu}|(E \times X \setminus d) = \nu(E \times X \setminus d) &= \sup_{\substack{\cup_{i=1}^n E_i \times F_i \subset E \times X \setminus d \\ E_i, F_i \in \mathcal{A}_{fin}}} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i \times F_i)| \\ &\leq \inf_{E = \cup_{i=1}^n E_i} \Re\mu(\cup_{i=1}^n E_i \times E_i) = \Re\tilde{\mu}(\{(x,x) \mid x \in E\}) \\ &\leq 2\|T\| m(E).\end{aligned}$$

Deswegen ist für $u \in L^2 \cap L^\infty$ und $v \in L^2 \cap L^1$ das Integral

$$\int_{X^2 \setminus d} |u(y)\overline{v(x)}|\, |\tilde{\mu}|(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

wohldefiniert und endlich. Wegen (2.2) ist

$$|\tilde{\mu}|(E^2 \cap d)| \leq 2\|T\| m(E).$$

Also ist für $u, v \in L^2$ auch das Integral

$$\int_{X^2 \cap d} |u(y)\overline{v(x)}|\, |\tilde{\mu}|(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \leq \int_X |u(x)\overline{v(x)}| 2\|T\|\, m(\mathrm{d}x)$$

wohldefiniert und endlich. Mit der Stetigkeit von T und majorisierter Konvergenz folgt die Behauptung. □

Proposition 2.2.4. *Sei* $\mathrm{e}^{-tA}|_{L^\infty}$ *für alle* $t \geq 0$ L^∞*-kontraktiv. Dann gibt es eine Familie von komplexen Maßen* μ_β *auf* X^2 $(\beta > \gamma_a^+)$ *mit*

$$|\mu_\beta|(E \times X \setminus d) \leq \Re\mu_\beta(\{(x,x) \mid x \in E\})$$

für alle $E \in \mathcal{A}$*, so dass gilt*

$$a^{(\beta)}(u,v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \mu_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u \in L^2 \cap L^\infty$ *und* $v \in L^2 \cap L^1$.

Beweis. Sei

$$u := 2 \cdot \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$$

mit $E_i \in \mathcal{A}_{fin}$ paarweise disjunkt und $|c_i| = 1$. Dann ist

$$\frac{u}{|u| \vee 1} = \mathbb{1}_{E_0} + \sum_{i=1}^n c_i \cdot \mathbb{1}_{E_i}$$

und

$$\frac{|u| \vee 1 - 1}{|u| \vee 1} u = \mathbb{1}_{E_0}.$$

Somit folgt mit Proposition 2.2.1 angewendet auf $a^{(\beta)}$ nunmehr

$$\Re a^{(\beta)}(\mathbb{1}_{E_0} + \sum_{i=1}^{n} c_i E_i, \mathbb{1}_M) \geq 0$$

was äquivalent zu

$$\Re a^{(\beta)}(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_0}) \geq -\sum_{i=1}^{n} \Re c_i a^{(\beta)}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_0})$$

ist. Da die c_i beliebig gewählt waren mit $|c_i| = 1$, gilt also auch

$$\Re a^{(\beta)}(\mathbb{1}_{E_0}, \mathbb{1}_{E_0}) \geq \sum_{i=1}^{n} |a^{(\beta)}(\mathbb{1}_{E_i}, \mathbb{1}_{E_0})|.$$

Lemma 2.2.3 angewendet auf $A^{(\beta)}$ liefert nun die Behauptung. □

Proposition 2.2.5. *Sei* $\mathrm{e}^{-tA}|_{L^1}$ *für alle* $t \geq 0$ L^1*-kontraktiv. Dann gibt es eine Familie von komplexen Maßen* μ_β *auf* X^2 $(\beta > \gamma_a^+)$ *mit*

$$|\mu_\beta|(X \times M \setminus d) \leq \Re\mu_\beta(\{(x,x) \mid x \in M\})$$

für alle $M \in \mathcal{A}$*, so dass gilt*

$$a^{(\beta)}(u,v) = \int_{X^2} u(y)\overline{v(x)}\, \mu_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u \in L^2 \cap L^1$ *und* $v \in L^2 \cap L^\infty$*.*

Beweis. Dies folgt aus der vorherigen Proposition durch Adjungieren. □

In Proposition 2.2.2 wird die Eigenschaft $\|\mathrm{e}^{-tA}|_{L^1}\|_1 \leq 1$ bzw. $\|\mathrm{e}^{-tA}|_{L^1}\|_1 \leq \mathrm{e}^{\omega t}$ (Verschiebung von A um Konstante) vollständig über die Form charakterisiert. Die Normen $\|\mathrm{e}^{-tA}|_{L^p}\|_p$ können aber auch ein weitaus komplizierteres Verhalten aufweisen. Das nächste Beispiel behandelt zuerst die L^2-Normen von Halbgruppen. 1) bis 3) sind allgemeingültige Aussagen, wohingegen 4) ein Beispiel dafür ist, dass die Norm sich nicht exponentiell verhalten muss.

Beispiel 2.2.6. (L^2-Normen von Halbgruppen)
1) Sei a symmetrisch und nach unten beschränkt. Dann ist

$$\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-\omega t}$$

für $\omega := \inf_{u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2}$.

2) Sei a schiefsymmetrisch. Dann ist e^{-tA} unitär und somit

$$\| \mathrm{e}^{-tA} \| = 1.$$

3) Allgemein gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \mathrm{e}^{-tA} \||_{t=0} = -\omega$ für $\omega := \inf_{u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|^2}$.

4) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathrm{e}^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

und man errechnet

$$\| \mathrm{e}^{-tA} \| = \sqrt{\mathrm{e}^{-2t} + 1 - \mathrm{e}^{-t} + (1 - \mathrm{e}^{-t})\sqrt{\mathrm{e}^{-2t} + 1}},$$

es konvergiert also $\| \mathrm{e}^{-tA} \| \to \sqrt{2}$ für $t \to \infty$ und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| \mathrm{e}^{-tA} \||_{t=0} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = -\omega.$$

Für L^p-Normen, $p \neq 2$, kann auch im Falle symmetrischer oder schiefsymmetrischer Formen a ein anderes Verhalten als exponentielles Wachstum der Norm der Halbgruppe auftreten. Das nächste Beispiel zeigt dies für die L^1-Normen von Halbgruppen.

Beispiel 2.2.7. (L^1-Normen von Halbgruppen)

1) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Form ist symmetrisch, und es ist

$$\mathrm{e}^{-tA} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + \mathrm{e}^{-5t} & 2 - 2\,\mathrm{e}^{-5t} \\ 2 - 2\,\mathrm{e}^{-5t} & 1 + 4\,\mathrm{e}^{-5t} \end{pmatrix}$$

und $\| \mathrm{e}^{-tA} \|_1 = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\,\mathrm{e}^{-5t}$.

2) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Form ist schiefsymmetrisch, und es ist

$$\mathrm{e}^{-tA} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^{-2it} & 1 - \mathrm{e}^{-2it} \\ 1 - \mathrm{e}^{-2it} & 1 + \mathrm{e}^{-2it} \end{pmatrix}$$

und $\| \mathrm{e}^{-tA} \|_1 = \frac{1}{2}|1 + \mathrm{e}^{-2it}| + \frac{1}{2}|1 - \mathrm{e}^{-2it}| = |\sin(t)| + |\cos(t)|$.

Das folgende Störungsresultat liefert nun ein Kriterium um Schranken der Form $C\,\mathrm{e}^{\omega t}$ nachzuweisen:

Theorem 2.2.8. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $\| \mathrm{e}^{-tA} |_{L^p} \|_p \leq C$ für alle $t \geq 0$. Sei weiter $V : L^p \to L^p$ ein stetiger linearer Operator und $0 < \alpha \leq \infty$, $0 \leq \gamma < 1$ so gewählt, dass*

$$\int_0^\alpha \|V \mathrm{e}^{-tA} u\|_p \, \mathrm{d}t \leq \gamma \|u\|_p \quad \forall u \in D := \{\mathrm{e}^{-tA} u \mid t > 0, u \in L^2 \cap L^p\}.$$

Dann gilt

$$\| \mathrm{e}^{-t(A+V)} |_{L^p} \|_p \leq \left(\frac{C}{1-\gamma} \right)^{\frac{t}{\alpha}+1} = \frac{C}{1-\gamma} \, \mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{C}{1-\gamma}\right) t}.$$

Beweis. Wegen der L^p-Normschranke an $\mathrm{e}^{-tA} |_{L^p}$ ist D dicht in L^p und $D \subset \mathcal{D}(A_p)$, dem Definitionsbereich des L^p-Generators. Somit sind die Voraussetzungen von [Voi77, 1. Theorem] erfüllt und es folgt die Behauptung. □

Bemerkungen

Die Bedingungen aus Proposition 2.2.1 bzw. 2.2.2 werden auch das zweite Beurling-Deny Kriterium genannt (siehe [RS78, Theorem XIII.51]). Wie auch die Charakterisierung der positivitätserhaltenden Halbgruppen stammt auch die Charakterisierung der L^1- bzw. L^∞-beschränkten Halbgruppen von Ouhabaz ([Ouh05]). Die Charakterisierung selbst ist aber deutlich älter und wurde meist im Kontext der Dirichlet-Formen behandelt (siehe nächstes Kapitel).

Die Maßdarstellung Proposition 2.2.5 wurde in der Literatur nicht gefunden.

Die Störungen in Theorem 2.2.8 werden auch Miyadera Störungen genannt (siehe [Miy66]).

Eine andere allgemeine Möglichkeit L^p-Schranken der Form $\| \mathrm{e}^{-tA} |_{L^p} \|_p \leq \mathrm{e}^{\omega_p t}$ zu erhalten ist, das Spektrum des L^p-Erzeugers wie in [SV02] zu betrachten. So kann man auch für $p \notin \{1, 2, \infty\}$ derartige Abschätzungen an die Normen erhalten.

Kapitel 3

Symmetrische Dirichlet-Formen

Ende der 50er Jahre wurden von A. Beurling und J. Deny zwei Arbeiten zu Dirichlet-Räumen [BD58, BD59] veröffentlicht und damit die Theorie der Dirichlet-Formen begründet. Dirichlet-Formen sind eng mit Markov-Halbgruppen (positivitätserhaltende, L^1 und L^∞-kontraktive Halbgruppen) und mit Markov-Prozessen verbunden und stellen so eine Schnittstelle zwischen der Analysis und der Theorie stochastischer Prozesse dar. Sie sind das wichtigste Anwendungsbeispiel für die Halbgruppenabschätzungen dieser Arbeit. Eine gute Einführung in die Theorie der Dirichlet-Formen bieten die Bücher [FŌT94, BH91, MR92].

Zunächst werden die grundsätzlichen Definitionen und eine Darstellungsformel für Dirichlet-Formen angegeben. Im nächsten Abschnitt werden Störungen von Dirichlet-Formen durch Maße eingeführt, die eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen der Stochastik und der Analysis spielen. Dazu gehören die Quantenmechanik, die Theorie der Wärmeleitung und des Elektromagnetismus, sowie verschiedene stochastische Modelle. Der letzte Abschnitt widmet sich dem Energiemaß und den Funktionen lokal im Definitionsbereich. Weiter werden Produkt- und Kettenregel vorgestellt. Das Ende widmet sich dann noch der Frage, wann Produkte von Funktionen wieder im Definitionsbereich liegen.

3.1 Definitionen und Darstellung

Sei X ein lokal kompakter separabler Hausdorff-Raum, $\mathcal{A}$ die Borelsche σ-Algebra, m ein Radon-Maß auf $\mathcal{A}$ mit $m(U) > 0$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ und a eine dicht definierte, symmetrische, nach unten beschränkte und abgeschlossene Sesquilinearform. Sei weiterhin A der zu a assoziierte Operator, $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die zugehörige Halbgruppe und $a^{(\beta)}$ die approximierende Form.

Definition 3.1.1. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *normale Kontraktion*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{C}$ folgendes gilt: $f(0) = 0$ und $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Ebenso wie im vorherigen Kapitel erhält man für die zu Markov-Halbgruppen assoziierten Formen die Charakterisierung:

Proposition 3.1.2. *Die folgenden vier Bedingungen sind äquivalent:*

i) e^{-tA} *ist für alle* $t \geq 0$ *positivitätserhaltend,* L^1*-kontraktiv und* L^∞*-kontraktiv,*

ii) für $\beta > 0$ existieren Radon-Maße μ_β auf X und ν_β auf X^2, so dass die approximierende Form folgende Gestalt hat:

$$a^{(\beta)}(u,u) = \int\limits_X |u(x)|^2 \, \mu_\beta(\mathrm{d}x) + \frac{1}{2} \int\limits_{X^2} |u(x) - u(y)|^2 \, \nu_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y),$$

iii) für alle normalen Kontraktionen f und für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ ist $f \circ u \in \mathcal{D}(a)$ und

$$a(f \circ u, f \circ u) \leq a(u,u),$$

iv) für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ ist $(\Re u)^+ \wedge 1 \in \mathcal{D}(a)$ und

$$a((\Re u)^+ \wedge 1, (\Re u)^+ \wedge 1) \leq a(u,u).$$

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Mit den Propositionen 2.1.6, 2.2.4 und 2.2.5 folgt die Existenz eines signierten Radon-Maßes $\tilde{\mu}_\beta$ mit den in den Propositionen genannten Eigenschaften (die Maße in den drei Propositionen stimmen überein): $\tilde{\mu}_\beta$ ist symmetrisch[1], auf der Diagonalen positiv (und sonst negativ) und diagonaldominant im Sinne der Propositionen 2.2.4 und 2.2.5. Somit ist

$$\begin{aligned} a^{(\beta)}(u,u) &= \int\limits_{X^2 \setminus d} u(y)\overline{u(x)} \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \int\limits_{X^2 \cap d} u(y)\overline{u(x)} \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \\ &= \int\limits_{X^2 \setminus d} (u(y) - u(x))\overline{u(x)} \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \\ &\quad + \int\limits_{X^2 \setminus d} |u(x)|^2 \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \int\limits_{X^2 \cap d} |u(x)|^2 \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \end{aligned}$$

und mit der Symmetrie folgt

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{X^2 \setminus d} |u(x) - u(y)|^2 \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \int\limits_{X^2} |u(x)|^2 \, \tilde{\mu}_\beta(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

Wähle nun $\mu_\beta(M) := \tilde{\mu}_\beta(M \times X)$ für $M \in \mathcal{A}$ und $\nu_\beta := -\mathbb{1}_{X^2 \setminus d} \tilde{\mu}_\beta$. Wegen der Diagonaldominanz von $\tilde{\mu}$ ist $\mu_\beta(M)$ nichtnegativ.

ii) $\Rightarrow$ iii): Dies folgt sofort aus Theorem 1.2.1.

iii) $\Rightarrow$ iv): Offensichtlich, da $f(x) = (\Re x)^+ \wedge 1$ eine normale Kontraktion ist.

iv) $\Rightarrow$ i): Setze $v := (\Re u)^+ \wedge 1$. Dann gilt sowohl

$$\Re a(u - v, u) + \Re a(u - v, v) = a(u,u) - a(v,v) \geq 0$$

[1], d.h. $\tilde{\mu}_\beta(E \times F) = \tilde{\mu}_\beta(F \times E)$ für alle $E, F \in \mathcal{A}$

als auch

$$\Re a(u-v,u) - \Re a(u-v,v) = a(u-v,u-v) \geq -\gamma_a^+ \|u-v\|^2.$$

Kombiniert man beide Ungleichungen erhält man

$$\Re a(u-v,u) \geq -\frac{\gamma_a^+}{2}\|u-v\|^2 \geq -\gamma_a^+\|u-v\|^2.$$

Theorem 1.3.1 liefert nun die Invarianz von

$$\mathcal{C} := \{u \in L^2 \mid 0 \leq u \leq 1\}$$

unter e^{-tA} für alle $t \geq 0$. Das heißt, dass für $u \in L^2$, $0 \leq u \leq n$ auch $0 \leq \mathrm{e}^{-tA}\, u \leq n$ gilt. Sei $0 \leq u \in L^2$ beliebig, $t \geq 0$ und definiere $u_n := u \wedge n$. Dann gilt

$$\mathrm{e}^{-tA}\, u = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-tA}\, u_n \geq 0$$

womit die Positivitätserhaltung von e^{-tA} gezeigt ist. Proposition 2.1.3 liefert weiterhin $|\,\mathrm{e}^{-tA}\, u| \leq \mathrm{e}^{-tA}\,|u|$. Somit folgt auch die L^∞-Kontraktivität von e^{-tA}, denn es ist

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA}\, u\|_\infty = \||\,\mathrm{e}^{-tA}\, u|\|_\infty \leq \|\,\mathrm{e}^{-tA}\,|u|\|_\infty \leq \|u\|_\infty.$$

Die L^1-Kontraktivität erhält man durch Adjungieren. □

Definition 3.1.3. a heißt *Dirichlet-Form*, wenn eine der Bedingungen in Proposition 3.1.2 (und damit alle) erfüllt ist.

Beispiel 3.1.4. Sei $X := \mathbb{R}^d$, $a(u,v) := \int_X \langle \nabla u, \nabla v\rangle \,\mathrm{d}x$ und $\mathcal{D}(a) := H^1(X)$, mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dem Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^d$. Dann ist a eine Dirichlet-Form. Der assoziierte Operator ist $-\triangle$.

Bemerkung 3.1.5. Eine Dirichlet-Form ist automatisch positiv semidefinit, d.h. es gilt $a \geq 0$.

Eine wichtige Frage ist, wann das Produkt zweier Funktionen in $\mathcal{D}(a)$ wieder in $\mathcal{D}(a)$ liegt. Eine einfache Antwort liefert dieses Korollar.

Korollar 3.1.6. *Sei a eine Dirichlet-Form und $u, v \in \mathcal{D}(a) \cap L^\infty$. Dann gilt $uv \in \mathcal{D}(a)$ und*

$$a(uv,uv) \leq 2\|v\|_\infty^2 a(u,u) + 2\|u\|_\infty^2 a(v,v).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.1.2 ii) und Theorem 1.2.1, denn es ist

$$|u(x)v(x)| \leq \|v\|_\infty |u(x)|$$

und

$$|u(x)v(x) - u(y)v(y)| \leq \|v\|_\infty |u(x)-u(y)| + \|u\|_\infty |v(x)-v(y)|$$

und somit

$$a^{(\beta)}(uv,uv) \leq 2\|v\|_\infty^2 a^{(\beta)}(u,u) + 2\|u\|_\infty^2 a^{(\beta)}(v,v).$$ □

Definition 3.1.7. Eine Dirichlet-Form a heißt *regulär*, wenn $\mathcal{D}(a) \cap C_c(X)$ sowohl in $C_c(X)$ bezüglich der Supremumsnorm als auch in $\mathcal{D}(a)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_a$ dicht liegt.

Definition 3.1.8. Sei $U \subset X$ offene Menge. Die *Kapazität* von U ist definiert als

$$\mathrm{Cap}(U) := \inf\{a_1(u,u) \mid u \in \mathcal{D}(a), u \geq \mathbb{1}_U\} \quad (\inf \emptyset := \infty).$$

Für eine beliebige Teilmenge $M \subset X$ ist die Kapazität definiert als

$$\mathrm{Cap}(M) := \inf\{\mathrm{Cap}(U) \mid M \subset U \subset X,\ U \text{ offen}\}.$$

Die Beweise für die folgenden Aussagen finden sich in [FŌT94]. Zunächst einige Eigenschaften der Kapazität:

Proposition 3.1.9. $\mathrm{Cap} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *ist eine Choquet-Kapazität, d.h.*

i) $M \subset N \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cap}(M) \leq \mathrm{Cap}(N)$,

ii) $M_n \uparrow \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cap}(\cup_n M_n) = \sup_n \mathrm{Cap}(M_n)$,

iii) K_n *kompakt und* $K_n \downarrow \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Cap}(\cap_n K_n) = \inf_n \mathrm{Cap}(K_n)$.

Mit dem nachfolgenden Begriff der Quasistetigkeit kann am Ende der Darstellungssatz von Beurling-Deny formuliert werden.

Definition 3.1.10. Eine Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ heißt *quasistetig*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge $U \subset X$ existiert, so dass $\mathrm{Cap}(U) < \epsilon$ und $u|_{X\setminus U}$ stetig ist.

Eine Eigenschaft gilt *quasi-überall (q.ü.)*, wenn sie (analog zur Definition von f.ü.) außerhalb einer Menge mit Kapazität Null gilt.

Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt Cap-stetig, wenn für alle $E \in \mathcal{A}$ mit $\mathrm{Cap}(E) = 0$ auch $\mu(E) = 0$ gilt.

Für reguläre Dirichlet-Formen zeigt sich, dass jede Funktion in $\mathcal{D}(a)$ eine quasistetige Variante besitzt. Zudem ist diese quasi-überall eindeutig.

Proposition 3.1.11. *Sei a eine reguläre Dirichlet-Form. Für $u \in \mathcal{D}(a)$ existiert eine quasistetige m-Version $\tilde{u}$ von u, d.h. $\tilde{u}$ ist quasistetig und $\tilde{u} = u$ m-f.ü. Ist $u \geq 0$ m-f.ü. und quasistetig, so ist auch $u \geq 0$ q.ü., d.h. zwei verschiedene quasistetige m-Versionen u_1 und u_2 von u stimmen q.ü. überein.*

Proposition 3.1.12 (Darstellungssatz von Beurling-Deny)**.** *Sei a eine reguläre Dirichlet-Form. Dann existieren*

- *ein Radon-Maß J auf $X^2 \setminus d$, das in beiden Variablen* Cap*-stetig ist,*
- *ein* Cap*-stetiges Radon-Maß k auf X,*

- *eine symmetrische Sesquilinearform* $a^{(c)} : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(a) \to \mathbb{C}$, *die* stark lokal *ist, d.h. für* $u, v \in \mathcal{D}(a)$ *mit* u *konstant auf* $\operatorname{supp} v$ *ist* $a^{(c)}(u, v) = 0$, *und für alle* $u \in \mathcal{D}(a)$ *und jede normale Kontraktion* f *ist* $a^{(c)}(f \circ u, f \circ u) \leq a^{(c)}(u, u)$,

so dass sich a *schreiben lässt als*

$$a(u,u) = \int_X |\tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}k + \int_{X^2 \setminus d} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|^2 \, J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + a^{(c)}(u,u). \tag{3.1}$$

Dabei ist die Wahl der J, k *und* $a^{(c)}$ *eindeutig.*

Bemerkung 3.1.13. Wegen der Cap-Stetigkeit von k und J sind die beiden Integrale in Gleichung (3.1) unabhängig von der Wahl von $\tilde{u}$.

3.2 Störungen durch Maße

Für eine Sesquilinearform a und eine messbare Funktion $V : X \to \mathbb{R}$ kann man die Summe

$$a(u,v) + \int_X u(x)\overline{v(x)}V(x)\, m(\mathrm{d}x)$$

betrachten. Im Falle regulärer Dirichlet-Formen kann man mit Hilfe des Begriffs der Quasistetigkeit das Maß $V(x)\, m(\mathrm{d}x)$ durch Cap-stetige Maße ersetzen und Ausdrücke der Form

$$a(u,v) + \int_X \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}(x)}\,\mathrm{d}\mu$$

betrachten. Es folgt eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Aussagen aus [Sto92] und [SV96].

Sei a eine reguläre Dirichlet Form. Für jedes Cap-stetige Maß μ auf $\mathcal{A}$ lässt sich eine Sesquilinearform (ebenfalls μ genannt) definieren durch

$$\mu(u,v) := \int_X \tilde{u}\bar{\tilde{v}}\,\mathrm{d}\mu \qquad \mathcal{D}(\mu) := \{u \in \mathcal{D}(a) \mid \mu(u,u) < \infty\}.$$

Sei μ^+ ein Cap-stetiges Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist $\mu^+(\cdot,\cdot)$ eine abgeschlossene Form im Hilbert-Raum $(\mathcal{D}(a), \|\cdot\|_a)$. Somit ist auch $a+\mu^+$, $\mathcal{D}(a+\mu^+) := \mathcal{D}(\mu^+)$ eine abgeschlossene Form in $L^2(X,m)$, die aber nicht notwendigerweise dicht definiert ist. Der Abschluss von $\mathcal{D}(a+\mu^+)$ in $L^2(X)$ hat die Gestalt $L^2(Y,m)$ mit einer messbaren Teilmenge $Y \subset X$. Das bedeutet, dass $a+\mu^+$ eine dicht definierte, symmetrische und abgeschlossene Form in $L^2(Y,m)$ ist.

Sei nun μ^- ein weiteres Cap-stetiges Maß auf $\mathcal{A}$, für das ein $q < 1$ und ein $C_q \geq 0$ existieren, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(a+\mu^+)$

$$\mu^-(u,u) \leq q(a+\mu^+)(u,u) + C_q\|u\|^2$$

gilt. Dann ist $a_\mu := a+\mu^+-\mu^-$, $\mathcal{D}(a_\mu) := \mathcal{D}(a+\mu^+)$ eine abgeschlossene, dicht definierte Form in $L^2(Y,m)$. Im Allgemeinen ist a_μ keine reguläre Dirichlet-Form. Nichtsdestotrotz besitzt a_μ offensichtlich eine Darstellung wie in Proposition 3.1.12:

$$a_\mu(u,u) = \int_X |\tilde{u}|^2 \,\mathrm{d}k' + \int_{X^2\setminus d} |\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)|^2 \, J(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) + a^{(c)}(u,u)$$

mit dem signierten Radon-Maß $k' = k + \mu^+ - \mu^-$.

3.3 Das Energiemaß

Sei a eine reguläre Dirichlet-Form. Es wird nun das Energiemaß und seine Eigenschaften erklärt. Im Falle der Dirichlet-Form aus Beispiel 3.1.4 entspricht das Energiemaß dem Ausdruck $\langle \nabla u, \nabla v\rangle \,\mathrm{d}x$.

Proposition 3.3.1 ([FŌT94, Mos94, Stu94]). *Es existiert eine symmetrische Sesquilinearform $\mu^{(c)}_{<\cdot,\cdot>}$ auf $\mathcal{D}(a)$ mit Werten in den komplexen Radonmaßen auf X, die folgende Eigenschaften erfüllt: Für $u,v\in\mathcal{D}(a)$ gilt*

i) $\mu^{(c)}_{<u,v>}(X) = a^{(c)}(u,v)$,

ii) $\mu^{(c)}_{<u,u>}$ *ist positiv und* Cap*-stetig,*

iii) (Cauchy-Schwarz Ungleichung) für $f\in L^2(X,\mu^{(c)}_{<u,u>})$ *und* $g\in L^2(X,\mu^{(c)}_{<v,v>})$ *gilt*

$$\left|\int_X fg \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>}\right| \le \sqrt{\int_X |f|^2 \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,u>}}\sqrt{\int_X |g|^2 \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,v>}},$$

iv) $\mu^{(c)}_{<\cdot,\cdot>}$ *ist* stark lokal*, d.h. für $U\subset X$ offen, $u,v\in\mathcal{D}(a)$ und u konstant auf U ist*

$$\mathbb{1}_U \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>} = 0,$$

v) Abschneideeigenschaft: für $u,v,w\in\mathcal{D}(a)$ mit u, v reell gilt

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u\wedge v,w>} = \mathbb{1}_{\{\tilde{u}<\tilde{v}\}} \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} + \mathbb{1}_{\{\tilde{u}\ge\tilde{v}\}} \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>},$$

vi) Produktregel: für $u,v,w\in\mathcal{D}(a)\cap L^\infty$ gilt

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<uv,w>} = \tilde{u} \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>} + \tilde{v} \,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>}.$$

Die maßwertige Sesquilinearform $\mu^{(c)}$ heißt das *Energiemaß* von $a^{(c)}$.

Bemerkung 3.3.2. Aus der Abschneideeigenschaft folgt

$$\mathbb{1}_{\{\tilde{u}=\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} = \mathbb{1}_{\{\tilde{u}=\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>}$$

für $u, v, w \in \mathcal{D}(a)$ und somit auch eine erweiterte Formulierung der starken Lokalität: Ist $k \in \mathbb{C}$, so gilt

$$\mathbb{1}_{\{\tilde{u}=k\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} = 0.$$

Beweis. Die zweite Aussage folgt aus der ersten mit der starken Lokalität von $\mu^{(c)}$ (Eigenschaft iv)), da für jede offene, relativ kompakte Menge $U \subset X$ eine Funktion $v \in \mathcal{D}(a) \cap C_c(X)$ existiert mit $v = k$ in U. Nun zur ersten Aussage: Offensichtlich ist Eigenschaft v) symmetrisch in u und v, d.h.

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u\wedge v,w>} = \mathbb{1}_{\{\tilde{u}<\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} + \mathbb{1}_{\{\tilde{u}\geq\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>} = \mathbb{1}_{\{\tilde{u}\leq\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} + \mathbb{1}_{\{\tilde{u}>\tilde{v}\}}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>}.$$

Durchmultiplizieren mit $\mathbb{1}_{\{\tilde{u}=\tilde{v}\}}$ liefert die Behauptung. □

Definition 3.3.3. Eine Funktion $u : X \to \mathbb{C}$ heißt *lokal im Definitionsbereich von a*, wenn für alle kompakten $K \subset X$ ein $v \in \mathcal{D}(a)$ existiert mit $u = v$ in K. Die Menge aller Funktionen lokal im Definitionsbereich wird mit $\mathcal{D}_{loc}(a)$ bezeichnet.

Grundlegende Eigenschaften der Funktionen lokal im Definitionsbereich sind:

Proposition 3.3.4. *Es gilt:*

i) $\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}_{loc}(a)$,

ii) für $u \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ *existiert eine quasistetige m-Version* $\tilde{u}$,

iii) $\mathbb{1} \in \mathcal{D}_{loc}(a)$.

Beweis. i) ist offensichtlich.

ii) Sei $u \in \mathcal{D}_{loc}(a)$. Wähle G_n offen und relativ kompakt, so dass $\bigcup_n G_n = X$ und $G_n \subset G_{n+1}$. Dann existieren quasistetige $u_n \in \mathcal{D}$ mit $u_n = u$ m-f.ü. in G_n. Nach [FŌT94, Theorem 2.1.2] existieren abgeschlossene Mengen $F_k \subset X$ für die gilt: $\mathrm{Cap}(X \setminus F_k) \to 0$, F_k ist regulär, d.h. $m(F_k \cap U(x)) > 0$ für alle $x \in F_k$ und alle Umgebungen $U(x)$ von x, und $u_n\big|_{F_k}$ ist stetig für alle n und k.

Seien $n, m, k \in \mathbb{N}$, $m > n$ und $x \in F_k \cap G_n$. Da $m(U(x) \cap F_k) > 0$ für jede Umgebung $U(x)$ von x ist, existiert ein Punkt $x_U \in U(x) \cap F_k$ mit $u_m(x_U) = u(x_U) = u_n(x_U)$. Weil $x_U \to x$ für eine passend gewählte Folge von Umgebungen $U(x)$ folgt mit der Stetigkeit, dass $u_m(x) = u_n(x)$ ist. Also gilt $u_m(x) = u_n(x)$ für alle $m \geq n$ und $x \in F_k \cap G_n$.

Für $x \in F_k \cap G_n$ definiere $\tilde{u}(x) := u_n(x)$. $\tilde{u}$ ist gemäß dem vorigen Absatz wohldefiniert. Sei (x_i) eine konvergente Folge in F_k mit Grenzwert $x \in F_k$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in G_n$ und $x_i \in G_n$ für alle $i \geq n$ gilt. Weiterhin ist somit

$$\tilde{u}(x_i) = u_n(x_i) \to u_n(x) = \tilde{u}(x).$$

Also ist $\tilde{u}$ auf F_k stetig für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit eine quasistetige m-Version von u.

iii) Sei $K \subset X$ kompakt. Dann existiert eine Funktion $u \in C_c(X)$ mit $u|_K \equiv 3$. Wegen der Regularität von a existiert somit auch ein $v \in \mathcal{D}(a) \cap C_c(X)$ mit $v|_K \geq 2$. Es gilt nun $v \wedge 1 \in \mathcal{D}(a) \cap C_c(X)$ und $v \wedge 1 = 1$ auf K. □

Das Energiemaß lässt sich nun auf Funktionen lokal im Definitionsbereich erweitern:

Definition 3.3.5. Für $u, v \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ definiere das Maß $\mu^{(c)}_{<u,v>}$ über

$$\mu^{(c)}_{<u,v>}|_G := \mu^{(c)}_{<u_1,v_1>}|_G$$

für $G \subset X$ offen und relativ kompakt und $u_1, v_1 \in \mathcal{D}(a)$ mit $u = u_1$ und $v = v_1$ in G.

Diese Erweiterung $\mu^{(c)}_{<\cdot,\cdot>}$ auf $\mathcal{D}_{loc}(a)$ ist wohldefiniert wegen der σ-Endlichkeit und der starken Lokalität von $\mu^{(c)}$: Sind $u \in \mathcal{D}_{loc}(a)$, $G_1, G_2 \subset X$ offen und relativ kompakt, $u_1 \in \mathcal{D}(a)$ mit $u = u_1$ in G_1 und $u_2 \in \mathcal{D}(a)$ mit $u = u_2$ in G_2, $G := G_1 \cap G_2$, so ist

$$\mu^{(c)}_{<u_1,u_1>}|_G = \mu^{(c)}_{<u_2,u_2>}|_G.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung, die Abschneideeigenschaft und die Produktregel übertragen sich ebenso auf Funktionen in $\mathcal{D}_{loc}(a)$. Auch die Bedingung $u, v, w \in L^\infty$ in der Produktregel kann fallen gelassen werden, falls $uv \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ ist:

Proposition 3.3.6 (Produktregel). *Seien $u, v, w \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ mit $uv \in \mathcal{D}_{loc}(a)$. Dann gilt*

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<uv,w>} = \tilde{u}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>} + \tilde{v}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>}.$$

Beweis. Wähle jeweils eine quasistetige m-Version von u, v und w und definiere $u_n := \frac{n\tilde{u}}{|\tilde{u}| \vee n}$ und entsprechend v_n und w_n. Es gilt $u_n, v_n, w_n \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$ und

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u_n v_n,w_n>} = u_n\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v_n,w_n>} + v_n\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u_n,w_n>}.$$

Mit Bemerkung 3.3.2 gilt auch

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<uv,w>} = \tilde{u}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<v,w>} + \tilde{v}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,w>} \tag{3.2}$$

auf F_n mit

$$F_n := \{x \in X \mid |\tilde{u}(x)| \le n, |\tilde{v}(x)| \le n \text{ und } |\tilde{w}(x)| \le n\}.$$

Somit folgt (3.2) auch auf $F := \bigcup_{n=1}^\infty F_n$.

Mit [FÖT94, Lemma 2.1.6] gilt $\mathrm{Cap}(\{|\hat{u}| > n\}) \le \frac{a(\hat{u},\hat{u})}{n^2}$ für jedes $\hat{u} \in \mathcal{D}$. Da sowohl u als auch v und w auf kompakten Mengen mit Elementen aus $\mathcal{D}$ übereinstimmen, kann man schlussfolgern, dass $\mathrm{Cap}(F^c \cap K) = 0$ für jedes kompakte $K \subset X$. Da Cap eine Choquet-Kapazität (Proposition 3.1.9) ist, folgt $\mathrm{Cap}(F^c) = 0$. Da $\mu^{(c)}$ Cap-stetig ist gilt Gleichung (3.2) also auf ganz X. □

Bemerkung 3.3.7. Sind $u, v, v^{-1} \in \mathcal{D}_{loc}(a)$, v^{-1} die multiplikative Inverse von v, so ist

$$0 = \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,\mathbb{1}>} = \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,vv^{-1}>} = \tilde{v}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v^{-1}>} + \tilde{v}^{-1}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>}$$

und somit gilt die Quotientenregel

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v^{-1}>} = -\tilde{v}^{-2}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>}.$$

Proposition 3.3.8 (Kettenregel). *Seien $u_i, v \in \mathcal{D}_{loc}(a)$, u_i reell, $i = 1, \dots, n$. Sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\Phi(u_1,\dots,u_n),v>} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)\, \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u_i,v>}.$$

Beweis. Gemäß [FŌT94, Theorem 3.2.2. und Bemerkung danach] folgt die Behauptung, falls $u_i, v \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$ ist. Mit Bemerkung 3.3.2 folgt dann für $m \in \mathbb{N}$,

$$X_m := \bigcap_{i=1}^{n} \{|\tilde{u}_i| < m\} \cap \{|\tilde{v}| < m\},$$

$u_i^m := \frac{m\tilde{u}_i}{|\tilde{u}_i| \vee m}$ und $v^m := \frac{m\tilde{v}}{|\tilde{v}| \vee m}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{X_m}\, \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\Phi(u_1,\dots,u_n),v>} &= \mathbb{1}_{X_m}\, \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\Phi(u_1^m,\dots,u_n^m),v^m>} \\
&= \mathbb{1}_{X_m} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i}(\tilde{u}_1^m, \dots, \tilde{u}_n^m)\, \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u_i^m,v^m>} \\
&= \mathbb{1}_{X_m} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{x_i}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)\, \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u_i,v>}.
\end{aligned}$$

Mit $m \to \infty$ folgt die Behauptung dann auch allgemein, denn es gilt $X_m \nearrow X$. □

Es werden nun noch zwei weitere Energiemaße eingeführt. Für $u, v \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ und $M \subset X^2$ messbar sei

$$\Gamma_{<u,v>}(M) := \int_{M \setminus d} (\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y))\overline{(\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y))}\, J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) + \int_{M \cap d} \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>}$$

bzw. $\Gamma_{<u,v>}(M) := \infty$ falls eines der beiden Integrale nicht existiert. Für $E \subset X$ messbar sei weiter

$$\mu^{(d)}_{<u,v>}(E) := \Gamma_{<u,v>}(E \times X).$$

$\Gamma_{<u,v>}$ ist ein komplexes Radon-Maß auf X^2, das in beiden Variablen Cap-stetig ist. Sind die Funktionen u und v zusätzlich in

$$\mathcal{D}^*_{loc}(a) := \{u \in \mathcal{D}_{loc}(a) \mid \mu^{(d)}_{<u,u>}(K) < \infty \ \forall K \subset X \text{ kompakt}\},$$

so ist auch $\mu^{(d)}_{<u,v>}$ ein komplexes Cap-stetiges Radon-Maß. Weiterhin sind $\Gamma_{<u,u>}$ und $\mu^{(d)}_{<u,u>}$ positive Maße und $\Gamma_{<\cdot,\cdot>}$ und $\mu^{(d)}_{<\cdot,\cdot>}$ erfüllen die Cauchy-Schwarz Ungleichung wie in Proposition 3.3.1 iii). Es gilt $\mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty \subset \mathcal{D}^*_{loc}(a)$ und $\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}^*_{loc}(a)$.

Für Γ und $\mu^{(d)}$ gilt eine verallgemeinerte Produktregel:

Proposition 3.3.9 (Verallgemeinerte Produktregel). *Sei $f : X^2 \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion und seien $u, v, w, uv \in \mathcal{D}_{loc}(a)$ bzw. $u, v, w, uv \in \mathcal{D}^*_{loc}(a)$. Dann gilt*

$$\int_{X^2} f(x,y)\, \mathrm{d}\Gamma_{<uv,w>} = \int_{X^2} f(x,y)\tilde{u}(x)\, \mathrm{d}\Gamma_{<v,w>} + \int_{X^2} f(x,y)\tilde{v}(y)\, \mathrm{d}\Gamma_{<u,w>}$$

bzw.

$$\int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<uv,w>} = \int_X \tilde{u}\, \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<v,w>} + \int_X \tilde{v}\, \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u,w>}$$

wenn jeweils mindestens zwei der Integrale (und damit auch das dritte) existieren.

Beweis. Dies folgt aus der Produktregel für $\mu^{(c)}$ und der Gleichung

$$\tilde{u}(x)\tilde{v}(x) - \tilde{u}(y)\tilde{v}(y) = \tilde{u}(x)(\tilde{v}(x) - \tilde{v}(y)) + \tilde{v}(y)(\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)). \qquad \square$$

Bemerkung 3.3.10. Sind $u, v, v^{-1} \in \mathcal{D}_{loc}(a)$, v^{-1} die multiplikative Inverse von v, so ist

$$\mathrm{d}0 = \mathrm{d}\Gamma_{<u,\mathbb{1}>} = \mathrm{d}\Gamma_{<u,vv^{-1}>} = \tilde{v}(x)\, \mathrm{d}\Gamma_{<u,v^{-1}>} + \tilde{v}(y)^{-1}\, \mathrm{d}\Gamma_{<u,v>}$$

und somit gilt die verallgemeinerte Quotientenregel

$$\mathrm{d}\Gamma_{<u,v^{-1}>} = -\tilde{v}(x)^{-1}\tilde{v}(y)^{-1}\, \mathrm{d}\Gamma_{<u,v>}.$$

3.4 Produkte von Funktionen

Nun soll noch einmal die Frage aufgeworfen werden, wann das Produkt zweier Funktionen im Definitionsbereich wieder im Definitionsbereich der Form liegt. Solch eine Eigenschaft gilt auch unter allgemeineren Voraussetzungen als denen in Korollar 3.1.6. Für dieses Resultat, Proposition 3.4.4, wird der Ausdruck der schwachen Regularität benötigt, der nun definiert werden soll.

Seien μ^+ und μ^- nun wieder Maße wie in Abschnitt 3.2 und a_μ entsprechend definiert. Weiterhin seien L^∞_c die Funktionen in L^∞ mit kompaktem Träger.

Definition 3.4.1. a_μ heißt *schwach regulär*, falls für jedes $u \in \mathcal{D}(a_\mu)$ eine Folge $u_n \in \mathcal{D}(a_\mu) \cap L^\infty_c$ existiert, so dass $u_n \to u$ in L^2 und $a_\mu(u_n, u_n)$ gleichmäßig beschränkt ist.

Die nächsten zwei Propositionen geben Kriterien dafür an, dass a_μ schwach regulär ist. Das erste Kriterium ist dabei unabhängig von μ, stellt also nur Forderungen an die Form a, während das zweite Kriterium nur Bedingungen an das Maß μ und die Kapazität stellt.

Proposition 3.4.2. *Sei (ϕ_n) eine Folge in $\mathcal{D}(a)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- *ϕ_n hat kompakten Träger und es ist $0 \le \phi_n \le 1$ ($n \in \mathbb{N}$),*
- *$\{x \in X \mid \phi_n(x) = 1\} \nearrow X$,*

- *und es existiert ein $C > 0$, so dass $\mu^{(d)}_{<\phi_n,\phi_n>} \leq Cm$ ist.*

Dann ist a_μ schwach regulär.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{D}(a_\mu)$. Setze $u_n := \frac{n\tilde{u}}{|\tilde{u}| \vee n}$ und $v_n := u_n\phi_n$. Dann erfüllt u_n alle Voraussetzungen aus der Definition, denn es ist $v_n \to u$ in L^2, $\mu^+(v_n, v_n) \leq \mu^+(u, u)$ und

$$\begin{aligned}\int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<v_n,v_n>} &\leq 2\int_X |\phi_n|^2 \,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u_n,u_n>} + 2\int_X |u_n|^2 \,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi_n,\phi_n>} \\ &\leq 2\int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u,u>} + 2C\|u\|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposition 3.4.3. *Wenn eine monoton wachsende Folge kompakter Mengen $F_n \subset X$ existiert mit $\mu(F_n) < \infty$ und $\mathrm{Cap}(K \setminus F_n) \to 0$ für alle kompakten Mengen $K \subset X$, so ist a_μ schwach regulär.*

Beweis. Benutze [AM91, Theorem 5.7]. Dieses Theorem besagt unter den genannten Voraussetzungen, dass die Menge

$$M := \{u \in \mathcal{D}(a_\mu) \cap L^\infty \mid \operatorname{supp} u \text{ kompakt}\}$$

dicht in $\mathcal{D}(a_\mu)$ bezüglich $\|\cdot\|_{a_\mu}$ ist. $\square$

Proposition 3.4.4. *Sei a_μ schwach regulär, $u \in \mathcal{D}(a_\mu)$, $v \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_{X^2} \tilde{w}(x)\overline{\tilde{w}(y)}\,\Gamma_{<v,v>}(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \leq sa_\mu(w, w) + t\|w\|^2 \quad \forall w \in \mathcal{D}(a_\mu). \tag{3.3}$$

Dann ist $uv \in \mathcal{D}(a_\mu)$.

Beweis. O.B.d.A. sind u und v reell. Sei $(u_n) \subset \mathcal{D}(a_\mu) \cap L^\infty_c$ eine u approximierende Folge wie in der Definition der schwachen Regularität. Dann ist $u_nv \in \mathcal{D}(a_\mu)$, da ein $v_n \in \mathcal{D}(a) \cap L^\infty$ existiert mit $v_n = v$ auf dem Träger von u_n. Wendet man nun die Ungleichung

$$(x_1x_2 - y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2 - y_2)^2 + 2x_2y_2(x_1 - y_1)^2$$

auf $x_1 := v(x)$, $y_1 := v(y)$, $x_2 := u_n(x)$ und $y_2 := u_n(y)$ an, so erhält man

$$\int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u_nv,u_nv>} \leq 2\|v\|^2_\infty \int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u_n,u_n>} + 2\int_{X^2} \tilde{u}_n(x)\overline{\tilde{u}_n(y)}\,\mathrm{d}\Gamma_{<v,v>}.$$

Also existiert ein $C > 0$, so dass

$$a(u_nv, u_nv) \leq Ca_{\mu^+ + 1}(u_n, u_n)$$

ist und somit auch ein $C' > 0$ mit

$$a_\mu(u_nv, u_nv) \leq C'.$$

Da $u_nv \to uv$ in L^2 gilt folgt nun, dass $uv \in \mathcal{D}(a_\mu)$ ist. $\square$

Dass Bedingung (3.3) nicht ohne Weiteres fallen gelassen werden kann, zeigen die folgenden zwei Beispiele:

Beispiel 3.4.5. Sei $X := [-1, 1]$ und

$$a(u,v) := \int_0^1 (u(x) - u(-x))\overline{(v(x) - v(-x))}|x|^{-5/2}\,\mathrm{d}x$$

$$\tilde{\mathcal{D}} := \{u \in L^2 \mid a(u,u) < \infty\}.$$

Sei $\mathcal{D}(a)$ der Abschluss von $\tilde{\mathcal{D}} \cap C(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_a$. Dann ist a eine reguläre Dirichlet-Form. Ist u gerade, so verschwindet $a(u,u)$. Man sieht nun leicht ein, dass $u(x) := |x|^{-1/4}$ zu $\mathcal{D}(a)$ gehört. Außerdem errechnet man leicht, dass v mit $v(x) := x$ in $\mathcal{D}(a)$ liegt. Hingegen liegt uv nicht in $\mathcal{D}(a)$.

Beispiel 3.4.6. Definiere für $x \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) := \begin{cases} |x|^{5/8} \cdot \sin(\frac{1}{|x|}) & , |x| \in (0, \pi^{-1}) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$v(x) := (|x|^{-1/4} - 1)^+$$

und sei $H^1(\mathbb{R}^3)$ der übliche Sobolev-Raum im $\mathbb{R}^3$. Eine direkte Rechnung zeigt, dass $u \in H^1(\mathbb{R}^3) \cap C_c(\mathbb{R}^3)$ und $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ist. Andererseits liegt uv nicht in $H^1(\mathbb{R}^3)$.

Bemerkungen

Dirichlet-Formen werden typischerweise in den reellen L^2-Räumen betrachtet. Reelle Dirichlet-Formen stimmen aber gemäß Proposition 3.1.2 mit komplexen Dirichlet-Formen überein. Trotzdem entstehen bei der Theorie der komplexen Dirichlet-Formen einige zusätzliche Schwierigkeiten, die besonders bei der Kettenregel sichtbar werden. Da die Kettenregel in dieser Arbeit nur für reelle Funktionen benötigt wird, wurde auf eine genaue Erörterung dieses Themas verzichtet.

Die Einschränkung auf reguläre Dirichlet-Formen ist keine echte Einschränkung, da gemäß [Fuk71] jede Dirichlet-Form einen regulären Repräsentanten besitzt: Sei $(a, \mathcal{D}(a))$ eine Dirichlet-Form auf $L^2(X, m)$. Denn existiert ein lokal kompakter separabler Hausdorff-Raum X', ein Radon-Maß m' auf X', eine reguläre Dirichlet-Form $(a', \mathcal{D}(a'))$ auf $L^2(X', m')$ und ein algebraischer Isomorphismus Φ von $\mathcal{D}(a) \cap L^\infty(X)$ nach $\mathcal{D}(a') \cap L^\infty(X')$, so dass $\|\Phi u\|_\infty = \|u\|_\infty$, $a'(\Phi u, \Phi u) = a(u,u)$ und $\|\Phi u\|_{X'} = \|u\|_X$ für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^\infty(X)$ ist.

In den Büchern [FŌT94, BH91, MR92] finden sich alle Aussagen über Dirichlet-Formen aus Abschnitt 3.1.

Abschnitt 3.2: Die Aussagen zur Definition von $a+\mu^+$ finden sich in [Sto92, Theorem 1.2] und [SV96, Theorem 4.1]. Dass $a + \mu^+ - \mu^-$ eine abgeschlossene Form definiert, ist das wohlbekannte KLMN-Theorem.

Die Behauptungen aus Proposition 3.3.1 finden sich in [FŌT94, Mos94, Stu94]. Die anschließende Bemerkung stammt ebenfalls aus [Stu94].

Die meisten Aussagen über die Funktionen lokal im Definitionsbereich von a finden sich unter anderem in [FŌT94]. Die Propositionen 3.3.4 und 3.3.6 hingegen wurden [FLW10] entnommen, ebenso die Definition und Aussagen über die Maße $\mu^{(d)}$ und Γ und die allgemeine Produktregel. Die Kettenregel (Proposition 3.3.8) ist eine Verallgemeinerung von [FŌT94, Theorem 3.2.2. und Bemerkung danach].

Die Aussagen über Produkte von Funktionen in $\mathcal{D}_{loc}(a)$ wurden in der Literatur nicht gefunden. Proposition 3.4.4 ist eine Verallgemeinerung von [FLW10, Proposition 3.8 b)]. Die zwei anschließenden Beispiele sind ebenfalls in [FLW10] enthalten.

Verschiedene Definitionen für Funktionen lokal im Definitionsbereich stehen auch in [Kuw08, Kuw10].

Eine Verallgemeinerung von Dirichlet-Formen sind semi-Dirichlet-Formen. Das sind solche Formen, die mit positivitätserhaltenden und L^1-kontraktiven Halbgruppen verknüpft sind. Ma, Overbeck und Röckner ([MOR95]) haben gezeigt, dass auch mit semi-Dirichlet-Formen stochastische Prozesse verknüpft werden können. Eine Verallgemeinerung des Darstellungssatzes für semi-Dirichlet-Formen steht in [HMS06].

Kapitel 4

Obere Schranken für die Halbgruppe

In diesem Kapitel wird das Kernresultat dieser Arbeit vorgestellt, eine Methode, mit der sich die Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ nach oben abschätzen lässt. Dies kann einerseits im L^2-Sinne geschehen, also im Sinne von

$$|(\mathrm{e}^{-tA}\, u, v)| \leq C_{E,F}\|u\|_{L^2(F)}\|v\|_{L^2(E)}$$

für alle $u \in L^2(F)$ und $v \in L^2(E)$ $(E, F \in \mathcal{A})$ oder äquivalent mit der Operatornorm formuliert

$$\|\mathbb{1}_E\, \mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_F\| \leq C_{E,F}.$$

Anderseits kann man auch, falls die Halbgruppe einen Kern besitzt, d.h. e^{-tA} lässt sich schreiben als

$$(\mathrm{e}^{-tA}\, u)(\cdot) = \int_X u(y) k_t(\cdot, y)\, m(\mathrm{d}y) \quad \text{f.ü.},$$

auch den Kern k_t abschätzen.

Abschätzungen an die Halbgruppe spielen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, bei stochastischen Prozessen und in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle.

Sei in diesem Kapitel $(X, \mathcal{A}, m)$ ein σ-endlicher Maßraum und a eine dicht definierte, sektorielle und abgeschlossene Sesquilinearform auf $L^2(X, m)$, $\Re a \geq -\gamma_a \in \mathbb{R}$. Sei A der assoziierte Operator, $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die zugehörige Halbgruppe und $R_\beta, \beta \geq \gamma_a$ Resolventen von A.

4.1 Ultrakontraktivität

Ein wichtiges Mittel um obere Abschätzungen an die Kerne von Halbgruppen zu erhalten ist die Ultrakontraktivität, wie folgendes Lemma zeigt. Ein stetiger linearer Operator $T : L^2 \to L^2$ heißt *ultrakontraktiv*, wenn

$$\|T|_{L^1}\|_{1\to\infty} := \sup_{f\in L^1\cap L^2, \|f\|_1 \leq 1} \|Tf\|_\infty < \infty$$

ist. Die Norm $\|\cdot\|_{1\to\infty}$ wird als *Ultrakontraktivitätsnorm* bezeichnet.

Definiere weiter für $p, q \in [1, \infty]$ die L^p nach L^q Operatornorm

$$\|T|_{L^p}\|_{p\to q} := \sup_{f\in L^p\cap L^2, \|f\|_p \leq 1} \|Tf\|_q.$$

Lemma 4.1.1. *Sei $T : L^2(X) \to L^2(X)$ ein ultrakontraktiver Operator. Dann existiert ein messbarer Kern $k : X^2 \to \mathbb{C}$, so dass*

$$|k| \leq \|T|_{L^1}\|_{1\to\infty},$$

und

$$(Tu)(\cdot) = \int_X u(y)k(\cdot, y)\, m(\mathrm{d}y) \quad \textit{f.ü.}$$

für alle $u \in L^1 \cap L^2$ gilt. k ist fast überall eindeutig bestimmt.

Beweis. Definiere den komplexen Inhalt μ auf $R := r(\{E \times F \mid E, F \in \mathcal{A}_{fin}\})$ durch

$$\mu(E \times F) := (T\mathbb{1}_F, \mathbb{1}_E).$$

Dann gilt

$$|\mu|(E \times F) \leq \|T|_{L^1}\|_{1\to\infty} m^2(E \times F).$$

Lemma A.5 angewendet auf μ besagt nun, dass eine Maßerweiterung $\tilde{\mu}$ von μ mit

$$|\tilde{\mu}| \leq \|T|_{L^1}\|_{1\to\infty} m^2(E \times F)$$

und somit ein messbarer Kern $k : X^2 \to \mathbb{C}$, $|k| \leq \|T|_{L^1}\|_{1\to\infty}$ mit

$$(Tu, v) = \int_X u(y)\overline{v(x)}k(x, y)\, m^2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$$

für alle $u, v \in \mathrm{lin}\{\mathbb{1}_E \mid E \in \mathcal{A}_{fin}\}$ existiert. Da

$$\int_X u(y)k(\cdot, y)\, m(\mathrm{d}y)$$

einen stetigen linearen Operator von L^1 nach L^∞ definiert, folgt die erste Behauptung.

Nun zur Eindeutigkeit: Ist k' ein weiterer Kern mit obigen Eigenschaften, so stimmen $k'm^2$ und μ auf R überein und somit nach Lemma A.5 auch $k'm^2 = \tilde{\mu} = km^2$ als Maße. Es ist also $k' = k$ f.ü. □

Bemerkung 4.1.2. Ist T positivitätserhaltend, so ist auch $k \geq 0$.

Bemerkungen

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Kerns zu bestimmten linearen Operatoren folgt auch im abstrakteren Kontext aus dem Satz von Dunford-Pettis ([Trè67, Kapitel 46] und [DS88a, Kapitel VI.8]).

Der hier angegebene Beweis findet sich auch bei Fengyu Wang, allerdings ohne auf die Details, insbesondere Lemma A.5 einzugehen.

4.2 Davies' Methode

Die hier vorgestellte Methode zur Abschätzung der Norm oder des Kerns einer Halbgruppe wurde erstmals 1987 von Davies [Dav87] vorgestellt. Die Idee ist es eine globale Schranke einer modifizierten Halbgruppe, nämlich $\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi$, nachzuweisen und so lokale Schranken an die Operatoren e^{-tA} zu erhalten.

Hierbei bezeichnet ϕ den Multiplikationsoperator mit der Funktion ϕ und somit ϕ^{-1} den Multiplikationsoperator mit der Funktion $\frac{1}{\phi(\cdot)}$. Im folgenden werden Funktionen und ihre Multiplikationsoperatoren gleich bezeichnet.

Definition 4.2.1. Eine Funktion $0 < \phi \in L^\infty$ mit $\phi^{-1} \in L^\infty$ heißt *zulässig*, falls

$$\phi\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}(a) \quad \text{und} \quad \phi^{-1}\mathcal{D}(a) \subset \mathcal{D}(a)$$

ist und Konstanten $\gamma, C > 0$ existieren, so dass gilt

$$C^{-1}\Re a_\gamma(u,u) \leq \Re a_\gamma(\phi u, \phi^{-1}u) \leq C\Re a_\gamma(u,u),$$
$$|\Im a(\phi u, \phi^{-1}u)| \leq C\Re a_\gamma(u,u).$$

Für ein zulässiges ϕ definiert man

$$a_\phi(u,v) := a(\phi u, \phi^{-1}v), \qquad \mathcal{D}(a_\phi) := \mathcal{D}(a).$$

Der Ausdruck a_γ für ein $\gamma \in \mathbb{C}$ steht aber wie bisher für $a + \gamma$.

Die nächste Proposition bildet die Basis für Davies' Methode. Sie beschreibt die modifizierte Form a_ϕ und den zugehörigen Operator.

Proposition 4.2.2. *Sei ϕ zulässig. Dann ist a_ϕ eine abgeschlossene, dicht definierte, sektorielle Sesquilinearform und der dazu assoziierte Operator ist $A_\phi := \phi^{-1}A\phi$ ($\mathcal{D}(A_\phi) = \phi^{-1}\mathcal{D}(A) = \{u \in L^2 \mid \phi u \in \mathcal{D}(A)\}$).*

Beweis. Die erste Aussage ist klar. Die letzte Aussage: Sei A_ϕ der zu a_ϕ assoziierte Operator und sei $\phi^{-1}u \in \mathcal{D}(A_\phi)$. Dann gilt

$$(\phi A_\phi \phi^{-1}u, v) = (A_\phi\phi^{-1}u, \phi v) = a_\phi(\phi^{-1}u, \phi v) = a(u,v)\ \forall v \in \mathcal{D}(a).$$

Also ist $u \in \mathcal{D}(A)$ und $\phi A_\phi \phi^{-1}u = Au$. Ist umgekehrt $\phi u \in \mathcal{D}(A)$, so gilt

$$(\phi^{-1}A\phi u, v) = (A\phi u, \phi^{-1}v) = a(\phi u, \phi^{-1}v) = a_\phi(u,v)\ \forall v \in \mathcal{D}(a).$$

Also ist $u \in \mathcal{D}(A_\phi)$ und $A_\phi u = \phi^{-1}A\phi u$. □

Als Folgerung erhält man eine abstrakte Formulierung der gewünschten L^2-Abschätzung der Halbgruppe. Eine passende untere Schranke an $\Re a_\phi$, die für diese Proposition vorausgesetzt wird, lässt sich für viele wichtige Sesquilinearformen einfach ausrechnen.

Proposition 4.2.3. *Sei ϕ zulässig und $\Re a_\phi \geq -\gamma(\phi)$. Dann gilt für alle $E, F \in \mathcal{A}$*

$$\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\gamma(\phi)t}\,\|\phi\mathbb{1}_E\|_\infty \|\phi^{-1}\mathbb{1}_F\|_\infty.$$

Beweis. Gemäß der vorherigen Proposition und Gleichung (1.2) ist

$$\mathrm{e}^{-tA_\phi} = \mathrm{e}^{-t\phi^{-1}A\phi} = \phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| &= \|\mathbb{1}_E\phi\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,\phi^{-1}\mathbb{1}_F\| \\ &\leq \mathrm{e}^{\gamma(\phi)t}\,\|\phi\mathbb{1}_E\|_\infty\|\phi^{-1}\mathbb{1}_F\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Setzt man an die modifizierte Halbgruppe eine Ultrakontraktivität voraus, so bekommt man eine Abschätzung für den Kern.

Proposition 4.2.4. *Sei ϕ zulässig und $\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq c_t(\phi)$. Dann besitzt e^{-tA} einen Kern k_t und*

$$|k_t(x,y)| \leq c_t(\phi)\phi(x)\phi^{-1}(y) \quad \textit{f.ü.}$$

Beweis. Ist e^{-tA_ϕ} ultrakontraktiv, so auch e^{-tA}, denn

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA}\,|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq \|\phi\|_\infty\|\phi^{-1}\|_\infty\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^1}\|_{1\to\infty}.$$

Sei k_t ein Kern von e^{-tA} (gemäß Lemma 4.1.1). Dann gilt

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,u)(x) &= (\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi u)(x) \\ &= \int_X u(y)\phi(y)k_t(x,y)\phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit des Kerns folgt $|\phi(y)k_t(x,y)\phi^{-1}(x)| \leq c_t(\phi)$ f.ü. und somit die Behauptung. □

Bemerkungen

Davies' Methode ist nicht neu, sondern wurde schon in vielen Situationen genutzt, z.B. bei stark lokalen Dirichlet-Formen (dies enthält den Fall der Laplaceoperatoren auf Mannigfaltigkeiten), nichtlokalen Dirichlet-Formen und Differentialoperatoren höherer Ordnung. Benannt wurde diese Methode nach Davies [Dav87, Dav90]. In [CKS87] wird diese Methode benutzt um Kerne von nichtlokalen Dirichlet-Formen abzuschätzen. Das Resultat aus [CKS87] wird in verschiedenen neueren Quellen, z.B. [BBCK09, HK06, Foo09] angewendet. Eine Standardarbeit, die dies auf nichtlokale Dirichlet-Formen, deren Sprungkerne verschiedene Asymptotiken erfüllen, anwendet, ist [CK08]. [ERSZ06] erhält mit dieser Methode Gauß'sche L^2-Abschätzungen für stark lokale Dirichlet-Formen bezüglich der intrinsischen Metrik. Für Graphen erhält [Dav93] entsprechende Resultate.

Normalerweise wird bei Davies' Methode vorausgesetzt, dass

$$|a_\phi - a| \leq \lambda$$

für eine Konstante $\lambda \geq 0$ ist. Eine Ausnahme davon ist [Dav95]. Dort wird die Methode von Davies auf Potenzen des Laplaceoperators in $\mathbb{R}^d$ angewandt. Hingegen findet sich auch dort die übliche Voraussetzung $|\nabla\phi| \leq 1$. Lässt man diese Voraussetzung fallen, erhält man oft stärkere, aber auch aufwendiger zu formulierende Resultate.

Combes-Thomas-Abschätzungen können mit der selben Methode bewiesen werden, siehe [BCH97, CT73], nur ist für diesen Beweis tatsächlich die Voraussetzung

$$|a_\phi - a| \leq \lambda$$

vonnöten.

4.3 Nachweis von Ultrakontraktivität

Wesentlich für die Kernabschätzungen ist die Ultrakontraktivität. Die folgenden Abschnitte zeigen einige Möglichkeiten auf, wie Ultrakontraktivität mit Hilfe von Funktionalungleichungen nachgewiesen werden kann. Aufgrund der Fülle der Möglichkeiten soll hier keine vollständige Darstellung dieses Themas gegeben werden. Insbesondere wird nur auf den Fall eingegangen, dass $\|T|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq Ct^\alpha \,\mathrm{e}^{\beta t}$. Im Zentrum der Darstellung soll die Nash-Ungleichung stehen.

Es werden hier nur Schranken an die $L^1 \to L^2$-Norm bzw. $L^2 \to L^\infty$-Norm gezeigt. Ultrakontraktivität erhält man dann über die Halbgruppen-Eigenschaft und die Adjungierte, denn es ist

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA}\,|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq \|\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A}\,|_{L^1}\|_{1\to 2}\|\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A}\,\|_{2\to\infty}$$

und

$$\|\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A}\,|_{L^1}\|_{1\to 2} = \|\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}A^*}\,\|_{2\to\infty}.$$

4.3.1 ... mit L^∞-Einbettungen

Falls L^∞ stetig in $\mathcal{D}(A)$ eingebettet ist, so ergibt sich relativ direkt eine Schranke an die $L^2 \to L^\infty$-Norm der Halbgruppe. Zunächst wird eine Schranke an die Norm von $A\,\mathrm{e}^{-tA}$ bewiesen.

Lemma 4.3.1. *Sei $|\Im a| \leq C\Re a$. Dann gilt*

$$\|A\,\mathrm{e}^{-tA}\,\| \leq \frac{\sqrt{C^2+1}}{t}.$$

Beweis. Sei $r < \frac{t}{\sqrt{C^2+1}}$. Dann ist e^{-zA} in

$$K_r(t) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-t| < r\} \subset S(C)$$

holomorph. Also gilt

$$\|-A\,\mathrm{e}^{-tA}\,\| = \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{e}^{-zA}\,|_{z=t}\| = \|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_r(t)} \frac{\mathrm{e}^{-zA}}{(z-t)^2}\,\mathrm{d}z\| \leq \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r},$$

da $\|\,\mathrm{e}^{-zA}\,\| \leq 1$ ist. Somit folgt die Behauptung. □

Hiermit erhält man leicht die gewünschte Schranke:

Proposition 4.3.2. *Seien $\theta > -1$, $C \geq 0$ und folgende zwei Bedingungen erfüllt:*

$$|\Im a(u,u)| \leq C \Re a(u,u) \quad (u \in \mathcal{D}(a))$$

und

$$\|u\|_\infty^{1+\theta} \leq \|Au\| \|u\|^\theta \quad (u \in \mathcal{D}(A)).$$

Dann gilt

$$\| \mathrm{e}^{-tA} \|_{2\to\infty} \leq \left(\frac{\sqrt{C^2+1}}{t} \right)^{\frac{1}{1+\theta}}.$$

Beweis. Sei $u \in L^2$ und setze $u_t := \mathrm{e}^{-tA} u$. Dann folgt

$$\|u_t\|_\infty^{1+\theta} \leq \|Au_t\| \|u_t\|^\theta$$

und mit Lemma 4.3.1 folgt weiter

$$\|u_t\|_\infty^{1+\theta} \leq \left(\frac{\sqrt{C^2+1}}{t} \right) \|u\|^{1+\theta}. \qquad \square$$

4.3.2 ... mit L^p-Einbettungen

Aus einer L^p-Einbettung ($2 < p < \infty$) lässt sich leicht eine Nash-Ungleichung zeigen, mit deren Hilfe wiederum Ultrakontraktivität nachgewiesen kann. Darauf wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Proposition 4.3.3. *Sei $2 < p < \infty$ und*

$$\|u\|_p^2 \leq \Re a(u,u)$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^p$. Dann gilt für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1 \cap L^p$

$$\|u\|_2^{2+\theta} \leq \Re a(u,u) \|u\|_1^\theta$$

mit $\theta = \frac{2p-4}{p}$.

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus der Interpolations-Ungleichung für Lebesgue-Funktionen. Hier ein kurzer direkter Beweis: Sei $\|u\|_1 = 1$ (ist $\|u\|_1 = 0$, so ist $\|u\|_p = 0$ für alle $p \in [1,\infty]$). Dann ist $|u|\mathrm{d}m$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und da $f(x) = |x|^{p-1}$ konvex ist, folgt mit Jensen's Ungleichung

$$\|u\|_2^{2p-2} = \left(\int_X |u||u| \, \mathrm{d}m \right)^{p-1} \leq \int_X |u|^{p-1}|u| \, \mathrm{d}m = \|u\|_p^p.$$

Hieraus schlussfolgert man

$$\|u\|_2^{\frac{4p-4}{p}} \leq \|u\|_p^2 \|u\|_1^{\frac{2p-4}{p}}$$

für alle $u \in L^1 \cap L^p$. $\square$

4.3.3 ... mit einer Nash-Ungleichung

Aus einer Schranke an die L^1-Norm einer Halbgruppe und einer Nash-Ungleichung lässt sich eine Schranke an die $L^1 \to L^2$-Norm zeigen. Nash-Ungleichungen sind Ungleichungen vom Typ

$$\|u\|^{2+\theta} \leq a(u,u)\|u\|_1^{\theta}.$$

Im nachfolgenden Abschnitt wird gezeigt, wie dies ohne eine Kenntnis der L^1-Norm-Schranke möglich ist. Das nächste Lemma ist für beide Varianten wesentlich, denn es zeigt sich, dass die Normen von Halbgruppen ebensolchen Differentialungleichungen genügen.

Lemma 4.3.4. *Sei $\theta > 0$ und seien $u, v : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit $u > 0$. Sei weiter $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ differenzierbar und erfülle die Differentialungleichung*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \leq -f(x)^{1+\theta} u(x) + v(x) f(x).$$

Dann ist

$$f(x) \leq \left(\theta \int_0^x \exp\left(-\theta \int_y^x v(z)\,\mathrm{d}z \right) u(y)\,\mathrm{d}y \right)^{-\frac{1}{\theta}}$$

und diese Abschätzung ist scharf in dem Sinne, dass die rechte Seite die obige Differentialungleichung erfüllt.

Beweis. Setze $w(x) := \exp(\theta \int_0^x v(z)\,\mathrm{d}z)$ und betrachte $g(x) := f(x)^{-\theta} w(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) &= -\theta f(x)^{-\theta-1} w(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \theta f(x)^{-\theta} w(x) v(x) \\
&\geq \theta w(x) u(x) - \theta f(x)^{-\theta} w(x) v(x) + \theta f(x)^{-\theta} w(x) v(x) \\
&= \theta w(x) u(x)
\end{aligned}$$

Da $g(x) > 0$ für alle $x > 0$ ist, sieht man leicht ein, dass $g(x) \geq \theta \int_0^x w(y)u(y)\mathrm{d}y$. Somit errechnet man, dass

$$f(x)^{-\theta} \geq \theta \int_0^x \frac{w(y)}{w(x)} u(y)\,\mathrm{d}y. \qquad \square$$

Proposition 4.3.5. *Seien $C_1, C_2, \theta > 0$ und $\beta, \omega \in \mathbb{R}$. Für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1$ gelte*

$$C_1 \|u\|^{2+\theta} \leq \Re a_\beta(u,u) \|u\|_1^{\theta}. \tag{4.1}$$

Weiter sei $\| \mathrm{e}^{-tA}|_{L^1} \|_1 \leq C_2 \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t > 0$. Dann gilt

$$\| \mathrm{e}^{-tA}|_{L^1} \|_{1\to 2} \leq C_2 \left(\frac{1}{C_1 \theta t} \right)^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{e}^{\frac{\omega+\beta}{2} t}.$$

Beweis. Sei $u \in L^2 \cap L^1$ mit $\|u\|_1 \leq 1$, $u_t := \mathrm{e}^{-tA} u$ und $f(t) := \|u_t\|^2$. Dann berechnet man

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) &= -2\Re a(u_t, u_t) \leq -2C_1 \|u_t\|^{2+\theta} \|u_t\|_1^{-\theta} + 2\beta \|u_t\|^2 \\ &\leq -2C_1 f(t)^{1+\theta/2} \left(C_2 \,\mathrm{e}^{\omega t}\right)^{-\theta} + 2\beta f(t).\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.3.4 (für $f(t) > 0$) gilt nun

$$\begin{aligned}f(t) &\leq \left(\frac{\theta}{2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\theta}{2} \int_s^t 2\beta \,\mathrm{d}r \right) 2C_1 \left(C_2 \,\mathrm{e}^{\omega s}\right)^{-\theta} \,\mathrm{d}s \right)^{-\frac{2}{\theta}} \\ &= C_2^2 \left(C_1 \theta \int_0^t \mathrm{e}^{-\theta\beta(t-s)} \,\mathrm{e}^{-\theta\omega s} \,\mathrm{d}s \right)^{-\frac{2}{\theta}}.\end{aligned}$$

Da sich Integrale über konvexe Funktionen leicht abschätzen lassen durch $\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x \geq tg(t/2)$ folgt weiter

$$f(t) \leq C_2^2 \left(C_1 \theta t \,\mathrm{e}^{-\theta \frac{\omega+\beta}{2} t} \right)^{-\frac{2}{\theta}} \leq C_2^2 \left(\frac{1}{C_1 \theta t} \right)^{\frac{2}{\theta}} \mathrm{e}^{(\omega+\beta)t}. \qquad \square$$

Bemerkung 4.3.6. Es genügt Gleichung (4.1) für Funktionen $u \geq 0$ vorauszusetzen, wenn e^{-tA} positivitätserhaltend für alle $t \geq 0$ ist. Ist $\mathrm{e}^{-tA}|_{L^p}$ ein stetiger Operator in L^p für alle $t \geq 0$ so genügt es, wenn Gleichung (4.1) für Funktionen in L^p gilt.

Umgekehrte Aussagen zu Proposition 4.3.5 gelten ebenfalls. Für nichtsymmetrische Formen kann hier allerdings nur eine abgeschwächte Form gezeigt werden. Aber zuerst ein Lemma:

Lemma 4.3.7. *Seien $a, b, c \geq 0$ und $\alpha, \beta > 0$. Dann sind äquivalent:*

i) $a^{\alpha+\beta} \leq \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta} b^\beta c^\alpha$,

ii) Für alle $t > 0$ gilt $a \leq t^\alpha b + t^{-\beta} c$.

Beweis. Minimiert man $t^\alpha b + t^{-\beta} c$ über $t > 0$ ($t = \left(\frac{\beta c}{\alpha b}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ für $b, c \neq 0$), so erhält man mit der Ungleichung aus ii) die Ungleichung aus i). $\square$

Bemerkung 4.3.8. Laut [Kat66, V.§3.11.] existiert zu jedem m-sektoriellen Operator A genau ein m-sektorieller Operator B, für den gilt $B^2 = A$. Im folgenden wird dieser zu A gehörende Operator $A^{1/2}$ genannt. $A^{1/2}$ kommutiert mit jedem beschränkten Operator mit dem A kommutiert, insbesondere also auch e^{-tA}.

Mit dieser Vorbereitung kann nun die Umkehrung formuliert werden.

Proposition 4.3.9. *Sei $\Re a \geq 0$, $1 \leq p < 2$, $\theta > 0$ und $\| \mathrm{e}^{-tA} |_{L^p} \|_{p\to 2} \leq t^{-\frac{1}{\theta}}$ für alle $t \geq 0$. Dann existiert eine Konstante C, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(A) \cap L^p$ bzw. $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^p$ gilt*

$$\|u\|^{1+\theta} \leq C\|Au\|\|u\|_p^\theta$$

bzw.

$$\|u\|^{2+\theta} \leq C\|A^{1/2}u\|\|A^{*1/2}u\|\|u\|_p^\theta$$

Beweis. Sei $u \in \mathcal{D}(A) \cap L^p$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|u\| &\leq \|u - \mathrm{e}^{-tA}\, u\| + \|\, \mathrm{e}^{-tA}\, u\| \\ &\leq \| \int_0^t \mathrm{e}^{-sA}\, Au \,\mathrm{d}s\| + t^{-\frac{1}{\theta}}\|u\|_p \leq t\|Au\| + t^{-\frac{1}{\theta}}\|u\|_p.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^p$

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= (u - \mathrm{e}^{-tA}\, u, u) + (\mathrm{e}^{-tA}\, u, u) \\ &\leq \int_0^t (\mathrm{e}^{-sA}\, A^{1/2}u, A^{*1/2}u)\,\mathrm{d}s + t^{-\frac{1}{\theta}}\|u\|_p\|u\| \\ &\leq t\|A^{1/2}u\|\|A^{*1/2}u\| + t^{-\frac{1}{\theta}}\|u\|_p\|u\|.\end{aligned}$$

Lemma 4.3.7 liefert nun die Behauptung. □

Da für a symmetrisch $a(u,u) = \|A^{1/2}u\|^2$ ist, erhält man in diesem Fall genauer:

Proposition 4.3.10. *Sei $a \geq 0$ symmetrisch, $1 \leq p < 2$ und $\| \mathrm{e}^{-tA} |_{L^p} \|_{p\to 2} \leq t^{-\frac{1}{\theta}}$ für alle $t > 0$. Dann gilt*

$$\|u\|^{2+\theta} \leq Ca(u,u)\|u\|_p^\theta$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^p$.

Beweis. Sei $u \in L^2$. Mit Hilfe des Funktionalkalküls ([DS88b, Kapitel 12.]) errechnet man, dass $\|u - \mathrm{e}^{-tA}\, u\|^2 \leq ta(u,u)$ gilt. Somit ist

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leq 2\|u - \mathrm{e}^{-tA}\, u\|^2 + 2\|\, \mathrm{e}^{-tA}\, u\|^2 \\ &\leq 2ta(u,u) + 2t^{-\frac{2}{\theta}}\|u\|_p^2.\end{aligned}$$

Der Rest folgt mit Lemma 4.3.7. □

4.3.4 ... mit einer iterierten Nash-Ungleichung

Im letzten Abschnitt wurde ausgehend von einer L^1-Norm-Schranke und einer Nash-Ungleichung eine $L^1 \to L^2$-Norm-Schranke gezeigt. Kennt man keine L^1-Norm-Schranke, so kann man immer noch, ausgehend von einer L^2-Norm-Schranke, eine $L^2 \to L^\infty$-Norm-Schranke zeigen. Der Beweis ist aber aufwendiger und das Resultat weniger direkt.

Proposition 4.3.11. *Sei $\Re a \geq -\gamma$, $\| \mathrm{e}^{-tA}|_{L^\infty}\|_\infty < \infty$ für alle $t \geq 0$ und es existiere ein $\theta > 0$, ein $\lambda > 0$ und $c(n) \geq 0$ mit $c := \sum_{n=2}^\infty \frac{c(n)}{2^n} < \infty$, so dass*

$$\|u\|_{2^n}^{2^n+\theta 2^{n-1}} \|u\|_{2^{n-1}}^{-\theta 2^{n-1}} \leq 2^n \Re(Au, u|u|^{2^n-2}) + \lambda \, \mathrm{e}^{c(n)} \, 2^n \|u\|_{2^n}^{2^n}$$

für alle $n \geq 2$ und alle $u \in \mathcal{D}(A) \cap L^\infty$. Dann gilt

$$\| \mathrm{e}^{-tA} \|_{2\to\infty} \leq C t^{-\frac{1}{\theta}} \, \mathrm{e}^{(\lambda+\gamma^+)t}$$

und falls $\lambda - \gamma^- > 0$ ist auch

$$\| \mathrm{e}^{-tA} \|_{2\to\infty} \leq C \, \mathrm{e} \max\left(\lambda + \gamma^-, \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{e}^{\gamma t}$$

für $C = \left(\frac{4\,\mathrm{e}^{2c+1}}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.

Beweis. Sei $u \in L^2 \cap L^\infty$ mit $\|u\|_2 \leq 1$ und $u_t := \mathrm{e}^{-tA} u$. O.B.d.A. sei $u_t \neq 0$. Definiere $f_n(t) := \|u_t\|_{2^n}^{2^n}$. Dann ist

$$f_1(t) \leq \mathrm{e}^{2\gamma t} \tag{4.2}$$

und für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n(t) &= \int_X \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(u_t^{2^{n-1}} \overline{u_t}^{2^{n-1}} \right) \mathrm{d}m \\
&= \int_X \left(2^{n-1} u_t^{2^{n-1}-1} \overline{u_t}^{2^{n-1}} (-Au_t) + 2^{n-1} u_t^{2^{n-1}} \overline{u_t}^{2^{n-1}-1} (-\overline{Au_t}) \right) \mathrm{d}m \\
&= 2^n \Re \int_X (-Au_t) \overline{u_t} |u_t|^{2^n-2} \, \mathrm{d}m \\
&= -2^n \Re(Au_t, u_t|u_t|^{2^n-2}).
\end{aligned}$$

Dabei verwendet man, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{u_t} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t} = \overline{-Au_t}$ ist. Die Vertauschung von Differentiation und Integral ist möglich, da der Differenzenquotient im L^{2^n}-Sinne konvergiert (siehe [Yos80]). Mit der Voraussetzung ist nun

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n(t) &\leq -\|u_t\|_{2^n}^{2^n+\theta 2^{n-1}} \|u_t\|_{2^{n-1}}^{-\theta 2^{n-1}} + \lambda \, \mathrm{e}^{c(n)} \, 2^n \|u_t\|_{2^n}^{2^n} \\
&= -f_n(t)^{1+\frac{\theta}{2}} f_{n-1}(t)^{-\theta} + \lambda \, \mathrm{e}^{c(n)} \, 2^n f_n(t).
\end{aligned}$$

Lemma 4.3.4 liefert somit

$$f_n(t)^{-\frac{\theta}{2}} \geq \frac{\theta}{2} \int_0^t \exp\left(-\frac{\theta}{2} \int_s^t \lambda \, \mathrm{e}^{c(n)} \, 2^n \, \mathrm{d}r \right) f_{n-1}(s)^{-\theta} \, \mathrm{d}s. \tag{4.3}$$

Mit der Definition $g_n(t) := f_n(t)^{-\frac{\theta}{2}}$ gilt nun mit Ungleichung (4.2)

$$g_1(t) \geq \mathrm{e}^{-\theta\gamma t} \geq \mathrm{e}^{-\theta\gamma^+ t},$$

und mit Ungleichung (4.3) gilt

$$g_n(t) \geq \frac{\theta}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\theta\lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,2^{n-1}(t-s)}\, g_{n-1}(s)^2\,\mathrm{d}s.$$

Induktionshypothese:

$$g_n(t) \geq \alpha_n t^{2^{n-1}-1}\,\mathrm{e}^{-\theta\lambda\beta_n t}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ t} \quad (t>0)$$

für noch festzulegende Werte $\alpha_n, \beta_n \geq 0$. Mit dieser Hypothese folgt für $n \geq 2$ und $0 < \epsilon \leq 1/2$

$$\begin{aligned} g_n(t) &\geq \frac{\theta}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\theta\lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,2^{n-1}(t-s)}\, \alpha_{n-1}^2 s^{2^{n-1}-2}\,\mathrm{e}^{-2\theta\lambda\beta_{n-1}s}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ s}\,\mathrm{d}s \\ &\geq \frac{\theta}{2}\alpha_{n-1}^2\,\mathrm{e}^{-2\theta\lambda\beta_{n-1}t}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ t} \int_{(1-2\epsilon)t}^t \mathrm{e}^{-\theta\lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,2^{n-1}(t-s)}\, s^{2^{n-1}-2}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

und da der Integrand konvex ist schätzt man weiter durch den Mittelwert ab

$$\begin{aligned} &\geq \frac{\theta}{2}\alpha_{n-1}^2\,\mathrm{e}^{-2\theta\lambda\beta_{n-1}t}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ t}\, 2\epsilon t\,\mathrm{e}^{-\theta\lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,2^{n-1}\epsilon t}((1-\epsilon)t)^{2^{n-1}-2} \\ &= \theta\alpha_{n-1}^2\epsilon(1-\epsilon)^{2^{n-1}-2} t^{2^{n-1}-1}\,\mathrm{e}^{-2\theta\lambda\beta_{n-1}t-\theta\lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,2^{n-1}\epsilon t}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ t} \end{aligned}$$

und mit der Wahl $\epsilon := \frac{1}{2^{n-1}\,\mathrm{e}^{c(n)}} \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$g_n(t) \geq \theta\alpha_{n-1}^2 \frac{1}{2^{n-1}\,\mathrm{e}^{c(n)+1}} t^{2^{n-1}-1}\,\mathrm{e}^{-2\theta\lambda\beta_{n-1}t-\theta\lambda t}\,\mathrm{e}^{-2^{n-1}\theta\gamma^+ t},$$

da $(1-\epsilon)^{2^{n-1}-2} \geq \mathrm{e}^{-1}$ ist ($(1-\frac{1}{x})^{x-2} \geq \mathrm{e}^{-1}$ für $x \geq 2$). Also ist die Induktionshypothese korrekt mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \alpha_n &= \frac{\theta}{2^{n-1}\,\mathrm{e}^{c(n)+1}}\alpha_{n-1}^2, \\ \beta_1 &= 0, & \beta_n &= 2\beta_{n-1}+1. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\alpha_n^{\frac{1}{2^n}} \Big/ \alpha_{n-1}^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \theta^{\frac{1}{2^n}} 2^{-\frac{n-1}{2^n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{c(n)+1}{2^n}}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\frac{1}{2^n}} = \prod_{n=2}^{\infty} \theta^{\frac{1}{2^n}} 2^{-\frac{n-1}{2^n}}\,\mathrm{e}^{-\frac{c(n)+1}{2^n}} = \frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-c-\frac{1}{2}}$$

mit $c := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c(n)}{2^n}$, sowie

$$\frac{\beta_n}{2^n} - \frac{\beta_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\|u_t\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} f_n(t)^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(g_n(t)^{\frac{1}{2^n}}\right)^{-\frac{2}{\theta}} \\ &\le \left(\frac{1}{2}(\theta t)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-c-\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\theta\lambda}{2}t}\, \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}\gamma^+ t}\right)^{-\frac{2}{\theta}} = \left(\frac{4\,\mathrm{e}^{2c+1}}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} t^{-\frac{1}{\theta}}\, \mathrm{e}^{\lambda t}\, \mathrm{e}^{\gamma^+ t}.\end{aligned}$$

Die letzte Aussage folgt mit der Halbgruppeneigenschaft, denn es ist

$$\begin{aligned}\|\,\mathrm{e}^{-tA}\,\|_{2\to\infty} &\le \|\,\mathrm{e}^{-sA}\,\|_{2\to\infty} \|\,\mathrm{e}^{-(t-s)A}\,\| \\ &\le C s^{-\frac{1}{\theta}}\, \mathrm{e}^{(\lambda+\gamma^+)s}\, \mathrm{e}^{\gamma(t-s)} \\ &\le C s^{-\frac{1}{\theta}}\, \mathrm{e}^{(\lambda+\gamma^-)s}\, \mathrm{e}^{\gamma t}\end{aligned}$$

für alle $0 < s \le t$. Ist $\lambda + \gamma^- \le 0$ so erhält man die zweite Ungleichung mit $s := t$. Andernfalls wählt man $s := \min(t, \frac{1}{\lambda+\gamma^-}) > 0$ um das Resultat zu erhalten. □

Bemerkungen

Für symmetrische Dirichlet-Formen findet man die Aussagen zur Ultrakontraktivität und zu den Funktionalungleichungen in [Dav90, Abschnitt 2.4]. Laut Davies (dieselbe Quelle) erhält man in diesem Kontext die tiefsten Einblicke in die Ultrakontraktivität mit den logarithmischen Sobolev-Ungleichungen.

Für symmetrische Dirichlet Formen und $\theta > 2$ sind äquivalent (ebenfalls Davies [Dav90, Abschnitt 2.4]):

i) $\|\,\mathrm{e}^{-tA}\,\|_{2\to\infty} \le c t^{-\frac{\theta}{4}}$ und

ii) $\|u\|_{\frac{2\theta}{\theta-2}} \le c a(u,u)$.

Der Beweis ii) $\Rightarrow$ i) geht dort den Umweg über eine log-Sobolev-Ungleichung anstelle über eine Nash-Ungleichung wie hier gewählt.

Den Beweis von Proposition 4.3.11 findet man auch in [CKS87]. Dort wird aber nur der Spezialfall behandelt, dass a eine Dirichlet-Form ist und

$$\|u\|_{2^n}^{2^n+\theta 2^{n-1}} \|u\|_{2^{n-1}}^{-\theta 2^{n-1}} \le 2^n \Re(A_\phi u, u|u|^{2^n-2}) + 2^{2n}\lambda \|u\|_{2^n}^{2^n}$$

mit A_ϕ definiert wie in Abschnitt 4.2.

Eine vergleichbare Aussage zu Proposition 4.3.11 kann auch mit einer logarithmischen Sobolev-Ungleichung anstelle der Nash-Ungleichung bewiesen werden. Dazu betrachtet man im Beweis die Funktion $s \mapsto \|u_s\|_{p(s)}$ für eine geeignete Wahl $p : (0,t) \to (2,\infty)$ mit $p(s) \to \infty$ für $s \to t$ (siehe [Dav87] und [Dav90, Theorem 2.2.7]).

Kapitel 5

Anwendungen

In diesem Kapitel werden nun die abstrakten Resultate aus dieser Arbeit auf konkretere Situationen angewendet.

5.1 Symmetrische Dirichlet-Formen

Sei X ein lokal kompakter separabler Hausdorff-Raum, $\mathcal{A}$ die Borelsche σ-Algebra, m ein Radon-Maß auf $\mathcal{A}$ mit $m(U) > 0$ für alle offenen Mengen $U \subset X$ und sei a_0 eine symmetrische Dirichlet-Form. Seien μ^+, μ^- zwei Cap-stetige Maße auf $\mathcal{A}$ und sei

$$\mu^-(u,u) \leq q(a_0+\mu^+)(u,u) + C_q\|u\|^2 \quad (u \in \mathcal{D}(a_0+\mu^+))$$

für ein $q < 1$ und ein $C_q \geq 0$ erfüllt. Definiere $a := a_0 + \mu^+ - \mu^-$ wie in Abschnitt 3.2, und setze voraus, dass a schwach regulär ist. Es existiert ein $\gamma_a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq -\gamma_a$. Die Form a besitzt eine Darstellung wie in Kapitel 3:

$$a(u,v) = \int\limits_X \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}(x)}\, k'(\mathrm{d}x) + \int\limits_{X^2} \mathrm{d}\Gamma_{<u,v>}.$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen werden ab sofort die Tilden bei quasistetigen Funktionen weggelassen. Funktionen in $\mathcal{D}_{loc}(a)$ werden grundsätzlich als quasistetig angenommen.

Ein komplexes σ-endliches Maß Υ auf X^2 heißt symmetrisch, falls $\Upsilon(E \times F) = \overline{\Upsilon(F \times E)}$ für alle $E, F \in \mathcal{A}$ ist. Für ein komplexes, σ-endliches symmetrisches Maß Υ auf X^2 und $s, t \in \mathbb{R}$ schreibt man

$$\Upsilon \leq sa + t,$$

wenn

$$\int\limits_{X^2} u(x)\overline{u(y)}\, \Upsilon(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) \leq sa(u,u) + t\|u\|^2$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ gilt.

5.1.1 L^2-Abschätzungen

Hier werden Abschätzungen der L^2-Norm der Halbgruppe zu a gezeigt. Die nächste Proposition gibt an, welche ϕ zulässig sind, und beweist eine untere Abschätzung an a_ϕ. Der wesentliche Schritt im Beweis ist die Berechnung des Ausdrucks $a - \Re a_\phi$, der sich als

$$a(u,u) - \Re a_\phi(u,u) = -\int\limits_{X\times X} u(x)\overline{u(y)}\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}$$

ergibt.

Proposition 5.1.1. *Sei $0 < \phi \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$, $\phi^{-1} \in L^\infty$, $0 \le q < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und*

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \le qa + \lambda.$$

Dann ist ϕ zulässig und

$$\Re a_\phi(u,u) \ge (1-q)a(u,u) - \lambda\|u\|^2$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a)$.

Beweis. Da $-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}$ beschränkt ist, sind auch $\Gamma_{<\phi,\phi>}$ und $\Gamma_{<\phi^{-1},\phi^{-1}>}$ beschränkt, denn mit der verallgemeinerten Quotientenregel (Bemerkung 3.3.10) erhält man

$$\Gamma_{<\phi,\phi>}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = -\phi(x)\phi(y)\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) \le \|\phi\|_\infty^2 qa + \|\phi\|_\infty^2\lambda.$$

Die Beschränktheit von $\Gamma_{<\phi^{-1},\phi^{-1}>}$ folgt analog. Also ist nach Proposition 3.4.4

$$u\phi \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow u \in \mathcal{D}(a) \Leftrightarrow u\phi^{-1} \in \mathcal{D}(a).$$

Offensichtlich ist

$$\phi^{-1}u\overline{\phi v}\,\mathrm{d}k' = u\overline{v}\,\mathrm{d}k'.$$

Mit Hilfe der Produkt- und Quotienten-Regel erhält man

$$\begin{aligned}\int\limits_X \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\phi u,\phi^{-1}v>} = \int\limits_X \mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,v>} + \int\limits_X u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \\ - \int\limits_X \phi^{-1}(x)u(x)\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<\phi,v>} + \int\limits_X \phi^{-1}(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}\mu^{(c)}_{<u,\phi>}.\end{aligned}$$

Integriert man

$$(\phi(x)u(x) - \phi(y)u(y))\overline{(\phi(x)^{-1}v(x) - \phi(y)^{-1}v(y))} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$

mit

$$\begin{aligned}t_1 &= (u(x)-u(y))\overline{(v(x)-v(y))}\\ t_2 &= u(x)\overline{v(y)}(\phi(x)-\phi(y))(\phi(x)^{-1}-\phi(y)^{-1})\\ t_3 &= -\tfrac{1}{2}\phi(x)^{-1}\overline{(v(x)+v(y))}(u(x)-u(y))(\phi(x)-\phi(y))\\ t_4 &= \tfrac{1}{2}\phi(x)^{-1}(u(x)+u(y))(\phi(x)-\phi(y))\overline{(v(x)-v(y))},\end{aligned}$$

über das Maß J und addiert die zwei Gleichungen für die Maße k' und $\mu^{(c)}$, so erhält man

$$a_\phi(u,v) = a(u,v) + \int\limits_{X\times X} u(x)\overline{v(y)}\,\mathrm{d}\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} + t(u,v) \tag{5.1}$$

mit

$$t(u,v) := \tfrac{1}{2}\int\limits_{X\times X} \phi(x)^{-1}(u(x)+u(y))\,\mathrm{d}\Gamma_{<\phi,v>} - \tfrac{1}{2}\int\limits_{X\times X} \phi(x)^{-1}\overline{(v(x)+v(y))}\,\mathrm{d}\Gamma_{<u,\phi>}.$$

t ist schiefsymmetrisch. Wegen der Schranke an $-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}$ existieren $\gamma, C > 0$ mit

$$C^{-1}\Re a_\gamma(u,u) \le \Re a_\gamma(\phi u, \phi^{-1}u) \le C\Re a_\gamma(u,u)$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a)$.

Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt auch

$$|\Im a(\phi u, \phi^{-1}u)| = |t(u,u)| \le C\Re a_\gamma(u,u)$$

(mit möglicherweise anderen Werten γ, C). Also ist ϕ zulässig.

Die Ungleichung folgt nun unmittelbar aus (5.1) und der Abschätzung an $-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}$. □

Mit dieser Vorarbeit und Proposition 4.2.3 erhält man leicht die L^2-Abschätzung.

Proposition 5.1.2. *Seien $E, F \subset X$ messbar, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $0 < \phi \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$, $\phi^{-1} \in L^\infty$ mit*

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \le a + \lambda.$$

Dann gilt

$$\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| \le \mathrm{e}^{\lambda t}\,\|\phi\mathbb{1}_E\|_\infty \|\phi^{-1}\mathbb{1}_F\|_\infty.$$

Beweis. Sei $0 \le q < 1$ und $\phi' := \mathrm{e}^{q\ln(\phi)}$. Weil $f(x) := \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$ die Ungleichung $f(qx) \le qf(x)$ erfüllt, gilt

$$\begin{aligned}-(\phi'(x)-\phi'(y))(\phi'(x)^{-1}-\phi'(y)^{-1}) &= \mathrm{e}^{q\ln(\phi(x))-q\ln(\phi(y))} + \mathrm{e}^{q\ln(\phi(y))-q\ln(\phi(x))} - 2\\ &\le -q(\phi(x)-\phi(y))(\phi(x)^{-1}-\phi(y)^{-1}).\end{aligned}$$

Also gilt mit der Definition von Γ

$$-\Gamma_{<\phi',\phi'^{-1}>} \le -q\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \le qa + q\lambda,$$

denn die Kettenregel liefert $\mu^{(c)}_{<\phi',\phi'^{-1}>} = q^2\mu^{(c)}_{<\phi,\phi^{-1}>}$. Somit ist nach Proposition 5.1.1 ϕ' zulässig und es gilt

$$\Re a_{\phi'} \ge (1-q)a - q\lambda \ge -(1-q)\gamma_a - q\lambda.$$

Mit Proposition 4.2.3 gilt

$$\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| \le \mathrm{e}^{((1-q)\gamma_a+q\lambda)t}\,\|\,\mathrm{e}^{q\ln(\phi)}\,\mathbb{1}_E\|_\infty \|\,\mathrm{e}^{-q\ln(\phi)}\,\mathbb{1}_F\|_\infty.$$

Lässt man $q \to 1$ konvergieren, so erhält man die Aussage. □

Die folgenden drei Beispiele zeigen die Anwendbarkeit dieser L^2-Abschätzung.

Beispiel 5.1.3. Sei a lokal, das heißt $J = 0$, und $a \geq -\gamma_a$. Dann gilt für $\phi = \mathrm{e}^{\psi}$

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} = -\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}|_{X^2 \cap d} \cong -\mu^{(c)}_{<\phi,\phi^{-1}>} = \mu^{(c)}_{<\psi,\psi>}.$$

Dabei benutzt man an der Stelle $\cong$ die Äquivalenz von $X^2 \cap d$ und X und danach die Kettenregel für $\mu^{(c)}$. Definiere die intrinsische Metrik als

$$d_{\mathrm{intr}}(x,y) := \sup\{\psi(x) - \psi(y) \mid \psi \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap C(X), \mu^{(c)}_{<\psi,\psi>} \leq m\}.$$

Mit dieser Definition gilt für $\lambda \geq 0$

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\gamma_a t} \, \mathrm{e}^{\lambda^2 t} \, \mathrm{e}^{-\lambda d_{\mathrm{intr}}(E,F)} \, .$$

Wählt man λ optimal ($\lambda := \frac{d_{\mathrm{intr}}(E,F)}{2t}$), so erhält man die Abschätzung

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\gamma_a t} \, \mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(E,F)^2}{4t}} \, .$$

In diesem Beispiel wurde ϕ so gewählt, dass $-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \lambda$ gilt. Dass der zusätzliche Term a in Proposition 5.1.2 zu einer Verbesserung führen kann, zeigen die folgenden zwei Beispiele.

Beispiel 5.1.4. Sei $X := \mathbb{R}$, $a(u,v) := \int_X u'(x)\overline{v'(x)} \, \mathrm{d}x$ und $\mathcal{D}(a) := H^1(X)$. Es gilt bekanntermaßen

$$|u(x)|^2 \leq s a(u,u) + \frac{4}{s}\|u\|^2$$

für alle $u \in H^1(X)$, $s > 0$. Somit gilt auch

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{2y} \int_0^y |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq a(u,u) + \lambda \|u\|^2$$

für alle $y > 0$. Daraus folgt

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \, \mathrm{e}^{-y\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda}}{2y}}}$$

für $E = (-\infty, 0]$ und $F = [y, \infty)$. Mit der Wahl $\lambda := \frac{1}{16}\sqrt[3]{\frac{4y^2}{t^4}}$ folgt nun

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{y^2}{2t}}}$$

Für $\frac{y^2}{t}$ klein ist diese Abschätzung besser als die Abschätzung aus dem letzten Beispiel.

Beispiel 5.1.5. Sei $X := \mathbb{R}$, $V \in L^\infty(X)$, $V \geq 0$ und

$$a(u,v) := \int_X u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_X V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathcal{D}(a) := H^1(X).$$

Für eine Funktion $w : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ definiere $d_w(x,y) := |\int_x^y w(z)\,\mathrm{d}z|$ und $d_w(E,F) := \inf_{x\in E, y\in F} d_w(x,y)$. Dann gilt

$$\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{-d_w(E,F)}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

mit $w := \sqrt{V+\lambda}$ für alle $\lambda \geq 0$, also insbesondere auch

$$\|\mathbb{1}_E\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{-d_{\sqrt{V}}(E,F)}\,.$$

Auch Randbedingungen können zu einer Verbesserung der Abschätzung führen. Die Halbgruppe für das folgende Beispiel in $[0,\infty)$ lässt sich mit dem Reflexionsprinzip leicht ausrechnen, jedoch ist die hier angegebene Methode auch in allgemeineren Räumen anwendbar, für die eine Hardy-Ungleichung existiert, siehe [Dav90, Abschnitt 1.5].

Beispiel 5.1.6. Sei $X := [0,\infty)$ und $a(u,u) := \int_0^\infty |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x$, $\mathcal{D}(a) := H_0^1(X)$ die klassische Dirichlet-Form mit Dirichlet-Randbedingung. Die Hardy-Ungleichung besagt, dass

$$\int_0^\infty \frac{1}{4x^2}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^\infty |u'(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

für alle $u \in H_0^1(X)$ gilt. Es folgt also

$$\int_X |u(x)|^2 \left(\frac{1}{4x^2} + \lambda^2\right)\,\mathrm{d}x \leq a(u,u) + \lambda^2\|u\|^2.$$

Da

$$\int_a^b \sqrt{\frac{1}{4x^2} + \lambda^2} \geq \frac{1}{2}\ln(\frac{z}{a}) + (b-z)\lambda$$

für alle $0 < a \leq z \leq b$ gilt, folgt

$$\|\mathbb{1}_{[0,a]}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_{[b,\infty)}\| = \|\mathbb{1}_{[b,\infty)}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_{[0,a]}\| \leq \mathrm{e}^{-\frac{(b-z)^2}{4t}}\left(\frac{a}{z}\right)^{1/2}$$

für alle $0 < a \leq z \leq b$.

Bemerkung 5.1.7. Aufgrund dieser Abschätzungen lohnt es sich, das Maß $-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>}$ genauer zu betrachten:

Ist $J = 0$ und $\phi = \mathrm{e}^\psi$, so folgt wie in Beispiel 5.1.3 schon erwähnt

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \stackrel{\sim}{=} \mu^{(c)}_{<\psi,\psi>}.$$

Ist $\mu^{(c)} = 0$, $\Psi : X^2 \to [0, \infty]$ messbar und symmetrisch und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(\mathrm{e}^{\Psi(x,y)} + \mathrm{e}^{-\Psi(x,y)} - 2)J \leq a + \lambda,$$

so gilt für $\psi \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap L^\infty$ mit $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \Psi(x, y)$ für alle $x, y \in X$ und $\phi := \mathrm{e}^\psi$ auch

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq a + \lambda.$$

Definiert man

$$d_\Psi(x, y) := \sup\{\psi(x) - \psi(y) \mid \psi \in \mathcal{D}_{loc}(a) \cap C(X), |\psi(z_1) - \psi(z_2)| \leq \Psi(z_1, z_2)\ \forall z_1, z_2 \in X\},$$

so folgt

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^\lambda \, \mathrm{e}^{-d_\Psi(E,F)} \, .$$

5.1.2 Kernabschätzungen

Zuerst werden zwei vorbereitende Ungleichungen gezeigt. Die Abschätzung an den Kern der Halbgruppe wird dann unter der Voraussetzung einer Nash-Ungleichung bewiesen.

Die erste vorbereitende Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Skalare.

Lemma 5.1.8. *Für $n \geq 1$, $x > 0$ und $y \geq 0$ gilt die Ungleichung*

$$(1 - y^n)^2 \leq n(x - y)(x^{-1} - y^{2n-1}) + \frac{n^2}{2}(1 - x)(x^{-1} - 1)(1 + y^{2n}). \tag{5.2}$$

Beweis. Für $n = 1$ zeigt eine einfache Rechnung, dass die Ungleichung äquivalent zu

$$(1 - y)^2 \leq \frac{x}{2}(1 - y)^2 + \frac{1}{2x}(1 - y)^2$$

ist. Sei nun also $y \geq 1$ und $n > 1$. Berechnet man die Integrale

$$B := \int_1^{y_5} \left[d + \int_1^{y_4} \left\{ c + y_3^{n-2} \cdot \int_1^{y_3} \left(b + y_2^{n-2} \cdot \int_1^{y_2} a \, \mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}y_2 \right\} \mathrm{d}y_3 \right] \mathrm{d}y_4$$

$$C := \int_1^{y} \int_1^{y_8} \int_1^{y_7} \int_1^{y_6} y_7^{n-2} y_6^{n-2} (e + nB) \, \mathrm{d}y_5 \mathrm{d}y_6 \mathrm{d}y_7 \mathrm{d}y_8$$

mit

$$\begin{aligned}
a &:= 3(2n + 1)(2n - 1)(4n - 1)(2n^2 - n + 1), \\
b &:= (2n - 1)(4n - 1)(22n^2 - 9n + 5), \\
c &:= 89n^3 - 55n^2 + 28n - 8, \\
d &:= 5(5n^2 + 1), \\
e &:= 5n^2 + 1,
\end{aligned}$$

so erhält man

$$8n(n-1)C = 4c_1c_3 - c_2^2$$

mit

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{n}{2}(1+y^{2n}) - y^{2n-1}, \\ c_2 &:= -n(1+y^{2n}) + 1 + y^{2n} - \frac{1}{n}(1-y^n)^2, \\ c_3 &:= \frac{n}{2}(1+y^{2n}) - y. \end{aligned}$$

Da C offensichtlich nichtnegativ ist, sieht man leicht ein, dass $4c_1c_3 - c_2^2 \geq 0$ ist. Weiterhin ist $c_1 > 0$. Also gilt

$$c_1 x + c_2 + c_3 x^{-1} \geq 0$$

was äquivalent zur Ungleichung (5.2) ist. Im Falle $0 < y < 1$ sei angemerkt, dass die Ungleichung (5.2) genau dann für x und y gilt, wenn sie für x^{-1} und y^{-1} anstelle von x und y gilt. Der letzte Fall $y = 0$ ist offensichtlich. □

Diese Ungleichung für Skalare lässt sich auf das Energiemaß $\mu^{(d)}$ übertragen:

Lemma 5.1.9. *Sei ϕ zulässig und $0 \leq u \in \mathcal{D}(a) \cap L^\infty$ und $n \geq 1$. Dann gilt*

$$\int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u^n,u^n>} \leq n \int_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi u,\phi^{-1}u^{2n-1}>} - n^2 \int_X u^{2n} \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>}.$$

Beweis. Mit Ungleichung (5.2) angewendet auf $\tilde{y} := \frac{u(y)}{u(x)}$ und $\tilde{x} := \frac{\phi(x)}{\phi(y)}$ erhält man

$$\begin{aligned} (u(x)^n - u(y)^n)^2 \leq\ & n(\phi(x)u(x) - \phi(y)u(y))(\phi(x)^{-1}u(x)^{2n-1} - \phi(y)^{-1}u(y)^{2n-1}) \\ & - \frac{n^2}{2}(u(x)^{2n} + u(y)^{2n})(\phi(x) - \phi(y))(\phi(x)^{-1} - \phi(y)^{-1}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Integrieren. □

Nun folgt die Kernabschätzung:

Proposition 5.1.10. *Sei $\lambda > 0$, $c(n) \geq 0$ mit $\sum \frac{c(2^n)}{2^n} < \infty$, $\theta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta \geq 0$*

$$\|u\|^{2+\theta} \leq a_\delta(u,u)\|u\|_1^\theta \quad (u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1),$$

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq a + \gamma$$

und für $n \geq 2$ und $0 \leq u \in \mathcal{D}(a)$

$$-n^2 \int_X u^2 \,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \frac{1}{2}a(u,u) + \lambda\, \mathrm{e}^{c(n)}\, n\|u\|^2 + (n-1)\int_X u^2 \,\mathrm{d}k'. \tag{5.3}$$

Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}} \max(1, (\lambda + \delta + \gamma^-)t)^{\frac{2}{\theta}}\, \mathrm{e}^{\gamma t}\, \phi(x)\phi^{-1}(y) \quad \textit{f.ü.}$$

Beweis. Definiere $\phi' := \phi^q = \mathrm{e}^{q\ln(\phi)}$. Es ist $\Re a \geq 0$. Wie in Proposition 5.1.2 ist ϕ' zulässig und $\Re a_{\phi'} \geq -q\gamma$. Sei $u \geq 0$. Dann ist mit Voraussetzung (5.3) für $n \geq 2$

$$\frac{1}{2}a(u^n,u^n) \leq a(u^n,u^n) + \lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,n\|u^n\|^2 + (n-1)\int\limits_X u^{2n}\,\mathrm{d}k' + n^2\int\limits_X u^{2n}\,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi',\phi'^{-1}>}$$

und nach zerlegen des Terms $a(u^n,u^n)$ erhält man

$$\leq \int\limits_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<u^n,u^n>} + n\int\limits_X u^{2n}\,\mathrm{d}k' + \lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,n\|u^n\|^2 + n^2\int\limits_X u^{2n}\,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi',\phi'^{-1}>}.$$

Mit Lemma 5.1.9 gilt dann

$$\begin{aligned}&\leq n\int\limits_X \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi' u,\phi'^{-1}u^{2n-1}>} + n\int\limits_X u^{2n}\,\mathrm{d}k' + \lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,n\|u^n\|^2\\ &\leq n a_{\phi'}(u,u^{2n-1}) + \lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,n\|u^n\|^2.\end{aligned}$$

Ersetzt man n durch 2^{n-1}, so erhält man mit der vorausgesetzten Nash-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|u\|_{2^n}^{2^n+\theta 2^{n-1}}\|u\|_{2^{n-1}}^{-\theta 2^{n-1}} &\leq a(u^{2^{n-1}},u^{2^{n-1}}) + \delta\|u\|_{2^n}^{2^n}\\ &\leq 2^n\Re(A_{\phi'}u,u|u|^{2^n-2}) + (\lambda+\delta)\,\mathrm{e}^{c(2^{n-1})}\,2^n\|u\|_{2^n}^{2^n}.\end{aligned}$$

Nach Proposition 4.3.11 existiert dann eine Konstante $C>0$ mit

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_{\phi'}}\,\|_{2\to\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{\theta}}\max(1,(\lambda+\delta+q\gamma^-)t)^{\frac{1}{\theta}}\,\mathrm{e}^{q\gamma t}\,.$$

Analog folgt

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_{\phi'}}\,\|_{1\to 2} = \|\,\mathrm{e}^{-tA^*_{\phi'}}\,\|_{2\to\infty} \leq Ct^{-\frac{1}{\theta}}\max(1,(\lambda+\delta+q\gamma^-)t)^{\frac{1}{\theta}}\,\mathrm{e}^{q\gamma t}$$

und somit

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_{\phi'}}\,\|_{1\to\infty} \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}}\max(1,(\lambda+\delta+q\gamma^-)t)^{\frac{2}{\theta}}\,\mathrm{e}^{q\gamma t}$$

mit einer anderen Konstanten $C>0$. Proposition 4.2.4 liefert nun

$$k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}}\max(1,(\lambda+\delta+q\gamma^-)t)^{\frac{2}{\theta}}\,\mathrm{e}^{q\gamma t}\,\phi(x)^q\phi(y)^{-q} \quad \text{f.ü.}$$

Mit $q\to 1$ folgt die Behauptung. □

Ist $\mu = 0$ und wählt man ϕ so, dass $-\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \gamma m$ ist, so erhält man folgende Abschätzung:

Beispiel 5.1.11. Sei a eine reguläre Dirichlet-Form, $\theta>0$ und $\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a(u,u)\|u\|_1^\theta$ für alle $u\in\mathcal{D}(a)\cap L^1$. Sei weiter ϕ zulässig mit $-\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \gamma m$. Dann folgt

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \gamma \leq a+\gamma$$

und (5.3) mit $\lambda=\gamma$ und $c=\ln(n)$. Somit folgt

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}}\max(1,\lambda t)^{\frac{2}{\theta}}\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,\phi(x)\phi^{-1}(y) \quad \text{f.ü.}$$

Dies lässt sich für lokale Dirichlet-Formen, d.h. $J = 0$, mit Hilfe der intrinsischen Metrik konkretisieren:

Beispiel 5.1.12. Sei a eine reguläre Dirichlet-Form und sei $J = 0$. Sei weiter $\theta > 0$ und $\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a(u,u)\|u\|_1^\theta$ für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1$. Definiere wie im vorherigen Abschnitt die intrinsische Metrik als

$$d_{\text{intr}}(x,y) := \sup\{\psi(x) - \psi(y) \mid \psi \in \mathcal{D}_{loc} \cap C(X), \mu^{(c)}_{<\psi,\psi>} \leq m\}.$$

Ist der Kern $k_t(x,y)$ stetig in x und y, so gilt

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}} \max(1, \lambda t)^{\frac{2}{\theta}} \, \mathrm{e}^{\lambda t} \, \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda} d_{\text{intr}}(x,y)}$$

und mit der Wahl $\lambda = \frac{d_{\text{intr}}(x,y)^2}{4t^2}$ auch

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}} \max\left(1, \frac{d_{\text{intr}}(x,y)^2}{4t}\right)^{\frac{2}{\theta}} \mathrm{e}^{-\frac{d_{\text{intr}}(x,y)^2}{4t}}.$$

Zum Beispiel gilt für den Kern der zum Laplaceoperator $-\triangle$ auf $\mathbb{R}^d$ assoziierten Halbgruppe

$$k_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Dieselben zwei Beispiele können auch für allgemeines μ formuliert werden:

Beispiel 5.1.13. Sei a_0 eine reguläre Dirichlet-Form und $\mu := \mu^+ - \mu^-$ erfülle die am Anfang des Kapitels genannten Voraussetzungen, $a := a_0 + \mu$, mit $a \geq -\gamma_a$. Sei weiter $\theta > 0$, $\delta \geq 0$ und $\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a_\delta(u,u)\|u\|_1^\theta$ für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1$. Sei ϕ zulässig mit $-\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \gamma m$. Es sei weiter $\mu^- \leq \frac{1}{n} a_0 + \beta(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(\beta(2^n))}{2^n} < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ (unabhängig von γ und ϕ), so dass

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}} \max(1, (1+\gamma+\delta)t)^{\frac{2}{\theta}} \, \mathrm{e}^{\gamma t} \, \mathrm{e}^{\gamma_a t} \, \phi(x)\phi^{-1}(y) \quad \text{f.ü.}$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst

$$-\Gamma_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \gamma \leq a + \gamma + \gamma_a$$

sowie die Ungleichung

$$\frac{1}{2} a_0 \leq a + \beta(2).$$

Setzt man $\lambda := \gamma + 1$ und $c(n) := \ln(n + \frac{\beta(2)}{2n} + \beta(4n))$, so gilt

$$\gamma + \frac{\beta(2)}{2n^2} + \frac{\beta(4n)}{n} \leq \frac{\lambda \, \mathrm{e}^{c(n)}}{n}.$$

Weiter errechnet man

$$\begin{aligned} -\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} &\leq \gamma - \frac{1}{n}\mu^- + \frac{1}{4n^2} a_0 + \beta(4n) \\ &\leq \gamma + \frac{n-1}{n^2} k' + \frac{1}{2n^2} a + \beta(2) + \beta(4n) \\ &\leq \frac{n-1}{n^2} k' + \frac{1}{2n^2} a + \frac{\lambda \, \mathrm{e}^{c(n)}}{n}. \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.1.10 folgt die Behauptung. □

Beispiel 5.1.14. Seien die Voraussetzungen wie in Beispiel 5.1.13 und sei $J = 0$. Ist der Kern $k_t(x, y)$ stetig in x und y, so gilt

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{2}{\theta}} \max\left(1, \frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4t} + t + \delta t\right)^{\frac{2}{\theta}} \mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4t}} \mathrm{e}^{\gamma_a t}.$$

Bemerkungen

Proposition 5.1.2 findet sich in ähnlicher, aber schwächerer Form bei [CKS87]. Dort sind die Bedingungen $a \geq 0$ und $\phi^2 \mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi^{-1},\phi^{-1}>} \leq \lambda$, sowie $\phi^{-2}\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi>} \leq \lambda$, was offensichtlich stärker als die Forderung in Proposition 5.1.2 ist.

Beispiel 5.1.3 ist aus [ERSZ06] übernommen. Die Beispiele 5.1.4, 5.1.5 und 5.1.6 wurden in der Literatur nicht gefunden. Auch wenn in vielen Fällen bereits bekannt ist, dass der Kern der Halbgruppe zu einem Dirichlet-Rand hin linear abfällt, so demonstriert Beispiel 5.1.6, wie Randbedingungen mit Davies' Methode kombiniert werden können.

Die Ungleichung in Lemma 5.1.9 wurde schon mit schwächeren Konstanten in dem Artikel [CKS87] gezeigt. Ein Satz ähnlich zu Proposition 5.1.10 findet sich in derselben Quelle. Dieser bezieht sich im wesentlichen auf die Situation von Beispiel 5.1.11 und liefert unter der stärkeren Voraussetzung

$$\phi^{-2}\,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi>} \leq \lambda^2\,\mathrm{d}m \text{ und } \phi^2\,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi^{-1},\phi^{-1}>} \leq \lambda^2\,\mathrm{d}m$$

die etwas schlechtere Abschätzung

$$0 \leq k_t(x,y) \leq C_\delta t^{-\frac{2}{\theta}}\,\mathrm{e}^{(\lambda+\delta)t}\,\phi(x)\phi^{-1}(y) \quad \text{f.ü.},$$

wobei $\delta > 0$ und C_δ eine von δ abhängige Konstante ist. Die wesentliche Verbesserung hier ist der zusätzliche Term $\frac{1}{2}a(u,u)$ in Voraussetzung (5.3), durch den die Kernabschätzung in Abschnitt 5.6 ermöglicht wird.

Für allgemeine Dirichlet-Formen findet sich Beispiel 5.1.11 in [CKS87] mit der stärkeren Voraussetzung

In [Dav87] findet sich Beispiel 5.1.11 bzw. 5.1.12 für Laplace-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten und Differentialoperatoren zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^n$. Dort allerdings hat die Abschätzung die leicht schwächere Form

$$0 \leq k_t(x,y) \leq C_\delta t^{-\frac{2}{\theta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4(1+\delta)t}}.$$

Die Definition der intrinsischen Metrik entstammt [Stu94]. Das Konzept wurde in [FLW10] auf nicht-lokale Dirichlet-Formen erweitert. Die intrinsischen Metriken für nicht-lokale Dirichlet-Formen sind aber für Halbgruppenabschätzungen wenig geeignet.

Die Stetigkeit des Kerns wird in verschiedenen Quellen in unterschiedlichen Kontexten erwähnt. Sie ergibt sich für viele bekannte Beispiele aus folgender Überlegung: Besitzt die Halbgruppe einen Kern, und ist $k_t(\cdot, x) \in L^2$ (um solch eine Eigenschaft nachzuweisen ist Beispiel 5.1.11 hilfreich), so folgt mit der Halbgruppeneigenschaft die Chapman-Kolmogoroff-Gleichung

$$k_{t+s}(\cdot, x) = \mathrm{e}^{-sA}\,k_t(\cdot, x)$$

(entsprechendes gilt für $k_t(x,\cdot)$ und die adjungierte Halbgruppe), und somit $k_{t+s}(\cdot,x) \in \mathcal{D}(a)$ (und sogar $k_{t+s}(\cdot,x) \in \mathcal{D}(A^n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$). Besitzen die Funktionen in $\mathcal{D}(a)$ stetige Repräsentanten, so folgt Stetigkeit unter den genannten Voraussetzungen also auch für den Kern.

Ist die negative Störung aus Beispiel 5.1.13 und 5.1.14 eine kleine Miyadera-Störung, so kann das Resultat auch mit [LVV06] erzielt werden.

5.2 Laplace Operator auf Gebieten

Differentialoperatoren zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^d$ spielen in der Physik eine sehr wichtige Rolle. In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Driftterme auf den Kern der Halbgruppe im homogenen Raum, d.h. der Koeffizient des Terms zweiter Ordnung ist konstant, betrachtet.

Sei X ein Gebiet im $\mathbb{R}^d$, $b_1, b_2 : X \to \mathbb{R}^d$ einmal differenzierbar und beschränkt, $c \in L^\infty(X)$ und $c \geq \max(\operatorname{div} b_1, \operatorname{div} b_2)$. Definiere

$$a(u,v) := (\nabla u, \nabla v) + (\nabla u, b_1 v) + (b_2 u, \nabla v) + (cu, v) \quad \mathcal{D}(a) := H_0^1(X).$$

Die Form a ist eine reguläre Dirichlet-Form in $L^2(X)$ (aber nicht notwendigerweise symmetrisch).

Beispiel 5.2.1. Seien b_1 und b_2 konstant sowie $c = 0$, so ergibt sich für den Kern der zugehörigen Halbgruppe

$$k_t(x,y) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \, \mathrm{e}^{-\frac{|x-y+(b_2-b_1)t|^2}{4t}} .$$

In der Tat errechnet man leicht, dass

$$u_t(x) := \int_X u_0(y) k_t(x,y) \, \mathrm{d}y$$

die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_t = \triangle u_t + \operatorname{div}(b_2 u_t) - \operatorname{div}(b_1 u_t) = -A u_t \quad (t > 0)$$

und

$$\lim_{t \to 0} u_t = u_0$$

für alle $u_0 \in L^1 \cap L^2$ erfüllt.

Für den allgemeinen Fall werden nun mit den bisher vorgestellten Methoden ähnliche Abschätzungen an den Kern der Halbgruppe bewiesen. Es erfolgen zunächst einige Zwischenresultate, die Kernabschätzung steht in Proposition 5.2.5.

Wie bisher, wird eine gestörte Form a_ϕ betrachtet: Sei $\psi \in C^2(X) \cap L^\infty$ mit beschränkter Ableitung. Dann ist $\phi := \mathrm{e}^\psi$ zulässig und es gilt

$$a_\phi(u,v) = a(u,v) + (c_1 u, v) + (u \nabla\psi, \nabla v) - (\nabla u, v \nabla\psi)$$

mit $c_1 := -|\nabla\psi|^2 + \langle\nabla\psi, b_1 - b_2\rangle$. a_ϕ kann auch folgendermaßen geschrieben werden

$$a_\phi(u,v) = (\nabla u, \nabla v) + (\nabla u, (b_1 - \nabla\psi)v) + ((b_2 + \nabla\psi)u, \nabla v) + ((c + c_1)u, v).$$

Um mit Proposition 4.3.5 Ultrakontraktivität nachzuweisen, benötigt man eine L^1-Schranke an die gestörte Halbgruppe und eine Nash-Ungleichung für die Form. Dies liefern die nächsten zwei Propositionen.

Proposition 5.2.2. *Sei*

$$|\nabla\psi|^2 + (\nabla\psi, b_2 - b_1) - \triangle\psi \leq \omega(\psi).$$

Dann gilt

$$\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} |_{L^1} \|_1 \leq \mathrm{e}^{\omega(\psi)t}.$$

Beweis. Sei $u \in C_c^1(X)$. Setze $u_1 := \frac{u}{|u| \vee 1}$ und $v_1 := |u| \vee 1 - 1$. Dann gilt $|u_1| = 1$ auf $\operatorname{supp} v_1$. Da für jede differenzierbare Funktion $y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ der Ausdruck $\mathrm{e}^{iy(x)} \cdot \nabla \mathrm{e}^{-iy(x)}$ rein imaginär ist, gilt

$$\Re(v_1 \nabla u_1, (b_1 - \nabla\psi)u_1) = 0,$$
$$\Re((b_2 + \nabla\psi)v_1 u_1, \nabla u_1) = 0$$

und

$$\Re(u_1 \nabla v_1, \nabla u_1) = 0.$$

Analog und mit partieller Integration folgt weiterhin

$$\Re(\nabla(v_1 u_1), b_1 u_1) = -(v_1, \operatorname{div} b_1).$$

Diese Gleichungen auf die verschiedenen Teile von a_ϕ angewendet ergibt unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned}
\Re a_\phi(v_1 u_1, u_1) &= \Re(\nabla v_1 u_1, \nabla u_1) + \Re(\nabla v_1 u_1, (b_1 - \nabla\psi)u_1) \\
&\quad + \Re((b_2 + \nabla\psi)v_1 u_1, \nabla u_1) + \Re((c + c_1)v_1 u_1, u_1) \\
&= \Re(v_1 \nabla u_1, \nabla u_1) + \Re(u_1 \nabla v_1, (b_1 - \nabla\psi)u_1) + \Re((c + c_1)v_1 u_1, u_1) \\
&= (v_1 \nabla u_1, \nabla u_1) + (\nabla v_1, b_1 - \nabla\psi) + (v_1, c + c_1) \\
&= (v_1 \nabla u_1, \nabla u_1) + (v_1, c + c_1 - \operatorname{div} b_1 + \triangle\psi)
\end{aligned}$$

und da $(v_1 \nabla u_1, \nabla u_1) \geq 0$ und ebenso $c - \operatorname{div} b_1 \geq 0$ ist, folgt

$$\geq ((c_1 + \triangle\psi)v_1 u_1, u_1).$$

Proposition 2.2.2 liefert nun die Behauptung. □

Proposition 5.2.3. *Es existiert eine Konstante $C_d > 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ gilt*

$$C_d \|u\|^{2+\theta} \|u\|_1^{-\theta} \leq \Re a_\phi(u,u) + \lambda(\psi)\|u\|^2$$

mit $\theta := \frac{4}{d}$ und $\lambda(\psi) := \operatorname{ess\,sup} |\nabla\psi|^2 + \langle\nabla\psi, b_2 - b_1\rangle$.

Beweis. Sei $u \in \mathcal{D}(a)$ und $\hat{u}$ die Fourier-Transformierte von u. Es ist

$$(\nabla u, \nabla u) = (2\pi)^2(|\xi|^2\hat{u}, \hat{u})$$

und somit gilt für $r > 0$

$$\begin{aligned}\|u\|^2 = (\hat{u}, \hat{u}) &\leq r^{-2}(|\xi|^2\hat{u}, \hat{u}) + \int\limits_{|\xi|\leq r} |\hat{u}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \\ &\leq r^{-2}(2\pi)^{-2}\|\nabla u\|^2 + B_1 r^d \|u\|_1^2,\end{aligned}$$

wobei B_1 das Volumen der Einheitskugel ist. Aus Lemma 4.3.7 folgt dann

$$\|u\|^{2+\theta} \leq C_d \|\nabla u\|^2 \|u\|_1^\theta$$

mit $\theta = \frac{4}{d}$. Weiter ist

$$\|\nabla u\|^2 \leq \Re a(u, u),$$

denn für $u \in C_c^1(X)$ gilt

$$\Re(\nabla u, b_1 u) = \frac{1}{2}(\nabla|u|^2, b_1) = -\frac{1}{2}(|u|^2, \operatorname{div} b_1) \geq -\frac{1}{2}(cu, u)$$

und entsprechendes für den b_2-Term. Zum Schluss gilt

$$\Re a(u, u) \leq \Re a_\phi(u, u) + \operatorname{ess\,sup}\left(|\nabla\psi|^2 + \langle\nabla\psi, b_2 - b_1\rangle\right)\|u\|^2$$

und somit folgt die Behauptung. □

Nun ist es einfach Ultrakontraktivität für die gestörte Halbgruppe zu beweisen:

Proposition 5.2.4. *Sei*

$$|\nabla\psi|^2 + \langle\nabla\psi, b_2 - b_1\rangle \leq \lambda(\psi)$$

und $|\triangle\psi| \leq 2\epsilon(\psi)$. *Dann gilt*

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq C_d\, t^{-\frac{d}{2}}\,\mathrm{e}^{(\lambda(\psi)+\epsilon(\psi))t}\,.$$

Beweis. a_ϕ^* erhält man aus a_ϕ durch Vertauschen von b_1 und b_2 und durch Ersetzen von ψ mit $-\psi$. Somit folgt mit Proposition 5.2.2, dass

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^1}\|_1 \leq \mathrm{e}^{(\lambda(\psi)+2\epsilon(\psi))t}$$

und

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^\infty}\|_\infty \leq \mathrm{e}^{(\lambda(\psi)+2\epsilon(\psi))t}\,.$$

Aus Proposition 5.2.3 und Proposition 4.3.5 folgt mit $\theta = \frac{4}{d}$

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,|_{L^1}\|_{1\to 2} \leq C_d\, t^{-\frac{1}{\theta}}\,\mathrm{e}^{(\lambda(\psi)+\epsilon(\psi))t}$$

und

$$\|\,\mathrm{e}^{-tA_\phi}\,\|_{2\to\infty} \leq C_d\, t^{-\frac{1}{\theta}}\,\mathrm{e}^{(\lambda(\psi)+\epsilon(\psi))t}\,.$$ □

Durch eine geschickte Wahl von ψ erhält man die folgende Kernabschätzung:

Proposition 5.2.5. *Sei $P \in \mathbb{R}^d$, $|P| = 1$, $\langle P, b_2 - b_1\rangle \leq b \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$k_t(x,y) \leq C_d\, t^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\langle x-y,P\rangle + bt)^2}{4t}}$$

für alle $x, y \in X$ und $t > 0$ mit $|b|t \leq \langle y - x, P\rangle$.

Beweis. Seien $\epsilon > 0$, $x_0, y_0 \in X$ mit $\langle y_0 - x_0, P\rangle \geq 0$ und $\alpha \geq 0$ beliebig. Wähle $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $0 \leq f' \leq 1$, $|f''| \leq \frac{2\epsilon}{\alpha}$, $\sup|f| < \infty$ und $f(s) = s$ auf dem Intervall $[\langle x_0, P\rangle, \langle y_0, P\rangle] \subset \mathbb{R}$.

Definiere $\psi(x) := \alpha f(\langle x, P\rangle)$. Dann ist $\psi(x_0) - \psi(y_0) = \alpha\langle x_0 - y_0, P\rangle$, $|\triangle\psi| \leq 2\epsilon$ und $\nabla\psi \in [0,\alpha] \cdot P$. Mit der vorherigen Proposition folgt

$$\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} \,|_{L^1}\|_{1\to\infty} \leq C_d\, t^{-\frac{2}{\theta}}\, \mathrm{e}^{(\lambda+\epsilon)t}$$

für $\lambda = \max_{p\in[0,\alpha]} p^2 + pb = (\alpha^2 + \alpha b)^+$ und $\theta = \frac{4}{d}$. Da der Kern k_t stetig ist, folgt mit Proposition 4.2.4 sogar

$$k_t(x_0,y_0) \leq C_d\, t^{-\frac{2}{\theta}}\, \mathrm{e}^{(\lambda+\epsilon)t}\, \mathrm{e}^{\alpha\langle x_0-y_0,P\rangle}.$$

Wähle nun $\alpha := -\frac{\langle x_0-y_0,P\rangle}{2t} - \frac{b}{2}$. Ist $|b|t \leq \langle y_0 - x_0, P\rangle$, so gilt $\alpha \geq b^-$ und somit $\lambda = \alpha^2 + \alpha b$. Nun errechnet man

$$\alpha\langle x_0 - y_0, P\rangle = -\frac{\langle x_0 - y_0, P\rangle^2}{2t} - \frac{b\langle x_0 - y_0, P\rangle}{2}$$

und

$$\begin{aligned}\lambda t = \alpha^2 t + \alpha b t &= \left(\frac{\langle x_0 - y_0, P\rangle}{2t} + \frac{b}{2}\right)^2 t - \frac{b\langle x_0 - y_0, P\rangle}{2} - \frac{b^2 t}{2} \\ &= \frac{\langle x_0 - y_0, P\rangle^2}{4t} + \frac{b\langle x_0 - y_0, P\rangle}{2} + \frac{b^2 t}{4} - \frac{b\langle x_0 - y_0, P\rangle}{2} - \frac{b^2 t}{2} \\ &= \frac{\langle x_0 - y_0, P\rangle^2}{4t} - \frac{b^2 t}{4}.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\lambda t + \alpha\langle x_0 - y_0, P\rangle = -\frac{(\langle x_0 - y_0, P\rangle + bt)^2}{4t}$$

und

$$k_t(x_0,y_0) \leq C_d\, t^{-\frac{2}{\theta}}\, \mathrm{e}^{\epsilon t}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\langle x_0-y_0,P\rangle+bt)^2}{4t}},$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig ist folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.2.6. Sei $b_2 - b_1$ konstant und wähle $P := \pm\frac{x-y+(b_2-b_1)t}{|x-y+(b_2-b_1)t|}$ (das Vorzeichen so gewählt, dass $\langle y - x, P\rangle \geq 0$ ist) und $b := \langle b_2 - b_1, P\rangle$. Dann gilt für alle $t > 0$

mit $3|b_2 - b_1|t \leq |x - y|$ die Ungleichung $|b|t \leq \langle y - x, P\rangle$. Einsetzen der Werte in die Abschätzung der Proposition liefert

$$k_t(x,y) \leq C_d\, t^{-\frac{d}{2}}\, \mathrm{e}^{-\frac{|x-y+(b_2-b_1)t|^2}{4t}}\,.$$

Mit dieser Proposition erhält man also für jedes $t > 0$ bis auf eine Konstante den in Beispiel 5.2.1 erwähnten Ausdruck als obere Schranke an den Kern der Halbgruppe (mit der globalen Abschätzung $k_t(x,y) \leq C_d\, t^{-\frac{d}{2}}$ für $|x-y|$ klein), d.h. diese Abschätzung ist scharf. Die Asymptotik für $|x-y|$ entspricht unabhängig von t bis auf eine Konstante dem in Beispiel 5.2.1 genannten Ausdruck.

Bemerkungen

Die Aussage, dass a (unter schwächeren Voraussetzungen an b_1, b_2 und c als den hier genannten) eine reguläre Dirichlet-Form ist, findet sich in [MR92, Abschnitt II.2 d)]. Proposition 5.2.2 ist eine geringfügige Modifikation dieser Aussage, der Beweis entsprechend ähnlich. Die Aussage und der Beweis von Proposition 5.2.3 ist allgemein bekannt.

Obere und untere Gauß-Abschätzungen an den Kern solcher Halbgruppen mit unterschiedlichen Konstanten im Exponenten wurden z.B. schon in [Zha97, Cho12] bewiesen, allerdings ohne konkrete Aussagen über den Einfluss der Driftterme b_1 und b_2 zu machen und ohne die Konstante im Exponenten explizit anzugeben. Abschätzungen an den Kern wie in Proposition 5.2.5 wurden in der Literatur nicht gefunden.

5.3 Dirichlet-Formen auf Graphen

Sei X eine abzählbare Menge und $m : X \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion auf X. Die Funktion m induziert ein Maß auf X durch

$$m(E) := \sum_{x\in E} m(x) \quad (E \subset X).$$

Wir betrachten nun Sesquilinearformen und ihre Halbgruppen in $\ell^2(X,m)$. Ein stetiger Operator $T : \ell^2 \to \ell^2$ lässt sich immer darstellen als Integraloperator

$$(Tu)(x) = \int_X k(x,y)u(y)\, m(\mathrm{d}y) = \sum_{y\in X} k(x,y)u(y)m(y)$$

und es gilt für die Operatornorm von $\mathbb{1}_x T \mathbb{1}_y$

$$\|\mathbb{1}_x T \mathbb{1}_y\| = |k(x,y)|\sqrt{m(x)m(y)}.$$

Die Matrixelemente von T sind

$$T(x,y) := (T\mathbb{1}_y)(x) = k(x,y)m(y).$$

So lassen sich Normabschätzungen leicht in Kernabschätzungen umrechnen und umgekehrt.

Man betrachte nun eine symmetrische, irreflexive Relation $\sim$ auf X. Die Menge mit Relation $(X, \sim)$ heißt ein *einfacher Graph*. Falls $x \sim y$ ist, so heißen x und y *Nachbarn*. Eine Funktion $\gamma : \{0, \dots, n\} \to X$ heißt ein *Weg* von $\gamma(0)$ nach $\gamma(n)$ (kurz $\gamma : \gamma(0) \rightsquigarrow \gamma(n)$), wenn $\gamma(i-1) \sim \gamma(i)$ für jedes $1 \leq i \leq n$. $l(\gamma) := n$ heißt die *Länge* des Weges γ. Der Ausdruck $\deg(x) := |\{y \in X \mid y \sim x\}|$ heißt der *Knotengrad* von x. Die Graphenmetrik $d_g(x, y)$ wird definiert als die Länge des kürzesten Weges zwischen den Punkten x und y. Sie induziert die diskrete Topologie auf X. Eine symmetrische Funktion $w : X^2 \to [0, \infty]$ heißt Kantengewicht und

$$d_w(x, y) := \inf_{\gamma : x \rightsquigarrow y} \sum_{i=1}^{l(\gamma)} w(\gamma(i-1), \gamma(i))$$

die *gewichtete Graphenmetrik (bezüglich w)*. d_w ist die größte Halbmetrik, die $d_w(x, y) \leq w(x, y)$ für alle $x \sim y$ erfüllt.

Sei $b : X^2 \to [0, \infty)$ eine symmetrische Funktion mit $b(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x \nsim y$ und

$$b(x) := \sum_{y \in X} b(x, y) < \infty$$

für alle $x \in X$, und sei $c : X \to [0, \infty)$. Dann definiert

$$a(u, v) := \sum_{x,y \in X} b(x, y)(u(x) - u(y))(v(x) - v(y)) + \sum_{x \in X} c(x) u(x) \overline{v(x)}$$

$$\mathcal{D}(a) := \overline{\{u : X \to \mathbb{R} \mid \operatorname{supp} u \text{ endlich } \}}^{a_1} \subset \ell^2(X, m)$$

eine reguläre Dirichlet-Form in $\ell^2(X, m)$. Das Sprungmaß ergibt sich als

$$J(\{(x, y)\}) = b(x, y).$$

Sei $\phi = \mathrm{e}^{\psi}$ eine zulässige Funktion. Dann ist

$$-\mathrm{d}\Gamma(\phi, \phi^{-1})(\{(x, y)\}) = b(x, y) \left(\mathrm{e}^{\psi(x) - \psi(y)} + \mathrm{e}^{\psi(y) - \psi(x)} - 2\right). \tag{5.4}$$

Proposition 5.3.1. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und w ein Kantengewicht mit*

$$\sum_{x,y \in X} u(x) \overline{u(y)} b(x, y) \left(\mathrm{e}^{w(x,y)} + \mathrm{e}^{-w(x,y)} - 2\right) \leq a(u, u) + \lambda \|u\|^2 \tag{5.5}$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a)$. Dann ist für $E, F \subset X$

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{-d_w(E,F)} \, \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Beweis. Definiere $\psi(x) := d_w(E, x) \wedge d_w(E, F)$, $\phi := \mathrm{e}^{\psi}$, $d_w(E, F)$ der minimale Abstand von E und F. ψ ist Lipschitz-stetig bezüglich d_w mit Lipschitz-Konstante 1. Somit ist mit (5.4) und (5.5)

$$-\mathrm{d}\Gamma(\phi, \phi^{-1}) \leq a + \lambda$$

erfüllt und mit Proposition 5.1.2 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.3.2. Die inverse Funktion zu $x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$ auf $[0, \infty)$ ist die Funktion $x \mapsto \ln\left(1 + \sqrt{x + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\right)$. Dies wird in den nächsten Beispielen benutzt.

Beispiel 5.3.3. Sei

$$\Phi(x,y) := \min\left(\frac{\lambda m(x) + c(x)}{b(x)}, \frac{\lambda m(y) + c(y)}{b(y)}\right),$$

mit $\lambda \geq 0$. Da mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Symmetrie von Φb

$$\begin{aligned}\sum_{x,y\in X} u(x)\overline{u(y)}\Phi(x,y)b(x,y) &\leq \sum_{x,y\in X} |u(x)|^2\Phi(x,y)b(x,y) \leq \sum_{x\in X}|u(x)|^2 \sum_{y\in X}\Phi(x,y)b(x,y)\\ &\leq \sum_{x\in X}|u(x)|^2(\lambda m(x) + c(x)) \leq a(u,u) + \lambda(u,u)\end{aligned}$$

gilt folgt nun auch

$$\|\mathbb{1}_E\, \mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \sup_{\substack{x\in E, y\in F\\ \gamma: x\rightsquigarrow y}} \prod_{i=1}^{l(\gamma)} \frac{1}{1 + f(\Phi(\gamma(i-1),\gamma(i)))}$$

mit $f(x) := \sqrt{x + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2} \geq \max(\sqrt{x}, x)$.

Unter der Voraussetzung, dass $Cb(x) \leq m(x)$ für alle $x \in X$ ist, kann dieses Resultat mit der Wahl $\lambda := \frac{d_g(E,F)}{t}$ weiter abgeschätzt werden zu

$$\|\mathbb{1}_E\, \mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_F\| \leq \left(\frac{t\,\mathrm{e}}{C d_g(E,F)}\right)^{d_g(E,F)}.$$

Beispiel 5.3.4. Sei

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{b(x,y)} \min\left(\frac{\lambda m(x) + c(x)}{\deg(x)}, \frac{\lambda m(y) + c(y)}{\deg(y)}\right)$$

mit $\lambda \geq 0$. Analog zu Beispiel 5.3.3 zeigt man wieder

$$\|\mathbb{1}_E\, \mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \sup_{\substack{x\in E, y\in F\\ \gamma: x\rightsquigarrow y}} \prod_{i=1}^{l(\gamma)} \frac{1}{1 + f(\Phi(\gamma(i-1),\gamma(i)))}$$

Unter der Voraussetzung, dass $C\deg(x) \leq m(x)$ für alle $x \in X$ ist, kann dieses Resultat mit der obigen Wahl $\lambda := \frac{d_g(E,F)}{t}$ weiter abgeschätzt werden zu

$$\|\mathbb{1}_x\, \mathrm{e}^{-tA}\, \mathbb{1}_y\| \leq \mathrm{e}^{d_g(x,y)} \sup_{\gamma: x\rightsquigarrow y} \prod_{i=1}^{l(\gamma)} \frac{t b(\gamma(i-1,i))}{C d_g(x,y)}.$$

Das nächste Beispiel ist vor allem für Bäume, d.h. Graphen, für die alle Wege von x nach x sich selbst überschneiden, nützlich:

Beispiel 5.3.5. Seien $E, F \subset X$ und setze voraus, dass genau ein Weg γ von E nach F existiert, der weder sich selbst überschneidet, noch durch E oder F verläuft, der also folgendes erfüllt:
$\gamma(0) \in E$, $\gamma(l(\gamma)) \in F$, $\gamma(i) \neq \gamma(j)$ für $i \neq j$ und $\gamma(i) \notin E \cup F$ für $1 \leq i < l(\gamma)$.

Setze $n := l(\gamma)$. Entfernt man alle Kanten von γ aus dem Graphen $(X, \sim)$, so zerfällt er in mindestens $n+1$ Zusammenhangskomponenten. Die Komponente, die $\gamma(i)$ enthält wird mit $X_{\gamma(i)}$ bezeichnet. Die Mengen $X_{\gamma(i)}$, $0 \leq i \leq n$ haben also die folgenden Eigenschaften:
$\gamma(i) \in X_{\gamma(i)}$ für alle $0 \leq i \leq n$, $\bigcup_{i=0}^{n} X_{\gamma(i)} \subset X$, $X_{\gamma(i)} \cap X_{\gamma(j)} = \emptyset$ für $i \neq j$ und wenn $x \in X_{\gamma(i)}$ und $x \sim y$ dann gilt auch $y \in X_{\gamma(i)} \cup \{\gamma(i-1), \gamma(i+1)\}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und δ_i^λ die λ-Kapazität von $\gamma(i)$ in $X_{\gamma(i)}$, die folgendermaßen definiert wird:

$$\begin{aligned}\delta_i^\lambda &:= \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}(a) \\ u(\gamma(i))=1}} a(u,u)|_{X_{\gamma(i)}} + \lambda(u,u)|_{X_{\gamma(i)}} \\ &:= \inf_{\substack{u \in \mathcal{D}(a) \\ u(\gamma(i))=1}} \sum_{x,y \in X_{\gamma(i)}} b(x,y)|u(x)-u(y)|^2 + \sum_{x \in X_{\gamma(i)}} (c(x)+\lambda m(x))|u(x)|^2.\end{aligned}$$

Setze $\Phi(\gamma(i-1), \gamma(i)) := \Phi_i$, $\Phi(\gamma(i), \gamma(i-1)) := \Phi_i$ mit $\Phi_i \geq 0$, und setze $\Phi(x,y) = 0$ sonst. Definiere weiterhin $b_i := b(\gamma(i-1), \gamma(i))$ und $u_i := u(\gamma(i))$.

Sei $M(\Phi)$ die Tridiagonalmatrix

$$M(\Phi) := \begin{pmatrix} \delta_0^\lambda & -b_1\Phi_1 & & & \\ -b_1\Phi_1 & \delta_1^\lambda & -b_2\Phi_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \delta_{n-1}^\lambda & -b_n\Phi_n \\ & & & -b_n\Phi_n & \delta_n^\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & & & \\ -b_1 & b_1+b_2 & -b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -b_{n-1} & b_{n-1}+b_n & -b_n \\ & & & -b_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Ist $M(\Phi)$ positiv-semidefinit, so gilt für alle $u \in \mathcal{D}(a)$

$$\begin{aligned}\sum_{x,y \in X} u(x)\overline{u(y)}\Phi(x,y)b(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} (u_{i-1}\overline{u_i} + u_i\overline{u_{i-1}})\Phi_i b_i \\ &\overset{M(\Phi)\geq 0}{\leq} \sum_{i=0}^{n} |u_i|^2\delta_i^\lambda + \sum_{i=1}^{n} |u_{i-1}-u_i|^2 b_i \\ &\leq \sum_{x,y \in X} |u(x)-u(y)|^2 b(x,y) + \sum_{x \in X} (c(x)+\lambda m(x))|u(x)|^2 \\ &= a(u,u) + \lambda\|u\|^2,\end{aligned}$$

denn es gilt

$$|u_i|^2\delta_i^\lambda \leq \sum_{x,y \in X_{\gamma(i)}} b(x,y)|u(x)-u(y)|^2 + \sum_{x \in X_{\gamma(i)}} (c(x)+\lambda m(x))|u(x)|^2.$$

Also erhält man, falls $M(\Phi)$ positiv-semidefinit ist, wie in den ersten beiden Beispielen, die Abschätzung

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + f(\Phi_i)}$$

mit $f(x) := \sqrt{x + \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}$.

Sind die $\delta_i^\lambda \geq 0$, $0 \leq i \leq n$ und wählt man $\Phi_i := \frac{\min(\delta_i^\lambda, \delta_{i-1}^\lambda)}{2b_i}$ für $1 \leq i \leq n$, so ist $M(\Phi)$ offensichtlich positiv-semidefinit und somit gilt

$$\|\mathbb{1}_E \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_F\| \leq \mathrm{e}^{\lambda t} \prod_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{2b_i + \min(\delta_i^\lambda, \delta_{i-1}^\lambda)}.$$

Bemerkung 5.3.6. Die Werte δ_i^λ lassen sich für konkrete Wahlen von X recht gut approximativ bestimmen. Sind $c \equiv 0$ und $\lambda < 0$, so kann trotzdem $\delta_i^\lambda > 0$ gelten.

Bemerkungen

Die Proposition 5.3.1 kann als generische Abschätzung verstanden werden. Durch die passende Wahl von w bzw. Φ in den Beispielen 5.3.3 und 5.3.4 lassen sich die für Graphen bisher bekannten Halbgruppenabschätzungen, die teilweise auf ganz anderem Wege bewiesen wurden, rekonstruieren:

Das letzte Resultat in Beispiel 5.3.3 wurde bereits in [Dav93] ebenfalls mit Davies' Methode gezeigt.

Das letzte Resultat aus Beispiel 5.3.4 ist ähnlich zur oberen Abschätzung in [MS00], welche lautet

$$\|\mathbb{1}_x \, \mathrm{e}^{-tH} \, \mathbb{1}_y\| \leq \mathrm{e}^{b_{max} C^{-1} t + 1} \left(\frac{\mathrm{e}\, b_{max} t}{C d_g(x,y)} \right)^{d_g(x,y)} \sup_{\gamma : x \rightsquigarrow y} \prod_{i=1}^{l(\gamma)} \frac{b(\gamma(i-1), i))}{b_{max}}$$

unter den Bedingungen, dass $m \equiv 1$ und $b \leq b_{max}$. Das Resultat in [MS00] wurde mit stochastischen Methoden bewiesen.

Die ersten Resultate in den Beispielen 5.3.3 und 5.3.4, bei denen insbesondere der positive Einfluss des Potentials c auf den Abfall der Halbgruppe sichtbar wird, sowie die Resultate aus Beispiel 5.3.5 wurden in der Literatur nicht gefunden.

Die bekannten Halbgruppenabschätzungen beachten nur die lokale Struktur von Graphen, die globale Struktur des Graphen wird in den bekannten Abschätzungen alleine durch eine untere Schranke an die Form a repräsentiert. Beispiel 5.3.5 zeigt, dass sich mit Proposition 5.3.1 auch Abschätzungen erzielen lassen, die die lokal-globale Struktur beachten, denn die Werte δ_i^λ repräsentieren einerseits eine globale Eigenschaft der entsprechenden Untergraphen, beziehen sich aber andererseits nicht auf den ganzen Graphen, sondern nur auf einen zum entsprechenden Knoten gehörenden Teilgraphen.

Die Werte δ_i^λ hängen stark mit stochastischen Eigenschaften zusammen: Ist $c \equiv 0$, so gilt $\delta_i^0 = 0$ genau dann, wenn der entsprechende Teilgraph rekurrent ist. Dies folgt aus [Ōsh92, Corollary 2.4], das besagt, dass X rekurrent ist genau dann, wenn eine Folge $u_n \in \mathcal{D}(a)$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} a(u_n, u_n) = 0$ und $u_n(x) \to 1$ für alle $x \in X$.

Alle im Beispiel 5.3.5 angegebenen Abschätzungen sind scharf, d.h. wenn die Voraussetzung von Proposition 5.3.1 erfüllt ist, so ist $M(\Phi)$ positiv-semidefinit. Also liefert die in diesem Beispiel angegebene Abschätzung optimiert über $M(\Phi)$ positiv-semidefinit die beste Abschätzung, die mit Proposition 5.3.1 erzielt werden kann. Somit zeigt Beispiel 5.3.5 auch die Grenzen von Proposition 5.3.1 auf.

Gemäß [KL09] haben alle regulären Dirichlet-Formen auf abzählbaren Mengen mit der diskreten Topologie die hier angegebene Gestalt.

Für symmetrische Dirichlet-Formen auf Graphen gibt Pang [Pan93] unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen und der Annahme, dass eine log-Sobolev-Ungleichung erfüllt ist, obere Abschätzungen an den Wärmeleitungskern an. Solche Abschätzungen lassen sich ebenfalls mit den hier vorgestellten Methoden erzielen (siehe z.B. der nächste Abschnitt).

5.4 Kernabschätzungen für Formen auf diskreten Mengen

Sei X wie im letzten Beispiel abzählbar. Hier werden nun allgemeinere Sesquilinearformen betrachtet und – unter der Zusatzvoraussetzung einer Nash-Ungleichung – Kernabschätzungen gezeigt.

Es seien $c : X \to \mathbb{C}$, $b : X^2 \to \mathbb{C}$ mit $b(x,x) = 0$ für alle $x \in X$ und $\mathcal{D}(a)$ so gewählt, dass

$$a(u,v) = \sum_{x\in X} c(x)u(x)\overline{v(x)} + \sum_{x,y\in X} b(x,y)u(y)\overline{v(x)}$$

eine dicht definierte, sektorielle, abgeschlossene Form definiert. Eine große Klasse solcher Formen sind Dirichlet-Formen auf Graphen, die im letzten Abschnitt behandelt wurden. Hier wird nun auf Eigenschaften und Halbgruppenabschätzungen dieser allgemeineren Formen eingegangen.

Die Bedingungen für Positivitätserhaltung, L^1- und L^∞-Kontraktivität lassen sich leicht mit den Charakterisierungen aus Kapitel 2 angeben:

- Ist $b \leq 0$, c reell und für $u \in \mathcal{D}(a)$ ist auch $(\Re u)^+ \in \mathcal{D}(a)$, so ist e^{-tA} positivitätserhaltend.
- Ist $\sum_{y\in X} |b(x,y)| \leq \Re c(x)$ für alle $x \in X$, und für $u \in \mathcal{D}(a)$ ist auch $\frac{u}{|u|\vee 1} \in \mathcal{D}(a)$, so ist e^{-tA} L^∞-kontraktiv.
- Ist $\sum_{x\in X} |b(x,y)| \leq \Re c(y)$ für alle $y \in X$, und für $u \in \mathcal{D}(a)$ ist auch $\frac{u}{|u|\vee 1} \in \mathcal{D}(a)$, so ist e^{-tA} L^1-kontraktiv.

Für Dirichlet-Formen auf Graphen sind diese Eigenschaften natürlich alle erfüllt.

Definiere $c_\infty(x) := \sum_{y\in X} |b(x,y)|$ und $c_1(y) := \sum_{x\in X} |b(x,y)|$ und setze nun voraus, dass für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ auch $\frac{u}{|u|\vee 1} \in \mathcal{D}(a)$ ist. Welche Wahlen von ϕ in der nächsten Proposition günstig sind, hängt stark von der Form a ab, so dass dies hier nicht konkretisiert werden kann. Für ϕ konstant (und $\omega(\phi) = 0$) liefert die Proposition die globale Abschätzung an den Kern der Halbgruppe.

Proposition 5.4.1. *Sei ϕ zulässig,* $\max(c_\infty, c_1) \leq \Re c$, $\theta > 0$ *und* $\omega(\phi) \geq 0$. *Ferner gelte*

$$\sum_{y\in X} |b(x,y)| \left|\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right| \leq \omega(\phi) m(x) \quad (x \in X),$$

$$\sum_{x\in X} |b(x,y)| \left|\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right| \leq \omega(\phi) m(y) \quad (y \in X),$$

und

$$\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a(u,u) \|u\|_1^\theta \quad (u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1(X)).$$

Dann gilt für den Kern k_t der zu a assoziierten Halbgruppe

$$|k_t(x,y)| \leq \left(\frac{2}{\theta t}\right)^{\frac{2}{\theta}} \mathrm{e}^{\omega(\phi)t} \frac{\phi(x)}{\phi(y)}$$

für alle $t > 0$, $x, y \in X$.

Beweis. Es gilt

$$a_\phi(u,v) = a(\phi u, \phi^{-1} v) = \sum_{x\in X} c(x) u(x) \overline{v(x)} + \sum_{x,y\in X} b(x,y) \frac{\phi(y)}{\phi(x)} u(y) \overline{v(x)}.$$

Aus der Voraussetzung folgt

$$\sum_{y\in X} |b(x,y)| \frac{\phi(y)}{\phi(x)} \leq \omega(\phi) m(x) + c_\infty(x) \leq \omega(\phi) m(x) + \Re c(x)$$

und analog

$$\sum_{x\in X} |b(x,y)| \frac{\phi(y)}{\phi(x)} \leq \omega(\phi) m(y) + c_1(y) \leq \omega(\phi) m(y) + \Re c(y).$$

Somit ist $\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} |_{L^\infty} \|_\infty \leq \mathrm{e}^{\omega(\phi)t}$ und $\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} |_{L^1} \|_1 \leq \mathrm{e}^{\omega(\phi)t}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{x,y\in X} b(x,y) \left(1 - \frac{\phi(y)}{\phi(x)}\right) u(y) \overline{u(x)} \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{x,y\in X} |b(x,y)| \left|\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right| |u(y)|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{x,y\in X} |b(x,y)| \left|\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right| |u(x)|^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{y\in X} \omega(\phi) m(y) |u(y)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x\in X} \omega(\phi) m(x) |u(x)|^2 \\
&= \sum_{x\in X} \omega(\phi) m(x) |u(x)|^2.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung schlussfolgert man

$$\Re a(u,u) \leq \Re a_\phi(u,u) + \omega(\phi)\|u\|^2,$$

und weiterhin

$$\|u\|^{2+\theta} \leq (\Re a_\phi(u,u) + \omega(\phi)\|u\|^2)\|u\|_1^\theta.$$

Zuletzt folgt mit Proposition 4.3.5, unter Anwendung der Halbgruppeneigenschaft und der Adjungierten (vergleiche die entsprechenden Argumente in Proposition 5.1.10), dass

$$\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} |_{L^1} \|_{1\to\infty} \leq \left(\frac{2}{\theta t}\right)^{\frac{2}{\theta}} \mathrm{e}^{\omega(\phi)t}$$

gilt, und somit folgt auch die Behauptung. □

Bemerkung 5.4.2. Der Ausdruck $\sum_{y\in X} b(x,y)\left(\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right)$ ist als diskretes Analogon zu dem Ausdruck $|\nabla\psi|^2 + \triangle\psi$ aus Proposition 5.2.2 zu sehen (dort eigentlich $|\nabla\psi|^2 - \triangle\psi$, aber ein Vorzeichenwechsel von ψ führt zum Plus): Mit $\phi := \mathrm{e}^\psi$ und der Produktregel ist

$$|\nabla\psi|^2 + \triangle\psi = \phi^{-1}\triangle\phi.$$

Ist umgekehrt L der diskrete Laplace-Operator mit Gewicht b, also

$$(Lu)(x) := \sum_{y\in X} b(x,y)(u(y) - u(x)),$$

so gilt

$$(\phi^{-1}L\phi)(x) = \sum_{y\in X} b(x,y)\left(\frac{\phi(y)}{\phi(x)} - 1\right).$$

Die Beträge um die Ausdrücke sind in Proposition 5.4.1 notwendig, da außerhalb des Kontextes positivitätserhaltender Halbgruppen die Vorzeichen nicht klar sind. Wäre die Halbgruppe positivitätserhaltend, könnte man im entsprechenden Beweis $u \geq 0$ annehmen.

5.5 Polynomiell fallende Sprungkerne

Nun folgt ein Anwendungsbeispiel für Korollar 2.1.11. Dieses Störungsresultat wird hier angewendet um a_μ durch $a_{\tau,\mu}$ für eine geschickte Wahl $\tau < \infty$ abzuschätzen. Die erzielte Kernabschätzung steht in Proposition 5.5.5. Zunächst die Definitionen:

Sei $X = \mathbb{R}^d$, $0 < \alpha < 2$ und

$$a_\tau(u,v) := \int\limits_{|x-y|<\tau} (u(x) - u(y))\overline{(v(x) - v(y))}\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^{d+\alpha}},$$

$$\mathcal{D}(a_\tau) := \{u \in L^2 \mid a_\tau(u,u) < \infty\}.$$

Weiter definiert man die Form a über $a := a_\infty$ und $\mathcal{D}(a) := \mathcal{D}(a_\infty)$. Die Formen a und a_τ sind reguläre Dirichlet-Formen.

Sei $\tau_0 > 0$ und seien μ^+ und μ^- Cap-stetig bezüglich a_{τ_0}. Dann sind μ^+, μ^- auch Cap-stetig bezüglich a_τ für jedes $\tau_0 \le \tau \le \infty$. Setze weiter voraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mu^- \le \frac{1}{n} a_{\tau_0} + \beta(n),$$

wobei $\beta : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(\beta(2^n)\vee 1)}{2^n} < \infty$ ist. Definiere $\mu := \mu^+ - \mu^-$ und

$$a_{\tau,\mu} := a_\tau + \mu, \quad a_\mu := a + \mu$$

wie in Abschnitt 3.2. Weiter sei vorausgesetzt, dass zwei Konstanten $C, \omega \ge 0$ existieren, so dass $\| \mathrm{e}^{-tA_\mu} \|_1 \le C\, \mathrm{e}^{\omega t}$ und $\| \mathrm{e}^{-tA_{\tau,\mu}} \|_\infty \le C\, \mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t > 0$ und alle $\tau \ge \tau_0$.

Es folgen nun erst einige Zwischenresultate. Das erste ist eine Nash-Ungleichung für a_τ. Ist $\tau \ge \tau_0$ so folgt damit auch eine Nash-Ungleichung für $a_{\tau,\mu}$, denn es gilt $\frac{1}{2} a_\tau \le a_{\tau,\mu} + \beta(2)$.

Proposition 5.5.1. *Sei $\tau > 0$ und $u \in \mathcal{D}(a_\tau) \cap L^1$. Dann gilt*

$$\|u\|^{2+2\frac{\alpha}{d}} \le C_{\alpha,d}(a_\tau(u,u) + C_d \tau^{-\alpha} \|u\|^2) \|u\|_1^{2\frac{\alpha}{d}}.$$

Beweis. Sei $B_r(x)$ die Kugel um x mit Radius r. Definiere für $r > 0$

$$u_r(x) := \frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)} u(y)\, \mathrm{d}y.$$

Dann gilt

$$\|u_r\|_\infty \le \frac{1}{|B_r(x)|} \|u_r\|_1$$

und

$$\|u_r\|_1 \le \|u\|_1,$$

also auch

$$\|u_r\|_2^2 \le \|u_r\|_\infty \|u_r\|_1 \le \frac{1}{|B_r(x)|} \|u\|_1^2.$$

Zweitens gilt für $0 < r \le \tau$ und C_d dem Volumen der Einheitskugel

$$\begin{aligned}
\|u - u_r\|_2^2 &= \int\limits_X \left| \frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_{B_r(x)} (u(x) - u(y))\, \mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{|B_r(x)|} \int\limits_X \int\limits_{B_r(x)} |u(x) - u(y)|^2\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{|B_r(x)|} r^{d+\alpha} a_\tau(u,u) \\
&= C_d^{-1} r^\alpha a_\tau(u,u).
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\|u\|_2^2 \leq 2\|u_r\|_2^2 + 2\|u - u_r\|_2^2$$

und somit

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{2}{C_d} r^{-d} \|u\|_1^2 + \frac{2r^\alpha}{C_d} a_\tau(u,u)$$

für alle $0 < r \leq \tau$. Dann gilt auch

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{2}{C_d} r^{-d} \|u\|_1^2 + \frac{2r^\alpha}{C_d} (a_\tau(u,u) + \frac{C_d}{2} \tau^{-\alpha} \|u\|^2)$$

für alle $r > 0$ und mit Lemma 4.3.7 folgt die Behauptung. □

Lemma 5.5.2. *Für $0 < \alpha < 2$ und $y > 0$ gilt*

$$\int_0^y \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{x^{1+\alpha}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{2-\alpha} y^{-\alpha} (\mathrm{e}^y - 1).$$

Beweis. Mit Hilfe der Taylor-Reihe und des Vertauschungssatzes errechnet man

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{x^{1+\alpha}} \,\mathrm{d}x &= \int_0^y \sum_{n=1}^\infty \frac{2x^{2n}}{x^{1+\alpha}(2n)!} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_0^y \frac{2x^{2n-\alpha-1}}{(2n)!} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{2y^{2n-\alpha}}{(2n-\alpha)(2n)!} \\
&\leq \frac{2}{2-\alpha} y^{-\alpha} \sum_{n=1}^\infty \frac{y^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{2}{2-\alpha} y^{-\alpha} (e^y - 1).
\end{aligned}$$

□

Diese Proposition liefert eine Abschätzung an das Energiemaß $-\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>}$.

Proposition 5.5.3. *Sei $\psi \in L^\infty$ mit $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \lambda |x-y|$. Es existiert eine Konstante $C_{\alpha,d}$, so dass $\phi := \mathrm{e}^\psi$ zulässig ist und dass gilt*

$$-\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq C_{\alpha,d} \tau^{-\alpha} (\mathrm{e}^{\lambda\tau} - 1) \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Mit dem vorherigen Lemma errechnet man mit C_d der Oberfläche der d-dimensionalen Einheitskugel für die Dichte des Energiemaßes $\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>}$

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} &= \int_{|y-x| \leq \tau} \frac{\mathrm{e}^{\psi(x)-\psi(y)} + \mathrm{e}^{\psi(y)-\psi(x)} - 2}{|x-y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}y \leq C_d \int_0^\tau \frac{\mathrm{e}^{\lambda r} + \mathrm{e}^{-\lambda r} - 2}{r^{d+\alpha}} r^{d-1} \,\mathrm{d}r \\
&= C_d \lambda^{\alpha+1} \int_0^{\lambda\tau} \frac{\mathrm{e}^r + \mathrm{e}^{-r} - 2}{r^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}r}{\lambda} \leq C_d \frac{2}{2-\alpha} \tau^{-\alpha} (\mathrm{e}^{\lambda\tau} - 1).
\end{aligned}$$

□

Hieraus ergibt sich eine Abschätzung an den Kern der zu $a_{\tau,\mu}$ assoziierten Halbgruppe.

Proposition 5.5.4. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für den Kern $k_t^{\tau,\mu}$ der zu $a_{\tau,\mu}$ assoziierten Halbgruppe*

$$0 \leq k_t^{\tau,\mu}(x,y) \leq Ct^{-\frac{d}{\alpha}} \max(1, t+\tau^{-\alpha}|x-y|^\alpha)^{\frac{d}{\alpha}} \, \mathrm{e}^{C\tau^{-\alpha}|x-y|^\alpha} \, \mathrm{e}^{\beta(1)t} \left(\frac{t}{|x-y|^\alpha}\right)^{\frac{|x-y|}{\tau}} \quad \textit{f.ü.}$$

für alle $x \neq y$, $t > 0$ und $\tau \geq \tau_0$ gilt.

Beweis. Benutze Beispiel 5.1.13. Es ist $a_{\tau,\mu} \geq -\beta(1)$. Hiermit erhält man

$$0 \leq k_t^{\tau,\mu}(x,y) \leq Ct^{-\frac{d}{\alpha}} \max(1, (1+\gamma+\delta)t)^{\frac{d}{\alpha}} \, \mathrm{e}^{\gamma t} \, \mathrm{e}^{\beta(1)t} \, \mathrm{e}^{-\lambda|x-y|} \quad \text{f.ü.}$$

mit $\gamma = C\tau^{-\alpha}(e^{\lambda\tau}-1)$, $\delta = \beta(2)+C_d\tau^{-\alpha}$ und einer passenden Konstanten C groß genug. Wählt man $\lambda := \frac{\ln\left(\frac{|x-y|^\alpha}{t}\right)}{\tau}$, so erhält man die Behauptung. □

Nun folgt die Abschätzung des Kerns der zu a_μ assoziierten Halbgruppe.

Proposition 5.5.5. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für den Kern k_t^μ der Halbgruppe von a_μ gilt*

$$0 \leq k_t^\mu(x,y) \leq C \, \mathrm{e}^{\omega t} \, \mathrm{e}^{\beta(1)t}(1+t)^{\frac{d}{\alpha}} \frac{t}{|x-y|^{\alpha+d}} \quad \textit{f.ü.}$$

für alle $|x-y| \geq \frac{\alpha+d}{\alpha}\tau_0$ und $t > 0$, und

$$0 \leq k_t^\mu(x,y) \leq C\left(\frac{1}{t}+\omega\right)^{\frac{d}{\alpha}} \quad \textit{f.ü.}$$

für alle $t > 0$.

Beweis. Für die erste Ungleichung benutze die vorherige Proposition mit der Wahl $\tau := \frac{\alpha}{\alpha+d}|x-y|$ und Korollar 2.1.11 (eine Rechnung zeigt, dass die Bedingungen in diesem Korollar mit $C_b = \tau^{-\alpha-d}$ erfüllt sind). Die zweite Ungleichung folgt aus Proposition 4.3.5. □

Bemerkungen

Für $\mu^- = 0$ wurden diese Kernabschätzungen mit den hier verwendeten Methoden bereits in [CK08] bewiesen. Dort finden sich alle hier genannten Sätze, mit Ausnahme der Verallgemeinerung auf $\mu^- \neq 0$, für die das Störungsresultat Korollar 2.1.11 nötig ist. Der Artikel [CK08] zeigt auch, wie diese Methoden auf viel allgemeinere Formen angewendet werden können. Hier wurde der Kürze wegen dieses sehr konkrete Beispiel genannt.

Die hier genannte Verallgemeinerung kann auch aus den Abschätzungen für $\mu^- = 0$ in [CK08] und den Störungsresultaten in [SV96] erzielt werden. Die hier genannte Methode, insbesondere Korollar 2.1.11 lässt sich aber auch auf Formen anwenden, die nicht in den Kontext von [SV96] passen, z.B. nicht symmetrische Formen.

In [CKS10] wird für $\mu^- = 0$ und der Einschränkung der Form auf Gebiete des $\mathbb{R}^d$ eine zweiseitige Abschätzung mit probabilistischen Methoden bewiesen.

5.6 Eine singuläre Diffusion auf $\mathbb{R}$

Hier wird nun nochmal eine sehr konkrete reguläre Dirichlet-Form betrachtet und Halbgruppenabschätzungen bewiesen. Das neue an diesem Beispiel ist, dass das Energiemaß singulär ist. Dieses Beispiel beschreibt eine Diffusion auf $\mathbb{R}$, die Löcher enthält, deren Endpunkte miteinander verknüpft sind. Derartige Formen und ihre Operatoren werden u.a. in [KKVW09, SV] betrachtet. Es wird eine Normabschätzung und eine Kernabschätzung für die entsprechende Halbgruppe bewiesen.

Sei $X := \cup_{n\in\mathbb{Z}}[2n, 2n+1]$ mit dem Lebesgue-Maß m und definiere die Form

$$a(u,v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n}^{2n+1} u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x + \sum_{n\in\mathbb{Z}} (u(2n-1)-u(2n))\overline{(v(2n-1)-v(2n))},$$

$$\mathcal{D}(a) := \{u \in H^1(X) \mid a(u,u) < \infty\}.$$

Wegen dem Einbettungstheorem von Sobolev ist diese Form wohldefiniert und abgeschlossen. Es ist leicht zu überprüfen, dass a eine reguläre Dirichlet-Form ist. Sei A der assoziierte Operator.

Sei $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ und setze

$$\psi(x) := \begin{cases} \gamma_1 m([0,x]\cap X) + \gamma_2 \#(X_1 \cap [0,x]) & x \geq 0 \\ -\gamma_1 m([x,0]\cap X) - \gamma_2 \#(X_1 \cap [x,0]) & x < 0 \end{cases},$$

mit $X_1 := 2\mathbb{Z} - 1/2$. Offensichtlich gilt $\psi \in \mathcal{D}_{loc}(a)$. Die zwei Komponenten von ψ korrespondieren mit den Metriken (bzw. der Halbmetrik)

$$d_1(x,y) := m([\min(x,y), \max(x,y)] \cap X)$$

und

$$d_2(x,y) := \#(X_1 \cap [\min(x,y), \max(x,y)]),$$

die den Diffusionsabstand misst bzw. die Anzahl der „Löcher“ zwischen x und y zählt.

Das Energiemaß $-\Gamma_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>}$ setzt sich für diese Form aus zwei Komponenten zusammen. Auf der Diagonalen entspricht es dem Ausdruck $\gamma_1^2\,\mathrm{d}m$. Die zweite Komponente wird auf den Punkten der Form $(2n-1, 2n)$ und $(2n, 2n-1)$ für $n \in \mathbb{Z}$ getragen und hat dort den Wert $\frac{\mathrm{e}^{\gamma_2}+\mathrm{e}^{-\gamma_2}-2}{2}$, ist also singulär bezüglich des Maßes m^2, falls $\gamma_2 > 0$ ist.

Mit dieser Vorbereitung lässt sich die Norm-Abschätzung der Halbgruppe formulieren und beweisen.

Proposition 5.6.1. *Seien $A, B \subset X$ messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_A\,\mathrm{e}^{-tA}\,\mathbb{1}_B\| &\leq \mathrm{e}^{-\frac{d_1(A,B)^2}{4t}}\,\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{d_2(A,B)^2+t^2}-t}{2}}\left(\frac{t}{d_2(A,B)+\sqrt{d_2(A,B)^2+t^2}}\right)^{\frac{d_2(A,B)}{2}} \\ &\leq \mathrm{e}^{-\frac{d_1(A,B)^2}{4t}}\left(\frac{\mathrm{e}\,t}{d_2(A,B)+t}\right)^{\frac{d_2(A,B)}{2}}. \end{aligned}$$

Beweis. Mit Hilfe der Variationsrechnung zeigt man für alle $\xi, \zeta > 0$ und alle $f \in H^1([0,1])$ die Ungleichung

$$\xi(f(0)^2 + f(1)^2) \leq \frac{1}{\zeta} \int_0^1 f'(x)^2 \, \mathrm{d}x + (2\xi + \xi^2\zeta) \int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x. \tag{5.6}$$

Mit dieser Ungleichung und Cauchy-Schwarz errechnet man nun für $0 \leq u \in \mathcal{D}(a)$

$$\begin{aligned} -\int_{X\times X} u(x)u(y) \, \mathrm{d}\Gamma_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>} &\leq -\int_{X\times X} u(x)^2 \, \mathrm{d}\Gamma_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>} \\ &= \gamma_1^2 \int_X u(x)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^{\gamma_2} + \mathrm{e}^{-\gamma_2} - 2}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)^2 \\ &\overset{(5.6)}{\leq} \int_X u'(x)^2 \, \mathrm{d}x + \left(\gamma_1^2 + \tfrac{1}{4}(\mathrm{e}^{\gamma_2} - \mathrm{e}^{-\gamma_2})^2\right) \int_X u(x)^2 \, \mathrm{d}x \\ &\leq a(u,u) + \gamma \|u\|^2 \end{aligned}$$

mit $\gamma = \gamma_1^2 + \sinh(\gamma_2)^2$. Proposition 5.1.2 liefert nun

$$\|\mathbb{1}_A \, \mathrm{e}^{-tA} \, \mathbb{1}_B\| \leq \mathrm{e}^{\gamma t} \, \mathrm{e}^{-\gamma_1 d_1(A,B) - \gamma_2 d_2(A,B)}.$$

Wählt man $\gamma_1 = \frac{d_1(A,B)}{2t}$ und $\gamma_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{d_2(A,B) + \sqrt{d_2(A,B)^2 + t^2}}{t}\right)$, so erhält man die behauptete Ungleichung. □

Das nächste zwei Lemmata werden helfen, eine Nash-Ungleichung für a zu zeigen.

Lemma 5.6.2. *Sei $\theta > 0$ und seien $a_n, b_n, c_n \geq 0$ mit $a_n^{1+\theta/2} \leq b_n c_n^{\theta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n)^{1+\theta/2} \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n)^{\theta}.$$

Beweis. Es ist

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n)^{1+\theta/2} \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n^{\frac{2}{2+\theta}} c_n^{\frac{2\theta}{2+\theta}})^{1+\theta/2}$$

und mit Hölder schätzt man weiter ab

$$\begin{aligned} &\leq \left((\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)^{\frac{2}{2+\theta}} (\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2)^{\frac{\theta}{2+\theta}} \right)^{\frac{2+\theta}{2}} \\ &= (\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n^2)^{\frac{\theta}{2}} \\ &\leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n)^{\theta}. \end{aligned}$$

□

Lemma 5.6.3. *Sei*

$$\|u\|_\infty^2 \leq sa(u,u) + \frac{1}{s}\|u\|^2$$

für alle $s > 0$ und $u \in \mathcal{D}(a)$ erfüllt. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|u\|^6 \leq Ca(u,u)\|u\|_1^4$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1(X)$ gilt.

Beweis. Sei $r > 0$ beliebig. Dann gilt für $0 \neq u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1$

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 = \int |u|^2 \,\mathrm{d}x &= \int\limits_{|u|\geq r} |u|^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_{|u|<r} |u|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \|u\|_\infty^2 |\{|u| \geq r\}| + r \int\limits_{|u|<r} |u| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{r^2}\|u\|_\infty^2 \|u\|^2 + r\|u\|_1 \\
&\leq \frac{s}{r^2} a(u,u)\|u\|^2 + \frac{1}{sr^2}\|u\|^4 + r\|u\|_1.
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $s = \frac{2}{r^2}\|u\|^2$ folgt nunmehr

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &\leq \frac{2}{r^4} a(u,u)\|u\|^4 + \frac{1}{2}\|u\|^2 + r\|u\|_1 \\
&\leq \frac{4}{r^4} a(u,u)\|u\|^4 + 2r\|u\|_1.
\end{aligned}$$

Das Lemma 4.3.7 liefert also

$$\|u\|^{10} \leq Ca(u,u)\|u\|_1^4\|u\|^4$$

und somit

$$\|u\|^6 \leq Ca(u,u)\|u\|_1^4$$

für eine passende Konstante $C > 0$. □

Mit Hilfe dieser Lemmata kann nun eine Nash-Ungleichung für die Form a gezeigt werden.

Proposition 5.6.4. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1(X)$ gilt*

$$\|u\|^6 \leq Ca(u,u)\|u\|_1^4.$$

Beweis. Es ist bekannt, dass ein $C > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H^1([0,1])$

$$\|u\|^6 \|u\|_1^{-4} \leq C(\|u'\|^2 + \|u\|^2).$$

Dies folgt z.B. aus [Dav90, Theorem 2.4.4.]. Mit Lemma 5.6.2 folgt dann auch

$$\|u\|^6 \leq C a_1(u,u) \|u\|_1^4$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a)$. Für die gewünschte Nash-Ungleichung muss aber etwas mehr gearbeitet werden: Offensichtlich gilt für alle $u \in \mathcal{D}(a)$ und $x, y \in X$, $I := [x,y] \cup [y,x]$

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int\limits_{X \cap I} |u'(z)| \, \mathrm{d}z + \sum_{n \in \mathbb{Z}, [2n-1,2n] \subset I} |u(2n) - u(2n-1)|.$$

Quadrieren liefert

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 \leq 3|u(y)|^2 + 3m(X \cap I) \int\limits_{X \cap I} |u'(z)|^2 \, \mathrm{d}z + \ldots \\ \cdots + 3\#\{n \in \mathbb{Z} \mid [2n-1,2n] \subset I\} \sum_{n \in \mathbb{Z}, [2n-1,2n] \subset I} |u(2n) - u(2n-1)|^2. \end{aligned}$$

Ist $|x - y| \leq r$, so gilt

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq 3|u(y)|^2 + 3r \int\limits_{X \cap I} |u'(z)|^2 \, \mathrm{d}z + 3r \sum_{n \in \mathbb{Z}, [2n-1,2n] \subset I} |u(2n) - u(2n-1)|^2 \\ &\leq 3|u(y)|^2 + 3r a(u,u). \end{aligned}$$

Integriert man diese Ungleichung bezüglich y über $[x-r, x+r] \cap X$, so folgt

$$r|u(x)|^2 \leq 3\|u\|^2 + 6r^2 a(u,u).$$

Der Rest folgt nun mit Lemma 5.6.3. □

Wie gehabt erhält man nun die Kernabschätzung.

Proposition 5.6.5. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für den Kern k_t der zu a assoziierten Halbgruppe e^{-tA} gilt*

$$0 \leq k_t(x,y) \leq C \, t^{-1/2} p_{t,x,y} \, \mathrm{e}^{-\frac{d_1(x,y)^2}{4t}} \left(\frac{\mathrm{e}\, t}{d_2(A,B)+t} \right)^{\frac{d_2(A,B)}{2}} \quad \text{f.ü.},$$

mit der Störung niedrigerer Ordnung

$$p_{t,x,y} := \left(1 + \tfrac{d_1(x,y)^2}{4t} + (2d_2(x,y) + t) \left(\ln \left(\tfrac{2d_2(x,y)+t}{t} \right) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis. Aus der vorherigen Proposition erhält man die Nash-Ungleichung

$$\|u\|^{2+4} \leq Ca(u,u)\|u\|_1^4$$

für alle $u \in \mathcal{D}(a) \cap L^1$. Wie schon gezeigt gilt

$$-\Gamma_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>} \leq a + \gamma$$

mit $\gamma = \gamma_1^2 + \sinh(\gamma_2)^2$. Ebenso errechnet man mit Ungleichung (5.6), dass für $0 \leq u \in \mathcal{D}(a)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$-n^2 \int\limits_{X\times X} u(x)^2 \,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>} \leq \frac{1}{2}a(u,u) + (n^2\gamma_1^2 + 2s + 2s^2)\|u\|^2$$

mit $s := n^2 \frac{\mathrm{e}^{\gamma_2} + \mathrm{e}^{-\gamma_2} - 2}{2}$ gilt. Insbesondere gilt auch

$$\begin{aligned} -n^2 \int\limits_{X\times X} u(x)^2 \,\mathrm{d}\mu^{(d)}_{<\mathrm{e}^{-\psi},\mathrm{e}^{\psi}>} &\leq \frac{1}{2}a(u,u) + (n^2\gamma_1^2 + n^2\gamma_2^2\,\mathrm{e}^{\gamma_2} + n^4\gamma_2^4\,\mathrm{e}^{2\gamma_2})\|u\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}a(u,u) + \lambda\,\mathrm{e}^{c(n)}\,n\|u\|^2 \end{aligned}$$

für $\lambda := \gamma_1^2 + \gamma_2^2\,\mathrm{e}^{\gamma_2} + \gamma_2^2\,\mathrm{e}^{2\gamma_2}$ und $c(n) := \ln(2n^3)$. Mit Proposition 5.1.10 folgt dann für den Kern

$$0 \leq k_t(x,y) \leq Ct^{-1/2}\max(1,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\,\mathrm{e}^{2\gamma_2})t)^{1/2}\,\mathrm{e}^{\gamma t}\,\mathrm{e}^{-\gamma_1 d_1(x,y) - \gamma_2 d_2(x,y)} \quad \text{f.ü.}$$

Wählt man $\gamma_1 = \frac{d_1(x,y)}{2t}$ und $\gamma_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{d_2(A,B) + \sqrt{d_2(A,B)^2 + t^2}}{t}\right)$, so erhält man die gewünschte Abschätzung. □

Bemerkungen

Die Abschätzungen in diesem Abschnitt lassen sich ebenso auf das allgemeinere Konzept in den Artikeln [KKVW09, SV] übertragen. Da diese Abschätzungen neu sind, wurde hier der Einfachheit halber dieses einfache Beispiel gewählt.

Die hier bewiesenen Abschätzungen können nicht mit den bekannten Methoden aus [CKS87] erzielt werden, da dort vorausgesetzt wird, dass das Energiemaß bezüglich e^{ψ} (in leicht veränderter Form) durch γm beschränkt ist. Wohl ist es aber möglich, entsprechend schwächere Abschätzungen zu erzielen, die die Lücken und den damit verbundenen Abfall der Halbgruppe ignorieren.

Kapitel 6

Ausblick

6.1 Über L^1-Abschätzungen der Halbgruppe

Obere Abschätzungen an den Kern der Halbgruppe eines Differentialoperators zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^d$ haben in der Literatur typischerweise die Form

$$k_t(x,y) \leq C_\delta t^{-d/2} \, \mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4(1+\delta)t}}$$

wobei $\delta > 0$ und C_δ eine von δ abhängende Konstante ist (z.B. [Dav90, Theorem 3.2.7.] und [Dav87]) und d_{intr} die intrinsische Metrik ist (siehe Beispiel 5.1.12). In dieser Arbeit wurde eine bessere Abschätzung der Form

$$k_t(x,y) \leq C t^{-d/2} \max\left(1, \frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4t}\right) \mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4t}}$$

bewiesen.[1] Erwarten würde man hingegen eine Abschätzung der Form

$$k_t(x,y) \leq C t^{-d/2} \, \mathrm{e}^{-\frac{d_{\mathrm{intr}}(x,y)^2}{4t}} \, .$$

Die erste Abschätzung wurde durch eine iterierte Anwendung der Nash-Ungleichung in Proposition 4.3.11 erzielt. Der Autor ist der Ansicht, dass die erwartete Abschätzung erreicht werden kann, wenn man stattdessen die Nash-Ungleichung nur einmal anwendet (Proposition 4.3.5). Dies wird in Abschnitt 5.2 verdeutlicht. Zur Anwendung dieser Methode ist es aber notwendig, eine gute L^1-Schranke an die veränderte Halbgruppe e^{-tA_ϕ} zu kennen. Solche Schranken lassen sich im homogenen (oder homogenisierbaren) Raum und bei nach unten beschränktem Potential einfach nachweisen. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, ist ein Nachweis einer solchen Schranke wesentlich schwieriger, da dann im Allgemeinen keine Schranke der Form $\| \mathrm{e}^{-tA_\phi} \|_1 \leq \mathrm{e}^{\omega t}$ existiert. Satz 2.2.8 liefert ein Kriterium für allgemeinere Schranken an die L^1-Norm einer Halbgruppe, allerdings ist es dem Autor nicht gelungen, daraus ein anwendbares Kriterium zu formulieren. Hier bieten sich weitere Forschungsmöglichkeiten.

[1] Davies erwähnte in [Dav90, Note 3.2.10.], dass eine bessere Abschätzung möglich ist durch eine genaue Betrachtung des Zusammenhangs zwischen C_δ und δ. Dass dies nicht notwendig ist, zeigt der entsprechende Beweis in Proposition 4.3.11.

6.2 Verallgemeinerung von Davies' Methode

Anstelle von $\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi$ kann man auch den Ausdruck $\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_2$ betrachten (mit $\phi_1, \phi_2 \in L^\infty$, so dass $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} \in L^\infty$ und $\phi_1 \neq \phi_2^{-1}$ gilt). Solch ein Ausdruck besitzt keine Halbgruppenstruktur, die Methoden zum Nachweis von Ultrakontraktivität basieren aber wesentlich auf dieser. Es gilt allerdings

$$\begin{aligned}
\|\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_2\|_{1\to\infty} &= \sup_{f\in L^1, f\neq 0} \frac{\|\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_2 f\|_\infty}{\|f\|_1} \\
&= \sup_{f\in L^1, f\neq 0} \frac{\|\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_2\phi_1^{-1}\phi_2^{-1} f\|_\infty}{\|\phi_1^{-1}\phi_2^{-1} f\|_1} \\
&= \sup_{f\in L^1, f\neq 0} \frac{\|\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_1^{-1} f\|_{\infty,m'}}{\|f\|_{1,m'}} \\
&= \|\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_1^{-1}\|_{1\to\infty,m'}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{1,m'}$ die Norm in $L^1(X,m')$ mit $m' := \phi_1^{-1}\phi_2^{-1}m$ und entsprechend $\|\cdot\|_{1\to\infty,m'}$. Dies bedeutet, dass $\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_2$ die selbe Ultrakontraktivitätsnorm besitzt wie $\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_1^{-1}$ bezüglich des Maßes m'. Da $\phi_1\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi_1^{-1}$ eine Halbgruppe ist, lassen sich die bekannten Techniken darauf anwenden. Der assoziierte Operator ist $\phi_1 A \phi_1^{-1}$ und die zugehörige Form (in $L^2(X,m')$) ist (erstmal rein symbolisch)

$$(\phi_1 A\phi_1^{-1}u, v)_{m'} = (A\phi_1^{-1}u, \phi_2^{-1}v)_m = a(\phi_1^{-1}u, \phi_2^{-1}v) =: a_{\phi_1,\phi_2}(u,v).$$

Die entsprechend benötigte Nash-Ungleichung lautet dann (bis auf Konstanten)

$$\|u\|_{2,m'}^{2+\theta} \leq \Re a_{\phi_1,\phi_2}(u,u)\|u\|_{1,m'}^{\theta}$$

oder anders formuliert

$$\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a(\phi_1^{-1/2}\phi_2^{1/2}u, \phi_1^{1/2}\phi_2^{-1/2}u)\|(\phi_1\phi_2)^{-1/2}u\|_1.$$

Ein Spezialfall hiervon ist $\phi_1 = \phi_2 =: \phi$. In diesem Fall vereinfacht sich die benötigte Nash-Ungleichung zu

$$\|u\|^{2+\theta} \leq \Re a(u,u)\|\phi^{-1}u\|_1.$$

In der Tat wird für Markov-Halbgruppen unter einer zusätzlichen Bedingung an ϕ in [BBGM10] eine Abschätzung an den Kern der Halbgruppe der Form

$$k_t(x,y) \leq c(t)\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)$$

bewiesen. Auch [Dav90, Kapitel 4] beschäftigt sich mit derartigen Halbgruppen.

Betrachtet man nun den allgemeineren Ansatz, so ergeben sich sicher vielfältige Möglichkeiten neue Abschätzungen an die Kerne von Halbgruppen zu erzielen.

6.3 Zulässigkeit von ϕ

Die Bedingung der Zulässigkeit an ϕ für die Anwendung von Davies' Methode zielt darauf ab, dass die gestörte Form $a_\phi(u,v)$ sich als $a(\phi u, \phi^{-1}v)$ ergibt. Dies ist notwendig, um gut mit der gestörten Form rechnen zu können. Notwendig für die Anwendung von Davies' Methode an sich, ist die Zulässigkeit nicht. Sind ϕ und ϕ^{-1} zwei stetige Multiplikationsoperatoren, so bildet $\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi$ eine stark stetige Halbgruppe und es existiert der dazu assoziierte Operator $A_\phi = \phi^{-1}A\phi$ und ebenfalls eine dazu assoziierte Sesquilinearform a_ϕ. Die zusätzlichen Bedingungen stellen vor allem sicher, dass a_ϕ sektoriell ist und den gleichen Definitionsbereich wie a hat.

Insbesondere die Bedingung $\phi > 0$ ist nicht nötig, auch wenn sie für alle in dieser Arbeit genannten Beispiele natürlich ist. Dass ein komplexes ϕ hilfreich sein kann, zeigt dieses Beispiel: Sei $X := \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß m und $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$. Man betrachte im $L^2(X,m)$ die Form

$$a(u,v) := \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} u'(x)\overline{v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(a) := \{u \in L^2(X) \mid u \in H^1(-\infty,0), u \in H^1(0,\infty), u(0-) = \alpha u(0+)\}.$$

Definiere

$$\phi(x) := \begin{cases} \alpha & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases}.$$

Dann ist $\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi$ die sehr gut bekannte Halbgruppe $\mathrm{e}^{t\triangle}$.

Anhang A

Komplexe Maße

Komplexe Maße spielen für viele Anwendungsgebiete eine wichtige Rolle. Auch in dieser Arbeit stellt dieser Begriff ein wichtiges Mittel dar, unter anderem um einen Begriff des Energiemaßes von Dirichlet-Formen zu definieren und im Beweis dafür, dass ultrakontraktive Operatoren einen Kern besitzen.

In der Literatur werden signierte Maße (als Spezialfall der komplexen Maße) nur als halbbeschränkte Maße behandelt und komplexe Maße meist nur als endliche Maße (siehe z.B. [Rud99]), um den Problemen in Zusammenhang mit unendlichen Summen aus dem Wege zu gehen. Da in den Anwendungen, wie auch in dieser Arbeit, aber unendliche komplexe Maße benötigt werden, soll hier ein neuer Begriff des komplexen Maßes definiert werden, der kohärent mit dem klassischen Maßbegriff ist.

Dieser Begriff des komplexen Maßes ist motiviert durch Ausdrücke der Form $f\nu$, wobei f eine messbare komplexe Funktion ist und ν ein (positives) Maß. Um darauf aufbauend den Begriff des komplexen Maßes zu definieren, wird dem Symbol „∞“ die neue Bedeutung „nicht absolut summierbar“ gegeben und der Begriff der σ-Additivität entsprechend angepasst. Nach den Definitionen und diesem grundlegenden Beispiel folgen Aussagen über die Variation eines Maßes, die Polardarstellung und die Summe zweier komplexer Maße. Zuletzt wird noch ein Erweiterungssatz für komplexe Inhalte bewiesen.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X. Ein *komplexes Maß* ist eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- σ-Additivität: $\mu(\dot\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) & : \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(E_n) < \infty \\ \infty & : \text{sonst.} \end{cases}$

Dabei ist

$$|\mu|(E) := \sup_{E=\dot\cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|,$$

wobei das Supremum über alle (messbaren) endlichen Partitionen von E gebildet wird. μ heißt *σ-endlich*, falls $|\mu|$ σ-endlich ist.

Beispiel A.1. Sei ν ein Maß auf $\mathcal{A}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist $f\nu$ ein komplexes Maß,

$$(f\nu)(E) := \begin{cases} \int_E f \, \mathrm{d}\nu & : \text{Integral existiert und ist endlich} \\ \infty & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Dies folgt aus der σ-Additivität des Integrals. □

Eine messbare Funktion $u : X \to \mathbb{C}$ heißt *integrierbar* bezüglich eines komplexen Maßes $\mu = f\nu$ mit einer messbaren Funktion f und einem Maß ν, falls uf bezüglich ν integrierbar ist. Definiere das Integral

$$\int_X u \, \mathrm{d}f\nu := \int_X uf \, \mathrm{d}\nu.$$

Das Integral ist unabhängig von der Darstellung: Seien ν_1 und ν_2 zwei Maße auf $\mathcal{A}$, f_1 und f_2 zwei messbare komplexwertige Funktionen auf X und $f_1\nu_1 = f_2\nu_2$. Dann gilt

$$\int_X uf_1 \, \mathrm{d}\nu_1 = \int_X uf_2 \, \mathrm{d}\nu_2$$

für alle $f_1\nu_1$- oder $f_2\nu_2$-integrierbaren messbaren Funktionen u.

Beweis. O.B.d.A. sind $u, f_1, f_2 \neq 0$, sonst schränkt man sich auf das entsprechende Gebiet ein (ist E messbar und $f_1 = 0$ auf E, so gilt $\nu_2(\{x \in E \mid f_2(x) \neq 0\}) = 0$).

Sei u bezüglich $f_1\nu_1$ integrierbar, d.h. uf_1 ist bezüglich ν_1 integrierbar. Also ist ν_1 σ-endlich. Weiterhin ist ν_2 absolutstetig bezüglich ν_1 und somit besitzt ν_2 eine Dichte n_2 bezüglich ν_1. Es gilt für alle messbaren Mengen $E \subset X$, auf denen f_1 bezüglich ν_1 integrierbar ist

$$\int_E f_1 \, \mathrm{d}\nu_1 = \int_E f_2 \, \mathrm{d}\nu_2 = \int_E f_2 n_1 \, \mathrm{d}\nu_1.$$

Also ist $f_2 n_1 = f_1$, ν_1-f.ü. Unter Anwendung der Definitionen folgt nun, dass u bezüglich $f_2\nu_2$ integrierbar ist, und die Gleichheit der Integrale. □

Proposition A.2. *Sei μ ein komplexes Maß. Dann ist $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß.*

Beweis. Wie man schnell sieht, gilt für alle $E \in \mathcal{A}$

$$|\mu|(E) = \sup_{E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|.$$

Sei $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \in \mathcal{A}$. Offensichtlich gilt

$$|\mu|(F) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(F_n).$$

Umgekehrt errechnet man

$$|\mu|(F) = \sup_{F = \cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| \leq \sup_{F = \cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(E_i \cap F_j),$$

denn mit der σ-Additivität ist für ein $i \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(E_i \cap F_j) = \infty$$

oder für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap F_j).$$

Somit gilt weiter

$$|\mu|(F) \leq \sup_{F=\cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} |\mu|(E_i \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(F_j).$$

Somit ist $|\mu|$ σ-additiv, woraus die Behauptung folgt. □

Proposition A.3. *Sei μ ein komplexes, σ-endliches Maß. Dann existiert eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $|f| = 1$, so dass $\mu = f|\mu|$ gilt.*[1]

Beweis. Definiere für $\alpha \in \mathbb{C}$, $E \in \mathcal{A}$ mit $|\mu|(E) < \infty$

$$\mu^{\alpha}(E) := \sup_{E=\cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} (\Re \alpha \mu(E_i))^{+} = \sup_{E \supset \cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} \Re \alpha \mu(E_i).$$

μ^{α} ist σ-additiv: Sei $F = \cup_{j=1}^{\infty} F_j$ und $|\mu|(F) < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{\alpha}(F_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{F_j \supset \cup_{i=1}^{n} E_i^j} \sum_{i=1}^{n} \Re \alpha \mu(E_i^j) = \sup_{F_j \supset \cup_{i=1}^{n} E_i^j} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \Re \alpha \mu(E_i^j) \\ &= \sup_{F_j \supset \cup_{i=1}^{n} E_i^j} \sum_{i=1}^{n} \Re \alpha \mu(\cup_j E_i^j) = \sup_{F \supset \cup_{i=1}^{n} E_i} \sum_{i=1}^{n} \Re \alpha \mu(E_i). \end{aligned}$$

Wegen des Supremums können alle Summanden als positiv angesehen werden (und die Summen somit als absolut summierbar).

Mit der σ-Endlichkeit von $|\mu|$ lässt sich μ^{α} eindeutig auf $\mathcal{A}$ fortsetzen. Nun gilt für $E \in \mathcal{A}$: Ist einer der Werte $\mu^1(E)$, $\mu^{-1}(E)$, $\mu^i(E)$ oder $\mu^{-i}(E)$ unendlich, so ist $|\mu|(E)$ unendlich und damit $\mu(E) = \infty$. Sind alle Werte $\mu^1(E)$, $\mu^{-1}(E)$, $\mu^i(E)$ und $\mu^{-i}(E)$ endlich, so ist auch $|\mu|(E)$ endlich und es gilt

$$\mu(E) = \mu^1(E) - \mu^{-1}(E) - i\mu^i(E) + i\mu^{-i}(E).$$

(Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil ist simpel, die Aufspaltung dieser Teile in Positiv- und Negativteil folgt aus der bekannten Theorie endlicher signierter Maße.) Da

[1] Ergänzung: Insbesondere besitzen alle positiven Maße, alle halb-beschränkten signierten Maße und alle beschränkten komplexen Maße eine solche Darstellung.

die μ^α absolutstetig bezüglich $|\mu|$ sind und $|\mu|$ σ-endlich ist, besitzen die μ^α eine Dichte und es gilt

$$\mu = f|\mu|$$

für eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$. Ein einfacher Beweis zeigt, dass für alle messbaren Mengen $E \subset X$

$$|\mu|(E) = \int_E |f| \, \mathrm{d}|\mu|$$

gilt. Also ist $|f| = 1$ f.ü. □

Proposition A.4. *Seien μ_1 und μ_2 zwei komplexe, σ-endliche Maße. Dann existiert genau ein komplexes Maß μ mit*

$$\mu(E) = \begin{cases} \mu_1(E) + \mu_2(E) & : \mu_1(E) \neq \infty \text{ und } \mu_2(E) \neq \infty \\ \infty & : \text{entweder } \mu_1(E) = \infty \text{ oder } \mu_2(E) = \infty. \end{cases}$$

(Für $\mu_1(E) = \mu_2(E) = \infty$ ist der Wert $\mu(E)$ nicht angegeben.)

Beweis. Zuerst wird die Existenz gezeigt: Es existieren zwei messbare Funktionen f_1 und f_2 mit $\mu_1 = f_1|\mu_1|$ und $\mu_2 = f_2|\mu_2|$. Definiere $\nu := |\mu_1| + |\mu_2|$. Das Maß ν ist σ-endlich und $|\mu_1|$ und $|\mu_2|$ sind absolutstetig bezüglich ν. Somit besitzen sie Dichten g_1 und g_2. Das Maß $\mu := (f_1 g_1 + f_2 g_2)\nu$ erfüllt das Geforderte.

Die Eindeutigkeit folgt aus der σ-Endlichkeit: Es existiert eine abzählbare Zerlegung $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit $X_n \in \mathcal{A}$ und $|\mu_1|(X_n) + |\mu_2|(X_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auf den Mengen X_n ist wegen der Endlichkeit μ bereits durch die Gleichung $\mu(E) = \mu_1(E) + \mu_2(E)$ bestimmt. □

Die nächste Proposition beschreibt die Maßerweiterungen komplexer Inhalte. Ein komplexer Inhalt ist eine additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Für einen komplexen Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ wird $|\mu|$ definiert als

$$|\mu|(E) := \sup_{E=\cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \quad (E, E_i \in \mathcal{R}).$$

Lemma A.5. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf einer Menge X. Sei ν ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$, ν endlich auf $\mathcal{R}$ und bezüglich $\mathcal{R}$ σ-endlich, d.h. es existieren Mengen $M_i \in \mathcal{R}$, so dass $X = \cup_{i=1}^\infty M_i$. Weiter sei μ ein komplexer Inhalt auf $\mathcal{R}$ mit $|\mu| \leq \nu$ auf $\mathcal{R}$.*

Dann ist μ eindeutig fortsetzbar auf ein Maß $\tilde{\mu}$ mit $|\mu| = |\tilde{\mu}|$ auf $\mathcal{R}$ und $|\tilde{\mu}| \leq \nu$.

Beweis. Definiere für $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mu^\alpha(E) := \sup_{E=\cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^n (\Re \alpha \mu(E_i))^+ = \sup_{E\supset\cup_{i=1}^n E_i} \sum_{i=1}^\infty \Re \alpha \mu(E_i) \quad (E, E_i \in \mathcal{R}).$$

Da $|\mu| \leq \nu$ ist, gilt auch $\mu^\alpha \leq |\alpha|\nu$ und somit die Stetigkeit von μ^α in $\emptyset$. Da weiterhin $\nu(M) < \infty$ für alle $M \in \mathcal{R}$ ist, sind die μ^α σ-additiv ([Bau92, Satz 3.2]). Mit dem Erweiterungssatz von Carathéodory existieren nun Maßerweiterungen $\tilde{\mu^\alpha}$ der μ^α. Setze

$$\tilde{\mu} := \tilde{\mu^1} - \tilde{\mu^{-1}} - i\tilde{\mu^i} + i\tilde{\mu^{-i}}.$$

Es gilt $\tilde{\mu} = \mu$ auf $\mathcal{R}$.

Zu zeigen ist nun $|\mu| = |\tilde{\mu}|$ auf $\mathcal{R}$. Offensichtlich gilt $|\mu| \leq |\tilde{\mu}| \leq 4|\mu|$. Sei $E \in \mathcal{R}$, $\epsilon > 0$ beliebig und $f \in L^1(E, |\tilde{\mu}|)$ mit $|f| = 1$ und $|\tilde{\mu}|(E) = (f\tilde{\mu})(E)$. $L := \text{lin}\{\mathbb{1}_F \mid F \in \mathcal{R}\}$ ist dicht in $L^1(E, |\tilde{\mu}|)$ (siehe [Küt09, Satz 1.5] oder als einfache Folgerung von [Bau92, Approximationseigenschaft (Satz 5.7)]). Somit existiert ein $g \in L$ mit $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$ und $|g| \leq 1$. Also ist

$$|\tilde{\mu}|(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\tilde{\mu} \leq \left| \int_E g \, \mathrm{d}\tilde{\mu} \right| + \epsilon \leq |\mu|(E) + \epsilon.$$

Die letzte Ungleichung folgt, da sich das Integral über $g \in L$ mittels μ darstellen lässt.

Als nächstes zeigt man: mit $|\tilde{\mu}| \leq \nu$ auf $\mathcal{R}$ folgt auch $|\tilde{\mu}| \leq \nu$ auf $\sigma(\mathcal{R})$: Sei $E \in \sigma(\mathcal{R})$. Da ν bzgl. $\mathcal{R}$ σ-endlich ist existiert eine monoton fallende Folge $(E_n) \subset \mathcal{R}^\infty$, $\mathcal{R}^\infty := \{\cup_{n=1}^\infty F_n \mid F_n \in \mathcal{R}\}$ mit $E_n \supset E$ und $\nu(E_n) \underset{n\to\infty}{\to} \nu(E)$ (siehe [Bau92, Kapitel 5]). Somit gilt

$$|\tilde{\mu}|(E) \leq |\tilde{\mu}|(E_n) \leq \nu(E_n) \underset{n\to\infty}{\to} \nu(E).$$

Nun zur Eindeutigkeit: Sei $\mu = 0$. Es ist zu zeigen, dass für jede komplexe Maßerweiterung auch $\tilde{\mu} = 0$. Sei ohne Einschränktung $\tilde{\mu}$ reell. Dann gilt $\tilde{\mu}^1 = \tilde{\mu}^{-1} < \infty$ auf $\mathcal{R}$ und somit die Gleichheit von $\tilde{\mu}^1$ und $\tilde{\mu}^{-1}$. Somit ist $\tilde{\mu} = 0$ gezeigt. □

Anhang B

Notation

Reelle und komplexe Zahlen

x^+	$\max(x, 0)$
x^-	$\max(-x, 0)$
$x \wedge y$	$\min(x, y)$
$x \vee y$	$\max(x, y)$
$\Re x$	Realteil von x
$\Im x$	Imaginärteil von x
$\overline{x}$	das komplex Konjugierte von x

Sesquilinearformen

x, y	zwei Elemente eines Hilbert-Raums
$\Re a$	$\Re a(x, x)$
$\Im a$	$\Im a(x, x)$

Maßtheoretische Bezeichnungen

$\sigma(\mathcal{F})$	die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra
$r(\mathcal{F})$	der von $\mathcal{F}$ erzeugte Ring
$\mathcal{A}$	eine σ-Algebra
$\mathcal{R}$	ein Ring
m	ein Maß
m^2	das Produktmaß von M&M
$\mathcal{A}_{fin}$	die Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit endlichem Maß

Mengen

E, F	zwei messbare Mengen
K	eine kompakte Menge
G	eine offene, relativ kompakte Menge
U	eine offene Menge
$\biguplus_{i \in I} M_i$	die disjunkte Vereinigung der $(M_i)_{i \in I}$
$X^2 \cap d$	die Diagonale in X^2
$X^2 \setminus d$	$X^2 \setminus (X^2 \cap d)$

Funktionen

$\mathbb{1}_M$	die charakteristische Funktion von M
u, v	zwei Elemente aus einem Funktionenraum
$\tilde{u}$	eine quasistetige Version von u
$\operatorname{supp} u$	der Träger von u

Funktionenräume und Normen

$L^p = L^p(X)$	die Äquivalenzklassen p-integrierbarer (bzw. essentiell
$= L^p(X, \mathcal{A}, m)$	beschränkter) Funktionen
$\|\cdot\|$	die L^2-Norm oder L^2-Operatornorm
$\|\cdot\|_p$	die L^p-Norm oder L^p-Operatornorm
$\|\cdot\|_{p\to q}$	die L^p nach L^q-Operatornorm
D	ein Funktionenraum
D_c	die Funktionen aus D mit kompaktem Träger
D_{loc}	die Funktionen, die auf Kompakta mit Elementen in D übereinstimmen
$C(X)$	die stetigen Funktionen in X
$C^1(X)$	die einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$

Differentiale und Vektoren

∇	der Gradient
div	die Divergenz (eines Vektorfeldes)
$\triangle$	der Laplaceoperator
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	das Skalarprodukt zweier Vektoren aus $\mathbb{C}^n$

Dirichlet-Formen

Cap	die Kapazität

Anhang C

Literaturverzeichnis

[AM91] Albeverio, Sergio ; Ma, Zhi M.: Perturbation of Dirichlet forms—lower semiboundedness, closability, and form cores. In: *J. Funct. Anal.* 99 (1991), Nr. 2, S. 332–356

[Bau92] Bauer, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie*. Second. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1992 (de Gruyter Lehrbuch). – xviii+260 S.

[BBCK09] Barlow, Martin T. ; Bass, Richard F. ; Chen, Zhen-Qing ; Kassmann, Moritz: Non-local Dirichlet forms and symmetric jump processes. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 361 (2009), Nr. 4, S. 1963–1999

[BBGM10] Bakry, Dominique ; Bolley, Francois ; Gentil, Ivan ; Maheux, Patrick: Weighted Nash Inequalities. (2010). – arXiv:1004.3456v2 [math.PR]

[BCH97] Barbaroux, J. M. ; Combes, J. M. ; Hislop, P. D.: Localization near band edges for random Schrödinger operators. In: *Helv. Phys. Acta* 70 (1997), Nr. 1-2, S. 16–43. – Papers honouring the 60th birthday of Klaus Hepp and of Walter Hunziker, Part II (Zürich, 1995)

[BD58] Beurling, A. ; Deny, J.: Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire. In: *Acta Math.* 99 (1958), S. 203–224

[BD59] Beurling, A. ; Deny, J.: Dirichlet spaces. In: *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 45 (1959), S. 208–215

[BGK09] Barlow, Martin T. ; Grigor′yan, Alexander ; Kumagai, Takashi: Heat kernel upper bounds for jump processes and the first exit time. In: *J. Reine Angew. Math.* 626 (2009), S. 135–157

[BH91] Bouleau, Nicolas ; Hirsch, Francis: *de Gruyter Studies in Mathematics*. Bd. 14: *Dirichlet forms and analysis on Wiener space*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1991. – x+325 S.

[BK08] Bass, Richard F. ; Kumagai, Takashi: Symmetric Markov chains on $\mathbb{Z}^d$ with unbounded range. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 360 (2008), Nr. 4, S. 2041–2075

[Cho12] Two-sided estimates on Dirichlet heat kernels for time-dependent parabolic operators with singular drifts in $C^{1,\alpha}$-domains. In: *Journal of Differential Equations* 252 (2012), Nr. 2, S. 1101 – 1145

[CK03] Chen, Zhen-Qing ; Kumagai, Takashi: Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets. In: *Stochastic Process. Appl.* 108 (2003), Nr. 1, S. 27–62

[CK08] Chen, Zhen-Qing ; Kumagai, Takashi: Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces. In: *Probab. Theory Related Fields* 140 (2008), Nr. 1-2, S. 277–317

[CKS87] Carlen, E. A. ; Kusuoka, S. ; Stroock, D. W.: Upper bounds for symmetric Markov transition functions. In: *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 23 (1987), Nr. 2, suppl., S. 245–287

[CKS10] Chen, Zhen-Qing ; Kim, Panki ; Song, Renming: Heat kernel estimates for the Dirichlet fractional Laplacian. In: *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 12 (2010), Nr. 5, S. 1307–1329

[CM76] Carrillo-Menendez, Santiago: Processus de Markov associé à une forme de Dirichlet non symétrique. In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 33 (1975/76), Nr. 2, S. 139–154

[CT73] Combes, J. M. ; Thomas, L.: Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle Schrödinger operators. In: *Comm. Math. Phys.* 34 (1973), S. 251–270

[Dav87] Davies, E. B.: Explicit constants for Gaussian upper bounds on heat kernels. In: *Amer. J. Math.* 109 (1987), Nr. 2, S. 319–333

[Dav90] Davies, E. B.: *Cambridge Tracts in Mathematics*. Bd. 92: *Heat kernels and spectral theory*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. – x+197 S.

[Dav93] Davies, E. B.: Large deviations for heat kernels on graphs. In: *J. London Math. Soc. (2)* 47 (1993), Nr. 1, S. 65–72

[Dav95] Davies, E. B.: Uniformly elliptic operators with measurable coefficients. In: *J. Funct. Anal.* 132 (1995), Nr. 1, S. 141–169

[DS88a] Dunford, Nelson ; Schwartz, Jacob T.: *Linear operators. Part I.* New York : John Wiley & Sons Inc., 1988 (Wiley Classics Library). – xiv+858 S. – General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication

[DS88b] Dunford, Nelson ; Schwartz, Jacob T.: *Linear operators. Part II.* New York : John Wiley & Sons Inc., 1988 (Wiley Classics Library). – i–x, 859–1923 and 1–7 S. – Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space,

With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication

[Els05] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie*. Fourth. Berlin : Springer-Verlag, 2005 (Springer-Lehrbuch). – xvi+434 S. – Grundwissen Mathematik.

[ERSZ06] Elst, A. F. M. ; Robinson, Derek W. ; Sikora, Adam ; Zhu, Yueping: Dirichlet forms and degenerate elliptic operators. In: *Partial differential equations and functional analysis* Bd. 168. Basel : Birkhäuser, 2006, S. 73–95

[FLW10] Frank, R. L. ; Lenz, D. ; Wingert, D.: Intrinsic metrics for non-local symmetric Dirichlet forms and applications to spectral theory. (2010). – arXiv:1012.5050v1 [math.FA]. Submitted.

[Foo09] Foondun, Mohammud: Heat kernel estimates and Harnack inequalities for some Dirichlet forms with non-local part. In: *Electron. J. Probab.* 14 (2009), Nr. 11, S. 314–340

[FŌT94] Fukushima, Masatoshi ; Ōshima, Yōichi ; Takeda, Masayoshi: *de Gruyter Studies in Mathematics*. Bd. 19: *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1994. – x+392 S.

[Fuk71] Fukushima, Masatoshi: Regular representations of Dirichlet spaces. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 155 (1971), S. 455–473

[Gri01] Grigor′yan, Alexander: Heat kernels on manifolds, graphs and fractals. In: *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)* Bd. 201. Basel : Birkhäuser, 2001, S. 393–406

[GT01] Grigor′yan, Alexander ; Telcs, Andras: Sub-Gaussian estimates of heat kernels on infinite graphs. In: *Duke Math. J.* 109 (2001), Nr. 3, S. 451–510

[Hil48] Hille, Einar: *Functional Analysis and Semi-Groups*. New York : American Mathematical Society, 1948 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31). – xii+528 S.

[HK06] Hu, Jiaxin ; Kumagai, Takashi: Nash-type inequalities and heat kernels for non-local Dirichlet forms. In: *Kyushu J. Math.* 60 (2006), Nr. 2, S. 245–265

[HMS06] Hu, Ze-Chun ; Ma, Zhi-Ming ; Sun, Wei: Extensions of Lévy-Khintchine formula and Beurling-Deny formula in semi-Dirichlet forms setting. In: *J. Funct. Anal.* 239 (2006), Nr. 1, S. 179–213

[HP57] Hille, Einar ; Phillips, Ralph S.: *Functional analysis and semi-groups*. Providence, R. I. : American Mathematical Society, 1957 (American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31). – xii+808 S. – rev. ed

[Kat66] KATO, Tosio: *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132). – xix+592 S.

[Kat95] KATO, Tosio: *Perturbation theory for linear operators.* Berlin : Springer-Verlag, 1995 (Classics in Mathematics). – xxii+619 S. – Reprint of the 1980 edition

[KKVW09] KANT, Ulrike ; KLAUSS, Tobias ; VOIGT, Jürgen ; WEBER, Matthias: Dirichlet forms for singular one-dimensional operators and on graphs. In: *J. Evol. Equ.* 9 (2009), Nr. 4, S. 637–659

[KL09] KELLER, Matthias ; LENZ, Daniel: Dirichlet forms and stochastic completeness of graphs and subgraphs. (2009). – arXiv:0904.2985v1 [math.FA], to appear in J. Reine Angew. Math.

[Kuw08] KUWAE, Kazuhiro: Maximum principles for subharmonic functions via local semi-Dirichlet forms. In: *Canad. J. Math.* 60 (2008), Nr. 4, S. 822–874

[Kuw10] KUWAE, Kazuhiro: Stochastic calculus over symmetric Markov processes without time reversal. In: *Ann. Probab.* 38 (2010), Nr. 4, S. 1532–1569

[Küt09] KÜTTLER, Heinrich: *Gauss-Abschätzungen für holomorphe Halbgruppen und uniform elliptische Operatoren*, Technische Universität Dresden, Diplomarbeit, Juli 2009

[LVV06] LISKEVICH, Vitali ; VOGT, Hendrik ; VOIGT, Jürgen: Gaussian bounds for propagators perturbed by potentials. In: *J. Funct. Anal.* 238 (2006), Nr. 1, S. 245–277

[Mey75] MEYER, P. A.: Renaissance, recollements, mélanges, ralentissement de processus de Markov. In: *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 25 (1975), Nr. 3-4, S. xxiii, 465–497. – Collection of articles dedicated to Marcel Brelot on the occasion of his 70th birthday

[Miy66] MIYADERA, Isao: On perturbation theory for semi-groups of operators. In: *Tôhoku Math. J. (2)* 18 (1966), S. 299–310

[MOR95] MA, Zhi M. ; OVERBECK, Ludger ; RÖCKNER, Michael: Markov processes associated with semi-Dirichlet forms. In: *Osaka J. Math.* 32 (1995), Nr. 1, S. 97–119

[Mos94] MOSCO, Umberto: Composite media and asymptotic Dirichlet forms. In: *J. Funct. Anal.* 123 (1994), Nr. 2, S. 368–421

[MR92] MA, Zhi M. ; RÖCKNER, Michael: *Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms.* Berlin : Springer-Verlag, 1992 (Universitext). – vi+209 S.

[MS00] Metzger, Bernd ; Stollmann, Peter: Heat kernel estimates on weighted graphs. In: *Bull. London Math. Soc.* 32 (2000), Nr. 4, S. 477–483

[MVV05] Manavi, Amir ; Vogt, Hendrik ; Voigt, Jürgen: Domination of semigroups associated with sectorial forms. In: *J. Operator Theory* 54 (2005), Nr. 1, S. 9–25

[Ōsh92] Ōshima, Yōichi: On conservativeness and recurrence criteria for Markov processes. In: *Potential Anal.* 1 (1992), Nr. 2, S. 115–131

[Ouh05] Ouhabaz, El M.: *London Mathematical Society Monographs Series*. Bd. 31: *Analysis of heat equations on domains*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 2005. – xiv+284 S.

[Pan93] Pang, M. M. H.: Heat kernels of graphs. In: *J. London Math. Soc. (2)* 47 (1993), Nr. 1, S. 50–64

[Phi53] Phillips, R. S.: Perturbation theory for semi-groups of linear operators. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953), S. 199–221. – ISSN 0002–9947

[RS78] Reed, Michael ; Simon, Barry: *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators.* New York : Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1978. – xv+396 S.

[Rud99] Rudin, Walter: *Reelle und komplexe Analysis.* Munich : R. Oldenbourg Verlag, 1999. – xiv+499 S. – Translated from the third English (1987) edition by Uwe Krieg

[Sto92] Stollmann, Peter: Smooth perturbations of regular Dirichlet forms. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), Nr. 3, S. 747–752

[Stu94] Sturm, Karl-Theodor: Analysis on local Dirichlet spaces. I. Recurrence, conservativeness and L^p-Liouville properties. In: *J. Reine Angew. Math.* 456 (1994), S. 173–196

[SV] Seifert, Christian ; Voigt, Jürgen: *Dirichlet forms for singular diffusion on graphs.* – to appear in Oper. Matrices

[SV96] Stollmann, Peter ; Voigt, Jürgen: Perturbation of Dirichlet forms by measures. In: *Potential Anal.* 5 (1996), Nr. 2, S. 109–138

[SV02] Sobol, Zeev ; Vogt, Hendrik: On the L_p-theory of C_0-semigroups associated with second-order elliptic operators. I. In: *J. Funct. Anal.* 193 (2002), Nr. 1, S. 24–54. – ISSN 0022–1236

[Trè67] Trèves, François: *Topological vector spaces, distributions and kernels.* New York : Academic Press, 1967. – xvi+624 S.

[Voi77] VOIGT, Jürgen: On the perturbation theory for strongly continuous semigroups. In: *Math. Ann.* 229 (1977), Nr. 2, S. 163–171

[Yos48] YOSIDA, Kôsaku: On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operators. In: *J. Math. Soc. Japan* 1 (1948), S. 15–21

[Yos80] YOSIDA, Kôsaku: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Bd. 123: *Functional analysis*. Sixth. Berlin : Springer-Verlag, 1980. – xii+501 S.

[Zha97] ZHANG, Qi S.: Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u)+B\nabla u-u_t=0$. In: *Manuscripta Math.* 93 (1997), Nr. 3, S. 381–390

Thesen

1. Die zu einem m-sektoriellen Operator A assoziierte Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ spielt in der Theorie partieller Differentialgleichungen eine wichtige Rolle, da sie die Lösungen des Anfangswertproblems der entsprechenden Evolutionsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_t = -Au_t$ beschreibt. Auch für die Stochastik ist diese Halbgruppe hilfreich, da sie unter gewissen Zusatzvoraussetzungen mit Markov-Prozessen assoziiert werden kann, und dort die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung unter einer gegebenen Anfangsverteilung beschreibt.

2. Jeder in einem Hilbert-Raum dicht definierte m-sektorielle Operator A ist assoziiert zu einer dicht definierten, sektoriellen, abgeschlossenen Sesquilinearform a. Diese Sesquilinearform ist sehr hilfreich bei der Betrachtung von Eigenschaften der assoziierten Halbgruppe. Ist die Halbgruppe zu einem symmetrischen Markov-Prozess assoziiert, so ist die entsprechende Sesquilinearform eine symmetrische Dirichlet-Form.

3. Eine dicht definierte, sektorielle, abgeschlossene Sesquilinearform a lässt sich geeignet durch stetige Sesquilinearformen approximieren, die so genannte approximierende Form.

4. Die Invarianz bestimmter konvexer Teilmengen unter Anwendung der Halbgruppe lässt sich anhand gewisser Ungleichungen und Invarianzeigenschaften des Definitionsbereichs der Form charakterisieren ([Ouh05]). Es wird bewiesen, dass sich diese ebenfalls anhand der approximierenden Form charakterisieren lassen. Insbesondere erfüllt auch die approximierende Form dieselben Ungleichungen.

5. Durch verschiedene Wahlen der konvexen Teilmengen als Unterraum des Hilbert-Raumes $L^2(X)$ ergeben sich Charakterisierungen für die Positivitätserhaltung der Halbgruppe und der L^∞-Kontraktivität. Durch Adjungieren erhält man ebenfalls eine Charakterisierung der L^1-Kontraktivität. Durch Verschieben kommt man zu Charakterisierungen für die exponentielle L^1- oder L^∞-Beschränktheit der Halbgruppe.

6. Die zu einer positivitätserhaltenden Halbgruppe gehörende approximierende Form besitzt unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an X eine Integraldarstellung mit reellen Maßen, die außerhalb der Diagonalen negativ sind. Mittels der in 4. erwähnten Ungleichungen wird bewiesen, dass ebenfalls die zu L^1- und L^∞-kontraktiven Halbgruppen gehörenden approximierenden Formen eine Integraldarstellung besitzen, wobei die Maße diagonaldominant sind.

7. Die Halbgruppe einer Dirichlet-Form kann durch die Halbgruppe einer anderen Dirichlet-Form abgeschätzt werden, wenn diese aus der ersten durch bestimmte kleine negative Störungen hervorgeht ([BGK09]). Es wird bewiesen, dass solche Abschätzungen auch für die Formen positivitätserhaltender Halbgruppen und allgemeiner Störungen gilt. Insbesondere geht aus diesem Beweis hervor, welche Rolle die Definitionsbereiche der zwei Formen für die Abschätzungen haben. Darüber hinaus wird das bekannte Resultat, dass zu Dirichlet-Formen assoziierte Halbgruppen durch Störungen der Form mit positiven Maßen nicht größer werden, auf positivitätserhaltende Halbgruppen und positive Störungen verallgemeinert. Eine Umkehrung der Aussage wird ebenfalls bewiesen.

8. Die L^p-Normen von Halbgruppen müssen nicht exponentiell beschränkt sein. Allgemeinere Schranken können mit Hilfe des Störungsresultates von Miyadera nachgewiesen werden ([Voi77]).

9. Die zu einer symmetrischen Dirichlet-Form assoziierte Halbgruppe ist sowohl positivitätserhaltend, als auch L^1- und L^∞-kontraktiv. Somit besitzt auch die approximierende Form einer Dirichlet-Form eine Integraldarstellung. Ist die Dirichlet-Form zusätzlich regulär, besitzt auch sie eine Integraldarstellung, die Darstellungsformel von Beurling-Deny.

10. Aus den verschiedenen Teilen der Darstellungsformel von Beurling-Deny lassen sich verschiedene Energiemaße einer Dirichlet-Form definieren. Es werden bekannte Aussagen über das stark-lokale Energiemaß, wie die Produkt- und die Kettenregel, verallgemeinert.

11. Liegt eine Funktion u im Definitionsbereich einer Dirichlet-Form und liegt v lokal im Definitionsbereich und ist auf geeignete Weise beschränkt, so liegt auch das Produkt uv im Definitionsbereich.

12. Betrachtet man anstelle der Halbgruppe $(\mathrm{e}^{-tA})_{t\geq 0}$ die Halbgruppe $(\phi^{-1}\,\mathrm{e}^{-tA}\,\phi)_{t\geq 0}$ mit einem geeigneten Multiplikationsoperator ϕ, so lassen sich aus globalen Abschätzungen an die L^2-Norm bzw. an den Kern der modifizierten Halbgruppe lokale Abschätzungen an die Norm bzw. den Kern der ursprünglichen Halbgruppe ableiten. Ist ϕ zulässig, so ist die zur modifizierten Halbgruppe assoziierte Form $a_\phi(\cdot,\cdot) = a(\phi\cdot, \phi^{-1}\cdot)$.

13. Eine L^2-Normschranke an eine Halbgruppe ist äquivalent zu einer unteren Schranke an die assoziierte Form. Eine globale Schranke an den Kern einer Halbgruppe, oder äquivalent Ultrakontraktivität, lässt sich unter anderem mit Hilfe einer L^1-Schranke an die Halbgruppe und ihrer Adjungierten und einer Nash-Ungleichung oder mit einer L^2-Schranke und der iterierten Anwendung einer Nash-Ungleichung nachweisen. Die drei aus diesen Möglichkeiten resultierenden Varianten, Schranken an die Halbgruppe nachzuweisen, werden in dieser Arbeit anhand von Beispielen präsentiert.

14. Die Anwendung der ersten und dritten Variante auf Dirichlet-Formen ist in der Literatur bereits etabliert. Dabei wird typischerweise vorausgesetzt, dass $|a - a_\phi|$ durch eine Konstante λ beschränkt ist, und dass ϕ durch eine geeignete Metrik generiert ist. Ausnahme hiervon ist der Artikel [Dav95], in dem $|a - a_\phi| \leq \frac{1}{4}a + \lambda$ vorausgesetzt wird, und a zu einem Differentialoperator $2n$-ter Ordnung assoziiert ist. Dort werden für n groß genug Kernabschätzungen über eine L^∞-Einbettung bewiesen. Löst man sich von den zwei genannten Annahmen, so können neue Abschätzungen an die Halbgruppen erzielt werden.

15. Um L^2-Abschätzungen für die Halbgruppen von Dirichlet-Formen nachzuweisen, genügt die Bedingung $\Re(a - a_\phi) \leq a + \lambda$. Für die Kernabschätzungen genügt die Bedingung $-\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>} \leq \frac{1}{n}a + c(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $c(n)$ sub-exponentiell wachsend ist und $-\mu^{(d)}_{<\phi,\phi^{-1}>}$ im wesentlichen dem Ausdruck $\Re(a - a_\phi)$ entspricht. Die Bedingung, dass ϕ durch eine passende Metrik generiert ist, wird nicht benötigt, ist aber für die Formulierung der entsprechenden Abschätzungen manchmal hilfreich.

16. Anhand unterschiedlicher Beispiele wird gezeigt, dass sich mit diesen Methoden neue oder bessere Abschätzungen an die Halbgruppen von Formen erzielen lassen. In verschiedenen Kontexten wird gezeigt, wie ein vorhandenes Potential verbesserte Abschätzungen liefert. Für den Kern der Halbgruppe zu einem Laplace-Operator mit Drift werden Abschätzungen mit der exakten Konstante im Exponenten, die den Driftterm berücksichtigen, bewiesen. Für Dirichlet-Formen auf Bäumen wird eine Abschätzung gezeigt, die die lokal-globale Struktur des Baumes beachtet. Für eine singuläre Diffusion, für die bisher keine Kernabschätzungen bekannt waren, wird eine Kernabschätzung bewiesen, die sowohl den stetigen, als auch den singulären Anteil respektiert. Es wird eine Kernabschätzung für allgemeine Formen (nicht notwendigerweise Dirichlet-Formen) auf diskreten Mengen bewiesen. Diese Beispiele stehen exemplarisch für die vielen Möglichkeiten mit den in dieser Arbeit verbesserten Methoden neue Abschätzungen zu erzielen.

17. Komplexe Maße werden in der Literatur üblicherweise als endliche komplexe Maße definiert. Da in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen (unbeschränkte) komplexe Maße betrachtet werden, wird, inspiriert von Ausdrücken der Form $f\nu$ mit einer komplexen messbaren Funktion f und einem Maß ν, der Begriff des komplexen Maßes neu definiert. Um dem Problem im Zusammenhang mit nicht absolut summierbaren Reihen zu begegnen, wird der Begriff der σ-Additivität entsprechend angepasst. Für Maße ist dieser Unterschied rein formal und dieser neue Begriff des komplexen Maßes ist somit konform zur Maßtheorie.

18. Für diese komplexen Maße wird folgendes bewiesen: Die Totalvariation eines komplexen Maßes ist ein Maß. Ein σ-endliches komplexes Maß besitzt eine Polardarstellung. Die Summe zweier σ-endlicher komplexer Maße existiert und ist eindeutig. Ein geeignet beschränkter komplexer Inhalt kann eindeutig zu einem komplexen Maß fortgesetzt werden. Weiterhin wird für ein komplexes Maß mit Darstellung $f\nu$ konform zur Maßtheorie ein Integral definiert, das unabhängig von der entsprechenden Darstellung ist.

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 28.11.2011

Daniel Wingert