
Transparente Randbedingungen für längshomogene Wellenleiterstrukturen

Transparent boundary condition for longitudinally homogeneous waveguides

vom Fachbereich ETIT der Technischen Universität Darmstadt

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation von Mikhail Patrushev aus

St. Petersburg/Russland

Tag der Einreichung:

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
 2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Rolf Schuhmann
- Darmstadt 2021



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Elektrotechnik
und Informationstechnik
Institut für Teilchenbeschleunigung
und Elektromagnetische Felder

Transparente Randbedingungen für längshomogene Wellenleiterstrukturen
Transparent boundary condition for longitudinally homogeneous waveguides

vom Fachbereich ETIT der Technischen Universität Darmstadt

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

Genehmigte Dissertation von Mikhail Patrushev aus St. Petersburg/-Russland

- 1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland**
- 2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Rolf Schuhmann**

Darmstadt 2021

Tag der mündlichen Prüfung: 15.07.2020

Veröffentlicht unter CC BY-SA 4.0 International
<https://creativecommons.org/licenses>

Erklärung laut Promotionsordnung

§ 8 Abs. 1 lit. c PromO

Ich versichere hiermit, dass die elektronische Version meiner Dissertation mit der schriftlichen Version übereinstimmt.

§ 8 Abs. 1 lit. d PromO

Ich versichere hiermit, dass zu einem vorherigen Zeitpunkt noch keine Promotion versucht wurde. In diesem Fall sind nähere Angaben über Zeitpunkt, Hochschule, Dissertationsthema und Ergebnis dieses Versuchs mitzuteilen.

§ 9 Abs. 1 PromO

Ich versichere hiermit, dass die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen verfasst wurde.

§ 9 Abs. 2 PromO

Die Arbeit hat bisher noch nicht zu Prüfungszwecken gedient.

Darmstadt, den 28. April 2020

(Mikhail Patrushev)



Kurzfassung

Berechnungen und Simulationen der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen entlang längshomogener Wellenleiter werden mithilfe zweidimensionaler Diskretisierungsverfahren durchgeführt. Abhängig von der Anwendung werden entsprechende numerische Randbedingungen verwendet. Diese lassen sich bei transversal offenen Wellenleitern durch geschlossene oder absorbierende Randbedingungen annähern, was zur Verfälschung des realen Modells führt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode zur Modellierung von offenen Randbedingungen basiert auf dem Kirchhoff-Integral und wurde für das Diskretisierungsverfahren FIT implementiert. Die vorgestellte Randbedingung wird mit ausgewählten konventionellen Lösungsansätzen verglichen.



Abstract

Simulations of electromagnetic wave transportation along waveguides are accomplished by discretization methods such as the Finite Integration Technique (FIT) or the Finite Element Method (FEM). For longitudinally homogeneous and transversely unbounded waveguides these simulations can be approximated by closed or absorbing boundaries. However, these distort the original physical model. In this thesis a boundary condition for transversally open waveguides is presented based on the Kirchhoff integral which has been implemented within the framework of FIT. The solution is compared with selected conventional methods in terms of computational effort and memory consumption.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Übersicht	2
2. Grundlagen	3
2.1. Maxwellsche Gleichungen	3
2.2. Finite Integrationstechnik	4
2.2.1. Zweidimensionale Formulierung von FIT	8
2.3. Randbedingungen	9
2.3.1. Perfekter elektrischer Leiter	10
2.3.2. Perfekter magnetischer Leiter	11
2.3.3. Perfectly matched layer	12
2.4. Längshomogene Wellenleiterstrukturen	14
2.5. Moden in Wellenleitern	15
2.6. Kirchhoff-Integral	19
3. Längshomogene offene Wellenleiter	25
3.1. Eigenwertproblem für offene Wellenleiter	26
3.1.1. Elektrische Leiter im homogenen Material	27
3.1.2. Inhomogene Materialverteilung ohne elektrischer Leiter	28
3.1.3. Inhomogene Materialverteilung mit elektrischen Leitern	28
3.2. Konventionelle Lösungsmethoden	29
3.2.1. Geschlossene Ränder	29
3.2.2. Absorbierende Ränder	30
3.2.3. Randlementemethode	31
4. Kirchhoff-Integral-Rand	33
4.1. Einbettung des Kirchhoff-Integral-Randes in FIT	34
4.2. Linearisierung des Eigenwertproblems	40
4.2.1. Linearisierung durch polynomiale Darstellung	40
4.2.2. Linearisierung mithilfe der Fixpunktiteration	42
4.3. Berücksichtigung der Singularität	44

4.4.	KIR-Konfigurationsparameter	47
4.4.1.	KIR-Abstandsparameter	47
4.4.2.	KIR-Quellenanzahl-Parameter	49
4.5.	Symmetrierandbedingung	50
4.6.	Einsatz in unterschiedlichen Frequenzbereichen	52
4.7.	Empfohlene Anwendungen	53
5.	Fehler- und Aufwandsanalyse	55
5.1.	Rechenbeispiel – Offener Wellenleiter	55
5.2.	Approximationen	59
5.2.1.	Numerische Ableitung der elektrischen Feldstärke	60
5.2.2.	Numerische Integration der elektrischen Feldstärke	60
5.2.3.	Numerische Integration der Greenschen Funktion	61
5.3.	Fehleranalyse und Fehlerordnung	62
5.3.1.	Fixpunktiteration	62
5.3.2.	Integral der Greenschen Funktion	68
5.3.3.	Anpassung des Quellenanzahl-Parameters	69
5.3.4.	Anpassung des Abstandsparameters	71
5.3.5.	Berücksichtigung der Singularität	73
5.4.	Aufwandskosten	75
5.4.1.	Fixpunktiteration	76
5.4.2.	Anpassung des Quellenanzahl-Parameters	77
5.4.3.	Anpassung des Abstandsparameters	78
6.	Anwendungen	81
6.1.	Zweidrahtleitung	82
6.1.1.	Referenzlösung	83
6.1.2.	Untersuchung der Eigenvektoren	83
6.2.	Lichtwellenleiter	85
6.2.1.	Referenzlösung	86
6.2.2.	Untersuchung der Eigenvektoren	86
6.3.	Mikrostreifenleiter	89
6.3.1.	Referenzlösung	90
6.3.2.	Untersuchung der Eigenvektoren	90
7.	Zusammenfassung und Ausblick	93
A.	Implementierung	95
Bibliography		115

1 Einleitung

1.1 Motivation

Seit über 140 Jahren sind die Maxwell-Gleichungen bekannt und bieten Möglichkeiten zur Berechnung elektromagnetischer Felder in offenen und geschlossenen Gebieten. Basierend auf diesen Gleichungen wurden für Feldberechnungen zunächst analytische Lösungen entwickelt. Bezugnehmend auf die praktischen Anforderungen sind diese Lösungen schnell an ihre Grenzen gestoßen. Dies führte zur Notwendigkeit numerische Lösungswege zu suchen und förderte die Erforschung von Raumdiskretisierungsmethoden. Dabei entstanden Verfahren wie die Finite Differenzenmethode (FD) und Finite Integrationstechnik (FIT), mithilfe derer unter anderem Simulationen von elektromagnetischen Feldern in diskretisierten Gebieten ermöglicht wurden.

Numerische Berechnungen von elektromagnetischen Feldern sind sowohl in der Industrie als auch in der Forschung unumgänglich. Kleine Strukturen wie Leiterplattenbauteile und große Modelle wie Flugzeuge lassen sich mithilfe der Volumendiskretisierungsmethode FIT in unterschiedlichen Frequenzbereichen und im Zeitbereich simulieren und untersuchen.

Wie jede Volumendiskretisierungsmethode benötigt FIT eine genaue Definition des Randes, der das Rechengebiet umschließt. Geschlossene Ränder, wie z. B. ein guter elektrischer Leiter, können problemlos beschrieben werden. Absorbierende Ränder können ebenfalls implementiert und verwendet werden. Ein transversal offener Rand dagegen impliziert, dass sich das transversale elektromagnetische Feld unendlich weit ausbreiten kann. Es stellt eine technische Herausforderung in Bezug auf die Lösungsgenauigkeit dar, denn numerisch können nur endliche Volumen diskretisiert werden.

Diese Arbeit befasst sich mit der Realisierung einer offenen Randbedingung für FIT bei längshomogenen und transversal offenen Strukturen an Beispielen von offenen Wellenleitern.

1.2 Übersicht

Zunächst werden im Anschluss an dieser Einleitung die notwendigen Grundlagen für die Beschreibung einer offenen Randbedingung vorgestellt, die auch als transparenter Rand bezeichnet wird. Die Grundlagen gehen besonders auf die Raumdiskretisierungsmethode FIT, sowie auf unterschiedliche Randbedingungen ein und stellen das Kirchhoff-Integral vor, mit dessen Hilfe sich eine offene Randbedingung realisieren lässt.

Das darauf folgende Kapitel beschreibt längshomogene und transversal offene Wellenleiter. Das Grundproblem, mit dem sich die vorliegende Arbeit beschäftigt, wird dort genauer definiert. Im Anschluss werden die konventionellen Lösungsmethoden vorgestellt und diskutiert.

Nach der Grundlageneinführung und Definition der Problemstellung wird der Hauptansatz – der Kirchhoff-Integral-Rand vorgestellt. Die dazugehörigen Eigenschaften und Implementierungsdetails werden ebenfalls beschrieben. Das darauf folgende Kapitel 5 ist der Fehler- und Aufwandsanalyse des vorgestellten Randes gewidmet.

Als Nächstes werden im Kapitel 6 drei unterschiedliche Anwendungen vorgestellt, um den Kirchhoff-Integral-Rand mit drei konventionellen Rändern zu vergleichen.

Die Zusammenfassung schließt diese Arbeit nach dem sechsten Kapitel ab.

2 Grundlagen

2.1 Maxwell'sche Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen [1] in Integralform unter Berücksichtigung ruhender Medien lauten

$$\oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = - \iint_A \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (2.1)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A} \quad (2.2)$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.3)$$

$$\oiint_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (2.4)$$

$$\forall A, V \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Diese lassen sich mithilfe der Sätze von Gauss und Stokes in entsprechende Differentialformen überführen:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t) + \vec{J}(\vec{r}, t) \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t). \quad (2.9)$$

Zusätzlich zu den vier Maxwell'schen Gleichungen existieren drei Materialbeziehungen, über die die Feldstärken \vec{E} und \vec{H} und die Flussdichten \vec{D} , \vec{B} und

\vec{J} miteinander verknüpft werden. Für lineare, isotrope und zeitunabhängige Medien lauten diese wie folgt:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu_r(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.11)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sigma(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (2.12)$$

mit ε_0 als die Permittivität im Vakuum, ε_r als die relative Permittivität, μ_0 als die Permeabilität im Vakuum, μ_r als die relative Permeabilität und σ als die elektrische Leitfähigkeit. Hierbei ist nur der Strom berücksichtigt, der durch die elektrische Leitfähigkeit des Materials entsteht. Eingeprägte Ströme oder Ströme durch freie bewegte Ladungen werden hier ausgeschlossen.

Unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit der jeweiligen Felder lassen sich die Maxwell'schen Gleichungen 2.1-2.9 in den Frequenzbereich überführen. Die Felder lassen sich in Form von

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\vec{A}}(\vec{r}) e^{j\omega t}) \quad (2.13)$$

beschreiben (mit \vec{a} als das resultierende Feld, $\underline{\vec{A}}$ als der Phasor des Feldes, \vec{r} als ein räumlicher Vektor, t als die skalare Zeitvariable und ω als die Kreisfrequenz). Damit kann die zeitliche Ableitung in den Maxwell'schen Gleichungen durch $j\omega$ ersetzt werden. Der Term $e^{j\omega t}$ kürzt sich aus den Maxwell'schen Gleichung heraus [1]. Die dadurch resultierenden Maxwell'schen Gleichungen im Frequenzbereich sehen in Differentialform wie folgt aus:

$$\nabla \times \underline{\vec{E}}(\vec{r}) = -j\omega \underline{\vec{B}}(\vec{r}) \quad (2.14)$$

$$\nabla \times \underline{\vec{H}}(\vec{r}) = j\omega \underline{\vec{D}}(\vec{r}) + \underline{\vec{J}}(\vec{r}) \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{B}}(\vec{r}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \underline{\vec{D}}(\vec{r}) = \underline{\rho}(\vec{r}). \quad (2.17)$$

2.2 Finite Integrationstechnik

Manche Probleme, die sich nicht analytisch berechnen lassen, können durch numerische Diskretisierungsverfahren gelöst werden.

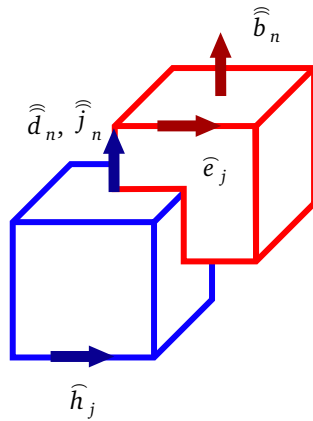


Abbildung 2.1.: Darstellung von Gitterzellen des primären (in rot) und dualen (in blau) Gitters von FIT am Beispiel eines Ausschnitts aus dem kartesischen Gitter. An den Gitterkanten sind elektrische und magnetische Spannungen und an den Flächen elektrische und magnetische Flüsse allokiert.

Ein Raum, in dem elektromagnetische Felder eines bestimmten Problems simuliert werden, kann mit einem solchen Verfahren diskretisiert werden. Die Finite Integrationsmethode [2], weiter als FIT oder FI-Methode bezeichnet, ist ein Volumendiskretisierungsverfahren, das die Maxwell'schen Gleichungen auf einem dreidimensionalen Gitter wiedergibt.

Die FI-Methode verwendet ein primäres und ein duales Gitter. In der Abbildung 2.1 ist jeweils eine primäre und eine duale Gitterzelle dargestellt. Jede Kante des dualen Gitters schneidet genau eine Fläche des primären Gitters und umgekehrt. Im speziellen Fall des äquidistanten Gitters sind diese jeweils um die Hälfte der Kantenlänge in jeweilige Koordinatenrichtung verschoben. Anstelle von Feldstärken und Flussdichten werden bei FIT entsprechende Integralausdrücke verwendet

$$\widehat{e}_j = \int_{s_j} \underline{\underline{E}} \cdot d\vec{s}, \quad \widehat{h}_j = \int_{\tilde{s}_j} \underline{\underline{H}} \cdot d\vec{s},$$

$$\widehat{d}_n = \iint_{\tilde{A}_n} \underline{\underline{D}} \cdot d\vec{A}, \quad \widehat{b}_n = \iint_{A_n} \underline{\underline{B}} \cdot d\vec{A}, \quad \widehat{j}_n = \iint_{\tilde{A}_n} \underline{\underline{J}} \cdot d\vec{A}.$$

Feldgrößen werden als algebraische Vektoren gespeichert und auf dem primären und dualen Gitter allokiert. Bei der Betrachtung eines Hexaedergitters in kartesischen Koordinaten besteht dieses aus $N_p = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ Gitterpunkten, $3N_p$ Gitterflächen und $3N_p$ Gitterkanten, bei denen N_x, N_y, N_z die Anzahl der Punkte in jeweiliger Koordinatenrichtung sind. Die auf diesem Gitter allokierten Felder werden über mathematische Operatoren verknüpft.

In FIT wird die Rotation rot durch die Matrix C , der Gradient grad durch die Matrix G und die Divergenz div durch die Matrix S repräsentiert. Diese Operatoren bestehen aus den diskrete Differenzmatrizen P_x, P_y, P_z [2] und sind wie folgt aufgebaut:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}, \quad S = [P_x \quad P_y \quad P_z].$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & P_z^T & -P_y^T \\ -P_z^T & 0 & P_x^T \\ P_y^T & -P_x^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = [-P_x^T \quad -P_y^T \quad -P_z^T].$$

Die diskreten Maxwell'schen Gleichungen sehen dann wie folgt aus:

$$C \hat{e} = -\frac{\partial}{\partial t} \hat{\hat{b}} \quad (2.18)$$

$$\tilde{C} \hat{h} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\hat{d}} + \hat{\hat{j}} \quad (2.19)$$

$$\tilde{S} \hat{\hat{d}} = q \quad (2.20)$$

$$S \hat{\hat{b}} = 0, \quad (2.21)$$

wobei mit Tilden gekennzeichneten Operatoren auf Größen des dualen Gitters wirken.

Die Materialbeziehungen 2.10, 2.11, 2.12 werden in FIT durch Materialma-

trizen beschrieben. Diese Matrizen haben im Fall eines orthogonalen Gitters und isotropen Materialien eine Diagonalstruktur und sind symmetrisch. Die diskreten Materialbeziehungen sehen wie folgt aus:

$$\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{M}_\mu \widehat{\mathbf{h}} \quad (2.22)$$

$$\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{M}_\varepsilon \widehat{\mathbf{e}} \quad (2.23)$$

$$\widehat{\mathbf{j}} = \mathbf{M}_\sigma \widehat{\mathbf{e}}. \quad (2.24)$$

Mit den vorgestellten diskreten Maxwell-Gleichungen in FIT-Notation kann nun die dreidimensionale Wellengleichung aufgestellt werden. Unter der Annahme harmonischer Zeitabhängigkeit (2.13) und Substitution der magnetischen durch elektrische Felder kann man die dreidimensionale Eigenwertgleichung im verlustlosen Fall ($\widehat{\mathbf{j}} = 0$) wie folgt formulieren:

$$\underbrace{\mathbf{M}_\varepsilon^{-1} \widetilde{\mathbf{C}} \mathbf{M}_{\mu^{-1}} \mathbf{C}}_{A_{CC}} \widehat{\mathbf{e}} = \omega^2 \widehat{\mathbf{e}} \quad (2.25)$$

Die Systemmatrix A_{CC} hat die Dimension $3 N_p$, ist dünnbesetzt, unsymmetrisch, jedoch symmetrisierbar [2] und hat eine Bandstruktur wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

Das Eigenwertproblem 2.25 lässt sich symmetrisieren. Durch die Transformation $\widehat{\mathbf{e}}' = \mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} \widehat{\mathbf{e}}$ ändert sich das Eigenwertproblem zu:

$$\underbrace{\mathbf{M}_\varepsilon^{1/2} A_{CC} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2}}_{A_{CC}'} \widehat{\mathbf{e}}' = \omega^2 \widehat{\mathbf{e}}'. \quad (2.26)$$

Dadurch, dass die Diagonalmatrizen $\mathbf{M}_\mu, \mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{M}_\sigma$ positiv definit sind, können „Wurzelmatrizen“

$$\mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_\varepsilon^{-1} = \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2} \mathbf{M}_\varepsilon^{-1/2}$$

$$\mathbf{M}_\sigma^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_\sigma^{-1} = \mathbf{M}_\sigma^{-1/2} \mathbf{M}_\sigma^{-1/2}$$

$$\mathbf{M}_\mu^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_\mu^{-1} = \mathbf{M}_\mu^{-1/2} \mathbf{M}_\mu^{-1/2}$$

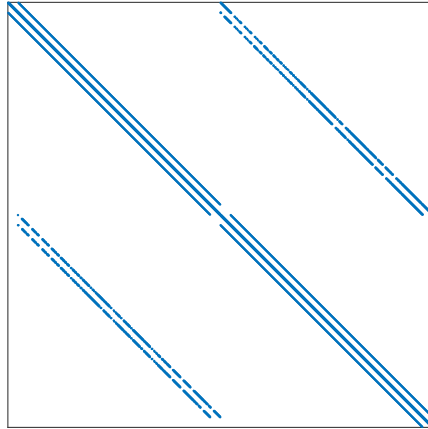


Abbildung 2.2.: Besetzungsstruktur der Systemmatrix des zweidimensionalen FIT-Eigenwertproblems 2.25.

aufgebaut werden. Obwohl im Rahmen dieser Arbeit der Schwerpunkt auf die Berechnung des elektrischen Feldes gelegt wird, lässt sich analog dazu ebenfalls ein Eigenwertproblem für die magnetische Feldstärke aufstellen. Dieses sieht in FIT-Notation wie folgt aus:

$$M_{\mu}^{-1} C M_{\varepsilon}^{-1} \tilde{C} \hat{h} = \omega^2 \hat{h} \quad (2.27)$$

Obwohl die Eigenwerte von 2.25 und 2.26 identisch sind, ist die Matrix $A_{CC'}$ im Gegensatz zu A_{CC} symmetrisch.

2.2.1 Zweidimensionale Formulierung von FIT

Unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit (2.13) und der Ausnutzung der Divergenzfreiheit von \vec{D} kann die dreidimensionale Eigenwertgleichung 2.25 in ein zweidimensionales System überführt werden [2], [3]. Für die Berechnung der Wellenausbreitung entlang einer längshomogenen Struktur wie in Abbildung 2.3 lässt sich eine zweidimensionale Eigenwertgleichung formen.

Zuerst wird die Gitterschrittweite Δz in die Längsrichtung als infinitesimal

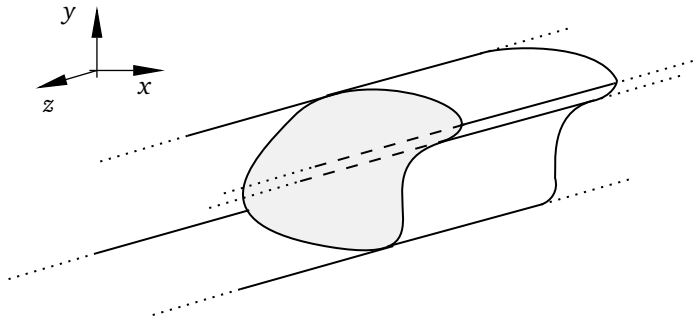


Abbildung 2.3.: Eine Struktur mit einer Längshomogenität in Koordinatenrichtung z .

klein gewählt. Dadurch lässt sich die Ableitung in die längshomogene Koordinatenrichtung (in diesem Fall z) durch deren bekannten Verlauf mit dem Term $-jk_z$ ersetzen, bei dem k_z die Propagationskonstante ist. Führt man diese Substitution im Rahmen des FIT-Frameworks durch, ändert sich die Matrix P_z und \tilde{P}_z wie folgt:

$$P_z = \tilde{P}_z = -jk_z \Delta z I, \quad (2.28)$$

wobei I die Einheitsmatrix darstellt. Setzt man 2.28 in 2.25 ein und wendet das Schur-Komplement [4] an, lässt sich die Gitterlänge Δz aus der gesamten Gleichung herauskürzen. Man erhält eine Eigenwertgleichung für das zweidimensionale Gebiet:

$$(A_{2D}(\omega)) \hat{e}_\perp = k_z^2 \hat{e}_\perp, \quad (2.29)$$

mit A_{2D} als Systemmatrix und \hat{e}_\perp als transversaler elektrischer Feldvektor [3]. Die Eigenwertmatrix A_{2D} ist im allgemeinen Fall unsymmetrisch und nicht symmetrisierbar [2], [3].

2.3 Randbedingungen

Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in endlichen Gebieten werden Randbedingungen benötigt, die den Abschluss des betrachteten Gebiets definieren. Elektromagnetische Felder können dadurch innerhalb dieses Gebiets

berechnet werden. Numerische Raumdiskretisierungsverfahren wie FIT zerlegen das innere Rechengebiet mithilfe eines Gitters in elementare Einheiten, die miteinander gekoppelt werden. Dieses Gebiet kann nicht unendlich weit ausgedehnt werden und wird mit einem Rand abgeschlossen. Felder, die auf dem Gitter allokiert sind und bei einer Simulation berechnet werden, hängen von der gewählten Randbedingung ab. Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei klassische Arten von Randbedingungen für FIT untersucht und mit der neu entwickelten verglichen: (i) geschlossene und (ii) absorbierende Ränder. Mithilfe von geschlossenen Randbedingungen lässt sich ein Wellenleiter berechnen, der mit einem bestimmten Material abgeschlossen ist. Ein Beispiel dafür ist ein perfekt leitendes Metall. Absorbierende Ränder dagegen sind so aufgebaut, dass diese die Wellenenergie von einfallenden Wellen absorbieren. Im Folgenden werden diese zwei Arten von Randbedingungen kurz vorgestellt.

2.3.1 Perfekter elektrischer Leiter

Eine geschlossene Randbedingung mit verschwindender tangentialer elektrischer Feldstärke lässt sich mit Hilfe eines ideal elektrisch leitfähigen Materials (PEC) am Rand beschreiben. Wellenleiter, die mit einem Metall oder einem anderen gut leitenden Material abgeschlossen sind, können mit einem PEC-Rand modelliert und simuliert werden, sofern die Feldeindringtiefe viel kleiner als der Querschnitt des Wellenleiters ist [1]. Ein Beispiel für solche Wellenleiter sind Hohlleiter oder Koaxialleiter mit Kupferberandung, die mit höheren Frequenzen betrieben werden. Mathematisch beschreibt der PEC-Rand eine Dirichlet-Randbedingung bzgl. der tangentialen Komponente des elektrischen Feldes mit einem fest vorgegebenen Randwert null. Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes \vec{E} verschwindet am PEC-Rand genauso wie die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} . Ebenso kann der PEC-Rand bei bestimmten Anordnungen als eine Symmetriebedingung eingesetzt werden, um Rechenaufwand zu sparen.

In der Diskretisierungsmethode FIT kann der PEC-Rand an rechteckigen Gitterzellen des Rechengebiets trivial implementiert werden, indem die Randwerte der jeweiligen Feldkomponenten zu null gesetzt werden. In einem mit FIT formulierten Eigenwertproblem wie Gl. 2.25 und 2.29 muss dazu nur eine der beiden Materialmatrizen M_{ϵ}^{-1} oder M_{μ}^{-1} angepasst werden, wobei die Bandstruktur der FIT-Systemmatrix weiterhin erhalten bleibt [2]. Die Nullwerte können

dann aus der Systemmatrix entfernt werden. Meistens erhöht dies den Rechenaufwand und spart Speicherplatz.

2.3.2 Perfekter magnetischer Leiter

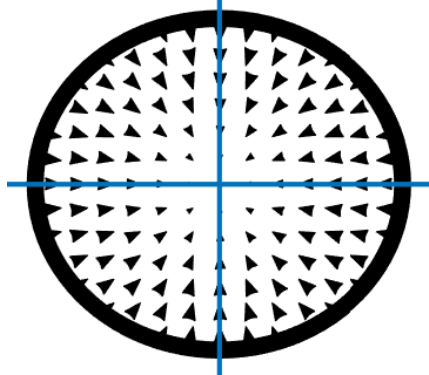


Abbildung 2.4.: Transversales elektrisches Vektorfeld der TM_{01} -Mode im zylindrischen Hohlleiter.

Eine geschlossene Randbedingung mit verschwindender tangentialer magnetischer Feldstärke lässt sich mithilfe eines ideal elektrisch leitfähigen Materials (PMC) beschreiben. Mathematisch beschreibt der PMC-Rand eine Dirichlet-Randbedingung bzgl. der tangentialen Komponente der magnetischen Feldstärke. Bei dem magnetischen Rand verschwindet die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke und die Normalkomponente der elektrischen Flüsse. PMC wird bei Simulationen als eine Symmetrierandbedingung eingesetzt, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Dazu muss jedoch vor der Simulation eine entsprechende Feldverteilung im betrachteten Gebiet angenommen werden.

In der Abbildung 2.4 ist zur Veranschaulichung das transversale elektrische Vektorfeld der TM_{01} -Mode im zylindrischen Hohlleiter dargestellt. Durch die Symmetrie des Feldes lässt sich das Diskretisierungsgebiet auf ein Viertel reduzieren.

Ebenso wie PEC kann PMC in der Diskretisierungsmethode FIT bei einem

rechteckigen Rechengebietsgitter implementiert werden. Im Fall der Eigenwertgleichungen 2.25 und 2.29 wird an den FIT-Matrizen keine Veränderung vorgenommen.

2.3.3 Perfectly matched layer

Die Materialanordnung „Perfectly matched layer“ (PML) beschreibt einen absorbierenden Rand, der von Jean-Pierre Bérenger in 1993 vorgestellt wurde [5]. Die Grundidee besteht darin, am Rand des Rechengebiets ein unphysikalisches Material einzusetzen, das eine einfallende Wellenenergie mit sehr geringer Reflexion absorbiert (s. Abbildung 2.5). Das eingesetzte Material besitzt am Rand die gleiche Wellenimpedanz wie das Hintergrundmaterial, wodurch im Idealfall keine Reflexion des Feldes am Materialrand stattfindet. Diese allgemeingültige Forderung gelingt jedoch in der Realität nur für normal auftreffende Wellenkomponenten. Je größer der Eintrittswinkel α , desto stärker wird die Reflexion.

Es existieren verschiedene numerische Typen und Umsetzungsmöglichkeiten von PML mit mehreren Materialschichten wie z. B. UPML oder CPML [6], [7], [8]. Die Beschreibung der Wirkung des Außenraumes auf die äußere Berandung des PML-Gebiets muss durch eine weitere Randbedingung erfolgen. Beispielsweise kann das Gebiet durch einen PEC- oder PMC-Rand abgeschlossen werden. Die hauptsächlichen Approximationsfehler von PML entstehen durch die mangelnde Absorptionsmöglichkeit des PML-Mediums. Das PML Medium hat eine positive Leitfähigkeit in 2 von 3 Raumrichtungen. Eventuell entstehende Reflexionen der Felder am Materialrand können daher die Lösung verfälschen. Des Weiteren existieren im Lösungsspektrum eines mit PML berandeten Modells unerwünschte unphysikalische Eigenmoden, die sogenannten Bérenger-Moden [9]. Diese können jedoch durch unterschiedliche Selektionsverfahren von physikalischen Lösungen getrennt werden, allerdings verbunden mit einem zusätzlichen Rechenaufwand im Post-Processing [10].

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine uniaxiale PML-Konfiguration (UPML) implementiert, bei der das Material in der PML-Schicht anisotrop ist. Dazu muss eine diagonale Matrix Λ eingeführt werden, die aus anisotropen und komple-

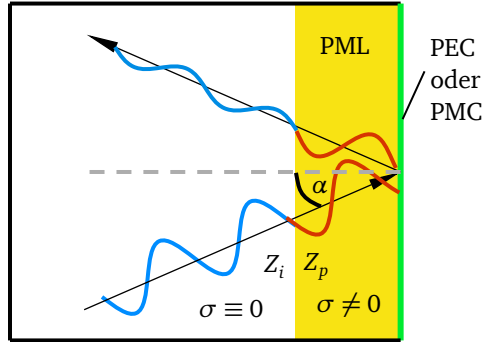


Abbildung 2.5.: Grafische Darstellung der Wirkungsweise einer PML-Randbedingung. Ein Teil der Energie der einfallenden Welle mit dem Eintrittswinkel α wird in der PML-Schicht absorbiert. Die PML-Schicht kann mit einem PEC- oder PMC-Rand abgeschlossen (hier in Grün) werden. Die Wellenimpedanz Z_p des PML-Materials gleicht am Übergang zum Innengebiet der Wellenimpedanz Z_i des Materials im Innengebiet.

nen Materialeinträgen besteht. Weiter kann Λ in die Maxwell-Gleichungen wie folgt integriert werden

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon \Lambda \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu \Lambda \vec{H} \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \underline{a} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{b} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{c} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

mit \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} als entsprechende Matrixeinträge. Diese werden so gewählt, dass die Feldreflexion beim Eintritt in die PML-Schicht minimiert wird. Beispielsweise für eine x -gerichtete UPML sieht Λ wie folgt aus:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \nu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \nu = 1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}, \quad (2.31)$$

mit σ als die PML-Leitfähigkeit. In FIT kann UPML implementiert werden, indem das unphysikalische Material in den Materialmatrizen M_ε^{-1} und M_μ^{-1} definiert wird. Die genaue Implementierung kann der Quelle [8] entnommen werden.

2.4 Längshomogene Wellenleiterstrukturen

Mit Wellenleitern lässt sich die elektromagnetische Energie bei hohen und niedrigen Wellenlängen im Bezug auf die Strukturabmessung transportieren. In der Industrie werden Wellenleiter unter anderem in der Beschleunigertechnik, Kommunikationstechnik oder in der technischen Optik verwendet [11]. Diese können sowohl transversal geschlossen als auch offen realisiert werden wie z. B. ein Hohlleiter oder eine im Freien liegende Zweidrahtleitung – siehe dazu Abbildung 2.6.

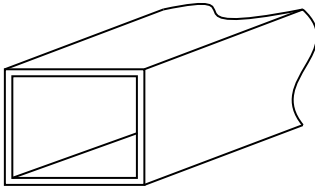
Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in diesen Leitern lässt sich mithilfe der Maxwellschen Gleichungen und entsprechender Randbedingungen berechnen.

Generell werden Berechnungen von elektromagnetischen Feldern in Wellenleitern durch dreidimensionale Simulationen ausgeführt. Im Frequenzbereich lässt sich die Komplexität der numerischen Berechnung bei längshomogenen Wellenleitern auf ein zweidimensionales Problem reduzieren. Dadurch können mögliche Wellenlösungen, die auch Moden genannt werden, mit weniger Rechenaufwand bestimmt werden. Um das dreidimensionale Problem auf zwei Dimensionen zu verringern, muss zuerst eine harmonische Zeitabhängigkeit der jeweiligen Felder (2.13) vorgegeben werden. Dadurch ergibt sich eine harmonische Wellenausbreitung in Längsrichtung. Die elektrischen und magnetischen Felder können dann in Form von

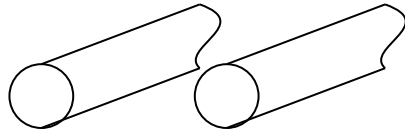
$$\vec{F}(x, y, z) = \underline{F}(x, y) e^{-jk_z z} \quad (2.32)$$

festgelegt werden (mit \underline{F} als ein Feldvektor und k_z als die Propagationskonstante der jeweiligen Mode) [1]. Man konzentriert sich nur auf quellenfreie Wellenleiter, wodurch die Quellenfreiheit der elektrischen Flussdichte $\text{div} \underline{D} = 0$ vorausgesetzt wird.

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen kann die Längskomponente der jeweiligen Mode durch die Transversalkomponenten im Frequenzbereich ausgedrückt werden.



Hohlleiter



Zweidrahtleitung

Abbildung 2.6.: Beispiele für einen geschlossenen und offenen Wellenleiter.

2.5 Moden in Wellenleitern

Die Moden sind Wellenformen, die in einer gegebenen Wellenleiterstruktur existieren und entlang eines bestimmten Bereichs des Wellenleiters geführt werden können. In einem Wellenleiter können unterschiedliche Typen von Moden vorkommen. Die Vereinigung aller Moden in einem bestimmten Wellenleiter wird hier als das Spektrum oder Modenspektrum [12] bezeichnet. Generell lässt sich das elektrische Feld in einem Wellenleiter als eine Summe der Moden aus dem kontinuierlichen und diskreten Spektrum beschreiben

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_j a_j \vec{E}_j(x, y) e^{\mp j k_z z} + \int_{-\infty}^{+\infty} c(k_z) \vec{E}_{\text{rad}}(x, y, z, k_z) dk_z, \quad (2.33)$$

mit c als die Amplitude und \vec{E}_{rad} als das elektrische Feld des kontinuierlichen Spektrums, a_j als die Amplitude und \vec{E}_j als das elektrische Feld der jeweiligen Mode aus dem diskreten Spektrum [13]. Die Maxwell'schen Gleichungen 2.14 und 2.15 lassen sich zu einem Eigenwertproblem umstellen. Dadurch, dass nur verlustfreie Materialien im Wellenleiter berücksichtigt werden, ist die in der Gleichung 2.7 vorkommende elektrische Stromdichte \vec{J} nicht vorhanden. Das führt zu folgender Eigenwertproblem-Formulierung:

$$\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) = \lambda \vec{E}, \quad \text{mit } \lambda = \frac{(2\pi f c)^2}{c_0^2}, \quad (2.34)$$

mit f_c als die Grenzfrequenz, c_0 als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ϵ_r als die relative Permittivität und μ_r als die relative Permeabilität. Durch die Annahme der Propagationskonstante $k_z = 0$ wird bei der Berechnung des Eigenwertproblems 2.34 aus dem Eigenwert λ die Grenzfrequenz f_c der entsprechenden Mode gewonnen. Aus dem Eigenvektor kann das gesuchte Vektorfeld \vec{E} rekonstruiert werden. Damit lassen sich die Moden aus dem diskreten Spektrum numerisch berechnen.

Das Modenspektrum kann abhängig von der Wellenleiterkonfiguration reelle, imaginäre und komplexe Moden enthalten [13]. Reelle Anteile des Spektrums werden mit propagierenden und imaginäre mit evaneszenten Moden assoziiert.

Propagierende Moden mit reellen Propagationskonstanten sind Wellenformen, die sich entlang einer gegebenen Wellenleiterstruktur ungedämpft ausbreiten können. Im Allgemeinen besitzt eine elektromagnetische Welle alle transversalen und longitudinalen Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes. Moden mit allen sechs Feldkomponenten werden als hybride Moden bezeichnet. Bei der Verwendung von verlustfreien Materialien im Wellenleiter können drei Sonderfälle spezifiziert werden:

1. Transversal elektrische (TE) Moden. Diese besitzen ausschließlich elektrische Transversal- und zusätzlich magnetische Längskomponenten. Bei kreiszylindrischen Wellenleitern werden TE-Moden niedrigster Ordnung auch als elektrische Monopolmoden bezeichnet.
2. Transversal magnetisch (TM) Moden. Diese besitzen ausschließlich magnetische Transversal- und zusätzlich elektrische Längskomponente. Bei kreiszylindrischen Wellenleitern werden TM-Moden niedrigster Ordnung auch als magnetische Monopolmoden bezeichnet.
3. Transversal elektromagnetische (TEM) Moden. Diese besitzen sowohl magnetische als auch elektrische Transversalkomponenten und keine Longitudinalkomponenten. Um eine TEM-Mode zu ermöglichen, muss der Wellenleiter mindestens zwei ideal elektrisch leitende Materialien besitzen.

Bei einer bestimmten Frequenz können mehrere Moden dieselbe Propagationskonstante haben. Diese Moden werden als degenerierte Moden bezeichnet.

Evaneszente Moden existieren aufgrund der Tatsache, dass eine gegebene Wellenleiterstruktur bei einer bestimmten Frequenz die entsprechende Wellenform

nicht verlustfrei transportieren kann. Diese Moden werden entlang des Wellenleiters reflektiert und die Amplitude dieser Wellen nimmt entlang des Leiters exponentiell ab. In einer längshomogenen, endlichen zweidimensionalen Struktur weist jede propagierende Mode, bis auf die TEM-Mode, in einem bestimmten Frequenzbereich einen evaneszenten Charakter auf. Die Abbildung 2.7 soll den Übergang von den evaneszenten zu den propagierenden Moden veranschaulichen.

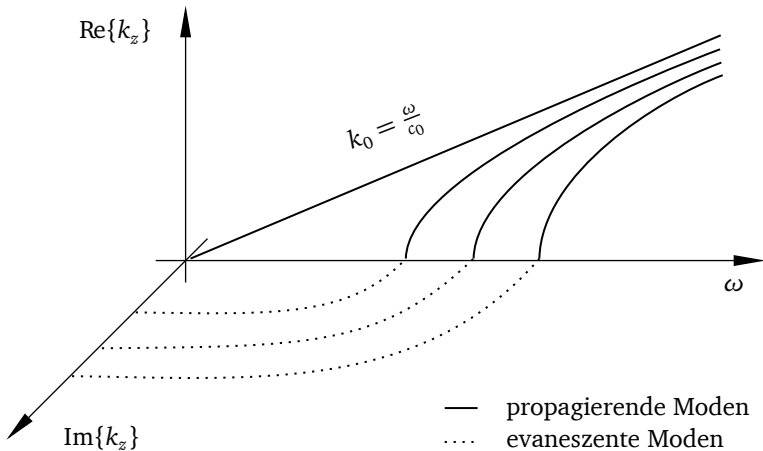


Abbildung 2.7.: Dispersionsdiagramm der Wellenausbreitung in einem Hohlleiter (s. Abbildung 2.6) mit perfekt leitenden Rändern.

Zusätzlich zu den propagierenden und evaneszenten Moden existieren auch komplexe Moden. Hybride Wellen können sich als solche komplexe Moden ausbreiten. Diese erscheinen immer als komplex konjugiertes Paar und transportieren nur Blindleistung [14], [15], [16], [17]. Komplexe Moden kommen im Lösungsspektrum bei transversal inhomogenen Wellenleitern vor. Es existieren jedoch Beispiele mit inhomogener Materialverteilung, die keine komplexen Moden aufweisen. Ein Beispiel dafür ist der Abbildung 2.8 zu entnehmen. Dabei ist der geschlossene Wellenleiter aus zwei Materialien aufgebaut. Ein Material mit dem einem Dielektrikum $\epsilon_r = 1$ und das andere Material mit dem Dielektrikum $\epsilon_r > 1$. Wenn die Materialinhomogenität nur in einer Koordinatenrichtung des gewählten Koordinatensystems stattfindet, enthält das

Spektrum keine komplexen Eigenwerte.

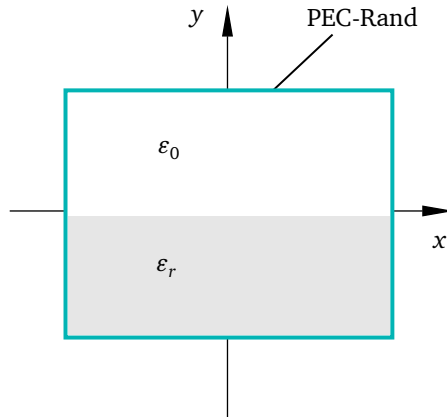


Abbildung 2.8.: Geschlossener Wellenleiter mit zwei unterschiedlichen Dielektrika. Bei dieser Konfiguration existieren keine komplexen Moden.

Bei geschlossenen Strukturen tritt die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen innerhalb des mit Wellenleiterrändern abgeschlossenen Gebiets auf. Bei der Annahme eines PEC-Materials im Außengebiet existieren außerhalb des Innengebiets eines geschlossenen Wellenleiters keine anderen Eigenmoden. Dagegen können offene Systeme auch außerhalb der Leiterstrukturen Moden enthalten. Beispielsweise können bei einem zylindrischen und transversal offenen dielektrischen Wellenleiter Feldverteilungen außerhalb des Hauptsubstrats existieren. So können Eigenmoden offener Wellenleiter mit einer imaginären Propagationskonstante nicht mit den evaneszenten Moden eines geschlossenen Wellenleiters gleichgesetzt werden. Dies ist wichtig, da das Lösungsspektrum von Problemen mit offenen und geschlossenen Rändern Eigenwertpaare mit imaginären Eigenwerten besitzt.

Nachdem für eine gegebene Wellenleiterstruktur die Moden numerisch berechnet wurden, kann das relevante elektrische Feld mithilfe von 2.33 berechnet werden.

2.6 Kirchhoff-Integral

In dieser Arbeit wird eine transparente Randbedingung für ein endliches Rechengebiet eines transversal nicht begrenzten Wellenleiters mithilfe des Kirchhoff-Integrals modelliert.

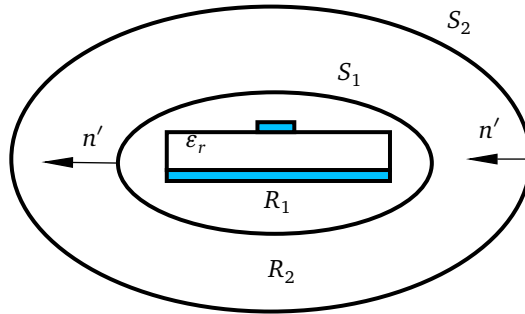


Abbildung 2.9.: Eine Mikrostreifenleitung im homogenen Freiraum umschlossen von einer Berandung S_1 und S_2 . Das Material im Gebiet R_2 ist homogen verteilt.

Zur Veranschaulichung soll das Kirchhoff-Integral mithilfe der Abbildung 2.9 erklärt und beschrieben werden. Man betrachtet ein Gebiet R_1 , das alle im Rechengebiet befindlichen Quellen und Materialübergänge enthält. Dieses Gebiet sei durch eine geschlossene Fläche S_1 umschlossen. Des Weiteren wird S_1 von einer zweiten geschlossenen Fläche S_2 umschlossen. Das Gebiet zwischen S_1 und S_2 wird mit R_2 bezeichnet.

Im Folgenden wird die verkürzte Version der Herleitung des Kirchhoff-Integrals eingeführt. Die komplette Herleitung kann in [1] nachgeschlagen werden. Zunächst betrachtet man der Einfachheit wegen eine skalare Gleichung, die sich im Anschluss auf die benötigten Vektorfelder erweitern lässt. Dazu eignet sich zunächst die Helmholtzgleichung

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.35)$$

mit $\psi(\vec{r})$ als ein skalares, zeitharmonisches Feld. Erweitert man nun die Gleichung 2.35 durch die Dirac-Distribution δ [1] wie folgt

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.36)$$

lässt sich eine Fundamentallösung G (auch als Greensche Funktion bekannt) finden, die diese Gleichung löst. Im dreidimensionalen Fall ist die Greensche Funktion wie folgt definiert:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (2.37)$$

mit k_0 als die Propagationskonstante der Kugelwelle im freien Raum, \vec{r}' als Quellenpunktvektor und \vec{r} als Aufpunktvektor. Wendet man nun den Greenschen Satz

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dA \quad (2.38)$$

(mit ϕ, ψ als skalare Felder und $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ als die Ableitung in Normalenrichtung) an, erhält man die Gleichung

$$\psi(\vec{r}) = \iint_S [\psi(\vec{r}') \vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{n}' \cdot \nabla' \psi(\vec{r}')] dA', \quad (2.39)$$

mit der Identifikation $G = \phi$, $S = S_1 \cup S_2$ als ein abgeschlossenes Gebiet (s. Abbildung 2.9) und \vec{n}' als die innere Normale von S . Die Differenz zwischen dem Quellenpunktvektor und dem Aufpunktvektor wird bei der Definition des Feldes im Rahmen des Kirchhoff-Integrals einfachheitshalber mithilfe von \vec{r} substituiert. Die Gleichung 2.39 gilt nur für $\vec{r} \in R_2$. Schreibt man nun diese Gleichung für jede Komponente des kartesischen Systems für das elektrische Feld auf, erhält man die vektorielle Form des Kirchhoff-Integrals:

$$\underline{\underline{E}}(\vec{r}) = \iint_S [\underline{\underline{E}}(\vec{r}')(\vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r})) - G(\vec{r}')(\vec{n}' \cdot \nabla') \underline{\underline{E}}(\vec{r}')] dA'. \quad (2.40)$$

Diese Gleichung ist ebenfalls als die Darstellungsformel bekannt. Genauso wie für das elektrische Feld lässt sich 2.40 für das magnetische Feld aufstellen und wird am Ende der Herleitung definiert.

Innerhalb des Gebiets R_2 können mithilfe des Kirchhoff-Integrals die elektrischen und magnetischen Felder für beliebige Aufpunkte exakt ermittelt werden, wenn die entsprechenden Feldwerte auf den Oberflächen der Referenzflächen S_1 und S_2 bekannt sind. Die benötigte dreidimensionale Greensche Funktion G und deren Gradient ∇G sehen wie folgt aus:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.41)$$

$$\nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = -jk_0 \frac{\vec{r} e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{(\vec{r}-\vec{r}')e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^3}. \quad (2.42)$$

Zunächst muss gemäß Gleichung 2.40 über beide Flächen S_1 und S_2 integriert werden. Das Integral über S_2 verschwindet jedoch, wenn die Hüllfläche S_2 auf eine relativ zu S_1 unendlich weit entfernte Stelle gesetzt wird. Das ist anhand der Greenschen Funktion ersichtlich, die mit $\vec{r} \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Dadurch verschwindet der Beitrag von den Feldern auf der Referenzfläche S_2 . Dies führt zum Integral

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \iint_{S_1} [\vec{E}_q(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r})) - G(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla') \vec{E}_q(\vec{r})] dA', \quad (2.43)$$

mit \vec{E}_r als das zu ermittelnde elektrische Feld, \vec{E}_q als das Feld auf den Oberflächen S_1 . Die Indizes an den elektrischen Feldvektoren werden zum besseren Verständnis in dem Integral 2.43 verwendet.

Das aus zwei Summanden bestehende Kirchhoff-Integral 2.43 lässt sich durch Umformungen zu einem Integral mit drei Summanden erweitern

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \iint_{S_1} [k_0(\vec{n}' \times j\vec{c}_0 \vec{B}_q(\vec{r}))G(\vec{r}) + (\vec{n}' \times \vec{E}_q(\vec{r})) \times \nabla' G(\vec{r}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E}_q(\vec{r}))\nabla' G(\vec{r})] dA'. \quad (2.44)$$

Diese Umformung ist vorteilhaft, denn auf der einen Seite sieht man den Frequenzbepfeten Anteil, der im Fall von $\omega = 0$ verschwindet. Auf der anderen Seite ist das ermittelte elektrische Feld \vec{E}_r als Funktion von Normal- und Tangentialkomponenten getrennt gegeben. Weiterhin ist es möglich, die magnetische Flussdichte durch das elektrische Feld mithilfe von Gleichung 2.14 zu ersetzen, wodurch die Gleichung 2.44 wie folgt umgestellt werden kann:

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \iint_{S_1} [-j\omega(\vec{n}' \times (\nabla \times \vec{E}_q(\vec{r})))G(\vec{r}) + (\vec{n}' \times \vec{E}_q(\vec{r})) \times \nabla'G(\vec{r}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E}_q(\vec{r}))\nabla'G(\vec{r})] dA' \quad (2.45)$$

Beide Formulierungen des Kirchhoff-Integrals können zur Auswertung sowohl von elektrischen als auch magnetischen Feldern verwendet werden. Die Formulierung des Kirchhoff-Integrals für die Ermittlung der magnetischen Flussdichte sieht wie folgt aus:

$$jc_0\vec{B}_r(\vec{r}) = \iint_{S_1} \left[\frac{\omega}{c_0}(\vec{n}' \times \vec{E}(\vec{r}))G(\vec{r}) - (\vec{n}' \times jc_0\vec{B}_q(\vec{r})) \times \nabla'G(\vec{r}) - (\vec{n}' \cdot jc_0\vec{B}_q(\vec{r}))\nabla'G(\vec{r}) \right] dA' \quad (2.46)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das elektrische Feld benötigt. Eine vollständige und detailliertere Herleitung des Kirchhoff-Integrals kann der Quelle [1], S. 478-482 entnommen werden.

Das Kirchhoff-Integral ist als ein zweidimensionales Integral über eine geschlossenen Fläche definiert. Im Falle der Außenfeldberechnung eines dreidimensionalen Modells muss das Integral entlang der gesamten Hüllfläche (s. Abbildung 2.10, in Rosa dargestellt) ermittelt werden. Für die Berechnung der Moden in längshomogenen Wellenleitern kann aus Gleichung 2.43 oder 2.44 ein eindimensionales Kirchhoff-Integral formuliert werden. Dazu wird das zweidimensionale Kirchhoff-Integral entlang der Propagationsrichtung der Wellen (in diesem Fall z) integriert

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \oint_{C_1} \left[\int_z [\vec{E}_q(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla'G(\vec{r})) - G(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla')\vec{E}_q(\vec{r})] dz \right] ds', \quad (2.47)$$

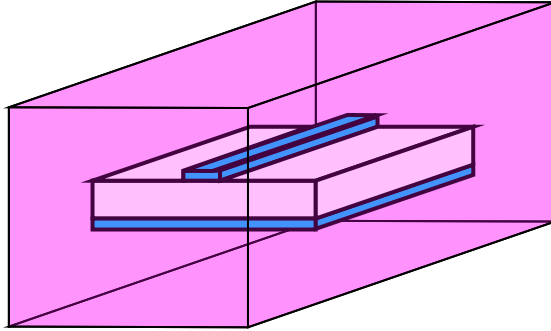


Abbildung 2.10.: Veranschaulichung einer geschlossenen Fläche (rosa) um ein dreidimensionales Modell einer Mikrostreifenleitung.

wobei C_1 die geschlossene Kontur eines zweidimensionalen Modells ist (s. Abbildung 2.11). Durch die Zerlegung des elektrischen Feldes in transversale

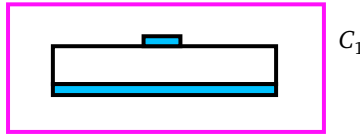


Abbildung 2.11.: Veranschaulichung einer geschlossenen Kontur C_1 (rosa) um ein zweidimensionales Modell einer längshomogenen Mikrostreifenleitung.

und longitudinale Komponenten (2.32) und anschließender Integration entlang der Längskoordinate erhält man nach einer geeigneten Umformung die zweidimensionale Greensche Funktion

$$G_{2D}(\vec{r}, \vec{r}', k_z) = \int G(\vec{r}, \vec{r}') e^{-jk_z z} dz = \int \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-jk_z z} dz = \quad (2.48)$$

$$\frac{-j}{4} H_0^1(|\vec{r}-\vec{r}'| \sqrt{k_0^2 - k_z^2}), \quad (2.49)$$

mit H_0^1 als die Hankelfunktion der ersten Art [1]. Diese ist als eine Summe von zwei Besselfunktionen definiert:

$$H_n^1(z) = J_n(z) + jY_n(z),$$

mit J als die Besselfunktion der ersten und Y als die Besselfunktion der zweiten Art [1]. Der Gradient der zweidimensionalen Greenschen Funktion lässt sich berechnen zu:

$$\nabla G_{2D}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-j(\vec{r} - \vec{r}')\sqrt{k_0^2 - k_z^2}}{4|\vec{r} - \vec{r}'|} H_1^1(|\vec{r} - \vec{r}'|\sqrt{k_0^2 - k_z^2}). \quad (2.50)$$

Man erhält das eindimensionale Kirchhoff-Integral entlang der geschlossenen Kurve C_1 mit der zweidimensionalen Greenschen Funktion:

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \oint_{C_1} [\underline{\vec{E}}(\vec{r}')(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' G_{2D}(k_z, \vec{r})) - G_{2D}(k_z, \vec{r})(\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}')\underline{\vec{E}}(\vec{r}')] ds'. \quad (2.51)$$

In diesem Kapitel wurden die für die vorliegende Arbeit notwendigen Grundlagen beschrieben. Im nächsten Kapitel wird die allgemeine Problemstellung erläutert, die im Rahmen dieser Arbeit gelöst wurde.

3 Längshomogene offene Wellenleiter

Dieses Kapitel schildert die prinzipielle Schwierigkeit, die im Zusammenhang mit der Lösung von Wellenausbreitungen entlang längshomogener offener Wellenleiter entstehen. Hierbei werden unterschiedliche Anwendungen, wie das Beispiel der Mikrostreifenleitung in Abbildung 3.1 untersucht. Zudem werden konventionelle Lösungen vorgestellt, mit denen sich die Problemstellung lösen lässt. Beschränkungen dieser Lösungen werden ebenfalls erläutert.

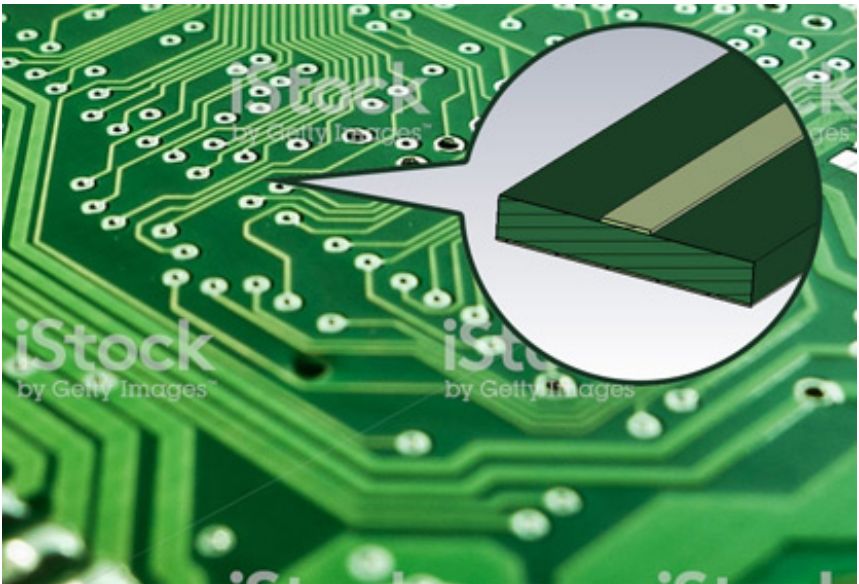


Abbildung 3.1.: Leiterplatte mit Leitungspfaden.

3.1 Eigenwertproblem für offene Wellenleiter

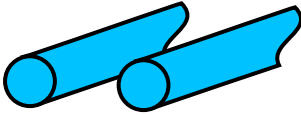
Unterschiedliche Wellenleitermoden, wie TEM-, TE-, TM-, hybride, degenerierte, evaneszente und komplexe Moden lassen sich mithilfe von Maxwellschen Gleichungen und entsprechenden Randbedingungen bei gegebenen Wellenleitern berechnen.

Während analytische Lösungen für einfache Wellenleiterstrukturen wie Hohlleiter oder Koaxialleiter existieren, werden für komplexere Konfigurationen numerische Lösungsmethoden herangezogen. Unter zahlreichen Möglichkeiten wird in dieser Arbeit die FI-Methode verwendet. Ebenso wie für die analytische Lösung benötigt ein numerisches Verfahren eine genaue Definition der geometrischen Gebietsberandung und eines Rechengebietsrandes. Mithilfe von dieser Definition können elektromagnetische Felder innerhalb des betrachteten Gebiets berechnet werden. Die benötigten Lösungen von Wellenleitermoden werden durch ein aufgestelltes Eigenwertproblem berechnet, das im allgemeinen Fall dreidimensional (s. Gl. 2.25) ist. Für längshomogenen Wellenleiter lässt sich das dreidimensionale Problem in ein zweidimensionales umformen, bei dem die Transversalkomponenten des gesuchten Feldes berechnet werden. Die Längskomponente kann im Anschluss aus den dann ermittelten Transversalkomponenten bestimmt werden.

Für die Simulation geschlossener Wellenleiter werden häufig idealisierte Randbedingungen wie PEC oder PMC eingesetzt. Transversal offene Systeme, wie das Beispiel in der Abbildung 3.1, besitzen jedoch in der Realität keinen seitlichen Rand. Für die numerische Berechnung von Wellenlösungen in solchen Wellenleitern werden numerische Berandungen benötigt, die der physikalischen Realität entsprechen. Konfigurationen von transversal offenen Wellenleitern lassen sich in drei Gruppen unterteilen (s. Abbildung 3.2):

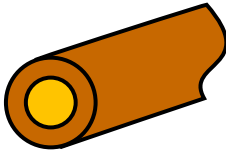
- Elektrische Leiter im homogenen Material,
- Inhomogene Materialverteilung ohne elektrischer Leiter,
- Inhomogene Materialverteilung mit elektrischen Leitern.

Die Unterteilung in die drei Gruppen ist hilfreich, denn abhängig von der Gruppe lässt sich das entsprechende Problem mit einer gezielten Herangehensweise lösen. In den nachfolgenden Abschnitten werden diese drei Gruppen und deren Unterschiede näher beschrieben.



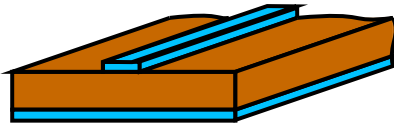
Zweidrahtleitung

Gruppe: Homogenes Material mit elektrischen Leitern



Lichtwellenleitung

Gruppe: Inhomogenes Material ohne elektrische Leiter



Mikrostreifenleitung

Gruppe: Nicht homogenes Material mit elektrischen Leitern

■ Dielektrikum 1 ■ Dielektrikum 2 ■ PEC

Abbildung 3.2.: Darstellung von unterschiedlichen offenen längshomogenen Wellenleitertypen.

3.1.1 Elektrische Leiter im homogenen Material

Konfigurationen von offenen Wellenleitern, die nur aus leitenden Elementen bestehen und in ein homogenes Hintergrundmaterial eingebettet sind, werden in der Gruppe „Elektrische Leiter im homogenen Material“ zusammengefasst. Das Modenspektrum eines Wellenleiters aus dieser Gruppe mit idealen Leitern kann TEM-Moden beinhalten [13]. Das Problem, das nur TEM-Moden enthält lässt sich mit einer Laplace-Formulierung lösen [1]. Dabei muss das Hintergrundmaterial homogen in der transversalen und longitudinalen Richtung sein. Im Fall von Leitern mit endlicher Leitfähigkeit können auch hybride Moden auftreten [18].

Ein konkretes Beispiel für einen Wellenleiter mit PEC-Leitern ist eine transver-

sal offene Zweidrahtleitung (s. Abbildung 3.2). Hierbei existiert nur eine TEM-Mode, die frequenzunabhängig mit der Propagationskonstante $k_z = 2\pi f/c_0$ propagiert.

3.1.2 Inhomogene Materialverteilung ohne elektrischer Leiter

Wellenleiter, die nur aus unterschiedlichen nicht elektrisch leitenden Materialien bestehen, werden in der Industrie häufig eingesetzt [13], [11]. Beispiele dafür sind zylindrische offene Lichtwellenleiter (s. Abbildung 3.2) oder on-Chip optische Wellenleiter (s. Abbildung 3.3). Diese bestehen aus mehreren Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes.

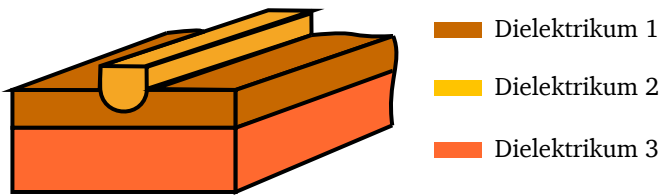


Abbildung 3.3.: Längshomogener On-Chip optischer Wellenleiter (Strip-Loaded Wellenleiter).

Im Falle eines Wellenleiters aus der Gruppe „Inhomogene Materialverteilung ohne elektrischer Leiter“ kommen keine TEM-Moden vor. Auf der anderen Seite können in einem offenen Lichtwellenleiter abhängig von der Frequenz TE, TM, hybride, degenerierte und komplexe Moden propagieren [13].

3.1.3 Inhomogene Materialverteilung mit elektrischen Leitern

Offene Wellenleiter, die aus Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes und Leitern bestehen, werden in der Gruppe „Inhomogene Materialverteilung mit elektrischen Leitern“ zusammengefasst. Industrielles Beispiel hierfür ist ein Mikrostreifenleiter oder eine Koplanarleitung. Der Mikrostreifenleiter (s. Abbildung 3.2) besteht aus zwei oder drei Leitern und einem dielektrischen Material. Das Hintergrundmaterial hat dabei eine niedrigere Dielektrizitätskonstante als das Hauptsubstrat. Bei dem Mikrostreifenleiter können nicht nur Quasi-TEM-Moden propagieren, sondern auch andere Moden, die in der Gruppe „Nicht homogenes Material ohne Leiter“ aufgelistet wurden.

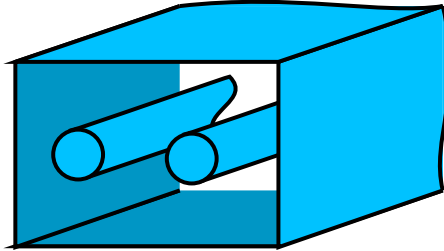


Abbildung 3.4.: Zweidrahtleitung aus PEC-Elementen und einem PEC-Rechengebietsrand. Das Rechengebiet ist mit einem homogenen Material gefüllt.

3.2 Konventionelle Lösungsmethoden

Für die Lösung des beschriebenen Problems wird eine Randbedingung benötigt, die das elektromagnetische Feld am Rand eines transversal offenen Wellenleiters beschreibt. Momentan existieren unterschiedliche Berandungen, um eine Approximation der gesuchten Lösung zu erhalten. In diesem Abschnitt werden drei dieser Randbedingungen untersucht: geschlossene, absorbierende und offene Randbedingungen.

3.2.1 Geschlossene Ränder

Eine der Möglichkeiten, die Wellenausbreitung in einem transversal offenen Wellenleiter zu berechnen, ist der Einsatz von geschlossenen Rändern wie PEC oder PMC. Als Beispiel wird eine offene Zweidrahtleitung mit einem PEC-Rand abgeschlossen (s. Abbildung 3.4).

Mit der PEC-Berandung wird das reale Modell verfälscht, da anstatt eines transversal offenen Wellenleiters eine geschlossene Struktur simuliert wird. Im Fall eines im Rechengebiet befindlichen Leiters führt die PEC-Randbedingung zu zusätzlichen TEM-Moden im Lösungsraum. Des Weiteren werden im Lösungsraum dieser Konfiguration Wellenleitermoden wie in geschlossenen Wellenleitern vorkommen. Diese sind ebenfalls nicht Teil des realen Modells. Zusätzlich existieren im Falle einer PEC-Berandung komplexe Eigenmoden. Diese treten im Lösungsraum als konjugiert komplexes Paar auf und übertragen nur

Blindleistung [17]. Dadurch wird der Lösungsraum eines offenen Wellenleiters verfälscht, denn komplexe Wellen kommen bei offenen Strukturen nur in speziellen Fällen vor, bei denen die Brechungsindexunterschiede von den Materialien einen sehr hohen Wert annehmen müssen [16]. Beim Einsatz von PEC als Randbedingung wird der Abstand zwischen dem Rechengebietsrand und dem Wellenleiter vergrößert, um eine möglichst genaue Lösung zu erreichen. Das ist notwendig, um den Einfluss des Randes auf den Wellenleiter und auf die gesuchten Eigenlösungen zu minimieren. Die Größe des Randabstands muss abhängig von der Konfiguration und der gesuchten Mode gewählt werden. Diese Maßnahme führt zu einem höheren Rechenaufwand.

Der PMC-Rand eignet sich abhängig von der Konfiguration besser als PEC für offene Wellenleiter, weil der PMC-Rand keinen zusätzlichen Leiter in das System einführt. Ähnlich wie bei PEC muss hier der Abstand zum Rechengebietsrand erhöht werden, um eine gewünschte Lösungsgenauigkeit zu erreichen.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen der Lösung eines geschlossenen und eines offenen Systems liegt im Spektrum der beschreibenden Moden. Im Gegensatz zu dem diskreten Spektrum eines geschlossenen Systems besitzt ein offenes System ein kontinuierliches Spektrum.

3.2.2 Absorbierende Ränder

Der PML-Rand ist ein Absorptionsrand, der die Wellenenergie einer einfallenden Welle absorbiert. Für eine reflektionsfreie Absorption bei einer numerischen Simulation muss der Poynting-Vektor der einfallenden Welle senkrecht zum PML-Rand gerichtet sein. Im Fall des transversalen Randes an einem Wellenleiter ist dies nicht möglich, denn der Poynting-Vektor der Moden aus dem diskreten Spektrum ist parallel zum Rand gerichtet [13].

Des Weiteren kommen im Lösungsspektrum unphysikalische Moden, sogenannten Bérenger-Moden, aufgrund von nicht physikalischen Materialien vor. Zusätzlich, wenn der PML-Rand durch einen PEC- oder PMC-Rand abgeschlossen wird, erhält man in Anbetracht des untersuchten Problems ein ähnliches Spektrum wie mit geschlossenen Randbedingungen.

3.2.3 Randelementemethode

Die Randelementemethode (englisch: Boundary Element Method, BEM) [19] ist eine eigenständige Randdiskretisierungsmethode. Als Grundidee wird bei BEM, das Kirchhoff-Integral verwendet. Anders als bei FIT oder bei der Finite-Elemente-Methode (FEM) [20] wird bei der BEM-Methode nicht das gesamte Rechengebiet, sondern nur ein Teil davon diskretisiert. Das Diskretisierungsgitter wird auf den Grenzgebieten von Materialien allokiert. Im zweidimensionalen Fall wird das Integral entlang der abgeschlossenen Konturen und im dreidimensionalen Fall über den abgeschlossenen Flächen ausgewertet.

Für Konfigurationen aus reinen Leitern und einem homogenen Gebiet ist der Einsatz der BEM-Methode eine gute Lösung, um offene Wellenleiterstrukturen zu berechnen.

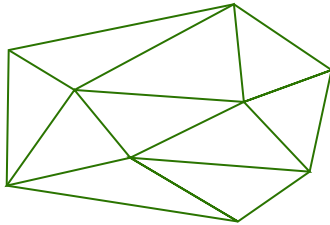
Anstatt BEM als alleinstehende Diskretisierungsmethode für offene Strukturen mit inhomogenen Materialien im Rechengebiet einzusetzen, existiert die Möglichkeit, BEM mit FEM zu koppeln. Dabei wird FEM eingesetzt um die Feldverteilung im Innengebiet zu beschreiben und BEM diskretisiert den Rechengebietsrand. Eine anschauliche Darstellung kann der Abbildung 3.5 entnommen werden.

Obwohl diese Kopplung eine funktionierende Lösung darstellt, besteht das Ziel dieser Arbeit darin, eine transversal offene Randbedingung für die Diskretisierungsmethode FIT zu finden.

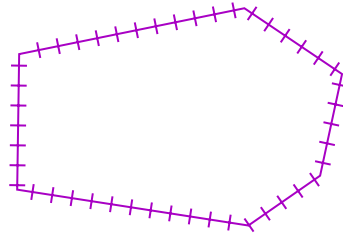
Im Gegensatz zur FEM bietet FIT die Möglichkeit, ein einfaches Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda x$$

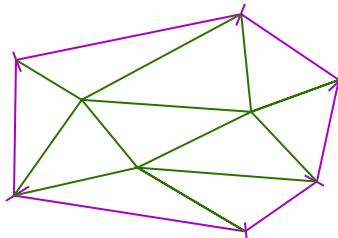
mit der dünnbesetzten symmetrisierbaren Matrix A im Frequenzbereich aufzubauen. Des Weiteren ist der FIT-Zeitbereichslöser effizienter. Für dreidimensionale Simulationen mit Wellenleiterports benötigt man einen transversal offenen Rand, der im Rahmen dieser Arbeit implementiert wird.



FEM Diskretisierung



BEM Berandung



FEM-BEM Kopplung

Abbildung 3.5.: FEM und BEM Diskretisierung. Bei der FEM und FEM-BEM Konfiguration wird der Innenraum berechnet. Bei der BEM-Berandung kann abhängig von der Konfiguration entweder der Innenraum oder der Außenraum berechnet werden.

4 Kirchhoff-Integral-Rand

Das Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer offenen Randbedingung für transversal offene und längshomogene Wellenleiter. Diese Randbedingung soll für das Volumendiskretisierungsverfahren FIT implementiert werden.

Für die Berechnung der Lösungen des zweidimensionalen Eigenwertproblems 2.29 wird das Feld gesucht, das unmittelbar am Rechengebietsrand liegt. Dieses zunächst unbekannte Feld wird durch das Kirchhoff-Integral 2.43 aus den Rechengebietswerten bestimmt. Die analytische Version des Kirchhoff-Integrals soll numerisch ausgewertet und innerhalb des FIT-Frameworks umgesetzt werden. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird der hier vorgestellte Kirchhoff-Integral-Rand mit der Abkürzung KIR bezeichnet. In diesem Kapitel wird die Methode und deren Eigenschaften vorgestellt. Die damit verbundenen Approximationen und Fehleranalyse findet im nachfolgenden Kapitel 5 statt.

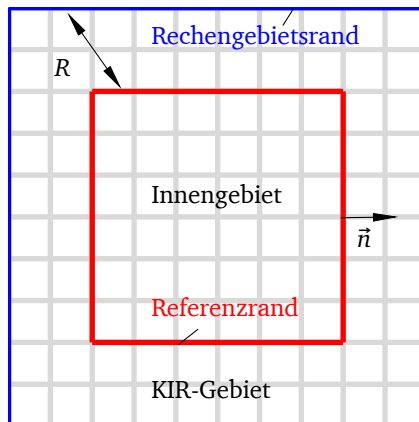


Abbildung 4.1.: Diskretes Gitter mit dem Referenz- und Rechengebietsrand.

Zur Veranschaulichung wird die Grundidee des entwickelten Randes auf einem diskreten rechteckigen Gebiet mit einem äquidistanten Gitter gemäß Ab-

bildung 4.1 dargestellt. Das elektrische Feld am Rechengebietsrand lässt sich durch das Kirchhoff-Integral auswerten. Dafür müssen alle im Rechengebiet befindlichen Quellen und Materialübergänge durch einen zusätzlichen Innenrand (hier Referenzrand) umschlossen werden. Im Innengebiet befindet sich die untersuchte Wellenleiterkonfiguration. Generell kann mit dem Kirchhoff-Integral das elektrische oder das magnetische Feld rekonstruiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die 2D FIT Eigenwertgleichung 2.29 nur das elektrische Feld benötigt.

Die Gleichung 2.29 zur Berechnung von Wellenleitermoden wird in Form eines Eigenwertproblems aufgestellt, wobei die Propagationskonstanten durch den Eigenwert k_z^2 und das elektrische Vektorfeld $\underline{\vec{E}}$ durch den Eigenvektor definiert werden. Zur Berechnung des Kirchhoff-Integrals wird der elektrische Feldvektor an dem Referenzrand benötigt. Dieses Feld ist jedoch bereits durch Freiheitsgrade in der Eigenwertgleichung zur Lösung von Wellenleitermoden definiert. Das führt zu einer gegenseitigen Abhängigkeit von Freiheitsgraden innerhalb der Eigenwertmatrix.

4.1 Einbettung des Kirchhoff-Integral-Randes in FIT

Das Kirchhoff-Integral wird zur Realisierung einer transversal offenen Randbedingung in die zweidimensionale Eigenwertgleichung der FI-Methode (2.29) eingesetzt.

Die Systemmatrix des zweidimensionalen Eigenwertproblems der FI-Methode mit den gesuchten Eigenwerten k_z (2.29) ist dünn besetzt und im Allgemeinen nicht symmetrisch. Diese Eigenschaft ändert sich jedoch durch die zusätzlichen Einträge aufgrund der Randbedingung. Neue Matrixeinträge entstehen durch die Auswertung des Randfeldes durch das Kirchhoff-Integral und werden in das 2D Eigenwertproblem (2.29) integriert. Diese Einträge lassen sich in eine eigenständige Matrix abspeichern. Im Rahmen der gegebenen Problemstellung muss das eindimensionale Kirchhoff-Integrals 2.51 entlang eines diskreten Gitters integriert werden. Folglich entstehen unvermeidliche Approximationen bei der Berechnung des Integrals, die von der Gitterschrittweite abhängen. Das dis-

krete Kirchhoff-Integral für das elektrische Feld am Rechengebietsrand sieht wie folgt aus:

$$\vec{E}_{m,r} = \sum_{u=1}^U \left[\int_{S_u} \vec{E}_{u,q}(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla' G(\vec{r})) - G(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla') \vec{E}_{u,q}(\vec{r}) \, ds' \right], \quad (4.1)$$

mit $\vec{E}_{m,r}$ als elektrische Feldstärke an einem Gitterzellenpunkt m des Rechengebietsrandes, $\vec{E}_{u,q}$ als elektrische Feldstärke an dem Gitterzellenpunkt u des Referenzrandes und U als Anzahl aller Referenzrandpunkte und S_u als der Pfad entlang einzelner Gitterzellen. Das Integral wird entlang der jeweiligen Kante der Gitterzellen u des Referenzrandes ausgewertet. Im Falle der 2D FI-Methode mit einem rechteckigen Gitter wird der Normalenvektor \vec{n}' in dem eindimensionalen Kirchhoff-Integral als einer der beiden Einheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems definiert. Dadurch kann das Integral (4.1) separat entlang

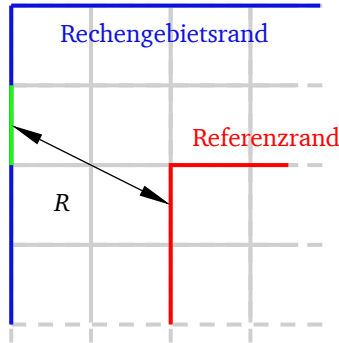


Abbildung 4.2.: Der Abstand R zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand wird in der Mitte der jeweiligen Zelle ausgewertet. Hier in Grün die Zelle des zu berechnenden Randfeldes.

der x - und y -Koordinaten ausgewertet werden:

$$\vec{E}_{m,r} = \sum_{u=1}^{U_x} \left[\int_{S_{x,u}} \vec{E}_{u,q}(\vec{r})(\vec{n}'_y \cdot \nabla' G(\vec{r})) - G(\vec{r})(\vec{n}'_y \cdot \nabla') \vec{E}_{u,q}(\vec{r}) \, ds' \right] + \quad (4.2)$$

$$+ \sum_{u=1}^{U_y} \left[\int_{S_{y,u}} \vec{E}_{u,q}(\vec{r})(\vec{n}'_x \cdot \nabla' G(\vec{r})) - G(\vec{r})(\vec{n}'_x \cdot \nabla') \vec{E}_{u,q}(\vec{r}) \, ds' \right],$$

wobei \vec{n}'_x, \vec{n}'_y Einheitsvektoren sind. Obwohl dies algebraisch mit (4.1) identisch ist, vereinfacht diese Schreibweise die Implementierung erheblich.

In der verwendeten FI-Methode sind anstatt elektrischer Feldstärken \vec{E} die elektrischen Spannungen \hat{e}_i an den Zellenkanten als Freiheitsgrade definiert. Die Auswertung des Kirchhoff-Integrals ergibt zunächst jedoch die elektrische Feldstärke \vec{E}_r an bestimmten Aufpunkten mit den Indizes m (s. Gl. 4.1). Daher muss diese entlang der Zellenkante ein weiteres Mal integriert werden, um in die FIT-Eigenwertmatrix eingebaut werden zu können. Auf der anderen Seite sind innerhalb des Kirchhoff-Integrals die Quellen ebenfalls durch Feldstärken definiert. Folglich müssen die vorhandenen Freiheitsgrade \hat{e} abgeleitet werden. Zur Integration entlang der Kante des Quellenpunkts sind Feldwerte an dieser Zellenkante erforderlich. Durch das zusammengestellte Eigenwertproblem und die Ableitung von Feldspannungen an den Quellenkanten steht jedoch nur ein Feldwert zur Verfügung. Folglich kann das Integral nur mit niedrigster Ordnung ausgewertet werden – numerisch wird mit der Mittelpunkregel approximiert

$$\begin{aligned}\hat{e}_x &= \int_S E_x ds \approx E_x \Delta x, \\ \hat{e}_y &= \int_S E_y ds \approx E_y \Delta y,\end{aligned}\tag{4.3}$$

wobei S eine Gitterkante und $\Delta x, \Delta y$ die Kantenlängen einer Gitterzelle sind.

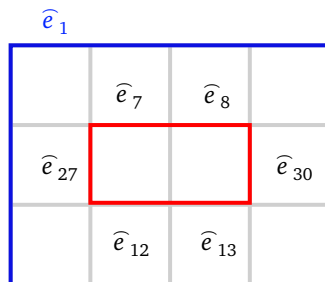


Abbildung 4.3.: Beispielsgitter mit einem Rechengebietsrand (in blau) und einem Referenzrand (in rot).

Zur Auswertung des Abstandes R (s. Abbildung 4.2) von den Referenz- zu den Randzellen werden die Aufpunkte in der Mitte der jeweiligen Zellenkante definiert.

Als Nächstes sollen die Randfeldwerte des Rechengebiets durch das diskrete Integral 4.2 entlang der Zellenkanten ersetzt werden. Die Feldwerte $\vec{E}_{u,q}$ in 4.2 können vor das Integral gezogen werden aufgrund der niedrigsten Integralordnung. Die restliche auszuwertende Greensche Funktion und deren Ableitung können als KI-Gewichte zusammengefasst werden.

Nach der Auswertung des Integral 4.2 unter der Berücksichtigung von 4.3, erhält man für eine Randfeldspannung am Randpunkt r die Beziehung:

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{x,r} = & \widehat{e}_{0,q} c_0 + \cdots + \widehat{e}_{U_x,q} c_{U_x} + \\ & + \widehat{e}_{0,q} c_0 + \cdots + \widehat{e}_{U_y,q} c_{U_y}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei $c_{0..U}$ die mit dem KI ausgewerteten Gewichte sind.

Die Systemmatrix und der Eigenvektor des zweidimensionalen Eigenwertproblems (2.29) können in folgender Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A \widehat{e} = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{e}_1 \\ \widehat{e}_2 \\ \vdots \\ \widehat{e}_m \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_1 + \begin{pmatrix} a_2 \end{pmatrix} \widehat{e}_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_n \end{pmatrix} \widehat{e}_m, \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit A als die Eigenwertmatrix aus der Gleichung 2.29. Diese ausgewählte Schreibweise dient der Veranschaulichung, wie die Formel 4.4 in die FI-Systemmatrix integriert wird.

Zum besseren Verständnis wird ein Beispiel in der Abbildung 4.3 eingeführt.

Es wird angenommen, dass die Auswertung des Randfeldwerts mit dem Index 1 in die Eigenwertmatrix integriert werden soll. Des Weiteren wird angenommen, dass der Referenzrand durch die Zellen mit den Indizes 7, 8, 12, 13, 27, 30 definiert ist. Mithilfe von 4.4 kann folgende Beziehung aufgebaut werden:

$$\widehat{e}_1 = \widehat{e}_7 c_7 + \widehat{e}_8 c_8 + \widehat{e}_{12} c_{12} + \widehat{e}_{13} c_{13} + \widehat{e}_{27} c_{27} + \widehat{e}_{30} c_{30}. \quad (4.6)$$

Die Substitution des Freiheitsgrad \widehat{e}_1 (4.6) kann nun in (4.5) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & A \widehat{e} = \\ & \dots \left(a_1 \right) \left(\widehat{e}_7 c_7 + \widehat{e}_8 c_8 + \widehat{e}_{12} c_{12} + \widehat{e}_{13} c_{13} + \widehat{e}_{27} c_{27} + \widehat{e}_{30} c_{30} \right) + \dots + \\ & \quad + \begin{pmatrix} a_7 \\ a_8 \\ a_{12} \end{pmatrix} \widehat{e}_7 + \begin{pmatrix} a_8 \\ a_{12} \end{pmatrix} \widehat{e}_8 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{27} \\ a_{30} \end{pmatrix} \widehat{e}_{12} + \\ & \quad + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{27} \\ a_{30} \end{pmatrix} \widehat{e}_{13} + \begin{pmatrix} a_{27} \\ a_{30} \end{pmatrix} \widehat{e}_{27} + \begin{pmatrix} a_{30} \end{pmatrix} \widehat{e}_{30} + \dots = \quad (4.7) \\ & \quad \begin{pmatrix} a_7 + a_1 c_1 \\ a_8 + a_1 c_1 \\ a_{12} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_7 + \begin{pmatrix} a_8 + a_1 c_1 \\ a_{12} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_8 + \begin{pmatrix} a_{12} + a_1 c_1 \\ a_{13} + a_1 c_1 \\ a_{27} + a_1 c_1 \\ a_{30} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_{12} + \\ & \quad + \begin{pmatrix} a_{13} + a_1 c_1 \\ a_{27} + a_1 c_1 \\ a_{30} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_{13} + \begin{pmatrix} a_{27} + a_1 c_1 \\ a_{30} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_{27} + \begin{pmatrix} a_{30} + a_1 c_1 \end{pmatrix} \widehat{e}_{30} + \dots \end{aligned}$$

Matrixspalten, die zu den Referenzrandwerten $a_{1\dots n}$ gehören (in diesem Beispiel $a_7, a_8, a_{12}, a_{13}, a_{27}, a_{30}$) werden durch die KI-Gewichte und entsprechende Randfeldspalten (in diesem Beispiel a_1) erweitert. Die eingebaute Abhängigkeit setzt voraus, dass die Randfeldwerte aus der Eigenwertmatrix vor der Eigenwertberechnung entfernt werden sollten. Dazu werden nach dem Aufbau der Systemmatrix jeweilige Spalten und Zeilen eliminiert – in diesem Beispiel $n, m = 1$.

In der Praxis wird für den KIR eine eigene Matrix A_{KIR} aufgebaut, die aus den KIR-Komponenten besteht. Diese ist nicht dünn besetzt, nicht symmetrisch, komplexwertig und hat dieselben Abmessungen wie die verwendete zweidimensionale FI-Systemmatrix A aus der Gleichung 2.29. Die Besetzungsstruktur von der FIT- und KIR-Matrix ist in der Abbildung 4.4 dargestellt.

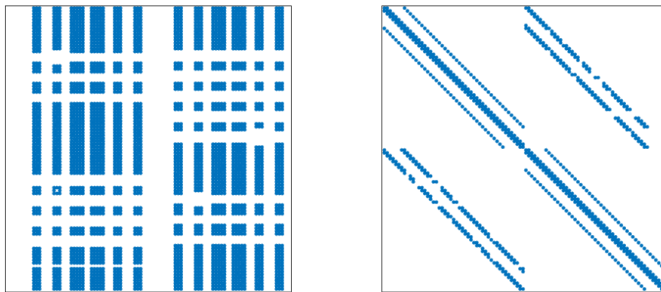


Abbildung 4.4.: Links: Struktur der KIR-Zusatzmatrix. Rechts: Matrixstruktur des zweidimensionalen FIT-Eigenwertproblems 2.29.

Nachdem die Matrix A_{KIR} aufgestellt wurde, kann diese in das Eigenwertproblem integriert werden. Dazu muss die A_{KIR} -Matrix lediglich mit der Systemmatrix A addiert werden, wodurch die neue Systemmatrix A_{K} des nichtlinearen Eigenwertsystems lautet:

$$A_{\text{K}} = A + A_{\text{KIR}}.$$

Nachdem das Eigenwertproblem aufgestellt wurde, sollte die Abhängigkeit des eindimensionalen KI von der Propagationskonstante k_z diskutiert werden. Die zweidimensionale Greensche Funktion im KI enthält das Argument $|\vec{r}| \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$. Das Eigenwertproblem bekommt dadurch im allgemeinen Fall

einen nichtlinearen Charakter. Im nächsten Abschnitt werden zwei Möglichkeiten zur Linearisierung des Problems vorgestellt.

4.2 Linearisierung des Eigenwertproblems

Durch die Abhängigkeit der KIR-Zusatzmatrix A_{KIR} von der Propagationskonstante k_z wird das zweidimensionale FIT-Eigenwertproblem nichtlinear

$$A_{\text{K}}(k_z) \widehat{e} = k_z^2 \widehat{e}. \quad (4.8)$$

Zur Lösung von nichtlinearen Eigenwertproblemen existieren unterschiedliche Verfahren [21]. Der damit verbundene Rechenaufwand ist jedoch wesentlich höher, als bei der Lösung eines linearen Eigenwertproblems. Aus diesem Grund wird das Eigenwertproblem 4.8 linearisiert. Zwei Möglichkeiten der Linearisierung folgen in den nächsten zwei Abschnitten.

4.2.1 Linearisierung durch polynomiale Darstellung

Ein Eigenwertproblem der Form

$$(A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots + \lambda^k A_k)x = 0, \quad (4.9)$$

mit λ als gesuchte Eigenwerte und $A_{0\dots k}$ als entsprechende Matrizen wird für $A_k \neq 0$ als polynomiales Eigenwertproblem des k -ten Grades bezeichnet. Dieses Problem kann zu einem generalisierten Eigenwertproblem umgeformt werden. Solche Umformung nennt man „Companion Notation“ [22], [23]. Nach der Umsetzung der geeigneten Umformung sieht das Eigenwertproblem wie folgt aus:

$$\left(\begin{bmatrix} A_{k-1} & A_{k-2} & \dots & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -I_n & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} A_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_n \end{bmatrix} \right) x_k = 0 \quad (4.10)$$

In 4.10 vergrößert sich die Systemmatrix und der Eigenvektor im Vergleich zu 4.9 um das k -Fache. Im Gegenzug erhält man nach der Transformation ein generalisiertes Eigenwertproblem, das sich effizient mit einem vorkonditionier-

ten Verfahren lösen lässt.

Das nichtlineare Verhalten der KIR-Zusatzmatrix A_{KIR} entsteht durch die Abhängigkeit der Greenschen Funktion 2.48 und deren Ableitung 2.50 von der Propagationskonstante k_z . Die Hankelfunktionen können durch ein Polynom approximiert werden, wozu beispielsweise das Lagrange-Polynom eingesetzt werden kann. Das Lagrange-Polynom verwendet n definierte Stützstellen, um eine stetige Funktion $f(x)$ durch

$$P(x) = \sum_{j=1}^n y_j P_j(x), \quad \text{mit} \quad (4.11)$$

$$P_j(x) = \prod_{k=1; k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \quad (4.12)$$

zu approximieren. Dabei sind x_j die Entwicklungsstellen und die Gewichte sind $y_j = f(x_j)$. Der Approximationsbereich (s. Abbildung 4.5) muss ebenfalls definiert werden und hängt im Fall des beschriebenen Problems von drei Faktoren ab:

1. Der in Abbildung 4.2 definierte Abstand R zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand
2. Festgelegte Frequenz für die betrachtete Simulation
3. Minimaler und maximaler Brechungsindex der Wellenleitermaterialien.

Die Funktion, die durch 4.11 approximiert werden soll, hat den in der Abbildung 4.5 dargestellten Verlauf für den ausgewählten Bereich. Die Hankelfunktion 2.48 besitzt eine Singularität, wenn das Funktionsargument zu null wird. Dieser Grenzfall tritt auf, wenn der Referenzrand und der Rechengebietsrand (s. Abbildung 4.1) direkt auf einander anliegen. In diesem Grenzfall würden die Approximationsfehler, die durch die niedrige Integralordnung 4.3 des Feldes entstehen, einen hohen Einfluss auf die Gesamtlösung produzieren. Um dies zu vermeiden, existiert das KIR-Gebiet. Durch die Vergrößerung des KIR-Gebiets und damit Erhöhung des Abstandes zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand entfernt sich der zu approximierende Bereich (s. Abbildung 4.5) weiter weg von der Singularität.

Um die Greensche Funktion 2.48 in Abbildung 4.5 durch 4.11 anzunähern, werden viele Stützstellen benötigt, was wiederum die Berechnungskosten stark

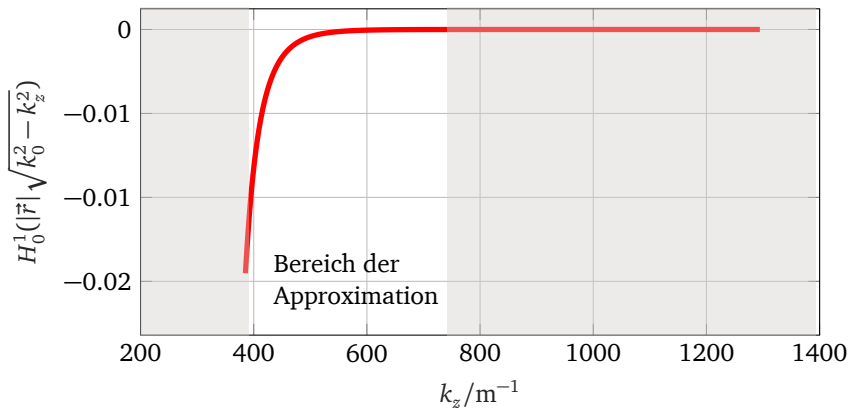


Abbildung 4.5.: Imaginärteil der Hankelfunktion H_0^1 . Der Bereich mit dem hellen Hintergrund ist der durch das Lagrange-Polynom 4.11 zu approximierende Funktionsbereich. Der Wert von k_0 beträgt 335 m^{-1} .

erhöht. Zusätzlich müssen diese Stützstellen und damit das gesamte Polynom bei jeder Berechnung neu aufgestellt werden, da der Bereich der Approximation von dem aufgestellten Problem abhängt.

Ein zusätzlicher Aufwand kommt hinzu, denn die Wahl der Stützstellen muss anwendungspezifisch definiert werden.

Der Vorteil von der Linearisierung durch die polynome Darstellung ist, dass man mit einer Berechnung alle Eigenmoden erhält. Die Nachteile der niedrigen Genauigkeit und hohen Aufwandskosten überwiegen jedoch. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit die Linearisierung durch polynome Darstellung als praxisuntauglich eingestuft. Im nächsten Abschnitt wird eine andere Linearisierungsmöglichkeit vorgestellt, die sich als akzeptabel erwiesen hat.

4.2.2 Linearisierung mithilfe der Fixpunktiteration

Alternativ zur polynomen Formulierung des Eigenwertproblems kann der in der Greenschen Funktion 2.48 und deren Ableitung 2.50 enthaltene Eigenwert k_z zunächst durch einen geeigneten Wert $k_{z,\text{avg}}$ approximiert werden. Die

Systemmatrix hängt dadurch nicht mehr vom Eigenwert ab und man erhält ein lineares Eigenwertproblem.

Die Wahl des Wertes $k_{z,\text{avg}}$ hängt von der untersuchten Frequenz und von den Brechungsindexgrenzen η_{min} und η_{max} des gewählten Modells ab. Diese werden durch die Materialeigenschaften wie folgt definiert:

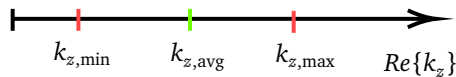
$$\begin{aligned}\eta_{\text{min}} &= \min(\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}) \\ \eta_{\text{max}} &= \max(\sqrt{\varepsilon_i \mu_i}),\end{aligned}\tag{4.13}$$

mit η als jeweiligem Brechungsindex, ε als die entsprechende Dielektrizitätskonstante und μ als die Permeabilitätskonstante. Bei Wellenleitern können Propagationskonstanten k_z von reellen, ausbreitungsfähigen Moden nur in dem Bereich zwischen $k_{z,\text{min}}$ ¹ und $k_{z,\text{max}}$ existieren [1]

$$k_{z,\text{min}} \leq k_z < k_{z,\text{max}}, \quad \text{mit} \quad \begin{aligned}k_{z,\text{min}} &= k_0 \eta_{\text{min}} \\ k_{z,\text{max}} &= k_0 \eta_{\text{max}}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Das Fixieren der zunächst unbekanntenen Ausbreitungskonstanten k_z in der Greenschen Funktion muss so gedeutet werden, dass man sich bei der Berechnung des Eigenwertproblems auf eine bestimmte Mode konzentriert. In allgemeinen Wellenleitermodellen können mehrere propagierende Moden auftreten, wodurch das fixe k_z zu einem Approximationsfehler der Gesamtlösung führt.

Abhängig von dem Spektrum der Propagationsmoden ist es plausibel das erste zu berechnende $k_{z,\text{avg}}$ in der Mitte zwischen den $k_{z,\text{min}}$ und $k_{z,\text{max}}$ zu wählen werden.



Bei der Konvergenzuntersuchung, die in dieser Arbeit verwendet wird, verkleinert man die Gitterschrittweite und ermittelt die Steigung des sich ändernden Lösungsfehlers. Die Approximation, die durch die fixe Propagationskonstante entsteht, ändert sich während der Konvergenzuntersuchung nicht und dominiert ab einer gewissen Gitterschrittweite den Gesamtfehler der Lösung. Da-

¹ Im Falle eines geschlossenen Wellenleiters, beispielsweise eines Hohlleiters liegt das $k_{z,\text{min}}$ bei 0

durch verkleinert sich der Gesamtfehler der Lösung ab einer bestimmten Gitterschrittweite nicht.

Zur Erhöhung der Genauigkeit muss eine Fixpunktiteration (FPI) eingesetzt werden. Dabei wird ein Eigenwertproblem bei jeder Iteration berechnet. Das $k_{z,\text{avg}}$ wird auf die neu berechnete Propagationskonstante der jeweiligen Mode gesetzt, was wiederum zur Erhöhung der Lösungsgenauigkeit führt. So kann der Genauigkeitsparameter $P_{r,\text{KIR}}$ für die gewünschte FPI-Genauigkeit eingeführt werden, der die relative Differenz zwischen dem aktuell ausgerechnetem Eigenwert λ_n und dem im vorherigen Iterationschritt ausgerechnetem Eigenwert λ_{n-1} definiert:

$$P_{r,\text{KIR}} = \frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}|}{|\lambda_n|}. \quad (4.15)$$

Einzelne Schritte der Fixpunktiteration erhöhen die Lösungsgenauigkeit gleichzeitig für mehrere Moden, wenn das Lösungsspektrum degenerierte Moden enthält.

Der Nachteil gegenüber der Linearisierung durch die polynome Darstellung aus Abschnitt 4.2.1 ist die Notwendigkeit von mehreren Berechnungen des Eigenwertproblems. Der Vorteil ist, jedoch die einstellbare Genauigkeit durch den Genauigkeitsparameter $P_{r,\text{KIR}}$.

4.3 Berücksichtigung der Singularität

Das Kirchhoff-Integral 2.43 enthält eine Singularität bei $|\vec{r}| = 0$, wenn der Auf- und Quellpunkt übereinander liegen. Im Folgenden wird gezeigt, wie die Singularität des Integranden im Fall der kartesischen Koordinaten analytisch berücksichtigt werden kann.

Die Hankelfunktion $H_0^1(z)$ kann für kleine Argumente z durch eine logarithmische Funktion approximiert werden [24]:

$$H_0^1(z) = H_{0a}^1 + O(z^2 \ln z), \quad \text{mit } H_{0a}^1 = 1 + j \left(\frac{2}{\pi} (\ln(\frac{z}{2}) + \gamma) \right) \quad (4.16)$$

mit der Eulerschen Konstante $\gamma \approx 0.57721566490153$. Unter Betrachtung von 4.2 muss die approximierte Hankelfunktion 4.16 entlang der horizontalen und vertikalen Zellenkanten integriert werden. Man kann vorerst den Fall betrach-

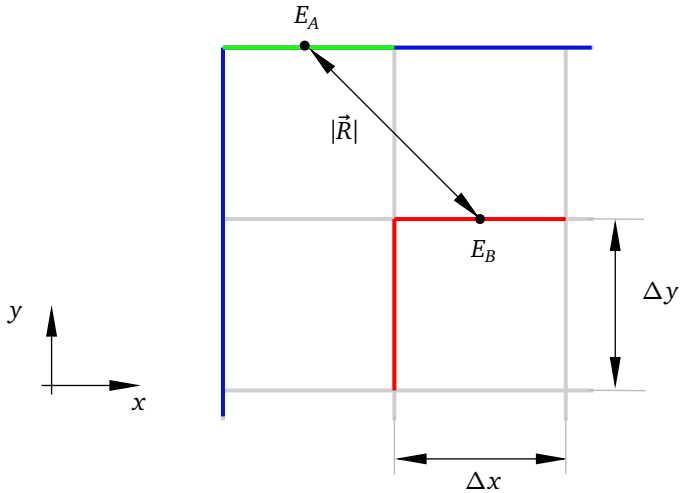


Abbildung 4.6.: Beispiel der Referenz- und Rechengebietsrandzellen mit kartesischen Koordinaten und einem äquidistanten Gitter mit der Gitterschrittweite $\Delta x = \Delta y$. Der Radius $|\vec{R}|$ ergibt sich aus dem Abstand zwischen dem jeweiligen Aufpunkt (Mitte der grünen Kante) und dem Quellpunkt (Mitte der roten Kante). Der Abstand wird für die KIR-Berechnung in der Mitte der jeweiligen Kante abgetastet.

ten, bei dem der Abstand zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand in vertikale Richtung verschwindet. In der Abbildung 4.6 ist ein äquidistantes Beispielsgitter dargestellt, bei dem das Feld E_A in der Mitte der grünen Kante ausgewertet wird. Das Feld E_B ist in diesem Fall das Referenzfeld für die Auswertung des Kirchhoff-Integrals. Setzt man nun y_r zu 0, berechnet sich der Radius durch $R = |x_r|$.

Wir betrachten das Integral entlang der Kante an der das Feld E_A definiert ist. Das Integral der Greenschen Funktion 2.48 entlang der Kante mit der Länge Δx kann dann wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} H_0^1(kx) dx \approx \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} \left(1 + \frac{j2}{\pi} \left(\ln\left(\frac{kx}{2}\right) + \gamma\right)\right) dx, \quad (4.17)$$

mit $k = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$.

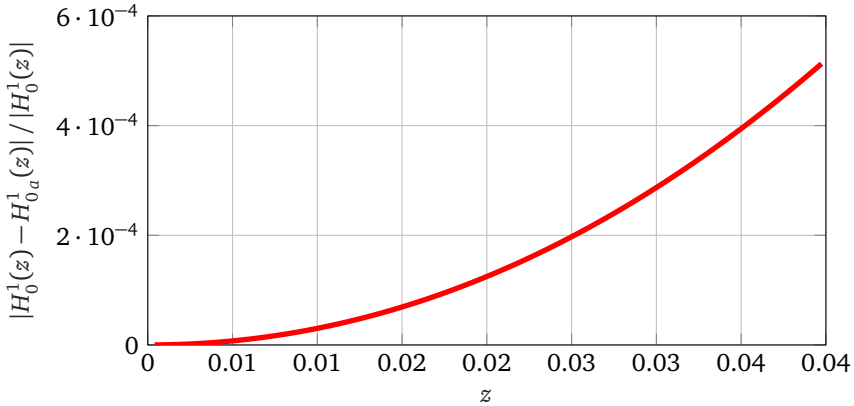


Abbildung 4.7.: Relativer Fehler zwischen der Hankelfunktion H_0^1 und der Approximation $H_{0\alpha}^1$ aus 4.16 für kleine Argumente z [24].

In der Abbildung 4.7 kann man den relativen Fehler zwischen der Hankelfunktion H_0^1 und deren Approximation $H_{0\alpha}^1$ aus 4.16 für kleine Argumente z betrachten. Da die Singularität bei $x = 0$ auftritt, wird das Integral 4.17 so umgestellt, dass die Integrationsgrenzen bei 0 anfangen:

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} H_0^1(k|x|) dx \approx 2 \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} \left(1 + \frac{j2}{\pi} (\ln(\frac{kx}{2}) + \gamma)\right) dx. \quad (4.18)$$

Das Integral kann nun analytisch ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} \left(1 + \frac{j2}{\pi} (\ln(\frac{kx}{2}) + \gamma)\right) dx = \\ & -\frac{j}{2} \left[\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \left(1 + \frac{j2}{\pi} \gamma\right) dx + \frac{j2}{\pi} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \ln(\frac{kx}{2}) dx \right] = \\ & \frac{\Delta x}{4\pi} \left[-2 - j\pi + 2 \ln(k \frac{\Delta x}{4}) + 2\gamma \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Folglich:

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} -\frac{j}{4} H_0^1(kx) dx \approx \frac{\Delta x}{4\pi} \left[-2 - j\pi + 2 \ln\left(k \frac{\Delta x}{4}\right) + 2\gamma \right]. \quad (4.20)$$

Wichtig ist zu beachten, dass bei der Implementierung des numerischen Integrals 4.2 die hier verwendete Näherung 4.16 nicht für alle Referenzquellen verwendet werden soll. Somit muss ein Grenzwert $R < \sigma$ definiert werden, nachdem entschieden wird, ob die ursprüngliche Hankelfunktion oder dessen logarithmische Repräsentation einzusetzen ist. Dieser Wert lässt sich einfach bestimmen, denn die Werte der Approximationsfehler abhängig vom wachsenden Argument der benötigten Hankelfunktion sind im Vorfeld bekannt (s. Abbildung 4.7).

4.4 KIR-Konfigurationsparameter

Der Kirchhoff-Integral-Rand enthält zwei Konfigurationsparameter. Diese bieten Anpassungen der Genauigkeit und der Aufwandskosten an. Beide Parameter werden in diesem Abschnitt vorgestellt und diskutiert.

4.4.1 KIR-Abstandsparameter

Der erste Parameter, auch als KIR-Parameter L bezeichnet, definiert den geometrischen Abstand zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand (s. Abbildung 4.8). Für die Größe der Eigenwertmatrix 4.8 und den Rechenaufwand ist die Anzahl von Gitterzellen des gesamten Rechengebiets ausschlaggebend.

Die Gitterschrittweite im KIR-Gebiet kann abweichend vom Innenbereich gewählt werden. So kann die Gitterkonfiguration im KIR-Gebiet beispielsweise wie in der Abbildung 4.9 gewählt werden. Man sieht, dass im KIR-Gebiet nur eine Zelle, jeweils im y - und x -Bereich benötigt wird. Dies senkt den Rechenaufwand, führt jedoch zu höheren Unterschieden zwischen den Freiheitsgraden in der Systemmatrix 4.8. In den nachfolgenden Untersuchungen wird das KIR-Gebiet mit demselben Diskretisierungsgitter wie der Innenbereich aufgespannt.

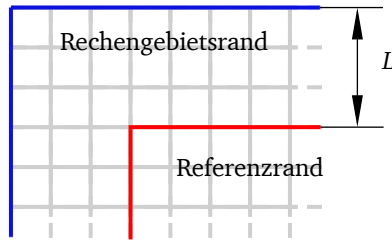


Abbildung 4.8.: Abstand L des Rechengebietsrandes vom Referenzrand, gezeigt auf einem Teil des Rechengebiets.

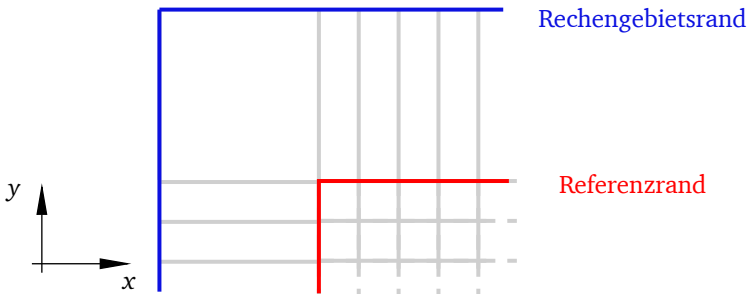


Abbildung 4.9.: Unterschiedliche Gitterschrittweiten im KIR-Gebiet und im Innenbereich.

Die Veränderung des Abstandsparmeters beeinflusst zwei wichtige Eigenschaften:

1. der geometrischen Abstand zwischen dem Referenz- und dem Rechengebietsrand, der einen direkten Einfluss auf das numerisch ausgewertete Kirchhoff-Integral hat,
2. die Anzahl von Zellen im KIR-Bereich und damit die gesamte Anzahl von Freiheitsgraden.

Der geometrische Abstand zwischen dem Referenz- und dem Rechengebietsrand spielt eine wichtige Rolle bei der Genauigkeit des KIR, aufgrund der im Abschnitt 4.1 erläuterten niedrigen Integralordnung des elektrischen und magnetischen Feldes. Je niedriger der Abstand, desto näher sitzen die Referenzquellen an den Randfeldwerten und desto größer wird der numerische Fehler der gesamten Lösung aufgrund der Feldapproximation am Referenzrand. Folg-

lich kann die Genauigkeit der Eigenwertlösung durch die Variation des Abstandsparameters verändert werden.

4.4.2 KIR-Quellenanzahl-Parameter

Der zweite Parameter, nachfolgend ebenfalls als KIR-Parameter P bezeichnet, definiert die für die Auswertung des Randfeldes verwendete Anzahl der Referenzrandzellen.

Das Innengebiet in der Abbildung 4.1 wird durch den Referenzrand umschlossen, auf dem sich die Referenzquellen befinden. Diese sind wiederum für die Ermittlung des Randfeldes notwendig. Abhängig von der betrachteten Referenzrandzelle unterscheiden sich die KIR-Gewichte c_n (s. Gl. 4.6) im Bezug auf das auszuwertende Randfeld. An den am weitesten entfernten Referenzzellen befinden sich die mit dem kleinsten Betrag ausgewerteten KIR-Gewichte. Das analytische Kirchhoff-Integral 2.43 ist exakt definiert und benötigt zur Berechnung des Feldes alle Referenzpunkte. Im Fall einer Näherung können Gewichte mit einem niedrigeren Einfluss auf den untersuchten Randwert ignoriert werden, da der dadurch verursachte Fehler relativ zu anderen Approximationen gering ist.

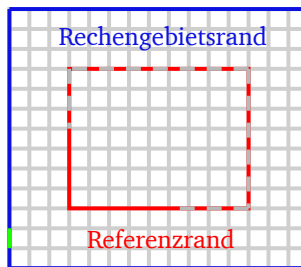


Abbildung 4.10.: Rechengebiet mit dem Quellenanzahl-Parameter $P = 25\%$. Dabei wird nur ein Viertel des Referenzrandes (rot, durchgehend) für die Berechnung des Feldes an der grün markierten Zelle verwendet.

Mithilfe von dem Quellenanzahl-Parameter lässt sich die Anzahl berücksichtigter Referenzrandzellen einstellen, was wiederum die Besetzungsstruktur von

der Systemmatrix A_{KIR} beeinflusst. Die Anzahl der eingesetzten Referenzrandzpunkte N_{rv} ist somit bei $P < 100$ kleiner als die gesamte Anzahl der vorhandenen Referenzrandzpunkte N_{rg} :

$$N_{\text{rv}} = \text{ceil}(N_{\text{rg}} \cdot \frac{P}{100}), \quad (4.21)$$

wobei *ceil* die Aufrundungsfunktion ist. So werden beispielsweise bei $P = 100$ alle Referenzrandzellen und bei $P = 25$ nur 25 % davon einbezogen.

Der Einfluss des Quellenanzahl-Parameters auf die Lösungsgenauigkeit hängt ebenfalls von dem Abstandsparameter ab, denn je höher der Abstand der Referenzrandzellen von den Rechengebietszellen, desto niedriger die relative Differenz zwischen den maximalen und minimalen KIR-Gewichten. Folglich wächst der Gesamtfehler der Lösung mit dem fallenden Quellenanzahl-Parameters P und dem gleichzeitig wachsendem Abstandsparameter.

4.5 Symmetrierandbedingung

Symmetrische Wellenleiterkonfigurationen können Moden enthalten, die bezüglich einer oder mehrerer Koordinatenachsen des gewählten Koordinatensystems eine Symmetrie aufweisen.

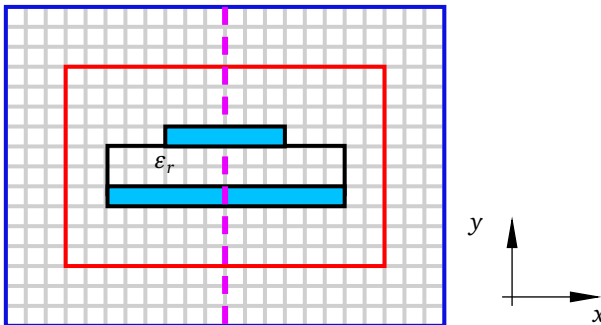


Abbildung 4.11.: Beispiel einer zur vertikalen Achse symmetrischen Wellenleiterkonfiguration.

Wenn im Vorfeld die geometrische Symmetrie der untersuchten Struktur gegeben ist, kann das simulierte Rechengebiet auf die Hälfte oder ein Viertel verkleinert werden. Im Fall des Wellenleiters in der Abbildung 4.11 wird das Rechengebiet halbiert.

Zusätzlich muss eine andere Randbedingung an dem gestrichelten Rand eingeführt werden, um die Feldsymmetrie zu erzwingen. In Fall des Beispiels aus Abbildung 4.11 wird die Achsensymmetrie des Feldes bzgl. der vertikalen, gestrichelten Linie definiert. Das gesuchte Modenbild in diesem Wellenleiterbeispiel erfordert, dass an der gestrichelten Linie PMC als Randbedingung eingesetzt wird. Durch die Halbierung des Rechengebiets wird die Systemmatrix des Eigenwertproblems verkleinert, wodurch der Rechenaufwand sinkt.

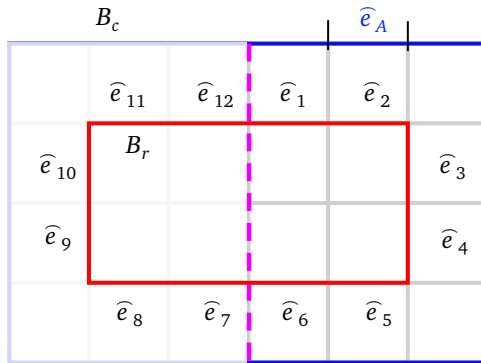


Abbildung 4.12.: Beispiel einer zur y -Achse symmetrischen Wellenleiterkonfiguration.

Die Verwendung von KIR erlaubt den Einsatz der Symmetrieränder. Hierbei sollten jedoch Implementierungsdetails beachtet werden, denn die Berechnung der Randfelder geschieht durch die Auswertung des Kirchhoff-Integrals entlang des kompletten Referenzrandes. Da in dem Beispiel aus der Abbildung 4.11 eine Hälfte des Referenzrandes entfällt, müssen fehlende Referenzquellen durch die vorgegebene Symmetrie bestimmt werden. Dies lässt sich an einem einfachen Beispiel zeigen (s. Abbildung 4.12).

Es wird die Achsensymmetrie bzgl. der gestrichelten vertikalen Linie angenommen. Der rechte Teil des Rechengebiets bleibt erhalten, der linke wird

nicht benötigt. Um zu zeigen, wie der Kirchhoff-Integral-Rand in diesem Fall aufgebaut wird, betrachtet man die Berechnung des Randfeldes \widehat{e}_A :

$$\widehat{e}_A = \sum_{n=1}^{12} \widehat{e}_n f(r_n), \quad (4.22)$$

mit r_n als die Abstände zwischen der jeweiligen Referenzzelle sowie \widehat{e}_A und $f(r_n)$ als die Funktion mit der die KI-Gewichte der entsprechenden Referenzzelle im Bezug auf die Randzelle \widehat{e}_A berechnet werden. Die Feldwerte $\widehat{e}_7 - \widehat{e}_{12}$ sind zwar wegen der Symmetriebedingung nicht in der Systemmatrix enthalten, können jedoch aus dem Wissen der vorausgesetzten Symmetrie ermittelt werden. Für das Feld \widehat{e}_{12} beispielsweise lauten die Werte:

$$\widehat{e}_{x,12} = -\widehat{e}_{x,1}, \quad \widehat{e}_{y,12} = \widehat{e}_{y,1}. \quad (4.23)$$

Der Abstand r_{12} kann trivial während des Aufbaus der KIR-Matrix A_{KIR} ermittelt werden. Durch den PMC Rand verkleinert sich ebenfalls die Anzahl der Nichtnull-Elemente von A_{KIR} um 25%, da ein Viertel des Rechengebietsrandes nicht berücksichtigt werden muss. Dies wirkt sich ebenfalls positiv auf den Rechenaufwand des Eigenwertproblems aus. Im Fall von FIT muss für den Einsatz von dem PMC keine Anpassung an der Systemmatrix vorgenommen werden.

4.6 Einsatz in unterschiedlichen Frequenzbereichen

Das Kirchhoff-Integral existiert in zwei Formen (2.43), (2.44). Die Besetzung der KIR-Zusatzmatrix A_{KIR} steigt durch die Existenz der Ableitung des elektrischen Feldes. Das führt zu höheren Berechnungskosten des gesamten Problems. In bestimmten Fällen jedoch kann der mit der erwähnten Ableitung behaftete KI-Summand eliminiert werden. Dazu müssen die Simulationen in zwei Gruppen unterteilt werden:

- Statische Berechnungen mit $\omega = 0$
- Berechnungen mit $\omega > 0$

Im zweiten Fall kann die Ableitung des elektrischen Feldes nicht ignoriert werden, im ersten Fall aber ist dies möglich. In der Gl. 2.44 wird der erste Sum-

mand mit der Kreisfrequenz ω multipliziert. Dieser verschwindet im statischen Fall, was zu einem vereinfachten KI führt:

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \oint_C [(\vec{n}' \times \vec{E}_q(\vec{r})) \times \nabla' G(\vec{r}) + (\vec{n}' \cdot \vec{E}_q(\vec{r})) \nabla' G(\vec{r})] d\vec{a}'. \quad (4.24)$$

Es ist ersichtlich, dass die Ableitung des elektrischen Feldes nicht mehr vorhanden ist, was gleichzeitig weniger Freiheitsgrade in der Systemmatrix bedeutet. Die Anzahl der Nichtnullelemente der statischen KIR-Matrix $N_{A,KIR,S}$ sieht dann wie folgt aus:

$$N_{A,KIR,S} = N_{A,KIR} - 2(N_{rx} + N_{ry}),$$

wobei $N_{A,KIR}$ ist die Anzahl der Nichtnullelemente der Matrix A_{KIR} , N_{rx} und N_{ry} ist die Anzahl der Referenzrandzellen in x - und y -Richtungen entsprechend. Das führt zu niedrigeren Aufwandskosten, kann jedoch nur für statische Berechnungen verwendet werden.

4.7 Empfohlene Anwendungen

Der im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Kirchhoff-Integral-Rand eignet sich für die Berechnung von Wellenlösungen in transversal offenen, längshomogenen Wellenleitern. Um die Greensche Funktion des freien Raumes auch bei inhomogenen Wellenleitern direkt nutzen zu können, muss der Referenzrand in einem homogenen Teilgebiet angeordnet werden.

In Konfigurationen mit inhomogener Materialverteilung am Referenzrand muss ein Freiraum zu dem Innengebiet hinzugefügt werden. Ein Beispiel für solche Konfiguration ist ein Mikrostreifenleiter (s. Abbildung 4.13). Bei diesen Wellenleitern gibt es abhängig von der Konfiguration leitende Elemente an einem und dielektrische Materialübergänge am anderen Rand. Um die Berechnung mit dem KIR durchzuführen, muss ein homogener Freiraum zwischen dem Wellenleiter und dem Referenzrand eingeführt werden.

Der in diesem Kapitel vorgestellte KIR und zugehörige Parameter enthalten Approximationen, die zusammen mit der Analyse der entsprechenden Konvergenzordnung im nächsten Kapitel diskutiert werden.

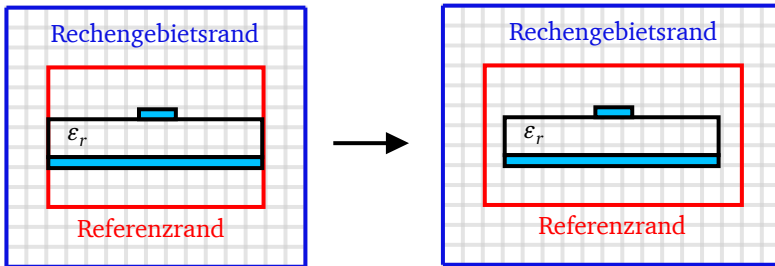


Abbildung 4.13.: Bei der Anwendung des Kirchhoff-Integral-Randes sollten keine Materialübergänge an dem Referenzrand auftreten, sonst muss man zunächst problemspezifisch die benötigte Greensche Funktion bestimmen. Durch einen zusätzlich eingeführten Abstand kann diese ungünstige Situation einfach vermieden werden.

5 Fehler- und Aufwandsanalyse

Das Kirchhoff-Integral 2.51 ist so definiert, dass sich das gesuchte Feld exakt darstellen lässt, falls die benötigten Feldgrößen entlang der gegebenen Kontur bekannt sind. Die auf dem Kirchhoff-Integral basierende KIR-Methode ist ein numerisches Verfahren und enthält Näherungen, die in diesem Kapitel untersucht werden.

Das Eigenwertproblem 2.29 basierend auf dem Diskretisierungsverfahrens FIT enthält durch die Materialbeziehung eine numerische Approximation. Die Fehlerordnung für die berechneten Eigenvektoren liegt bei $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, wenn als Freiheitsgrade Spannungsgrößen definiert sind und für die Auswertung des Fehlers die Norm L_2 verwendet wird. Diese Ordnung spielt eine wichtige Rolle bei der Bewertung des Fehlereinflusses von KIR auf die Gesamtlösung des Eigenwertproblems 4.8. Es reicht aus, die Fehlerapproximation von KIR gleich oder niedriger als die der FI-Methode zu halten. Die Definition der verwendeten L_2 -Norm zur Untersuchung des Eigenvektorfehlers wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Neben den Fehlerapproximationen werden in diesem Kapitel ebenfalls die Aufwandskosten diskutiert. Die Systemmatrix des Eigenwertproblems ist aufgrund von KIR dichter besetzt und verändert somit den rechnerischen Aufwand. Weiterhin lässt sich der Rechenaufwand durch die Anpassung der KIR-Parameter: (i) Abstandsparemeter und (ii) Quellenanzahl-Parameter verändern.

Im nächsten Abschnitt wird ein Rechenbeispiel eingeführt, das zur Fehleranalyse verwendet wird. Zusätzlich werden Normen eingeführt, mithilfe derer die KIR-Approximationen analysiert und mit entsprechenden Referenzlösungen verglichen werden.

5.1 Rechenbeispiel – Offener Wellenleiter

Zur Untersuchung von numerischen Fehlern der Eigenvektoren oder Eigenwerte wird eine analytische Referenzlösung eines offenen, nicht geschirmten

Wellenleiters verwendet (s. Abbildung 5.1). Die Propagationskonstanten β von propagierenden Moden können durch das Lösen folgender Gleichung gefunden werden:

$$\left[\frac{J'_n(p_1 a)}{p_1 J_n(p_1 a)} + \frac{K'_n(q_2 a)}{q_2 K_n(q_2 a)} \right] \left[\frac{k_1^2 J'_n(p_1 a)}{p_1 J_n(p_1 a)} + \frac{k_2^2 K'_n(q_2 a)}{q_2 K_n(q_2 a)} \right] = \left(\frac{\beta n}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{q_2^2} \right)^2. \quad (5.1)$$

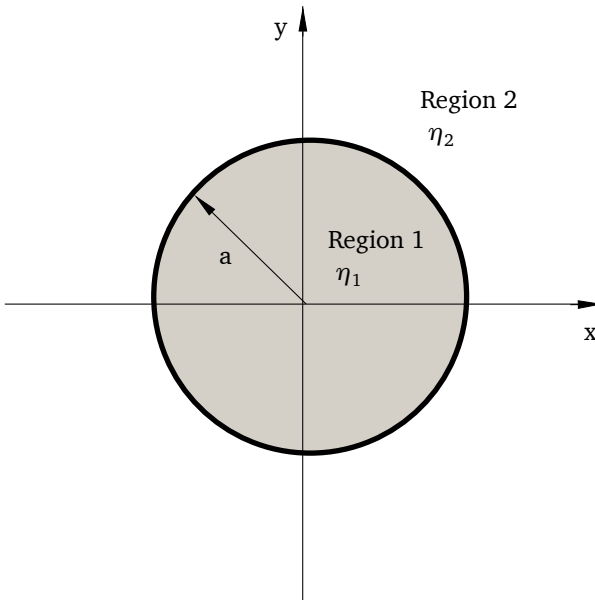


Abbildung 5.1.: Anordnung eines offenen Wellenleiters mit den Regionen 1 und 2 mit den Brechungsindizes η_1, η_2 und der Bedingung $\eta_1 > \eta_2$.

Die Komponenten der elektrischen Feldstärke können durch

$$E_z^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n J_n(p_1 r) e^{jn\theta},$$

$$E_r^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{p_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-j\beta p_1 A_n J'_n(p_1 r) + \frac{\omega\mu_0 n}{r} B_n J_n(p_1 r) \right] e^{jn\theta}, \quad (5.2)$$

$$E_\theta^{(1)}(r, \theta) = \frac{1}{p_1^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\beta n}{r} A_n J_n(p_1 r) + j\omega\mu_0 p_1 B_n J'_n(p_1 r) \right] e^{jn\theta}$$

berechnet werden. Die Herleitung und Erläuterung von den entsprechenden Parametern und Koeffizienten wie p_1, A_n, a, B_n, r, n kann in [11], [13] und [25] nachgeschlagen werden.

Die Parameter des Wellenleiters können der Tabelle 5.1 entnommen werden.

Tabelle 5.1.: Parameter des offenen Wellenleiters aus der Abbildung 5.1.

Radius a	6,5 mm
Frequenz f	16 GHz
Brechungsindex η_1 der Region 1	2
Brechungsindex η_2 der Region 2	1,5
Gitterschrittweite Δx für numerische Berechnungen	0,6 mm

Unter Verwendung dieser Parameter, enthält die Lösung genau vier propagierende Moden mit den Ausbreitungskonstanten 520 m^{-1} , 529 m^{-1} , 512 m^{-1} , 606 m^{-1} , wobei die ersten zwei monopole und die letzten zwei degenerierte Moden. Zum Vergleich von Feldwerten der analytischen und numerischen Lösungen kann jede dieser Moden verwendet werden. Im Rahmen dieses Beispiels konzentriert man sich auf die Monopolmoden mit der Ausbreitungskonstante 520 m^{-1} . Zusätzlich müssen die numerischen und analytischen Lösungen normiert werden, damit beide Feldlösungen miteinander verglichen werden können. Der relative Fehler von Eigenwerten wird wie folgt definiert:

$$F_{\text{ew,rel}} = \frac{|\lambda_{\text{ref}} - \lambda_{\text{num}}|}{|\lambda_{\text{ref}}|}, \quad (5.3)$$

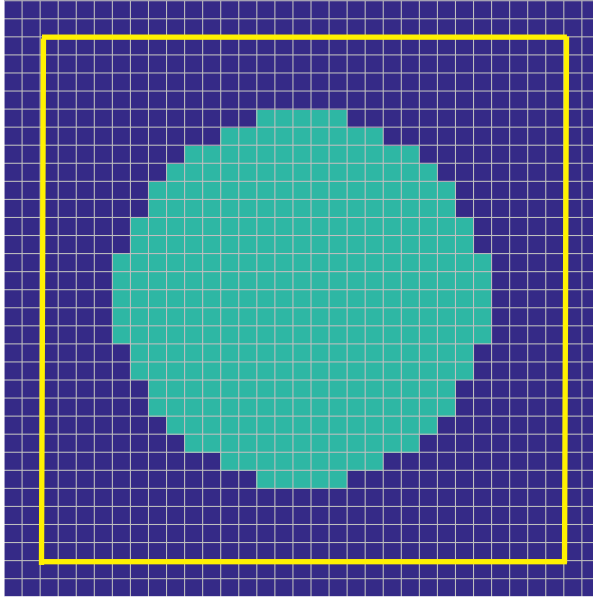


Abbildung 5.2.: Rechengebiet mit dem offenen Wellenleiter und der Gitterschrittweite $\Delta x = a/11$. In gelb ist der Referenzrand und in tyrkis der Wellenleiter dargestellt. Das Hinteregrundmaterial ist in blau abgebildet.

wobei λ_{ref} der analytisch ausgerechneter Eigenwert und λ_{num} der numerisch berechnete, fehlerbehaftete Eigenwert ist.

Um den numerisch berechneten Feldvektor mit dem analytischen vergleichen zu können, muss eine passende Norm eingesetzt werden. Des Weiteren muss die analytische Lösung auf dasselbe Gitter wie die numerische projiziert werden. Dazu wird die L_2 -Norm eingesetzt. Zusätzlich sollte für den relativen Vergleich der Fehler mit $\|E_{\text{ref}}\|_2$ normiert werden, was zum relativen Fehler $L_{2,\text{rel}}$ führt.

$$\|E_{\text{ref}} - E_{\text{num}}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |E_{\text{ref},i} - E_{\text{num},i}|^2}, \quad (5.4)$$

$$L_{2,\text{rel}} = \frac{\|E_{\text{ref}} - E_{\text{num}}\|_2}{\|E_{\text{ref}}\|_2},$$

wobei $E_{\text{ref},i}$ und $E_{\text{num},i}$ die elektrischen Feldkomponenten der numerischen Lösungen und der Referenzlösungen in der Mitte der Zellenkante i sind. Die Summe erstreckt sich über den Innenbereich mit der Zellenanzahl N (der Bereich innerhalb der gelben Abgrenzung in der Abbildung 5.2), d. h. die gesamte betrachtete Fläche des Wellenleiters ohne den KIR-Bereich summiert. Im betrachteten Fall der Diskretisierung mit einem äquidistanten Gitter ist der Bezug einzelner Feldstärkegrößen zu den jeweiligen Kanten bzw. Flächen innerhalb der L_2 -Norm irrelevant, da sich dieser wieder herauskürzen würde. Bevor die L_2 -Norm zur Berechnung des Feldfehlers eingesetzt wird, müssen beide Lösungen gleich skaliert sein, was durch eine Skalierung mittels der elektrischen Energiedichte $w_e = \frac{1}{4} \int \epsilon E^2 \, d^3x$ beider Feldvektoren erreicht wird.

Für die Beispielrechnung wird das Rechengebiet durch ein äquidistantes, rechteckiges Gitter mit der Gitterschrittweite $\Delta x = a/11$ aufgespannt. In der Abbildung 5.2 ist die Konfiguration des zweidimensionalen Modells auf einem äquidistanten Gitter dargestellt.

Wichtig ist ebenfalls zu erwähnen, dass für die spätere Konstruktion eines Wellenleiterports sowohl die Eigenvektoren als auch die Eigenwerte eine wichtige Rolle spielen. Eigenwerte λ lassen sich jedoch mithilfe des Rayleigh-Quotienten [26] aus den Eigenvektoren x bestimmen. Daher wird sich im Rahmen vorliegender Arbeit bei der Betrachtung der Fehlerordnung auf den Fehler des Eigenvektors konzentriert.

5.2 Approximationen

Insgesamt enthält die KIR-Methode drei Approximationen:

1. Numerische Ableitung der elektrischen Feldstärke
2. Numerische Integration der elektrischen Feldstärke
3. Numerische Integration der Greenschen Funktion

Jede dieser Approximationen übt einen charakteristischen Einfluss auf den Gesamtfehler der Lösung aus. Im Folgenden werden diese Beiträge einzeln diskutiert.

5.2.1 Numerische Ableitung der elektrischen Feldstärke

Das Kirchhoff-Integral 2.51 enthält durch den Term $G(\vec{r})(\vec{n}' \cdot \nabla')\vec{E}(\vec{r})$ eine Ableitung des elektrischen Feldes. Zur Ermittlung des numerisch ausgewerteten Ausdrucks wird der zentrale Differenzenquotient eingesetzt [26].

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (5.5)$$

Die Fehlerordnung bei dieser Methode beträgt $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ und entspricht damit der Fehlerordnung der eingesetzten FI-Methode. Diese Approximation könnte vermieden werden, wenn man anstatt 2.45 die Formulierung 2.44 einsetzen würde. Dabei müsste jedoch das Eigenwertproblem 4.8 gleichzeitig für das \vec{E} - und \vec{B} -Feld gelöst werden, was aufgrund der damit einhergehenden Verdopplung der Freiheitsgrade zu einem höheren numerischen Aufwand führen würde. In der vorliegenden Arbeit wird das Eigenwertproblem so aufgestellt, dass nur der elektrische Feldvektor benötigt wird, wodurch die Approximation der Feldableitung nicht zu vermeiden ist. Nur im statischen Fall bei $\omega = 0$ entfällt dieser Beitrag, so dass dann keine Näherung benötigt wird.

Da diese Approximation von der Gitterschrittweite abhängt, kann sie nicht unabhängig von den FIT-Approximationen untersucht werden.

5.2.2 Numerische Integration der elektrischen Feldstärke

Mithilfe des Kirchhoff-Integrals lassen sich die elektrische Feldstärke \vec{E} sowie die magnetische Flussdichte \vec{B} an jedem Punkt innerhalb eines gegebenen Bereichs bestimmen. In dem aufgestellten Eigenwertproblem auf Basis der zweidimensionalen FI-Methode 2.29 werden jedoch elektrische Spannungen als Freiheitsgrade verwendet. Daher muss die aus dem KI ermittelte elektrische Feldstärke entlang einer Zellenkante des primären Gitters integriert werden. Hier wird die Mittelpunktsregel als numerische Integralmethode verwendet [26]:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right), \quad (5.6)$$

mit a, b als Anfangs- und Endpunkte der Integrationsstrecke. Die Fehlerordnung dieser Approximation liegt bei $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, was der Fehlerordnung von FIT entspricht.

Da die Veränderung dieser Approximation nur durch die Anpassung der Gitterschrittweite möglich ist, kann dieser Fehler nicht unabhängig von der FIT-Approximation untersucht werden.

5.2.3 Numerische Integration der Greenschen Funktion

Im Zuge der Auswertung des Kirchhoff-Integrals muss die Greensche Funktion 2.48 und deren Ableitung 2.50 entlang einer Zellenkante des Referenzrandes integriert werden. Die Integration erfolgt dabei vorzugsweise numerisch mithilfe der Mittelpunktsregel. Da diese Approximation jedoch nicht von der Gitterschrittweite des Rechengitters abhängt, kann ein numerisches Verfahren mit höherer Integralordnung verwendet werden, um die Genauigkeit der Lösung zu erhöhen. Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Approximationen kann in diesem Fall die Genauigkeit erhöht werden, ohne zusätzliche Beiträge in die Systemmatrix zu verursachen. Hierzu wird die Gauß-Quadratur eingesetzt [26]:

$$\int_a^b f(x) \Psi(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Psi_i, \quad (5.7)$$

mit f als eine stetige Funktion und Ψ als eine Gewichtsfunktion. Damit lässt sich der Approximationsfehler weit unter dem Verfahrensfehler der Diskretisierungsmethode halten. Bei der Gauß-Quadratur mit der Ordnung $2n + 2$ ist das Restglied des Integrals wie folgt definiert:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!} \int_a^b p_{n+1}^2(x) dx$$

mit $f \in C^{2n+2}$, $\theta \in [a, b]$ und $p_{n+1} = \prod_{j=0}^n (x - \lambda_j)$.

Durch den KIR-Quellen-Anzahlparameter kann man die Anzahl der verwendeten Referenzquellen einstellen. So werden bei dem Faktor $P < 100$ des Quellen-Anzahlparameters nicht alle Referenzrandpunkte berücksichtigt. Die-

se nicht berücksichtigten Referenzquellen lassen sich als die mit null approximierten Integrale interpretieren. Da die Genauigkeit des Kirchhoff-Integrals und damit des Kirchhoff-Integral-Rands von der Anzahl der verwendeten Referenzrandzellen abhängt, erhöht sich der Fehler der Gesamtlösung, falls nicht alle Referenzrandpunkte in die Berechnung einbezogen werden.

Durch die Verkleinerung des Quellen-Anzahlparameters entsteht ein Fehler, der nur durch die Erhöhung der Gitterauflösung verkleinert werden kann, da die maximale Anzahl der berücksichtigten Referenzquellen an die Gitterauflösung gebunden ist.

5.3 Fehleranalyse und Fehlerordnung

Die Approximationen

- Ableiten des elektrischen Feldes
- Integral des elektrischen Feldes

hängen direkt von der Gitterauflösung des Diskretisierungsverfahrens ab und können demnach nur durch die Anpassung des Rechengitters verändert werden. Die Modifizierung des Gitters führt jedoch ebenfalls zur Veränderung des durch die FI-Methode verursachten Diskretisierungsfehlers. Daher können nur folgende Approximationen und Fehlerquellen unabhängig voneinander und von den FIT-Fehlern untersucht werden:

- Integral der Greenschen Funktion
- Fixpunktiteration.

5.3.1 Fixpunktiteration

Die zweidimensionale Greensche Funktion 2.48 und deren Ableitung 2.50 enthalten im Argument die Propagationskonstante k_z , die als Eigenwert in 4.8 definiert ist. Der Eigenwert lässt sich nicht aus dem Funktionsargument extrahieren, wodurch die gesamte Problemstellung zu einem nichtlinearen Eigenwertproblem führt. Im Abschnitt 4.1 wurden zwei Möglichkeiten zur Linearisierung des Problems vorgestellt und erläutert, weswegen die Lösung mit Hilfe der Fixpunktiteration im Rahmen dieser Arbeit bevorzugt wird. Dabei wählt man zunächst eine geeignete Propagationskonstante k_z innerhalb eines im Vorfeld bestimmbareren Intervalls und iteriert diesen fehlerbehafteten Anfangswert

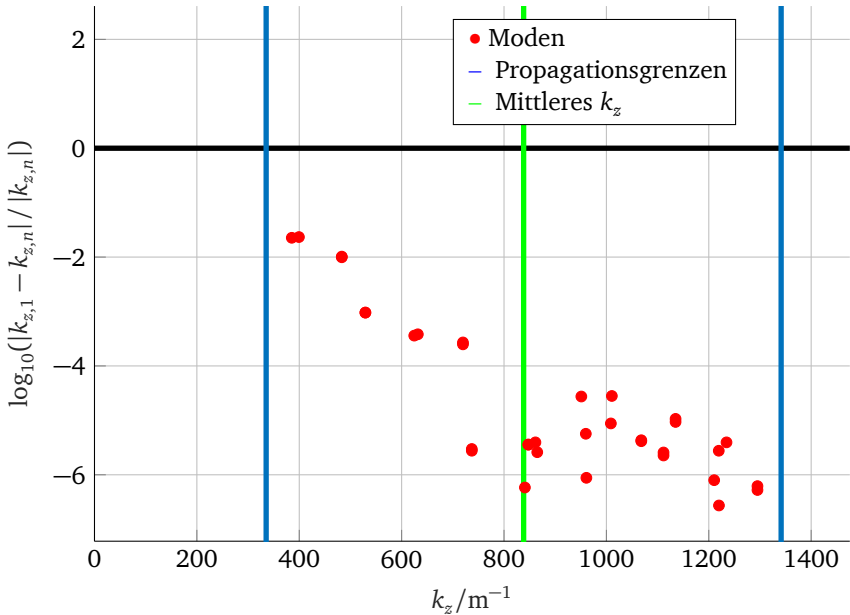


Abbildung 5.3.: Relativer Fehler 5.8 der mithilfe einer Fixpunktiteration berechneten Propagationskonstanten über dem Propagationsbereich eines offenen dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

in mehreren Schritten zur eigentlichen Lösung. Die Anzahl der benötigten Iterationen hängt sowohl von der geforderten Genauigkeit also auch von dem gewählten Anfangswert ab.

Im Folgenden wird ein Anwendungsbeispiel des offenen dielektrischen Wellenleiters untersucht, dessen Konfiguration bei einer Frequenz von 16 GHz 34 propagierende Moden erlaubt. Die Genauigkeit der Fixpunktiteration wird für alle berechneten Eigenwerte identisch eingestellt. In der Abbildung 5.3 wird der relative Fehler

$$F_{\text{ew,rel}} = \frac{|k_{z,1} - k_{z,n}|}{|k_{z,n}|} \quad (5.8)$$

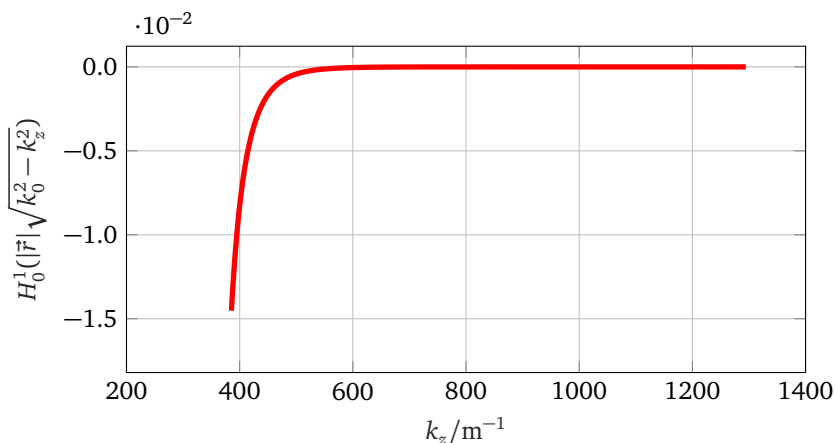


Abbildung 5.4.: Darstellung des Verlaufs der Hankelfunktion H_0^1 im Moden-Propagationsbereich des ungeschirmten dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

dargestellt, wobei $k_{z,1}$ das in der ersten Iteration erhaltene k_z und $k_{z,n}$ das in der letzten Iteration erhaltene k_z des jeweiligen Eigenwerts sind.

In der Abbildung 5.3 ist ersichtlich, dass sich der relative Fehler mit der Entfernung von der unteren Propagationsgrenze verkleinert. Der Grund dafür ist die Entfernung des gesuchten k_z von der Singularität, die an der unteren Propagationsgrenze liegt. Die in den Greenschen Funktionen enthaltenen Hankelfunktionen besitzen eine Singularität bei 0 (s. Abbildung 5.4). Das Argument $|\vec{r}| \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ der Greenschen Funktion strebt gegen null bei $k_z \rightarrow k_0$. Numerische Berechnungen verursachen in der Nähe von Singularitäten größere Fehler als solche, die weiter von dieser entfernt sind, daher sind die Fehler von den Eigenwerten, die in der Nähe von der unteren Propagationsgrenze liegen höher.

Zur Untersuchung des Fehlers der Fixpunktiteration wird die Monopolmode des Rechenbeispiels aus Abschnitt 5.1 verwendet. Die Transversalkomponenten des elektrischen Feldes der analytischen Lösung werden in Abbildung 5.5 veranschaulicht. Zusätzlich kann der Abbildung 5.6 die Vektorverteilung des transversalen elektrischen Feldes entnommen werden.

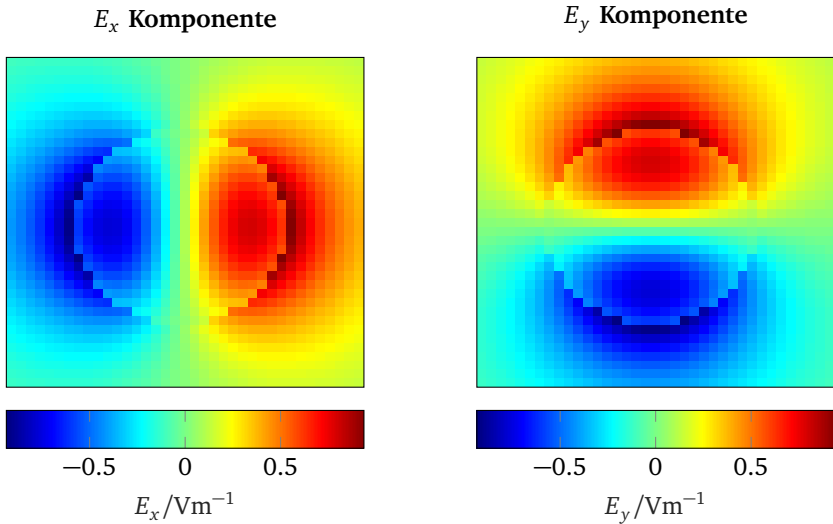


Abbildung 5.5.: Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes der Monopolmode des ungeschirmten Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Die Lösung wurde analytisch mithilfe von 5.2 berechnet.

Bei der ersten Iteration wird der Anfangswert für k_z so gewählt, dass dieser weit entfernt von der unteren Propagationsgrenze liegt. Grund dafür ist die Singularität der Hankelfunktion, die im Fall von $k_z = k_0$ entsteht. Jeder weitere Iterationsschritt führt zu einer Verkleinerung des Residuums, wie anhand von Abbildung 5.8 erkennbar ist. In dem konkreten betrachteten Anwendungsbeispiel reichen bereits zwei Iterationsschritte aus, um den relativ großen Genauigkeitsunterschied von 34% zu erzielen (s. Abbildung 5.7).

Der Fehler des Feldvektors lässt sich am besten an den Rändern des Rechengebiets (s. Abbildungen 5.9, 5.10) mit der transversalen Feldverteilung des elektrischen Feldes bei dem ersten und vierten Iterationsschritt erkennen.

Der Unterschied des Feldfehlers am Rand kann auch zusätzlich an der Radialkomponente des elektrischen Feldes entlang einer diagonalen Linie, wie in Abbildung 5.11, betrachtet werden.

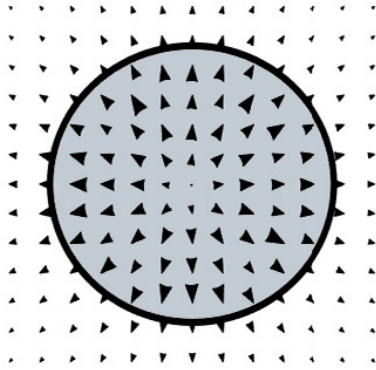


Abbildung 5.6.: Verteilung des transversalen elektrischen Feldes der TE Monopolmode des ungeschirmten dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Die Lösung wurde analytisch durch 5.2 berechnet.

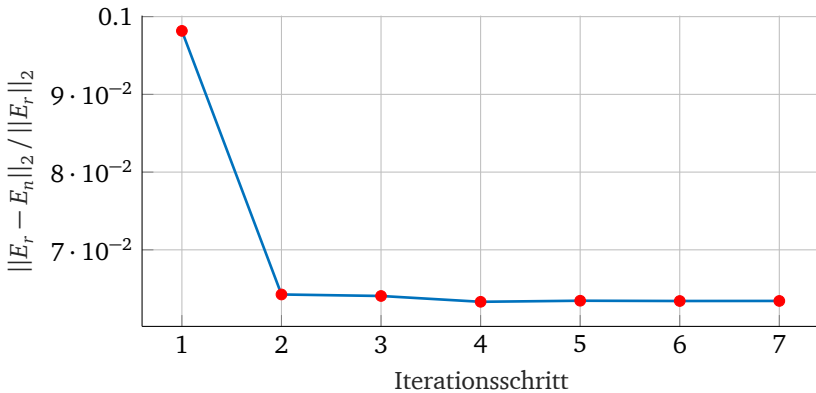


Abbildung 5.7.: Relative Abweichung als Funktion des Iterationsschrittes der Fixpunktiteration aus Abschnitt 5.3.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

Am Ende des jeweiligen Pfades ist erkennbar, dass die analytische und nu-

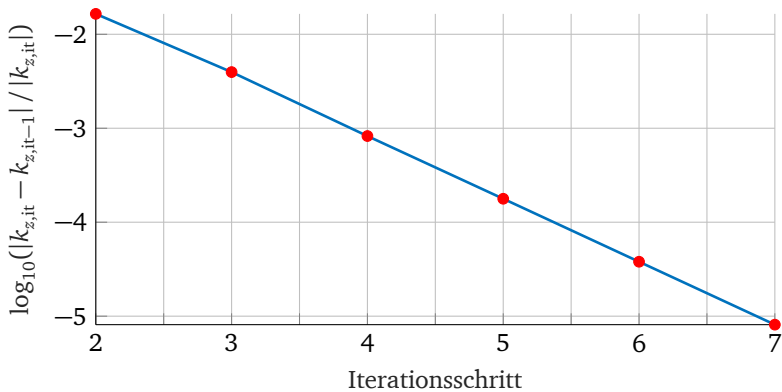


Abbildung 5.8.: Relativer Fehler von den Eigenwerten bei einzelnen Iterationsschritten. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

merische Lösung mit Fixpunktiteration zusammenfallen und die numerische Lösung ohne die FPI von der analytischen stark abweicht.

Die Fehlerordnung der Fixpunktiteration bei unterschiedlichen Iterationsschritten soll zunächst untersucht werden. Dazu wird die Eigenwertrechnung mit unterschiedlichen Gitterschrittweiten durchgeführt. Resultate sind der Abbildung 5.12 zu entnehmen. Anhand der Abbildung ist erkennbar, dass die Lösung, bei der nicht genügend Iterationsschritte verwendet wurden, nicht gegen die Maschinengenauigkeit konvergiert. Der Grund dafür ist der Fehler der gemittelten Propagationskonstante, der sich nicht mit der Gitterschrittweite ändert. Wenn die Fixpunktiteration genügend Iterationsschritte enthält, passt sich dieser Wert jedoch an und führt zu einer Konvergenzordnung von 0.5. An dieser Stelle wird noch mal darauf hingewiesen, dass hierbei nicht der Fehler des Eigenwertes, sondern die L_2 -Norm des Eigenvektors untersucht wird und der Vergleich zwischen den elektrischen Feldstärken statt findet.

Anhand dieses Beispiels ist erkennbar, dass diese Approximation einen großen Einfluss auf den Fehler des berechneten Feldes hat. Außerdem ist ersichtlich, dass das Verfahren mit nicht ausreichend vielen Iterationsschritten gegebenenfalls nicht gegen die Maschinengenauigkeit konvergiert.

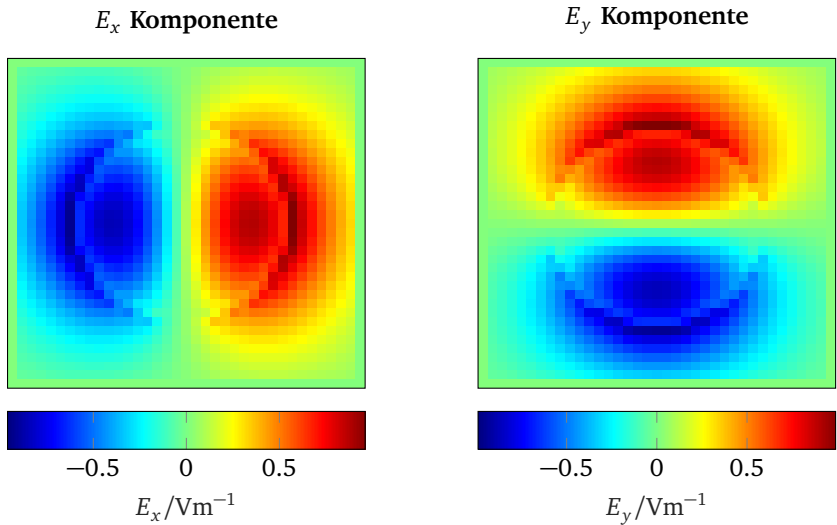


Abbildung 5.9.: Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes bei dem ersten Iterationsschritt der Fixpunktiteration aus Abschnitt 4.2.2. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

5.3.2 Integral der Greenschen Funktion

Für die Untersuchung des Fehlers, der durch das numerische Integral der Greenschen Funktion entsteht, wird als Referenz die analytische Lösung der Monopolmode mit $k_z = 520 m^{-1}$ verwendet. Man untersucht dabei den Fehler der transversalen Feldverteilung. Verwendet man die Gauß-Quadratur nach Gleichung 5.7 mit der Ordnung 8, ändert sich die Lösungsgenauigkeit marginal im Vergleich zur Lösung unter der Verwendung der Mittelpunktsregel. Zusätzlich wurden zwei weitere Berechnungen mit unterschiedlichen Integralordnungen bei $n = 2$, $n = 4$ durchgeführt. Der relative Unterschied zwischen den L_2 -Fehlern der Mittelpunktsregel und den höheren Integralordnungen wird in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

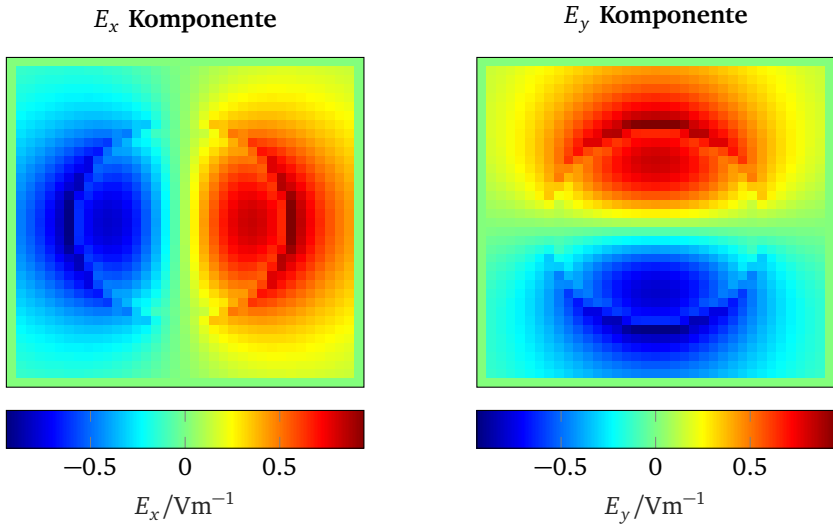


Abbildung 5.10.: Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes am Ende der Fixpunktiteration aus Abschnitt 4.2.2. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

Der Grund für die geringe Veränderung des Gesamtfehlers ist, dass dieser stärker durch andere Approximationen dominiert wird. Die Konvergenzordnung der Methode ändert sich bei der Verbesserung dieses Fehlers nicht.

5.3.3 Anpassung des Quellenanzahl-Parameters

In diesem Abschnitt wird der Fehler untersucht, der durch den Quellenanzahl-Parameter aus Abschnitt 4.4.2 beschrieben wurde.

Man betrachtet weiterhin die Monopolmode mit der Propagationskonstante $k_z = 520 \text{ m}^{-1}$. Die Genauigkeit der Lösung ändert sich mit der Anpassung des Quellenanzahl-Parameters P . Ebenso ändert sich das Konvergenzverhalten, da durch die Verkleinerung der Anzahl von Referenzquellen ein Approximationsfehler entsteht, der sich nicht mit der Gitterschrittweite verkleinert.

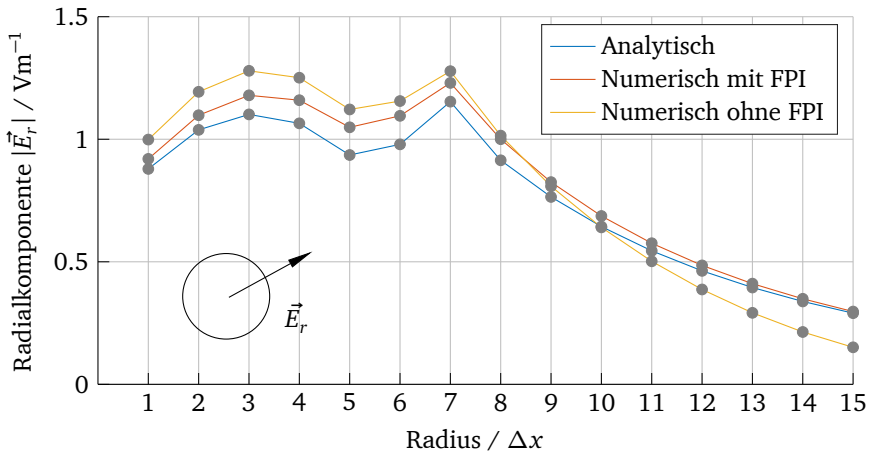


Abbildung 5.11.: Radiale elektrische Feldkomponente der analytischen und numerischen Lösungen mit und ohne Fixpunktiteration. Zur Berechnung der Radialkomponente wurden Punkte auf dem Gitter mit der Gitterschrittweite Δx abgetastet. Als Rechenbeispiel wurde die Anordnung aus der Abbildung 5.1 verwendet. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

In der Abbildung 5.13 ist der Anstieg des Feldfehlers mit dem absteigenden Quellenanzahl-Parameter P zu erkennen. Interessant ist bei dem untersuchten Beispiel der Vergleich der Feldfehler bei $P = 100\%$ und $P = 25\%$. Der Unterschied des Feldfehlers zwischen den beiden Berechnungen ist relativ gering und lässt annehmen, dass man für dieses Beispiel weniger als 100% der Referenzquellen verwenden kann, um ein akzeptables Ergebnis zu erreichen.

Abbildung 5.14 zeigt das Konvergenzverhalten für Berechnungen mit $P=100\%$, $P = 25\%$, $P = 16\%$ und $P = 10\%$. Hierbei ist wichtig, wie sich die Anpassung des Quellenanzahl-Parameters auf das Konvergenzverhalten auswirkt. Mit dem fallenden P erhöht sich der Einfluss dieses Fehlers auf die Gesamtlösung. Das führt dazu, dass sich der Gesamtfehler der Lösung ab einer bestimmten Gitterschrittweite nicht mehr verkleinert.

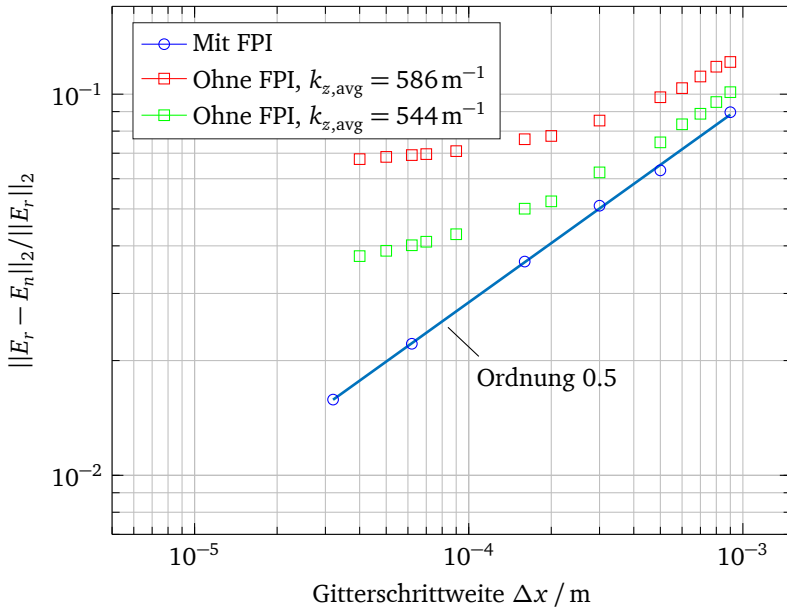


Abbildung 5.12.: Konvergenzverhalten der elektrischen Feldstärke aus Abbildung 5.2 der Monopolmode aus Abbildung 5.5 mit und ohne FPI. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

Der Quellenanzahl-Parameter P erlaubt die Verringerung der Besetzungsdichte der Systemmatrix und führt wiederum zu einem einfacher zu lösenden Eigenwertproblem bei einem unveränderten Eigenwertspektrum. Ein passender Wert für diesen Parameter muss jedoch abhängig von der Anwendung gewählt werden.

5.3.4 Anpassung des Abstandsparameters

Obwohl durch die Berücksichtigung der Singularität des Integrals 2.51 der KIR-Abstandsparameters zu 0 gesetzt werden kann, erhöht sich der Gesamt-

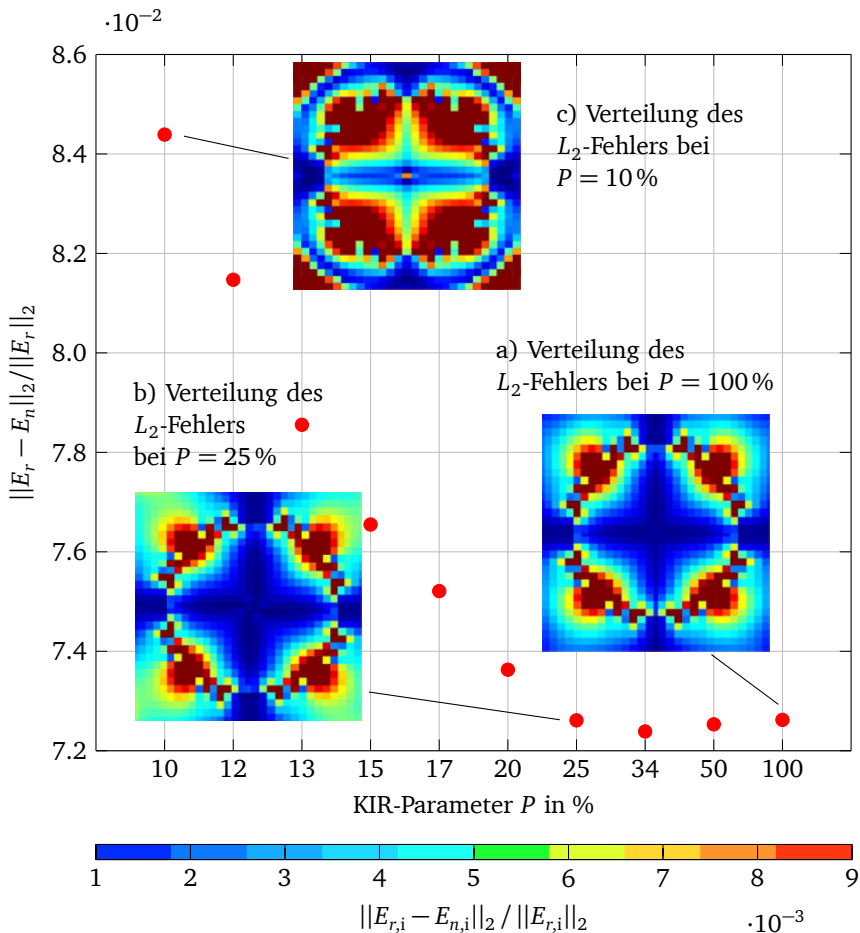


Abbildung 5.13.: Berechneter Feldfehler der Monopolmode aus Abbildung 5.5 als Funktion des Quellenanzahl-Parameters P . Die Verteilung a), b) und c) des L_2 -Fehlers berechnet sich aus den numerischen und analytischen Feldwerten der jeweiligen Gitterzellen i .

fehler aufgrund der Feldapproximation an einzelnen Zellenkanten. Es bietet sich demnach an, den KIR-Abstandsparameter zu erhöhen. Im Gegensatz zum

Tabelle 5.2.: Feldfehler L_2 für unterschiedliche Ordnungen der Gauß-Quadratur für das numerische Integral der Greenschen Funktion.

Ordnung der Gauß-Quadratur	F^a
2	$9 \cdot 10^{-4}$
4	$2 \cdot 10^{-3}$
8	$9 \cdot 10^{-3}$

$$F^a = \frac{|L_{2,gq} - L_{2,mr}|}{|L_{2,gq}|}$$

$L_{2,gq}$ - Feldfehler unter der Verwendung der Gauß-Quadratur

$L_{2,mr}$ - Feldfehler unter der Verwendung der Mittelpunktsregel

Einsatz eines geschlossenen Randes führt bei KIR die Erhöhung der Entfernung des Rechengebietsrandes vom Wellenleiter nicht unbedingt zu einer genaueren Lösung. Der Grund dafür ist die im Abschnitt 4.4.1 beschriebene Relation zwischen dem kleinsten und größten Referenz- zum Rechengebietsrandabstand R_{\min}/R_{\max} (Abbildung 4.1).

Die zum Rechengebietsrand am nächsten gelegenen Referenzquellen besitzen den größten Einfluss auf den berechneten Randfeldwert. Bei der kontinuierlichen Version des KI spielt dies keine Rolle. Im numerischen Fall jedoch fließen Approximationsfehler mit ein und falls die Gewichtung der weiter entfernten Referenzquellen relativ zu den näheren Quellen größer wird, erhöht sich der Gesamtfehler der Lösung. In Abbildung 5.15 ist der Feldfehler in Abhängigkeit von der definierten Abstandsrelation dargestellt. Der Fehler sinkt mit der Entfernung des Randes bis zu einem bestimmten Punkt und steigt danach wieder an.

5.3.5 Berücksichtigung der Singularität

Falls der Aufpunkt und der Quellpunkt bei der Auswertung der Greenschen Funktion zusammen fallen, entsteht eine Singularität, die innerhalb des auszuwertenden Integrals jedoch zu einem endlichen Wert konvergiert.

Durch die Berechnung der Beiträge 4.19 eliminiert man den Fehler, der bei

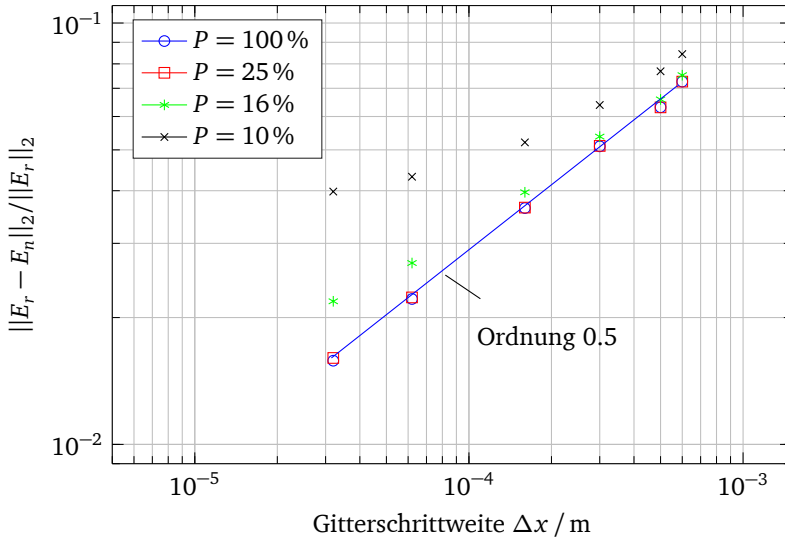


Abbildung 5.14.: Konvergenzverhalten bei unterschiedlichen Quellenanzahl-Parameter-Werten P . Berechnet wurde die Monopolmode aus Abbildung 5.5. Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

der numerischen Integration an der Singularität entsteht, da das Integral mit dem singularitätsbehafteten Integrand analytisch berechnet wurde. Wenn der Referenzrand und der Rechengebietsrand aufeinander liegen, ergibt sich ein höherer Gesamtfehler, aufgrund der niedrigen Integralordnung der Feldstärken in der jeweiligen Kantenmitte. Wenn die Zellen beider Ränder aneinander anliegen, ist der Einfluss der numerischen Feldapproximation der jeweiligen Felder höher, als bei dem Quellenanzahl-Parameter $L \geq 0$. Der L_2 -Fehler des Feldvektors mit der berücksichtigten Singularität ist dabei höher als der bei $L = \Delta x$ (mit Δx als die Zellschrittweite).

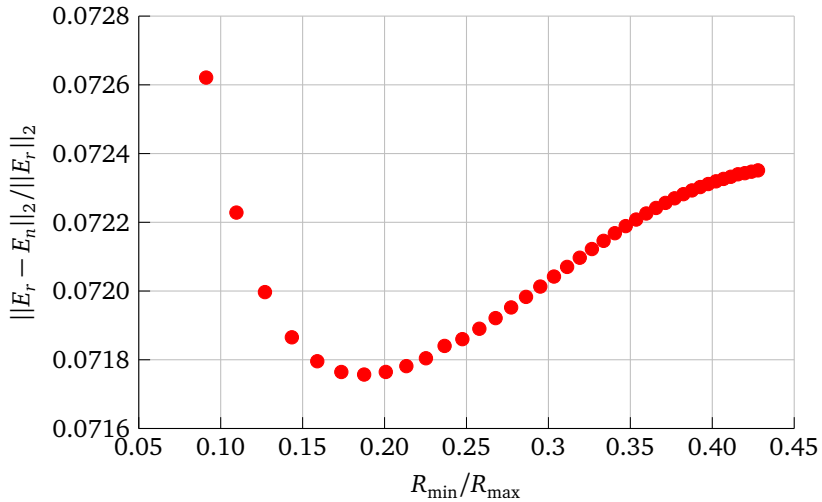


Abbildung 5.15.: Berechneter Feldfehler der Monopolmode aus Abbildung 5.5 als Funktion von dem steigenden Abstandsparameter L aus Abschnitt 4.4.1, ausgedrückt durch die Relation R_{\min}/R_{\max} . Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

5.4 Aufwandskosten

Die Bewertung der Aufwandskosten der vorgestellten Methode ist ein wichtiger Bestandteil der Analyse. Hierbei ist die Höhe des Aufwands entscheidend für den Aufbau der Systemmatrix und die anschließende Berechnung durch den Eigenwertlöser. Zur Aufwandsbewertung wurden FLOPs (engl. floating point operations) herangezogen.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode wurde mit der kommerziellen Software MATLAB[®] entwickelt. Für die Lösung des Eigenwertproblems wurden die Methoden „eig“ und „eigs“ verwendet. Zum Aufbau des FIT-Codes und der Systemmatrix wurden Funktionen geschrieben, die unter Umständen Optimierungspotenzial in Bezug auf die Effizienz besitzen. Dies sollte bei der Bewertung der Resultate berücksichtigt werden.

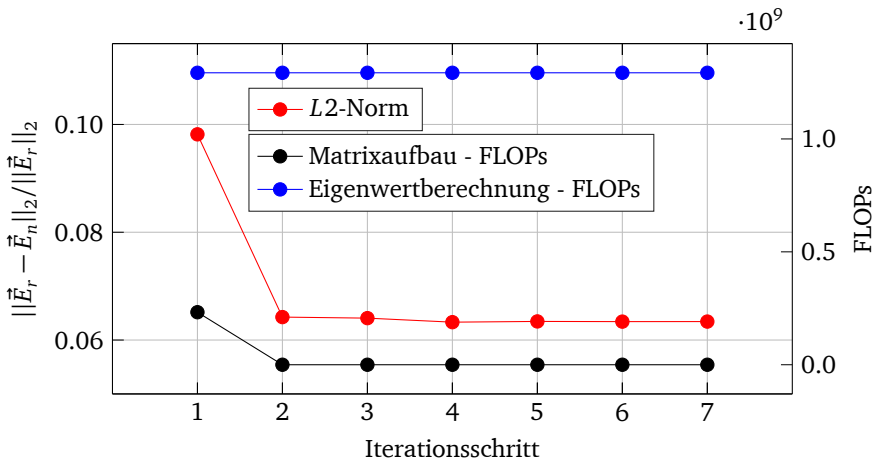


Abbildung 5.16.: Feldfehler und Aufwandskosten in FLOPs als Funktion der Iterationsschritte der Fixpunktiteration. Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

5.4.1 Fixpunktiteration

Die Linearisierung des Eigenwertproblems 4.8 durch die Fixpunktiteration führt zu mehreren Iterationen. Bei der ersten Iteration muss der gesamte Code zum Aufbau der FIT-Matrix und KIR-Matrix durchlaufen werden. Ab dem zweiten Iterationsschritt entfällt der Aufwand für den FIT-Matrixaufbau, da diese unabhängig von der KIR-Zusatzmatrix zusammengesetzt wird. Die KIR-Zusatzmatrix A_{KIR} muss jedoch neu zusammengesetzt werden, da sich das k_z nicht aus der Greenschen Funktion extrahieren lässt. Ab dem zweiten Iterationsschritt ist der Gesamtaufwand für den Aufbau und die Eigenwertberechnung identisch mit den nachfolgenden Iterationsschritten. In dem konkreten Beispiel des offenen Wellenleiters sieht man in der Abbildung 5.7, dass bereits der zweite Iterationsschritt ausreicht, um die Genauigkeit um 34.5% zu erhöhen. Der Aufwand für den Matrixaufbau und die Eigenwertberechnung ist in FLOPs als Funktion der Iterationsschritte in Abbildung 5.16 dargestellt.

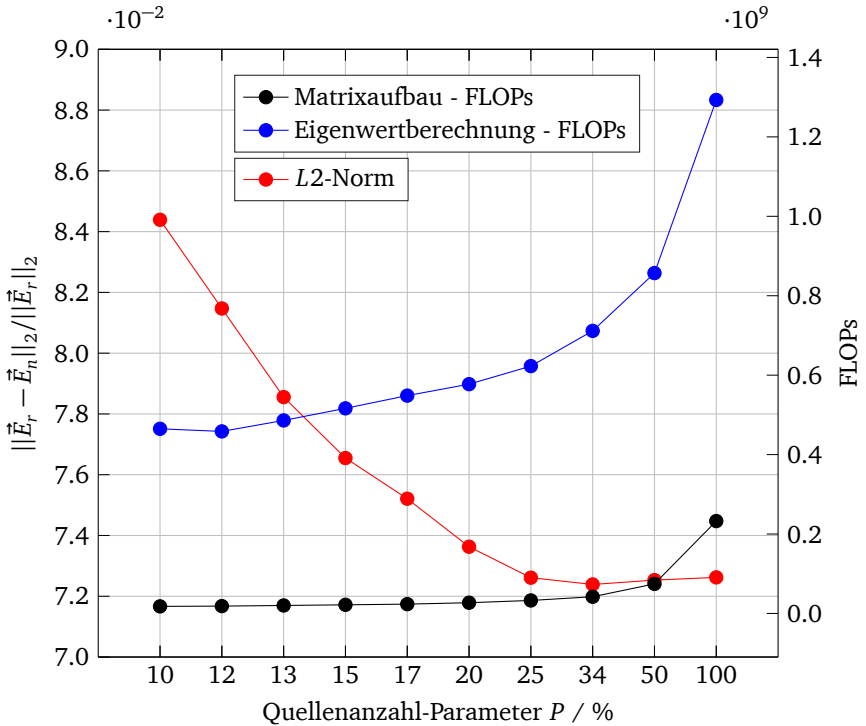


Abbildung 5.17.: Feldfehler und Aufwandskosten als Funktion des Quellenzahl-Parameters P . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

5.4.2 Anpassung des Quellenzahl-Parameters

Der Quellenzahl-Parameter P führt zur einer dünneren Besetzung der KIR-Zusatzmatrix A_{KIR} , wodurch wiederum ein niedrigerer Rechenaufwand erreicht wird. Die Abbildung 5.17. zeigt, dass für das vorliegende Beispiel bereits bei 25% der Referenzquellen gute Ergebnisse erzielt werden. Zusätzlich zu den

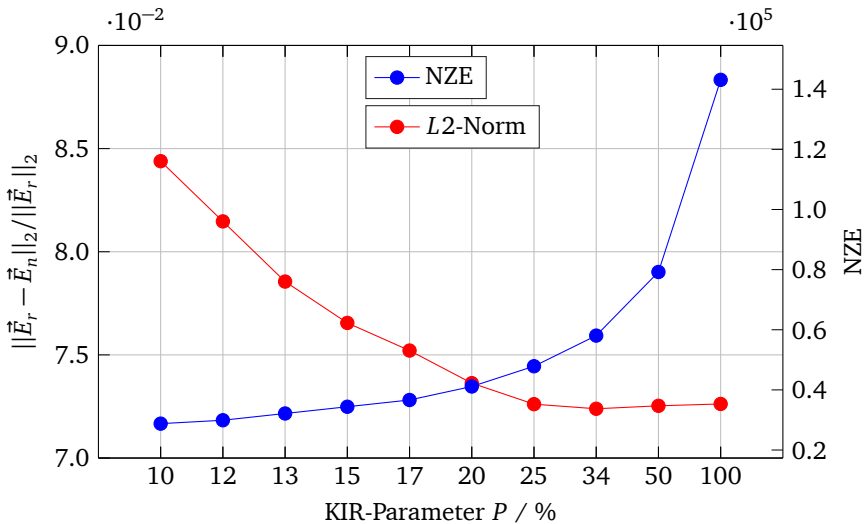


Abbildung 5.18.: Feldfehler und Speicherkosten als Funktion des Quellenanzahl-Parameters P . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

FLOPs wird in der 5.18 auch die Anzahl der Nicht-Null-Elemente (NZE) in der Systemmatrix über dem wachsenden Quellenanzahl-Parameter P aufgetragen.

5.4.3 Anpassung des Abstandsparmeters

Die Erhöhung des Abstandsparmeters L führt zu einer Vergrößerung der Systemmatrix. Gleichzeitig erhöht dies den rechnerischen Aufwand und den benötigten Speicher. In der Abbildung 5.19 werden die FLOPs als Funktion des Abstandsparmeters L dargestellt. Im Rahmen des untersuchten Beispiels hat der Abstandsparmeter einen geringen Einfluss auf die Gesamtlösung. Dies liegt daran, dass der Gesamtfehler durch andere KIR- und FIT-Approximationen dominiert wird. Im Gegensatz zur Lösungsgenauigkeit verändert sich der Rechenaufwand erheblich mit dem wachsenden Abstandspa-

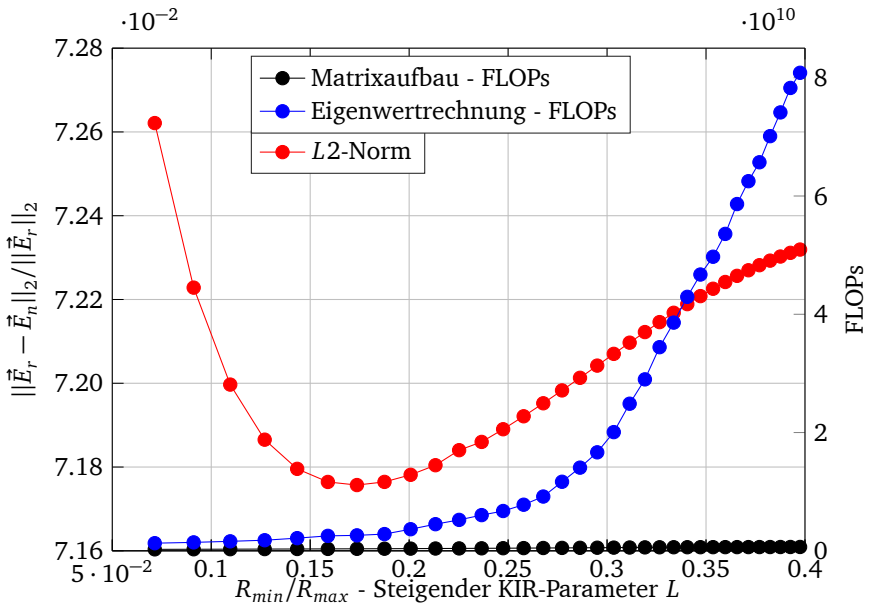


Abbildung 5.19.: Feldfehler und Rechenaufwand als Funktion des Abstandsparmeters L . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

parameter L . Ebenso erhöht sich der benötigte Speicher, der in Form von NZE in der der Abbildung 5.20 dargestellt wird.

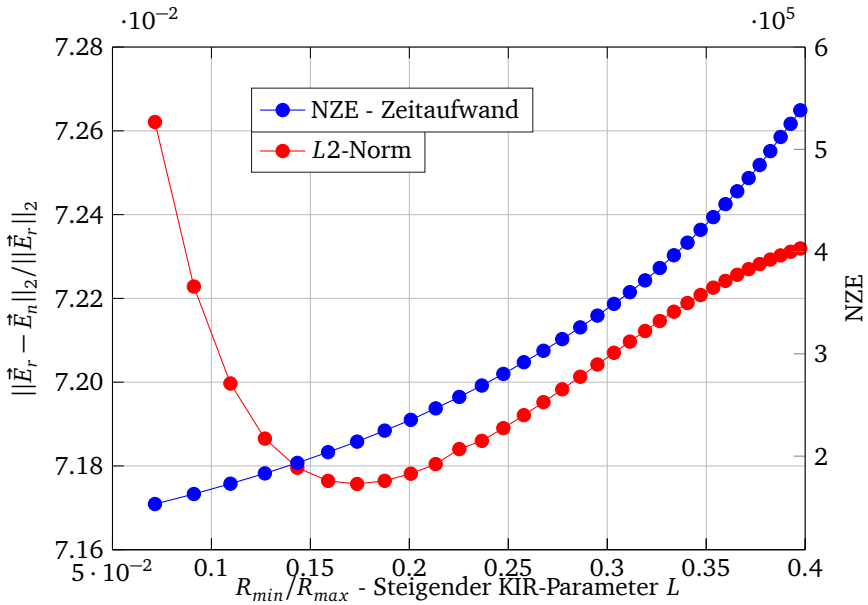


Abbildung 5.20.: Feldfehler und Speicherkosten als Funktion des Abstandsparmeters L . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.

6 Anwendungen

In diesem Kapitel wird die vorgestellte offene Randbedingung auf der Basis des Kirchhoff-Integrals mit drei gängigen Lösungsansätzen verglichen. Als repräsentative Anwendungsbeispiele werden drei längshomogene Wellenleiterkonfigurationen ausgewählt:

1. Zweidrahtleitung
2. offener Lichtwellenleiter
3. Mikrostreifenleitung.

Bei jeder Anwendung untersucht man die elektrische Feldverteilung der ausbreitungsfähigen Moden. Die Auswertung des relativen Fehlers des Feldes innerhalb des Innengebiets erfolgt durch die Gleichung 5.4. Als Referenzlösung für die Zweidrahtleitung und den offenen Lichtwellenleiter verwendet man eine analytische Lösung und für den Mikrostreifenleiter eine aufwendig bestimmte numerische Lösung.

Es werden drei Randbedingungen mit KIR verglichen: PEC, PMC und PML (UPML mit PEC am Rand [8]). Zusätzlich zur anvisierten Feldgenauigkeit untersucht man die folgende weitere Größen:

1. Rechenaufwand
2. Systemmatrixgröße
3. Anzahl der Nicht-Null-Elemente in der Systemmatrix
4. Anzahl der Gitterzellen im Rechengebiet.

Bei den Vergleichen wird zuerst eine numerische Rechnung mit KIR basierend auf den vorgegebenen Wellenleiterparametern durchgeführt. Daraufhin folgt die Ermittlung der Feldgenauigkeit in Bezug auf die Referenzlösung. Anschließend wird versucht, die gleiche Feldgenauigkeit mit alternativen Verfahren zu erreichen. Dazu erhöht man den Abstand vom Innenbereich zum Rechengebietsrand. Die Gitterschrittweite bleibt jedoch unverändert, um den Einfluss des Gitters auf die vorliegende Untersuchung möglichst zu vermeiden.

6.1 Zweidrahtleitung

Für eine idealisierte Zweidrahtleitung mit zylindrischen PEC-Materialien lässt sich eine analytische Lösung für die TEM-Mode bestimmen. Die Propagationskonstante k_z der in diesem Fall einzigen propagierenden TEM-Mode entspricht der von einer ebenen Welle bei jeder Frequenz:

$$k_z = \frac{2\pi f}{c_0} \eta \quad (6.1)$$

mit η als Brechungsindex des Umgebungsmaterials. In der Abb. 6.1 ist die Anordnung des Modells für die Zweidrahtleitung dargestellt.

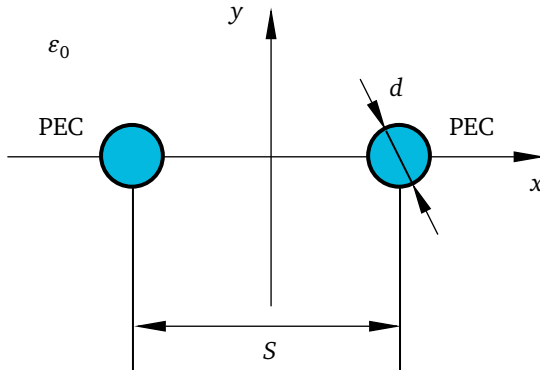


Abbildung 6.1.: Anordnung einer im Freien liegenden Zweidrahtleitung.

6.1.1 Referenzlösung

Als Referenzlösung wird für die Zweidrahtleitung eine analytische Lösung verwendet. Das transversale elektrische Feld der TEM-Mode für die Zweidrahtleitung kann wie folgt berechnet werden:

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{x-c}{(x-c)^2 + y^2} - \frac{x+c}{(x+c)^2 + y^2} \right),$$
$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{(x-c)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+c)^2 + y^2} \right),$$
$$c = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}.$$

Dabei ist d der Durchmesser des zylindrischen Leiters, s der Abstand des PEC-Elementzentrums von dem Koordinatenursprung und λ die geometrisch verschobene, äquivalente Linienladung, die wiederum durch die elektrische Spannung ausgedrückt werden kann. Die Herleitung kann in [27] nachgeschlagen werden.

6.1.2 Untersuchung der Eigenvektoren

Der Fehler der numerisch berechneten TEM-Mode wird in diesem Abschnitt untersucht. Die Darstellung des transversalen elektrischen Feldvektors der TEM-Mode kann der Abbildung 6.2 entnommen werden. Zur Berechnung werden folgenden Parameter eingesetzt:

Tabelle 6.1.: Parameter der Zweidrahtleitung.

Leiterdurchmesser d	3 mm
Gitterschrittweite Δx	0,1 d
Frequenz	16 GHz
Leiterabstand s	4 d
k_z	335,33 m^{-1}
Abstand zum Rand	1,8 d

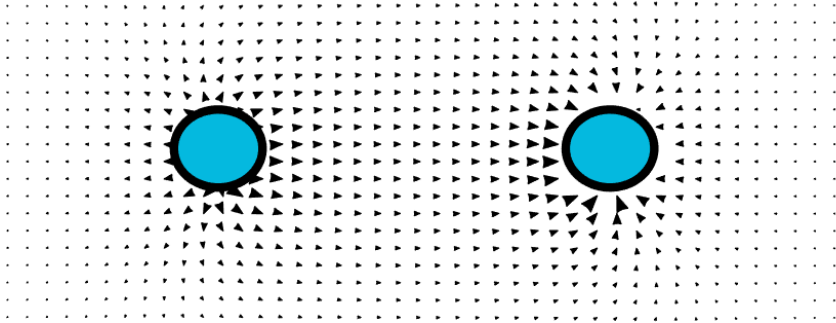


Abbildung 6.2.: Transversale elektrische Feldverteilung der TEM-Mode für die Anordnung der Zweidrahtleitung aus der Abbildung 6.1. Die Berechnung wurde analytisch mithilfe von 6.1.1 durchgeführt.

Die Propagationskonstante ergibt sich aus 6.1. Vier Berechnungen der TEM-Mode unter der Verwendung von den Randbedingungen PEC, PMC, PML und KIR ergaben folgende relative Feldfehler ausgedrückt durch die $L_{2,rel}$ -Norm:

Tabelle 6.2.: Ergebnisse der initialen Berechnung des elektrischen Feldes am Beispiel der Zweidrahtleitung.

Methode	$L_{2,rel}$ -Fehler
KIR	0,209
PEC	0,613
PMC	0,490
PML	0,531

Wie man den Ergebnissen dieser Berechnung entnehmen kann, ist der Feldfehler unter Verwendung von KIR deutlich niedriger als der unter Verwendung von PEC, PMC und PML. Im Fall von PEC wird ein weiterer perfekte elektrische Leiter in die untersuchte Konfiguration eingeführt. Einerseits führt es dazu, dass der Rechengebietsrand mehr als bei den Rändern PMC oder PML erhöht werden muss. Folglich erhöht sich der Rechenaufwand aufgrund von der größeren Systemmatrix. Auf der anderen Seite führt der zusätzliche elektrische Leiter

dazu, dass mehr als eine TEM-Mode im Lösungsraum existiert, was wiederum zusätzlicher Aufwand im Anschluss auf die Eigenwertberechnung bedeutet. Im nächsten Schritt wird versucht, die Fehler der PEC-, PMC- und PML-Lösungen so weit zu verkleinern, so dass diese sich möglichst nah an den Fehler der KIR-Lösung annähern. Um den Einfluss der Gitterauflösung auf den Feldfehler zu eliminieren, wird zur Genauigkeitserhöhung der Abstand zum Rechengebietsrand erweitert. Dies führt gleichzeitig zur Vergrößerung der Systemmatrix und damit auch des Rechenaufwands. In folgender Tabelle wird dieser Aufwand- und der Genauigkeitsvergleich dargestellt:

Tabelle 6.3.: Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel der Zweidrahtleitung.

Rand	Randabstand	DoF	GFLOPs	NZE	Zellen
KIR	5,5 mm	4.000	3,9	300.000	1.300
PEC	26,0 mm	70.000	48,0	520.000	23.000
PMC	25,0 mm	67.000	33,0	510.000	22.000
PML	19,0 mm	40.000	89,0	300.000	13.000

Die Tatsache, dass PMC im Vergleich zu PEC bei einem kleinerem Randabstand die benötigte Genauigkeit erreicht, ist erklärbar durch die Abwesenheit des zusätzlichen Randleiters, der im Fall von PEC auftaucht. Ein zusätzlicher Leiter verändert das reale Modell und führt in diesem Fall dazu, dass weitere TEM-Moden in den Lösungsspektrum hinzukommen.

Wie die Simulation zeigt, lässt sich bei diesem Beispiel eine gewünschte Lösungsgenauigkeit mit KIR bei kleinerem Randabstand als mit den anderen verglichenen Rändern erreichen.

6.2 Lichtwellenleiter

Für einen offenen dielektrischen Wellenleiter wird ein offener Lichtwellenleiter in zylindrischer Form gewählt, da für diese Anordnung eine analytische Lösung existiert und als Referenzlösung verwendet werden kann. Das Hintergrundmaterial, genauso wie das dichtere Medium besitzt ein Brechungsindex

mit $\eta_1 > 1$, $\eta_2 > 1$, $\eta_2 > \eta_1$. Einfachheitshalber wurde die Konfiguration so gewählt, dass vier propagierende Moden bei der vorgegebenen Frequenz existieren. Von diesen vier Moden sind zwei Monopolmoden und zwei hybride Moden.

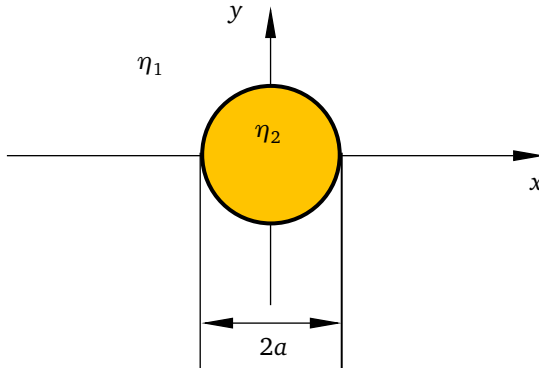


Abbildung 6.3.: Anordnung eines zylindrischen Lichtwellenleiters.

6.2.1 Referenzlösung

Für den offenen zylindrischen Lichtwellenleiter aus Abbildung 6.3 existiert eine analytische Lösung, die bereits Abschnitt 5.1 vorgestellt wurde.

6.2.2 Untersuchung der Eigenvektoren

In diesem Beispiel wird der Feldfehler einer Monopolmode des offenen Lichtwellenleiters untersucht. Der Feldvektor ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Zur Berechnung wurden Parameter aus der Tabelle 6.4 eingesetzt.

Vier Berechnungen der Monopolmode unter der Verwendung von den Randbedingungen PEC, PMC, PML und KIR ergaben relative Feldfehler ausgedrückt durch die $L_{2,rel}$ -Norm, die der Tabelle 6.5 entnommen werden können.

Tabelle 6.4.: Parameter des Lichtwellenleiters.

Radius a	$0,3 \mu\text{m}$
Gitterschrittweite Δx	$0,1 a$
Frequenz	320 THz
Brechungsindex η_1	2,0
Brechungsindex η_2	1,5
k_z	$1,04 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$
Abstand zum Rand	$0,6 a$

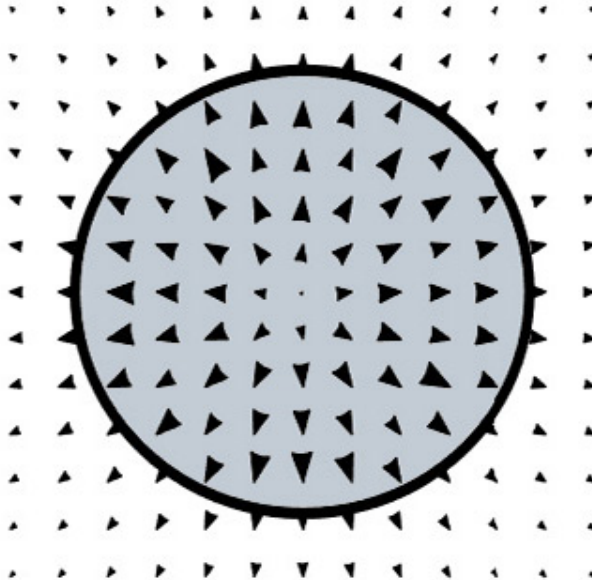


Abbildung 6.4.: Transversale elektrische Feldverteilung der Monopolmode des offenen Lichtwellenleiters bei $k_z = 1,041 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$ aus der Abbildung 6.3. Die Berechnung wurde analytisch mithilfe von 5.2 durchgeführt.

Tabelle 6.5.: Ergebnisse der initialen Berechnung des elektrischen Feldes am Beispiel des Lichtwellenleiters.

Methode	$L_{2,rel}$ Fehler
KIR	0,072
PEC	0,106
PMC	0,152
PML	0,104

An diesen Ergebnissen ist ersichtlich, dass sich unter der Verwendung von KIR ein niedrigerer Fehler erreichen lässt.

Genauso wie am Anwendungsbeispiel mit der Zweidrahtleitung wird hier versucht, die gleiche Genauigkeit des Feldes mithilfe der Randoperatoren PEC, PMC und PML zu erreichen. Dabei wird nur der Randabstand vergrößert, um den Einfluss der Gitterauflösung zu eliminieren. In der nachfolgenden Tabelle werden der benötigte Randabstand, die Größe der Systemmatrix, der Rechenaufwand und die Anzahl der Nicht-Null-Elemente gezeigt. Diese Werte sollen dazu verhelfen, für dieses Beispiel den Rechenaufwand unterschiedlicher Randoperatoren miteinander zu vergleichen.

Tabelle 6.6.: Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel des Lichtwellenleiters.

Rand	Randabstand	DoF	GFLOPs	NZE	Zellen
KIR	3,7 mm	2.500	0,7	63.000	800
PEC	13,0 mm	6.700	0,7	45.000	2.200
PMC	23,0 mm	18.000	3,0	120.000	6.000
PML	49,0 mm	65.000	40,0	460.000	21.000

Mit dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten PML-Rand konnte die benötigte Feldgenauigkeit mit einem viel höherem Aufwand als mit den Randbedingungen PEC, PMC und KIR erreicht werden. Hier wird darauf hingewiesen, dass sich der Vergleich auf die UPML-Implementierung bezieht.

Die Lösung mit dem PEC-Rand zeigt in diesem Beispiel einen niedrigeren Rechenaufwand als die mit dem PMC-Rand. Das lässt sich teilweise darauf zurückführen, dass das Lösungsspektrum keine TEM-Moden enthält. Zusätzlich muss jedoch bedacht werden, dass die Lösung mit dem PEC-Rand das Lösungsspektrum verfälscht. Man erhält zusätzliche unerwünschte und in Bezug auf das Beispiel unphysikalische propagierende, evaneszente und komplexe Moden. Diese sind Teil des Spektrums bei einer Simulation eines geschlossenen Wellenleiters, jedoch gilt dies nicht im Fall einer offenen Struktur. Folglich muss das Lösungsspektrum nachträglich bearbeitet werden, um unerwünschte Moden herauszufiltern. Dies ist mit weiterem Rechenaufwand verbunden.

Ähnlich wie im Abschnitt 6.1 benötigt die Lösung mit KIR in diesem Modell weniger Rechenleistung und besitzt eine kleinere Systemmatrix als Lösungen mit den Rändern PEC, PMC und PML.

6.3 Mikrostreifenleiter

In diesem Anwendungsbeispiel wird eine in der Industrie häufig eingesetzte Mikrostreifenleitung untersucht. Diese Art des Wellenleiters ist in der Regel transversal inhomogen und enthält mindestens zwei Leiter und ein dielektrisches Material mit $\epsilon_r > 1$. Der Mikrostreifenleiter wird in der Regel dafür eingesetzt Quasi-TEM-Moden zu leiten. In der Abbildung 6.5 ist die Anordnung der untersuchten Mikrostreifenleitung dargestellt.

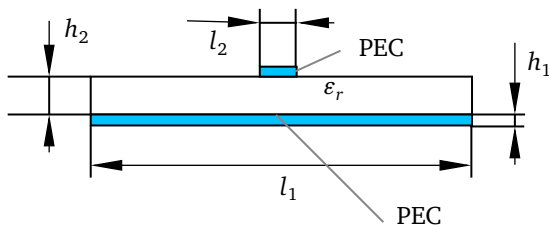


Abbildung 6.5.: Anordnung eines transversal offenen Mikrostreifenleiters.

Mikrostreifenleiter sind häufig transversal nicht berandet und müssen bei numerischen Simulationen entsprechend behandelt werden.

6.3.1 Referenzlösung

Für die in Abbildung 6.5 dargestellte Konfiguration ist keine analytische Lösung bekannt. Folglich muss eine numerische Lösung als Referenz verwendet werden. Dazu wurde die kommerzielle Software CST MICROWAVE STUDIO[®] eingesetzt, in der die Konfiguration des hier beschriebenen Wellenleiters modelliert wurde. Als Randbedingung wurde PEC gewählt. Um für die Referenzlösung die höchstmögliche Genauigkeit zu erreichen, wurde das Gitter und die Entfernung des Rechengebietsrandes von dem Wellenleiter variiert. Für die Bewertung der Lösungsgenauigkeit wurden die Ergebnisse der jeweiligen letzten zwei berechneten Simulationen verglichen. Die dabei untersuchten Größen waren die Propagationskonstante der Quasi-TEM-Mode und die Radialkomponenten des elektrischen Feldes entlang einer den Mikrostreifenleiter umschließenden Kurve. Im Anschluss konnte das berechnete elektrische Feld mittels einer CST-to-MATLAB¹ Schnittstelle auf das untersuchte Gitter interpoliert werden.

6.3.2 Untersuchung der Eigenvektoren

Zur Untersuchung der Genauigkeit der Eigenvektoren führte man Simulationen der in Abbildung 6.5 dargestellten Mikrostreifenleitung mit folgenden Parametern durch:

In der Abbildung 6.6 ist die transversale Verteilung des elektrischen Feldes der Quasi-TEM Mode veranschaulicht.

Zunächst untersuchte man den Rechenaufwand, der zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit benötigt wurde. Dabei hat man die Ränder PEC, PMC und PML mit KIR verglichen. Beim Vergleich wurde nur der Randabstand vergrößert, um die benötigte Feldgenauigkeit zu erreichen. Die Gitterauflösung blieb dabei unverändert. Folgende Tabelle stellt diesen Vergleich durch den Randabstand, die Größe der Systemmatrix, den Rechenaufwand und die Anzahl der Nicht-Null-Elemente dar.

¹ Die Motivation ist zurückzuführen auf das Programm M2M (Matlab to MICROWAVE STUDIO), ursprünglich entwickelt von Rolf Schuhmann. Hier wird das offizielle Interface von CST MICROWAVE STUDIO[®] verwendet.

Tabelle 6.7.: Parameter der Mikrostreifenleitung.

Substrathöhe h_1	0,12 mm
Gitterschrittweite Δx	$0,1 h_1$
Gesamtbreite l_1	$10 h_1$
Leiterhöhe h_2	$10 h_1$
Substratdielektrikum ϵ_r	4
Frequenz	16 GHz
k_z	$571,25 \text{ m}^{-1}$
Abstand zum Rand	$0,3 h_1$

Tabelle 6.8.: Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel der Mikrostreifenleitung.

Rand	Randabstand	Matrixgröße	GFLOPs	NZE	Zellen
KIR	0,03 mm	4.700	19	650.000	1.600
PEC	1,00 mm	97.000	299	780.000	32.000
PMC	0,36 mm	19.000	28	150.000	6.300
PML	0,98 mm	82.000	663	710.000	27.000

Mit KIR lässt sich die gesuchte Genauigkeit mit einem niedrigeren rechnerischen Aufwand als mit den Rändern PEC, PMC oder PML erreichen. Bei dem PMC-Rand ist zu sehen, dass zwar weniger Nicht-Null-Elemente in der Systemmatrix vorhanden sind, die Matrix jedoch groß und der Rechenaufwand ebenso höher ist.

In diesem Kapitel wurde der vorgestellte Kirchhoff-Integral-Rand anhand von drei Anwendungsbeispielen mit alternativen Lösungsansätzen verglichen. Die vorliegende Arbeit wird mit der Zusammenfassung im nächsten Kapitel abgeschlossen.

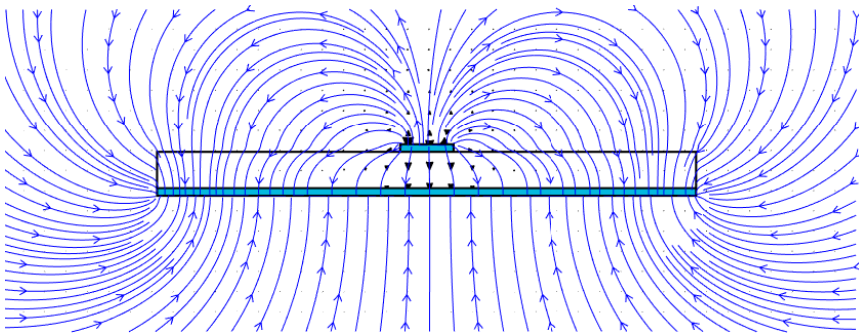


Abbildung 6.6.: Transversale elektrische Feldverteilung der Quasi-TEM-Mode für die Anordnung der Mikrostreifenleitung aus Abbildung 6.5. Die Berechnung wurde numerisch mithilfe von der Software CST MICROWAVE STUDIO® durchgeführt. Die Visualisierung erfolgte durch MATLAB.

7 Zusammenfassung und Ausblick


Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Lösungsansatz zur Berechnung von transversal offenen und längshomogenen Wellenleiterstrukturen vorgestellt. Nach einer Einführung in die Grundlagen und der Beschreibung von konventionellen Lösungen des vorliegenden Problems wurde die Grundidee des offenen Randes basierend auf dem Kirchhoff-Integral beschrieben. Die Implementierung des zugrundeliegenden Randoperators erfolgte im Rahmen der Diskretisierungsmethode FIT.

Der Kirchhoff-Integral-Rand enthält individuelle Parameter und Approximationen, die detailliert aufgelistet und einzeln diskutiert wurden. Zusätzlich wurden die Fehlerordnungen für unterschiedliche Parametereinstellungen bestimmt und für praxisrelevante Beispiele angegeben.

Der aufgestellte Lösungsansatz führt aufgrund der Eigenschaften der Green'schen Funktion unvermeidlich zu einem nichtlinearen Eigenwertproblem. Um das Problem zu linearisieren wurden zwei Ansätze diskutiert, wobei sich die einfache Fixpunktiteration als praxistauglicher als die aufwendigere Linearisierung beispielsweise durch eine polynomiale Darstellung erwiesen hat.

Zum Schluss wurde der entwickelte Randoperator anhand von drei gezielt ausgewählten Rechenbeispielen mit den klassischen Rändern PEC, PMC und PML verglichen. Bei der Gegenüberstellung galt es, den Rechenaufwand und den benötigten Speicherbedarf zu untersuchen. Als Resultat der Ermittlungen lässt sich festhalten, dass die Lösungsansätze basierend auf dem Kirchhoff-Integral für die betrachteten Anwendungsfälle schneller auf die erwartete Lösung konvergieren als wenn man eine der klassischen Randbedingungen wie PEC, PMC oder PML einsetzen würde.

Der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Lösungsansatz bietet eine Lösung für die Berechnung von Moden einer offenen Wellenleiterstruktur, wobei generell einzelne Möglichkeiten zur weiteren Entwicklung offen stehen. Die Erweiterung des zweidimensionalen Randoperators auf eine Toranregung von dreidimensionalen Strukturen ist ein wichtiger Schritt für die Anwendung von



längshomogenen Wellenleitern. Eine andere Möglichkeit der Weiterentwicklung wäre mit der Verkleinerung des Rechenaufwands durch die Veränderung der Besetzungsstruktur der Systemmatrix gegeben. Des Weiteren kann der hergeleitete Randoperator generell auch für Berechnungen im Zeitbereich formuliert und implementiert werden.

A Implementierung

Für die Implementierung des KIR wurde zuerst die FI-Methode mithilfe der kommerziellen Software MATLAB[®] programmiert. Daraufhin wurde der Kirchhoff-Integralrand ebenfalls mit MATLAB[®] entwickelt. In diesem Abschnitt wird eine kurze Übersicht gegeben, wie der Kirchhoff-Integralrand implementiert werden kann.

Für den entwickelten Code der zweidimensionalen FI-Methode wurde das kartesische Koordinatensystem und ein rechteckiges, äquidistantes Gitter gewählt. An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass die Implementierung im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls für nicht äquidistantes Gitter umgesetzt wurde. Im Folgenden wird jedoch eine einfachere Variante mit gleichen Gitterzellen in allen Koordinatenrichtungen verwendet.

In der Abbildung A.1 ist eine Koplanarleitung auf dem rechteckigen, äquidistanten Gitter dargestellt. Um den Referenzrand festzulegen, muss der KIR-Abstandsparameter mit dem Zellenabstand zwischen dem Referenz- und Rechengebietsrand definiert werden. Ebenso kann gleichzeitig der KIR-Parameter P deklariert werden :

```
1 KIR_L=5; % 5 Zellen Abstand zwischen den Rändern
2 KIR_P=100; % 100% aller Referenzrandzellen werden verwendet
```

Der Referenzrand kann in vier Bereiche (I, II, III, IV) unterteilt werden, entlang welcher das Kirchhoff-Integral ausgewertet werden soll. Die Gitterzellen des jeweiligen Bereichs können dann in Vektoren gespeichert werden. Zugleich werden auch die Gitterzellen des Rechengebietsrandes in einem separaten Vektor gespeichert.

```
1 ...
2 % nx, ny, np sind FIT-Gitterabmessungen und sind bereits bekannt.
3 %% Gitterabmessungen mit KIR
4 knx = nx+2*KIR_L;
5 kny = ny+2*KIR_L;
6 knp = knx*kny;
7
8 %% Zellen der 4 Randbereiche in Vektoren speichern
```

Rechengebietsrand

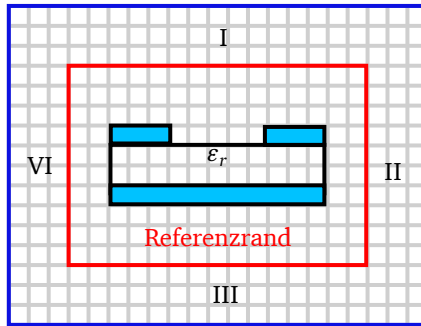


Abbildung A.1.: Beispielgitter mit einer Koplplanleitung. Referenzrand und Rechengebietsrand sind durch das KIR-Gebiet getrennt.

```

9  rfr = struct();
10 rr.( 'b1' ) = KIR_L*(knx + 1).*(1:nx);
11 rr.( 'b2' ) = (knx*(KIR_L + 1) + KIR_L + nx):(knx:(knx*(KIR_L + ny -
12 1) + KIR_L + nx));
13 rr.( 'b3' ) = KIR_L*(knx*(kny - KIR_L) + 1).*(1:nx);
14 rr.( 'b4' ) = (knx*(KIR_L + 1) + KIR_L):(knx:(knx*(KIR_L + ny - 1) +
15 KIR_L));
16 %% Zellen des Rechengebietsrands im Vektor speichern.
17 rer = [(1:knx) (knx*2:knx:knx*(kny - knx) (knx*1:knx:(knx
18 - 2*knx+1))];

```

Des Weiteren wird die leere KIR-Matrix benötigt, mit den selben Abmessungen, wie die FIT-Matrix.

```

1  A_KIR = sparse(size(A_FIT)); % A_FIT ist eine dünnbesetzte Matrix

```

Programmiercode A.1: Matlab code

Nun sollten die Schleifen aufgebaut werden. Die oberste Schleife läuft entlang des Vektors `rer` und berechnet die KIR-Gewichte. Dazu müssen ebenfalls die Greenschen Funktionen deklariert werden. Einfachheit halber wird die Implementierung mit einem festgelegten $k_{z,avg}$ ohne die Fixpunktiteration gezeigt. Wichtig ist zu beachten, dass die Propagationskonstante der zylindrischen Welle k_0 von dem Brechungsindex des Hintergrundmaterials abhängt.

```

1  ...
2  qk=sqrt((k0)^2-kz_av^2);
3  d_green2d= @(x,r) li*qk.*x.*(besselh(1,qk*r))./(4*r);
4  green2d = @(r)      -(li/4)*(besselh(0,qk.*r));
5  for zr=rer
6      for zb=1:4
7          ...
8          rrb = rr.(['b', num2str(zq)]); % Liste der Zellen des
          entsprechenden Referenzrandbereichs
9          for zq=rrb
10             ...
11             % Radius R und dessen Komponenten Rx, Ry zwischen der Zelle
              zq und zr wurden berechnet.
12             g = green2d(r);
13             dgx = d_green2d(Rx,R);
14             dgy = d_green2d(Ry,R);
15             [kig1, kig2, kig3, kig4, kig5] = ki(g, dgx, dgy); %
              Funktion ki berechnet die Kirchhoffintegralgewichte für die
              Zellen n, n+1, n-1, n+knx, n-knx numerisch aus
16             A_KIR(:,zq)      = A_KIR(:,zq)      + (A_KIR(:,zr).*kig1);
17             A_KIR(:,zq+1)    = A_KIR(:,zq+1)    + (A_KIR(:,zr).*kig2);
18             A_KIR(:,zq-1)    = A_KIR(:,zq-1)    + (A_KIR(:,zr).*kig3);
19             A_KIR(:,zq+knx)  = A_KIR(:,zq+knx)  + (A_KIR(:,zr).*kig4);
20             A_KIR(:,zq-knx)  = A_KIR(:,zq-knx)  + (A_KIR(:,zr).*kig5);
21             ...
22         end
23     end
24 end

```

Es wird nochmal darauf hingewiesen, dass die hier vorgestellte Implementierung lediglich der Veranschaulichung gilt und der eigentliche Code effizienter aufgebaut ist.

Nachdem die A_{KIR} aufgestellt wurde, sollten die Randzellen aus der Matrix entfernt werden.

```

1  A_KIR(rer,:) = [];
2  A_KIR(:,rer) = [];

```

Das Eigenwertproblem kann dann mithilfe der MATLAB-Funktion `eigs` berechnet werden.

```

1  eig_values_amount = 10; % Anzahl der zu berechnenden
    Eigenwertpaare
2  [evec,eval] = eigs(A_KIR, eig_values_amount);

```

Nach der Berechnung müssen die einzelne Eigenvektoren in der Matrix `vec` umgeordnet werden, denn die entfernten Zellen führen zur Verzerrung der visuellen Darstellung.

```
1  vec_0=zeros(1,2*knp); vec_e=[1:2*np]; % Ursprüngliche Vektorgrößen
2  [na,nb] =size(vec);
3  vec_new=zeros(length(vec_0),nb);
4  for nk=1:nb
5      vec_new(:,nk)=vec_0(1,:);
6      for n=1:length(A_KIR)
7          m=vec_e(1,n);
8          vec_new(m,nk)=eigvecs(n,nk);
9      end
10 end
```

Damit können elektrische Felder jeweiliger Moden in der Matrix `vec` visualisiert werden.

Liste der Symbole

Physikalische Symbole

\vec{B}	magnetische Flussdichte
\vec{E}	elektrische Feldstärke
\vec{H}	magnetische Feldstärke
\vec{D}	elektrische Flussdichte
\vec{J}	elektrische Stromdichte
ρ	elektrische Ladungsdichte
c_0	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
η	Brechungsindex im Material
σ	elektrische Leitfähigkeit
w_e	elektrischen Energiedichte
μ_0	Permeabilität im Vakuum
μ_r	relative Permeabilität
ϵ_0	Permittivität im Vakuum
ϵ_r	relative Permittivität
t	Zeit
λ	Wellenlänge
ω	Kreisfrequenz
f	Frequenz
f_c	Grenzfrequenz
k_z	Propagationskonstante
Z	Wellenimpedanz

Mathematische Symbole

\vec{r}	Positionsvektor ($\vec{r} = (X, Y, Z)$)
\vec{n}	Normalenvektor ($\vec{n} = (X, Y, Z)$)
$d\vec{s}, d\vec{A}, dV$	Infinitesimale Längen, Flächen und Volumen
x	relative transversale Koordinate
y	relative transversale Koordinate

j	Imaginäre Zahl
Δx	diskretes Längenelement
e^x	exponentielle Funktion
\forall	Mathematisches Symbol „für alle“
\mathbb{R}	Menge aller reellen Zahlen
\mathbb{I}	Menge aller imaginärer Zahlen
∇	Nabla-Operator
$\text{Re}(x)$	Realteil von x
$\text{Im}(x)$	Imaginärteil von x
\mathcal{O}	Landausymbol für die Angabe der Fehlerordnung
\underline{z}	komplexe Variable mit $\underline{z} = x + jy$
\vec{x}_\perp	transversaler Vektor
$G(\vec{r})$	Greensche Funktion
H_n^q	Hankelfunktion der q -ten Art
π	Kreiszahl Pi mit $\pi \approx 3.1415926535$
γ	Eulerschen Konstante mit $\gamma \approx 0.577215664$
$\max(x)$	höchster Wert der Menge x
$\min(x)$	kleinster Wert der Menge x
$L_2, \ x\ _2$	L_2 Norm
$L_{2,\text{rel}}$	relative L_2 Norm
rot	Rotationsoperator
grad	Gradientoperator
div	Divergenzoperator

Finite

Integrationstechnik

\tilde{e}	elektrische Gitterspannung
\tilde{d}	elektrischer Gitterfluss
\tilde{h}	magnetische Gitterspannung
\tilde{b}	magnetischer Gitterfluss
\tilde{j}	elektrischer Gitterstrom
C, \tilde{C}	diskrete rot Matrix auf dem primären und dualen Gitter

G, \tilde{G}	diskrete grad Matrix auf dem primären und dualen Gitter
S, \tilde{S}	diskrete div Matrix auf dem primären und dualen Gitter
P_x, P_y, P_z	diskrete topologische Matrizen für die Repräsentation der räumlichen Differentialoperatoren auf dem primären Gitter
$\tilde{P}_x, \tilde{P}_y, \tilde{P}_z$	diskrete topologische Matrizen für die Repräsentation der räumlichen Differentialoperatoren auf dem dualen Gitter
$M_\mu, M_\epsilon, M_\sigma$	Materialmatrizen



Liste der Akronyme

KIR Kirchhoff-Integralrand.

FIT Finite Integrationsmethode.

FPI Fixpunktiteration.

FEM Finite Elementemethode.

BEM Randelementemethode.

FLOP Floating Point Operation.

NZE Anzahl der nichtnull Elemente in einer Matrix.

PEC perfekter elektrischer Leiter.

PMC perfekter magnetischer Leiter.

PML Perfectly matched layer.

TEM transversal elektromagnetisch.

TE transversal elektrisch.

TM transversal magnetisch.

CST Software für elektromagnetische Simulationen www.3ds.com.

MATLAB Software für unterschiedliche Berechnungen www.mathworks.com.



Abbildungsverzeichnis

2.1. Darstellung von Gitterzellen des primären (in rot) und dualen (in blau) Gitters von FIT am Beispiel eines Ausschnitts aus dem kartesischen Gitter. An den Gitterkanten sind elektrische und magnetische Spannungen und an den Flächen elektrische und magnetische Flüsse allokiert.	5
2.2. Besetzungsstruktur der Systemmatrix des zweidimensionalen FIT-Eigenwertproblems 2.25.	8
2.3. Eine Struktur mit einer Längshomogenität in Koordinatenrichtung z	9
2.4. Transversales elektrisches Vektorfeld der TM_{01} -Mode im zylindrischen Hohlleiter.	11
2.5. Grafische Darstellung der Wirkungsweise einer PML-Randbedingung. Ein Teil der Energie der einfallenden Welle mit dem Eintrittswinkel α wird in der PML-Schicht absorbiert. Die PML-Schicht kann mit einem PEC- oder PMC-Rand abgeschlossen (hier in Grün) werden. Die Wellenimpedanz Z_p des PML-Materials gleicht am Übergang zum Innengebiet der Wellenimpedanz Z_i des Materials im Innengebiet.	13
2.6. Beispiele für einen geschlossenen und offenen Wellenleiter.	15
2.7. Dispersionsdiagramm der Wellenausbreitung in einem Hohlleiter (s. Abbildung 2.6) mit perfekt leitenden Rändern.	17
2.8. Geschlossener Wellenleiter mit zwei unterschiedlichen Dielektrika. Bei dieser Konfiguration existieren keine komplexen Moden.	18
2.9. Eine Mikrostreifenleitung im homogenen Freiraum umschlossen von einer Berandung S_1 und S_2 . Das Material im Gebiet R_2 ist homogen verteilt.	19
2.10. Veranschaulichung einer geschlossenen Fläche (rosa) um ein dreidimensionales Modell einer Mikrostreifenleitung.	23

2.11. Veranschaulichung einer geschlossenen Kontur C_1 (rosa) um ein zweidimensionales Modell einer längshomogenen Mikrostreifenleitung.	23
3.1. Leiterplatte mit Leitungspfaden.	25
3.2. Darstellung von unterschiedlichen offenen längshomogenen Wellenleitertypen.	27
3.3. Längshomogener On-Chip optischer Wellenleiter (Strip-Loaded Wellenleiter).	28
3.4. Zweidrahtleitung aus PEC-Elementen und einem PEC-Rechengebietsrand. Das Rechengebiet ist mit einem homogenen Material gefüllt.	29
3.5. FEM und BEM Diskretisierung. Bei der FEM und FEM-BEM Konfiguration wird der Innenraum berechnet. Bei der BEM-Berandung kann abhängig von der Konfiguration entweder der Innenraum oder der Außenraum berechnet werden.	32
4.1. Diskretes Gitter mit dem Referenz- und Rechengebietsrand.	33
4.2. Der Abstand R zwischen dem Referenzrand und dem Rechengebietsrand wird in der Mitte der jeweiligen Zelle ausgewertet. Hier in Grün die Zelle des zu berechnenden Randfeldes.	35
4.3. Beispielsgitter mit einem Rechengebietsrand (in blau) und einem Referenzrand (in rot).	36
4.4. Links: Struktur der KIR-Zusatzmatrix. Rechts: Matrixstruktur des zweidimensionalen FIT-Eigenwertproblems 2.29.	39
4.5. Imaginärteil der Hankelfunktion H_0^1 . Der Bereich mit dem hellen Hintergrund ist der durch das Lagrange-Polynom 4.11 zu approximierende Funktionsbereich. Der Wert von k_0 beträgt 335 m^{-1}	42
4.6. Beispiel der Referenz- und Rechengebietsrandzellen mit kartesischen Koordinaten und einem äquidistanten Gitter mit der Gitterschrittweite $\Delta x = \Delta y$. Der Radius $ \vec{R} $ ergibt sich aus dem Abstand zwischen dem jeweiligen Aufpunkt (Mitte der grünen Kante) und dem Quellpunkt (Mitte der roten Kante). Der Abstand wird für die KIR-Berechnung in der Mitte der jeweiligen Kante abgetastet.	45
4.7. Relativer Fehler zwischen der Hankelfunktion H_0^1 und der Approximation $H_{0\alpha}^1$ aus 4.16 für kleine Argumente z [24].	46

4.8. Abstand L des Rechengebietrandes vom Referenzrand, gezeigt auf einem Teil des Rechengebiets.	48
4.9. Unterschiedliche Gitterschrittweiten im KIR-Gebiet und im Innenbereich.	48
4.10. Rechengebiet mit dem Quellenanzahl-Parameter $P = 25\%$. Dabei wird nur ein Viertel des Referenzrandes (rot, durchgehend) für die Berechnung des Felds an der grün markierten Zelle verwendet.	49
4.11. Beispiel einer zur vertikalen Achse symmetrischen Wellenleiterkonfiguration.	50
4.12. Beispiel einer zur y -Achse symmetrischen Wellenleiterkonfiguration.	51
4.13. Bei der Anwendung des Kirchhoff-Integral-Randes sollten keine Materialübergänge an dem Referenzrand auftreten, sonst muss man zunächst problemspezifisch die benötigte Greensche Funktion bestimmen. Durch einen zusätzlich eingeführten Abstand kann diese ungünstige Situation einfach vermieden werden. . .	54
5.1. Anordnung eines offenen Wellenleiters mit den Regionen 1 und 2 mit den Brechungsindizes η_1, η_2 und der Bedingung $\eta_1 > \eta_2$	56
5.2. Rechengebiet mit dem offenen Wellenleiter und der Gitterschrittweite $\Delta x = a/11$. In gelb ist der Referenzrand und in tyrkis der Wellenleiter dargestellt. Das Hintegrundsmaterial ist in blau abgebildet.	58
5.3. Relativer Fehler 5.8 der mithilfe einer Fixpunktiteration berechneten Propagationskonstanten über dem Propagationsbereich eines offenen dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.	63
5.4. Darstellung des Verlaufs der Hankelfunktion H_0^1 im Moden-Propagationsbereich des ungeschirmten dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.	64
5.5. Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes der Monopolmode des ungeschirmten Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Die Lösung wurde analytisch mithilfe von 5.2 berechnet.	65

5.6. Verteilung des transversalen elektrischen Feldes der TE Monopolmode des ungeschirmten dielektrischen Wellenleiters aus Abbildung 5.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen. Die Lösung wurde analytisch durch 5.2 berechnet.	66
5.7. Relative Abweichung als Funktion des Iterationsschrittes der Fixpunktiteration aus Abschnitt 5.3.1. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	66
5.8. Relativer Fehler von den Eigenwerten bei einzelnen Iterationsschritten. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	67
5.9. Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes bei dem ersten Iterationsschritt der Fixpunktiteration aus Abschnitt 4.2.2. Die Material- und Berechnungsparameter sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	68
5.10. Komponenten der Feldverteilung des elektrischen Feldes am Ende der Fixpunktiteration aus Abschnitt 4.2.2. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.	69
5.11. Radiale elektrische Feldkomponente der analytischen und numerischen Lösungen mit und ohne Fixpunktiteration. Zur Berechnung der Radialkomponente wurden Punkte auf dem Gitter mit der Gitterschrittweite Δx abgetastet. Als Rechenbeispiel wurde die Anordnung aus der Abbildung 5.1 verwendet. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.	70
5.12. Konvergenzverhalten der elektrischen Feldstärke aus Abbildung 5.2 der Monopolmode aus Abbildung 5.5 mit und ohne FPI. Die Material- und Berechnungsparameter sind der Tabelle 5.1 zu entnehmen.	71
5.13. Berechneter Feldfehler der Monopolmode aus Abbildung 5.5 als Funktion des Quellenanzahl-Parameters P . Die Verteilung a), b) und c) des L_2 -Fehlers berechnet sich aus den numerischen und analytischen Feldwerten der jeweiligen Gitterzellen i	72
5.14. Konvergenzverhalten bei unterschiedlichen Quellenanzahl-Parameterwerten P . Berechnet wurde die Monopolmode aus Abbildung 5.5. Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	74

5.15. Berechneter Feldfehler der Monopolmode aus Abbildung 5.5 als Funktion von dem steigenden Abstandsparameter L aus Abschnitt 4.4.1, ausgedrückt durch die Relation R_{\min}/R_{\max} . Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	75
5.16. Feldfehler und Aufwandskosten in FLOPs als Funktion der Iterationsschritte der Fixpunktiteration. Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	76
5.17. Feldfehler und Aufwandskosten als Funktion des Quellenanzahl-Parameters P . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	77
5.18. Feldfehler und Speicherkosten als Funktion des Quellenanzahl-Parameters P . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	78
5.19. Feldfehler und Rechenaufwand als Funktion des Abstandsparameters L . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	79
5.20. Feldfehler und Speicherkosten als Funktion des Abstandsparameters L . Zur Berechnung des Feldfehlers wurden die numerische und analytische Lösungen der Monopolmode aus Abbildung 5.5 verglichen. Die Material- und Simulationsparameter, die zur Berechnung verwendet wurden, sind dem Rechenbeispiel 5.1 zu entnehmen.	80
6.1. Anordnung einer im Freien liegenden Zweidrahtleitung.	82

6.2. Transversale elektrische Feldverteilung der TEM-Mode für die Anordnung der Zweidrahtleitung aus der Abbildung 6.1. Die Berechnung wurde analytisch mithilfe von 6.1.1 durchgeführt.	84
6.3. Anordnung eines zylindrischen Lichtwellenleiters.	86
6.4. Transversale elektrische Feldverteilung der Monopolmode des offenen Lichtwellenleiters bei $k_z = 1,041 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ aus der Abbildung 6.3. Die Berechnung wurde analytisch mithilfe von 5.2 durchgeführt.	87
6.5. Anordnung eines transversal offenen Mikrostreifenleiters.	89
6.6. Transversale elektrische Feldverteilung der Quasi-TEM-Mode für die Anordnung der Mikrostreifenleitung aus Abbildung 6.5. Die Berechnung wurde numerisch mithilfe von der Software CST MICROWAVE STUDIO [®] durchgeführt. Die Visualisierung erfolgte durch MATLAB.	92
A.1. Beispielgitter mit einer Koplanarleitung. Referenzrand und Rechengebietsrand sind durch das KIR-Gebiet getrennt.	96

Tabellenverzeichnis

5.1. Parameter des offenen Wellenleiters aus der Abbildung 5.1.	57
5.2. Feldfehler L_2 für unterschiedliche Ordnungen der Gauß-Quadratur für das numerische Integral der Greenschen Funktion.	73
6.1. Parameter der Zweidrahtleitung.	83
6.2. Ergebnisse der initialen Berechnung des elektrischen Feldes am Beispiel der Zweidrahtleitung.	84
6.3. Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel der Zwei- drahtleitung.	85
6.4. Parameter des Lichtwellenleiters.	87
6.5. Ergebnisse der initialen Berechnung des elektrischen Feldes am Beispiel des Lichtwellenleiters.	88
6.6. Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel des Licht- wellenleiters.	88
6.7. Parameter der Mikrostreifenleitung.	91
6.8. Vergleich von Berechnungsergebnissen am Beispiel der Mikro- streifenleitung.	91



Literaturverzeichnis

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. 2004. 3, 4, 10, 14, 19, 20, 22, 23, 24, 27, 43
- [2] T. Weiland, "A Discretisation Method for the Solution of Maxwells Equations for six-Component Fields, Electronics and Communication," *AEÜ*, vol. 31, pp. 116–120, 1977. 5, 6, 7, 8, 9, 10
- [3] D. Schmitt, *Zur numerischen Berechnung von Resonatoren und Wellenleitern*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1994. 8, 9
- [4] C. Brezinski, "The Schur complement and its applications ," 2005. 9
- [5] J. P. Bérenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorbing of Electromagnetic Waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185–200, 1993. 12
- [6] S. G. Johnson, "Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs)," *Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts*, 2010. 12
- [7] J. A. Roden, S. D. Gedney, "Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS–PML for arbitrary media," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 27, no. 5, pp. 334–339, 2000. 12
- [8] T. Tischler, *Die Perfectly-Matched-Layer-Randbedingung in der Finite-Differenzen-Methode im Frequenzbereich: Implementierung und Einsatzbereiche*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, 2011. 12, 13, 81
- [9] H. Rogier, D. De Zutter, "Bérenger and leaky modes in microstrip substrates terminated by a perfectly matched layer," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 49, no. 4, pp. 712–71, 2001. 12
- [10] P.K. Talukder, *Finite-Difference-Frequency-Domain Simulation of Electrically Large Microwave Structures using PML and Internal Ports*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, 2009. 12

-
-
- [11] C. Yeh, F. Shimabukuro, *The Essence of Dielectric Waveguides*. 2008. 14, 28, 57
- [12] K. Burg, H. Haf, F. Wille, *Partielle Differentialgleichungen. Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. 1998. 15
- [13] A. W. Snyder, J. D. Love, “Optical Waveguide Theory,” 1983. 15, 16, 27, 28, 30, 57
- [14] J. Strube, F. Arndt, “Rigorous Hybrid-Mode Analysis of the Transition from Rectangular Waveguide to Shielded Dielectric Image Guide,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, pp. 391–401, 1985. 17
- [15] J. A. Monsoriu, A. Coves, B. Gimeno, M. V. Andres, E. Silvestre, “A robust and efficient method for obtaining the complex modes in inhomogeneously filled waveguides,” *Microwave and optical technology letters*, vol. 37, 2003. 17
- [16] P. J. B. Clarricoats, “Complex modes of propagation in dielectric-loaded circular waveguides,” *Electronics Letters*, vol. 1, 1965. 17, 30
- [17] H. Katrier, F. J. K. Lange, “Grundlegende Eigenschaften komplexer Wellen am Beispiel der geschirmten kreiszylindrischen dielektrischen Leitung,” *AEÜ*, vol. 37, no. 1/2, 1983. 17, 30
- [18] A. Sommerfeld, “Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen längs eines Drahtes,” *Annalen der Physik und Chemie.*, vol. 67, 1899. 27
- [19] S. M. Kurz, *Schnelle Randelementmethoden für Ingenieure*. 31
- [20] I. Munteanu, “Verfahren und Anwendungen der Feldsimulation II / Finite Elements in Electromagnetics,” 2016. 31
- [21] S. Guttel, F. Tisseur, “The Nonlinear Eigenvalue Problem,” *The University of Manchester*, 2017. 40
- [22] D. S. Mackey, N. Mackey, C. Mehl, V. Mehrmann, “Structured Polynomial Eigenvalue Problems: Good Vibrations from Good Linearizations,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 28, p. 1029–1051, April 2005. 40
- [23] D. S. Mackey, N. Mackey, C. Mehl, V. Mehrmann, “Vector spaces of linearizations for matrix polynomials,” *The University of Manchester*, 2006. 40

-
- [24] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. 44, 46, 106
- [25] G. Piefke, "Feldtheorie II," 1972. 57
- [26] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*. Berlin: Springer, 2005. 59, 60, 61
- [27] H. Klingbeil, *Grundlagen der elektromagnetischen Feldtheorie*. Darmstadt: Springer, 2018. 83