

Inhalt

Materialien zum Buch	13
1 Einführung	15
1.1 Entwicklungsumgebungen	20
1.1.1 IDLE	21
1.1.2 Thonny	22
1.2 Die Installation der Module	23
1.3 Schlüsselwörter von Python	26
1.4 Maschinengenauigkeit, Rundungsfehler und Stellenauslöschung	28
1.4.1 Maschinengenauigkeit	29
1.4.2 Rundungsfehler	30
1.4.3 Stellenauslöschung	31
1.5 Algorithmenbegriffe	32
2 Datentypen und Datenstrukturen	35
2.1 Tupel	36
2.1.1 Exkurs: Elementare Datentypen von Python	38
2.1.2 Würfelsimulation	41
2.1.3 Vertauschen von Objekten	41
2.2 Sets	43
2.2.1 Mengenlehre	44
2.2.2 Vereinigungsmenge	44
2.2.3 Schnittmenge	44
2.2.4 Differenzmenge	45
2.3 Listen	47
2.4 Dictionary	52
2.5 Zusammenfassung	57
2.6 Aufgaben	58

3 Programmstrukturen

59

3.1	Mathematische Operatoren	60
3.2	Die lineare Programmstruktur	61
3.3	Verzweigungsstrukturen	64
3.3.1	Einfachauswahl	65
3.3.2	Mehrfachauswahl	66
3.4	Wiederholstrukturen	68
3.4.1	Die while-Schleife	68
3.4.2	Die for-Schleife	71
3.5	Unterprogrammtechnik mit Funktionen	79
3.5.1	Eingebaute Funktionen	80
3.5.2	Selbst erstellte Funktionen	81
3.5.3	Funktionen ohne Rückgabewert	82
3.5.4	Funktionen mit einem Rückgabewert	83
3.5.5	Funktionen mit mehreren Rückgabewerten	84
3.5.6	Rekursion: Eine Funktion ruft sich selbst auf	86
3.6	Laufzeitkomplexität	86
3.7	Aufgaben	89

4 Die Python-Erweiterungsmodule NumPy, Matplotlib, SymPy und SciPy

91

4.1	NumPy	92
4.1.1	Wichtige NumPy-Methoden	92
4.1.2	Wertetabellen für mathematische Funktionen erstellen	95
4.1.3	Die Datenstruktur von ndarray	96
4.1.4	Rechnen mit Matrizen	96
4.2	Matplotlib	100
4.2.1	Einfache 2D-Funktionsplots	102
4.2.2	Die objektorientierte API	104
4.3	SymPy	107
4.3.1	Symbolische Operationen mit Matrizen	108
4.3.2	Symbolisches Differenzieren und Integrieren	109

4.4	SciPy	110
4.4.1	Nullstellen berechnen	112
4.4.2	Numerisches Integrieren	113
4.5	Aufgaben	114

5 Zahlen 117

5.1	Natürliche Zahlen	121
5.1.1	Teilbarkeit	121
5.1.2	Der größte gemeinsame Teiler	127
5.1.3	Primzahlen	132
5.1.4	RSA-Verschlüsselung	144
5.2	Rationale Zahlen	152
5.3	Irrationale Zahlen	155
5.4	Transzendente Zahlen	160
5.4.1	Die Kreiszahl π	160
5.4.2	Die eulersche Zahl e	168
5.5	Aufgaben	170

6 Gleichungssysteme 171

6.1	Lineare Gleichungssysteme	171
6.1.1	Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems	172
6.1.2	Der Gauß-Algorithmus	176
6.1.3	Der Gauß-Jordan-Algorithmus	182
6.1.4	Lösung mit Determinanten: Die cramersche Regel	186
6.1.5	Lösung mit der Inversen einer Matrix	192
6.1.6	Lösung mit der NumPy-Methode solve()	195
6.1.7	Lösung mit SymPy-Methoden	196
6.2	Iterative Verfahren	201
6.2.1	Das Jacobi-Verfahren	202
6.2.2	Das Gauß-Seidel-Verfahren	207
6.2.3	Konvergenzverhalten	211

6.3	Nichtlineare Gleichungssysteme	213
6.3.1	Lösung mit SciPy	214
6.3.2	Lösung mit SymPy	215
6.4	Aufgaben	216

7 Folgen 219

7.1	Divergente Folgen	219
7.2	Differenzfolgen	223
7.3	Konvergente Folgen	225
7.4	Rekursive Folgen	229
7.5	Geometrische Folgen	230
7.6	Der Grenzwert von Folgen	234
7.6.1	Grenzwertdarstellung im Koordinatensystem	235
7.6.2	Symbolische Berechnung des Grenzwertes	237
7.7	Aufgaben	238

8 Stetige Funktionen 239

8.1	2D-Funktionsplots	240
8.1.1	Elementare Funktionstypen	240
8.1.2	Parabel	243
8.1.3	Exponentialfunktion	246
8.1.4	Sinusfunktion	247
8.2	3D-Funktionsplots	249
8.2.1	Paraboloid	249
8.2.2	Ellipsoid	252
8.3	Animationen	255
8.3.1	2D-Animationen	255
8.3.2	3D-Animationen	259
8.4	Aufgaben	262

9 Differenzialrechnung 263

9.1	Der Differenzenquotient	265
9.1.1	Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotient	265
9.1.2	Der zentrale Differenzenquotient	267
9.2	Optimale Schrittweite	269
9.3	Simulation des Grenzwertprozesses	271
9.4	Tangenten- und Normalengleichung	274
9.4.1	Tangentengleichung	275
9.4.2	Normalengleichung	277
9.5	Höhere Ableitungen	280
9.6	Berechnung von Nullstellen mit dem Newton-Verfahren	282
9.6.1	Numerische Berechnung einer Nullstelle	283
9.6.2	Numerische Berechnung mehrerer Nullstellen	286
9.7	Kurvendiskussion	288
9.7.1	Statische Darstellung von Extremwerten und Wendepunkt	289
9.7.2	Kriterien für Extremstellen	291
9.7.3	Simulation der Tangentensteigung für ein Polynom 3. Grades	294
9.7.4	Kurvendiskussion mit SciPy	297
9.7.5	Kurvendiskussion mit SymPy	301
9.7.6	Umgekehrte Kurvendiskussion	303
9.8	Aufgaben	306

10 Reihen 307

10.1	Divergierende Reihen	308
10.1.1	Die Reihe der Quadratzahlen	308
10.1.2	Harmonische Reihe	311
10.2	Konvergente Reihen	313
10.2.1	Die eulersche Zahl e	314
10.2.2	Vergleich von Konvergenzgeschwindigkeiten	317
10.2.3	Konvergenzkriterien	319
10.3	Geometrische Reihen	322

10.4 Potenzreihen und die Taylor-Entwicklung	327
10.4.1 Potenzreihen	327
10.4.2 Taylor-Entwicklung	331
10.5 Aufgaben	336

11 Integralrechnung 337

11.1 Die Stammfunktion	337
11.2 Flächenberechnung	341
11.3 Verfahren der numerischen Integration	344
11.3.1 Rechtecksummen	344
11.3.2 Trapezsummen	348
11.3.3 Das Simpson-Verfahren	351
11.3.4 Vergleich der Verfahren	353
11.3.5 Der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen	355
11.3.6 Uneigentliches Integral	358
11.4 Bogenlängen	360
11.5 Rotationskörper	364
11.6 Zweifachintegrale	370
11.6.1 Zweifachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen	370
11.6.2 Zweifachintegrale mit variablen Integrationsgrenzen	375
11.7 Aufgaben	377

12 Differenzialgleichungen 379

12.1 Das eulersche Polygonzug-Verfahren	380
12.2 Richtungsfelder	385
12.3 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	387
12.3.1 Die konstante Wachstumsrate	387
12.3.2 Die konstante Wachstumsrate mit oberer Wachstumsschranke	390
12.3.3 Die logistische Wachstumsrate	392
12.4 Nichtlineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung	394

12.5	DGL-System für ein gekoppeltes Fadenpendel	399
12.6	DGL-System mit zwei Unbekannten	402
12.7	DGL-System mit drei Unbekannten	404
12.8	Optimierungen des Euler-Verfahrens	407
12.8.1	Das Heun-Verfahren	407
12.8.2	Das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren	408
12.8.3	Vergleich der Verfahren	408
12.9	Lösung von Differenzialgleichungen mit SymPy	410
12.10	Aufgaben	414

13 Ausgleichsrechnungen 415

13.1	Lineare Ausgleichsprobleme	415
13.1.1	Lösung mit linearen Gleichungssystemen	416
13.1.2	Lösung mit dem Vektoransatz	422
13.1.3	Lösung mit dem erweiterten Vektoransatz	425
13.1.4	Anwendungsbeispiel: Bremsweg	428
13.1.5	Anwendungsbeispiel: Planetenbahn	431
13.2	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	434
13.2.1	Exponentialfunktion	435
13.2.2	Potenzfunktion	437
13.3	Aufgaben	439

14 Algorithmen für die Berechnung statistischer Kennzahlen 441

14.1	Normalverteilte Zufallszahlen erzeugen	442
14.1.1	Histogramm	444
14.1.2	Normalverteilung	445
14.2	Lageparameter	446
14.2.1	Modus	446
14.2.2	Median	447
14.2.3	Arithmetischer Mittelwert	452

14.2.4	Harmonischer Mittelwert	453
14.2.5	Geometrischer Mittelwert	454
14.3	Streuparameter	456
14.3.1	Spannweite	456
14.3.2	Standardabweichung	458
14.4	Strukturparameter	460
14.4.1	Schiefe	460
14.4.2	Wölbung	463
14.5	Aufgaben	465

15 Fraktale 467

15.1	Turtle-Grafik	468
15.2	Die kochsche Schneeflocke	471
15.3	Das Sierpinski-Dreieck	476
15.4	Der Pythagoras-Baum	480
15.5	Mandelbrot- und Julia-Mengen	484
15.5.1	Mandelbrot-Menge	484
15.5.2	Julia-Menge	490
15.5.3	Farbige Darstellung von Julia-Mengen	493
15.6	Aufgaben	496

Anhang 497

A.1	Wichtige mathematische Begriffe und Sätze	497
A.2	Matplotlib-Eigenschaften	500
A.3	Literaturverzeichnis	502
Index		504