

Aus: Lebenswelt und Wissenschaft. XXI. Deutscher Kongreß für Philosophie, 15.-19. September 2008 an der Universität Duisburg-Essen. Kolloquienbeiträge. Hrsg. von Carl Friedrich Gethmann in Verbindung mit J. Carl Bottek und Susanne Hiekel. (= Deutsches Jahrbuch Philosophie. Hrsg. im Auftrag der Deutschen Gesellschaft für Philosophie, Band 2.) Hamburg: Felix Meiner Verlag 2011, S. 1065-1092.  
(Online veröffentlicht mit Genehmigung des Felix Meiner Verlags)

## Schluß und Umkehrschluß: Ein Beitrag zur Definitionstheorie

*Peter Schroeder-Heister\**

Wenn  $A \Rightarrow B$  einen gültigen Schluß, oder auch nur eine gültige Konsequenzbehauptung darstellt, dann gilt nicht notwendigerweise auch seine Umkehrung  $B \Rightarrow A$ . Die Verwechslung der Richtungen von Konsequenzbehauptungen ist ein Argumentationsfehler, auch wenn er in umgangssprachlichen Kontexten nicht immer trivial und offensichtlich ist. Wenn man jedoch Definitionen betrachtet, dann sieht die Sache anders aus. Hier ist es in der Regel so, daß, wenn man  $A$  durch  $B$  definiert, man aufgrund der Definition sowohl  $A$  aus  $B$  als auch  $B$  aus  $A$  erschließen kann. Dies ist offensichtlich im Fall von Explizitdefinitionen, bei denen man die wechselseitige Ersetzbarkeit von Definiendum  $A$  und Definiens  $B$  festsetzt. Es gilt aber auch im Fall von induktiven Definitionen, die eine weitaus größere Definitionsklasse darstellen und Explizitdefinitionen als Grenzfall umfassen. Hier ist die Invertierbarkeit eine nichttriviale Angelegenheit und führt zu tiefliegenden Einsichten in das Wesen der Implikation und der logischen Zeichen, und allgemeiner in die Art und Weise, wie wir Bereiche von Objekten spezifizieren und Informationen darüber extrahieren. Das ist bei weitem nicht nur relevant für die Mathematik, sondern ganz allgemein für die Semantik, wenn man zur Semantik auch die Bedeutungsfestlegung mithilfe von Regeln rechnet, also Semantik nicht nur denotationell versteht. Ein solches Verständnis von Semantik, für das ich den Namen »beweistheoretische Semantik« vorgeschlagen habe<sup>1</sup>, liegt den folgenden Überlegungen zugrunde. Das allgemeine Ergebnis dieser Untersuchungen wird sein, daß induktive Definitionen im Sinne von definitivisch verstandenen Regelsystemen den philosophisch interessanten Fall von Bedeutungsfestlegungen darstellen, und daß die traditionelle definitionstheoretische Fixierung auf Explizitdefinitionen in der Philosophie einen Irrweg darstellt, der wichtige Einsichten, auch in Bezug auf Explizitdefiniti-

\* Ich danke Carl Friedrich Gethmann für die Einladung zum XXI. Deutschen Kongreß für Philosophie, insbesondere für die Gelegenheit, eine Sektion zum Thema »Angewandte Logik und Informatik« zu leiten. Elke Brendel danke ich für die Einladung zum von ihr geleiteten gleichnamigen Kolloquium, in dem die vorliegenden Thesen und Resultate vorgetragen wurden. Mein Dank gilt Heinrich Wansing für eine sehr anregende Diskussion zum Begriff der Co-Implikation (siehe Abschnitt 4 und Fußnote 37). Die Fertigstellung dieser Arbeit wurde unterstützt durch das gemeinsame Amsterdamer/Lissaboner/Tübinger Projekt »Dialogical Foundations of Semantics (DiFoS)« im Rahmen des ESF-EUROCORES-Programms »LogICCC – Modelling Intelligent Interaction« (DFG-Az. Schr 275/15–1) und durch das deutsch-französische DFG/ANR-Projekt »Hypothetical Reasoning – Logical and Semantical Perspectives (HYPOTHESES)« (DFG-Az. Schr 275/16–1).

<sup>1</sup> P. Schroeder-Heister, »Uniform Proof-Theoretic Semantics for Logical Constants (Abstract)«, P. Schroeder-Heister, »Proof-Theoretic Semantics«.

onen, verstellt. Das spezielle Ergebnis wird sein, daß die Invertierung von Definitionen, d.h. die Gewinnung von Umkehrschlüssen aus definitonischen Regeln, den zentralen Fall der Extraktion von inferentiellem Gehalt aus solchen Definitionen darstellt. Das hat besondere Auswirkungen auf den Begriff der Negation und der Dualisierung von Begriffsbildungen, da der Begriff der Negation mit dem Begriff der Umkehrung sehr eng verwandt ist.

Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigt sich daher mit der Inversion von Definitionen, basierend auf der Zulässigkeitsauffassung der Implikation. Der zweite Teil stellt die Idee der lokalen Inversion dar, die nicht auf globalen Konzepten wie »Zulässigkeit« aufbaut. Der dritte Teil behandelt die Idee von Umkehrschlüssen aufgrund von negativer Information. Der vierte und fünfte Teil behandeln die Dualisierung verwendeter Begriffe, wobei der vierte Teil die Dualisierung logischer Konstanten anreißt und der fünfte Teil andeutet, wie man die in den ersten Teilen entwickelte Theorie einschließlich des Begriffs der Zulässigkeit dualisieren kann. Der Artikel schließt mit einigen Bemerkungen zur Dialogsemantik als eines alternativen Rahmens für Inversionsüberlegungen.

### 1. Die Inversion von Definitionen als Regelsystemen

Die Idee, Definitionen als Regelsysteme zu verstehen, wird hier auf Lorenzen's *Operative Logik*<sup>2</sup> zurückgeführt. Ideen, wie sie Lorenzen vertrat, gab es zwar auch schon früher, z. B. bei Post<sup>3</sup> oder bei Hertz<sup>4</sup>. Erst bei Lorenzen liegt jedoch ein kohärentes System vor mit dem Anspruch, Logik und Mathematik zu »begründen«<sup>5</sup>. Ob diese Begründung insgesamt gelungen ist, ist strittig. Stegmüller<sup>6</sup> und Lenk<sup>7</sup> halten schon die Begründung des implikativen Schließens, eines zentralen Teils der operativen Logik, für gescheitert. Ich selbst habe in bezug auf letztere eine positivere Einstellung<sup>8</sup>. In jedem Fall kann man zeigen, daß Lorenzen mit seinem »Inversionsprinzip« gewisse fundamentale Einsichten zum Verständnis regellogischer Ansätze geliefert hat, die heute aktueller erscheinen als Anfang der 1950er Jahre. Das liegt daran, daß wir inzwischen ein sehr viel klareres Bild davon haben, wie eine auf regellogischen Ansätzen aufgebaute beweistheoretische

<sup>2</sup> P. Lorenzen, *Operative Logik*.

<sup>3</sup> E. L. Post, »Introduction to a General Theory of Elementary Propositions«; E. L. Post, »Formal Reductions of the General Combinatorial Decision Problem«.

<sup>4</sup> Siehe P. Hertz, »Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme«, I. und II. Teil; P. Hertz, »Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme«; P. Schroeder-Heister, »Resolution and the Origins of Structural Reasoning: Early Proof-Theoretic Ideas of Hertz and Gentzen«; M. Arndt, *Logical Tomography*.

<sup>5</sup> Vgl. P. Lorenzen, »Konstruktive Begründung der Mathematik«.

<sup>6</sup> W. Stegmüller, »Rezension von: P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik«.

<sup>7</sup> H. Lenk, *Kritik der logischen Konstanten*.

<sup>8</sup> Vgl. P. Schroeder-Heister, »Lorenzens operative Logik und moderne beweistheoretische Semantik«; P. Schroeder-Heister, »Lorenzen's Operative Justification of Intuitionistic Logic«.

Semantik aussehen könnte<sup>9</sup>, aber auch daran, daß regellogische Ansätze von fundamentaler Bedeutung für bestimmte Gebiete der Informatik, insbesondere der Künstlichen Intelligenz geworden sind, unter anderem im Bereich der Logikprogrammierung<sup>10</sup>. Lorenzen war mit seinen damaligen Überlegungen seiner Zeit in mancher Hinsicht voraus. Das gilt zum Teil auch für seine späteren Überlegungen zur dialogischen Logik<sup>11</sup>, die seine *Operative Logik* abgelöst hat und erst in neuester Zeit in modifizierter Gestalt wieder in den Vordergrund gerückt ist<sup>12</sup>.

Lorenzen versucht in der *Operativen Logik*, die Theorie der Implikation als Theorie zulässiger Regeln zu begründen. Er faßt den Implikationspfeil  $\rightarrow$  als Regelpfeil auf;  $A \rightarrow B$  ist also dasselbe wie die als Schema notierte Regel

$$\frac{A}{B}.$$

$A \rightarrow B$  als Implikation zu behaupten, meint nichts anderes, als die *Zulässigkeit* der Regel  $A \rightarrow B$  zu behaupten. Die Theorie der Implikation ist also die Theorie der Zulässigkeit von Regeln. Der heute geläufige Begriff der Zulässigkeit wurde dabei von Lorenzen selbst geprägt. Eine Regel  $R$  ist zulässig in bezug auf einen zugrundeliegenden Kalkül  $K$ , wenn ihre Hinzufügung zu  $K$  die Menge der in  $K$  beweisbaren Aussagen nicht echt erweitert. Das wird vom Konstruktivisten Lorenzen natürlich nicht in dieser Form als mengentheoretische Aussage formuliert. Vielmehr verlangt Lorenzen die Angabe eines (konstruktiven) *Eliminationsverfahrens*, mittels dessen man jede Anwendung von  $R$  in dem um  $R$  erweiterten Kalkül eliminieren kann. Das Hauptziel des ersten Kapitels des ersten Teils der *Operativen Logik* – der sog. *Protologik* – besteht darin, fundamentale Prinzipien aufzustellen, aus denen man Zulässigkeitsbehauptungen gewinnen kann. Eines dieser Prinzipien ist das *Inversionsprinzip*, das es erlaubt, definitorische Regeln zu invertieren.

Bevor wir zum Inversionsprinzip kommen, sei noch erwähnt, wie sich die Theorie der Implikation als Zulässigkeitstheorie weiter gestaltet. Hier steht Lorenzen vor dem Problem, iterierte Implikationen, etwa von der Form  $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$  als Zulässigkeitsbehauptungen zu interpretieren. Dazu greift Lorenzen auf die Idee von Metakalkülen zurück, wobei die Axiome eines Metakalküls die zulässigen Regeln des darunter liegenden Kalküls sind usw. Auf diese Weise gelingt es ihm, die Axiome der positiven Implikationslogik als Regeln aufzufassen, die sich gegebenenfalls auf Metakalküle beziehen, und sie als zulässig zu erweisen. Genauer gesagt, zeigt er, daß diese Regeln *allgemeinzulässig* sind, d. h. in bezug auf *beliebige Grundkalküle* zulässig sind. Das macht die logische Allgemeingültigkeit der positiven Implikationslogik aus. Die Idee von Metakalkülen ist vielfach kritisiert worden, weil sie den konstruktiven operativen Rahmen

<sup>9</sup> L. Hallnäs, »Partial inductive definitions«; L. Hallnäs, »On the Proof-Theoretic Foundation of General Definition Theory«; P. Schroeder-Heister, »Rules of Definitional Reflection«.

<sup>10</sup> L. Hallnäs/P. Schroeder-Heister, »A Proof-Theoretic Approach to Logic Programming«, I. und II. Teil.

<sup>11</sup> P. Lorenzen, »Logik und Agon«; P. Lorenzen/K. Lorenz, *Dialogische Logik*.

<sup>12</sup> Vgl. z. B. J.-Y. Girard, »From Foundations to Ludics«.

sprengung<sup>13</sup>. Es läßt sich jedoch zeigen, daß dieses Verfahren nicht weniger konstruktiv ist als die gewohnten intuitionistischen Ansätze, die die Implikation über konstruktive Transformationen definieren, und durchaus seinen Sinn in einer beweistheoretischen Semantik hat<sup>14</sup>.

Das Inversionsprinzip besagt, daß eine induktive Definition unter bestimmten Bedingungen umkehrbar ist. Lorenzen selbst spricht nicht von einer induktiven Definition, sondern einfach von einem Kalkül, für den bestimmte Regeln als Grundregeln gegeben sind. Ein System von Regeln ist jedoch nichts anderes als eine induktive Definition<sup>15</sup>. Daher ist diese Terminologie gerechtfertigt. Kalküle und (induktive) Definitionen unterscheiden sich nicht grundlegend. Wir erläutern das Inversionsprinzip hier nicht in seiner allgemeinen Gestalt, auch wenn es erst dann seine eigentliche Stärke entfaltet. In dieser allgemeinen Gestalt würden wir Kalküle mit Regeln betrachten, die Individuenvariablen enthalten. Dies führt zu komplizierten Variablenbedingungen, an deren Formulierung Lorenzen selbst gescheitert ist<sup>16</sup>. Wir betrachten hier nur den Fall, in dem eine Kalkülregel die Form  $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$  hat und die Bestandteile  $A_1, \dots, A_n, B$  unzerlegbare Einheiten (Atome) sind, d. h. sozusagen den »aussagenlogischen« Fall. Noch einfacher beschränken wir uns meist auf Regeln der Form  $A \rightarrow B$ , d. h. Regeln mit nur einem einzigen Atom im Rumpf<sup>17</sup>. Das ist für die meisten unserer grundsätzlichen Erwägungen ausreichend.

Nehmen wir an, das zugrundeliegende atomare System (der Kalkül)  $K$  habe als einzige Grundregel mit Kopf  $C$  die Regel  $A \rightarrow C$ , d. h. alle anderen Regeln haben einen von  $C$  verschiedenen Kopf. Dann können wir aufgrund des Inversionsprinzips diese Regel umkehren, d. h. die Zulässigkeit von  $C \rightarrow A$  behaupten. Der Grund dafür liegt darin, daß jede Anwendung von  $C \rightarrow A$  in dem um diese Regel erweiterten Kalkül

$$\frac{\mathcal{D}}{C} C \rightarrow A$$

die Gestalt

$$\frac{\mathcal{D}_1}{C} \frac{A}{C} A \rightarrow C \text{ (Def.)}$$

$$\frac{C}{A} C \rightarrow A$$

<sup>13</sup> W. Stegmüller, »Rezension von: P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik«; H. Lenk, *Kritik der logischen Konstanten*.

<sup>14</sup> E. Moriconi/L. Tesconi, »On Inversion Principles«; P. Schroeder-Heister, »Lorenzen's operative justification of intuitionistic logic«.

<sup>15</sup> P. Aczel, »An Introduction to Inductive Definitions«.

<sup>16</sup> H. Hermes, »Zum Inversionsprinzip der operativen Logik«; P. Schroeder-Heister, »Generalized Definitional Reflection and the Inversion Principle«.

<sup>17</sup> Entsprechend der Terminologie in der Logikprogrammierung bezeichnen wir die Prämissen einer Regel als ihren »Rumpf«, und die Konklusion als ihren »Kopf«.

haben muß, da  $A \rightarrow C$  nach Definition des Kalküls  $K$  die einzige Regel ist, mithilfe derer  $C$  in  $K$  hergeleitet werden kann.<sup>18</sup> Letzterer Beweis läßt sich nun vereinfachen, indem man die beiden aufeinanderfolgenden Regelanwendungen einfach wegläßt und zu

$$\frac{\mathcal{D}_1}{A}$$

übergeht. Da der resultierende Beweis die betrachtete Anwendung von  $C \rightarrow A$  nicht mehr enthält, haben wir ein Eliminationsverfahren für diese Regel angegeben und damit ihre Zulässigkeit nachgewiesen.

Die den Schluß von  $C$  zu  $A$  definierende Regel  $C \rightarrow A$  erlaubt also den Umkehrschluß von  $A$  zu  $C$  als einen zulässigen Schritt. Diese Zulässigkeit liegt darin begründet, daß  $A \rightarrow C$  die einzige Regel ist, mit der man  $C$  erreichen kann, was umgekehrt bedeutet, daß man, wenn man  $C$  erreicht hat,  $A$  schon erreicht haben muß. Die Berechtigung der Umkehrung liegt im Begriff der Zulässigkeit. Würden wir nur solche Inferenzregeln akzeptieren, die per definitionem, sozusagen »positiv« gesetzt sind, dann wäre der Umkehrschluß nicht möglich, wenn keine umgekehrte Regel explizit vorliegt. Da wir jedoch alle Regeln als erlaubt ansehen, die zulässig sind, gewinnen wir neue Regeln aus den definitorisch gegebenen Regeln aufgrund gewisser Verfahren, nämlich den Eliminationsverfahren.

Diese Intuition hatte übrigens auch schon Gentzen<sup>19</sup>, als er die Symmetrie der Einführungs- und Beseitigungsregeln im Kalkül des natürlichen Schließens motivierte. In einer berühmten Formulierung spricht er davon, daß die Beseitigungsregeln »letzten Endes nur Konsequenzen« der Einführungsregeln sind und »auf Grund gewisser Anforderungen« »eindeutige Funktionen« dieser sind<sup>20</sup>. Das Lorenzensche Inversionsprinzip und seine Zulässigkeitsinterpretation von Regeln kann man als eine Interpretation der Gentzenschen Passage verstehen<sup>21</sup>. In der Tat generiert Lorenzen die Beseitigungsregeln für Konjunktion, Implikation und Existenzquantifikation mithilfe des Inversionsprinzips. Prawitz<sup>22</sup> übernimmt in seiner Interpretation von Gentzen daher auch zu Recht den Lorenzenschen Terminus »Inversionsprinzip«. Lorenzens Konzeption ist allerdings insofern wesentlich allgemeiner, als es ihm um Inversion in beliebigen Kalkülen geht und die Inversion von Regeln für logische Zeichen nur einen speziellen, obzwar wichtigen, Spezialfall bildet.

<sup>18</sup> Genauer gehen wir dabei davon aus, daß die betrachtete Anwendung der Regel  $C \rightarrow A$  eine *höchste* Anwendung dieser Regel ist, daß sich darüber also keine weitere Anwendung dieser Regel befindet, was sich immer erreichen läßt durch eine geeignete Reihenfolge der Betrachtung von Regelanwendungen. Hier und im folgenden stehen dabei Buchstaben wie  $\mathcal{D}$  für beliebige Beweise im jeweils betrachteten Kalkül.

<sup>19</sup> G. Gentzen, »Untersuchungen über das logische Schließen«.

<sup>20</sup> A. a. O., 189.

<sup>21</sup> Obwohl Lorenzen der Theorie des natürlichen Schließens, die in Gentzens publizierten Abhandlungen nur eine marginale Rolle spielt, eher fern stand und er sich am Sequenzenkalkül orientierte.

<sup>22</sup> D. Prawitz, *Natural Deduction*.

Das Inversionsprinzip geht jedoch, auch in der hier diskutierten variablenfreien Fassung, erheblich weiter. Inversion bedeutet nicht nur die Umkehrung einer einzigen Definitionsregel. Nehmen wir an, für  $C$  seien im Kalkül  $K$  zwei Grundregeln gegeben:

$$K \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow C \\ B \rightarrow C. \end{array} \right.$$

Dann können wir natürlich nicht umgekehrt von  $C$  auf  $A$  oder auf  $B$  zurückschließen. Wenn wir  $C$  erreicht haben, wissen wir, daß wir schon  $A$  oder  $B$  erreicht haben müssen, da die beiden angegebenen Regeln die einzigen Regeln sind, mit denen wir  $C$  gewinnen können. Wir wissen jedoch nicht, ob es  $A$  oder aber  $B$  war, von dem aus wir zu  $C$  übergegangen sind, jedenfalls wenn wir keine weitere Information haben. Lorenzens Ausweg besteht darin, einen bedingten Rückschluß zu erlauben. Da wir nur über  $A$  oder über  $B$  zu  $C$  gekommen sein können, bedeutet das, daß wir von  $C$  auf alles das schließen können, was wir sowohl aus  $A$  als auch aus  $B$  erschließen können, da letzteres unabhängig davon ist, welche der Optionen  $A$  und  $B$  die richtige ist. In Lorenzenscher Terminologie würden wir schreiben:

$$A \rightarrow D, B \rightarrow D \vdash_K C \rightarrow D,$$

zu lesen als:  $C \rightarrow D$  ist zulässig, gegeben die Regeln  $A \rightarrow D$  und  $B \rightarrow D$ . Formell beweist man das wie folgt: Eine Anwendung der Regel  $C \rightarrow D$

$$\frac{\mathcal{D}}{C} C \rightarrow D$$

hat entweder die Form

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{A}{C} A \rightarrow C} C \rightarrow D$$

oder die Form

$$\frac{\mathcal{D}_2}{\frac{B}{C} B \rightarrow C} C \rightarrow D.$$

Im ersten Fall gelingt eine Elimination von  $C \rightarrow D$  durch Anwendung der Regel  $A \rightarrow D$ :

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{A}{D} A \rightarrow D} C \rightarrow D$$

im zweiten Fall durch Anwendung der Regel  $B \rightarrow D$

$$\frac{\mathcal{D}_2}{\frac{D}{B} B \rightarrow D} C \rightarrow D.$$

Dies ist kein Umkehrschluß im direkten Sinne, aber ein Umkehrschluß im indirekten Sinne. Der indirekte Charakter besteht darin, daß man nicht einfach von der Konklusion auf die Prämissen, sondern von der Konklusion auf die gemeinsamen Konsequenzen aller möglichen Prämissen zurückschließt.

Man kann das Inversionsprinzip als eine Interpretation der sogenannten »Extremalklausel« in induktiven Definitionen verstehen, mit der man sie häufig abschließt. Wenn wir z. B. den Begriff des Terms definieren durch

- Jede Konstante ist ein Term
- Jede Variable ist ein Term
- Nichts sonst ist ein Term,

dann besagt die dritte dieser Klauseln als Extremalklausel, daß wir, wenn ein Term vorliegt, davon ausgehen können, daß entweder eine Konstante oder eine Variable vorliegt, d. h. daß wir, wenn wir etwas sowohl für Konstanten als auch für Variablen gezeigt haben, dies für alle Terme gezeigt haben.

Es ist dabei nicht unbedingt notwendig, eine Extremalklausel explizit zu formulieren. Es genügt, daß klar ist, welche Regeln zur Definition gehören, d. h., wo die Definition aufhört. Das Inversionsprinzip basiert darauf, daß wir eine Definition als Ganze in den Blick nehmen und feststellen, daß durch sie eine erschöpfende Festlegung der Produktionsregeln für ein bestimmtes Objekt gegeben ist. Hallnäs<sup>23</sup> hat daher den Terminus »definitorische Reflexion« für ein Prinzip vorgeschlagen, das dem Inversionsprinzip sehr verwandt ist. Wir reflektieren auf die Definition als Ganze, d. h. als erschöpfende Bedeutungsfestlegung. Umkehrschlüsse nutzen den erschöpfenden Charakter dieser Bedeutungsfestlegung aus.

Das bedeutet im übrigen, daß die Zulässigkeit eines solchen Umkehrschlusses nicht-monoton ist. Wenn wir den gegebenen Kalkül erweitern, muß der Umkehrschluß gegebenenfalls modifiziert oder ganz aufgegeben werden, da durch die Erweiterung neue Regeln für gegebene Atome hinzukommen können, d. h. der erschöpfende Charakter der ursprünglichen Definitionsregeln verloren geht.

Man kann das Inversionsprinzip auch als Maximalitätsprinzip verstehen. Die Formulierung

$$A \rightarrow D, B \rightarrow D \vdash_K C \rightarrow D$$

sagt aus, daß  $C$  bezüglich  $K$  die stärkste Aussage ist, die sowohl von  $A$  als auch von  $B$  impliziert wird. Das ist eine andere Art und Weise, den erschöpfenden Charakter der Bedeutungsfestlegung durch die beiden gegebenen Regeln auszudrücken.

Allgemeiner, d. h. im Fall von beliebig vielen definierenden Regeln für ein Objekt  $C$ :

$$K \left\{ \begin{array}{l} A_1 \rightarrow C \\ \vdots \\ A_n \rightarrow C \end{array} \right.$$

<sup>23</sup> L. Hallnäs, »Partial Inductive Definitions«.

lautet das Inversionsprinzip:

$$A_1 \rightarrow D, \dots, A_n \rightarrow D \vdash_K C \rightarrow D.$$

In einer anderen Formulierung besagt dies, daß  $C$  den »gemeinsamen Gehalt« von  $A_1, \dots, A_n$  ausdrückt.<sup>24</sup>

Wie oben schon erwähnt, benutzt Lorenzen das Inversionsprinzip dazu, Beseitigungsregeln für bestimmte logische Zeichen aus deren Einführungsregeln zu gewinnen. Diese logischen Anwendungen sollen uns hier nicht weiter beschäftigen. Wir halten als Zwischenresultat fest: Mithilfe des Begriffs der Zulässigkeit lassen sich Umkehrschlüsse rechtfertigen, nämlich als direkte oder indirekte Umkehrungen von definitorischen Regeln, die die Bedeutung bestimmter Zeichen erschöpfend festlegen.

Es sei darauf hingewiesen, daß es eine Reihe verwandter Ideen gibt, Umkehrschlüsse zu generieren. Zwei Ansätze im Bereich des regellogischen Rasonierens in der Künstlichen Intelligenz sind z. B. die »closed world assumption« und die »Vervollständigung« (»completion«) von Logikprogrammen.<sup>25</sup> Wie der Begriff der Zulässigkeit beruhen sie auf der Idee, daß durch bestimmte Festlegungen eine vollständige oder abgeschlossene Spezifikation eines Bereichs gegeben ist, so daß man aufgrund dieser Vollständigkeit oder Abgeschlossenheit bestimmte Rückschlüsse (d. h. Umkehrschlüsse) ziehen kann.

Gleichzeitig zeigt die Möglichkeit von Umkehrschlüssen die Signifikanz von induktiven Definitionen, die in der philosophischen Diskussion meist unterschätzt wird. Bei Explizitdefinitionen, die traditionell der Hauptgegenstand der philosophischen Definitionstheorie sind, betrachtet man den Grenzfall von induktiven Definitionen, bei denen ein Zeichen nur durch eine einzige Regel definiert ist, und nimmt dann die Umkehrung, die sich daraus ergibt, einfach mit in die Definitionen hinein, formuliert sie also als Bikonditional. Die Idee von Umkehrschlüssen taucht damit gar nicht erst auf, da der Umkehrschluß von vornherein in die Definition hineingepackt wird. Das ist kein inkorrektes Vorgehen, verstellt jedoch sehr aufschlußreiche Perspektiven. Man sieht nicht mehr, daß Explizitdefinitionen Spezialfälle von ungleich mächtigeren induktiven Definitionen sind.

## 2. Lokale Inversion

Die Zulässigkeitstheorie, die zur Inversion von Schlüssen führt, baut auf Grundvoraussetzungen auf, die nicht unproblematisch sind. Sie verbaut die Behandlung von Phänomenen, denen man in einer semantischen Theorie gerne gerecht werden würde.

<sup>24</sup> Dieser Terminus wurde von mir (siehe P. Schroeder-Heister, *Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknüpfungen*; P. Schroeder-Heister, »A Natural Extension of Natural Deduction«) vorgeschlagen im Zusammenhang mit der Entwicklung von verallgemeinerten Beseitigungsregeln für aussagenlogische Junktoren.

<sup>25</sup> Vgl. z. B. J. W. Lloyd, *Foundations of Logic Programming*. Inhaltlich kommt die Idee der Vervollständigung übrigens auch schon bei Lorenzen vor: Vgl. P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, 173.



Zunächst einmal bevorzugt die Zulässigkeitstheorie annahmefreie Beweise gegenüber Beweisen aus Annahmen. Nur so ist der Begriff der Zulässigkeit überhaupt nicht-trivial. Wenn wir für die Zulässigkeit der Regel  $A \rightarrow B$  in einem Kalkül  $K$  die Angabe eines Verfahrens verlangen, das alle Anwendungen von  $A \rightarrow B$  aus Beweisen des um diese Regel erweiterten Kalküls eliminiert, so sind damit immer *annahmefreie* Beweise gemeint. Nur dann können wir bei Anwendung des Inversionsprinzips argumentieren, daß die Prämisse  $A$  ausschließlich mithilfe bestimmter Regeln gewonnen worden sein kann. Würden wir Beweise aus Annahmen zulassen und verlangen, daß  $A \rightarrow B$  auch aus solchen Beweisen eliminierbar sein soll, dann kollabiert der Begriff der Zulässigkeit einer Regel zu dem der Ableitbarkeit. Eine Anwendung der Regel  $A \rightarrow B$  könnte dann ja darin bestehen, daß  $B$  aus der Annahme  $A$  gewonnen ist, was nicht weiter reduzierbar ist.

Betrachten wir etwa wieder einen Kalkül  $K$  mit  $A \rightarrow C$  als einziger Grundregel für  $C$ :

$$K \{ C \rightarrow D.$$

Der Umkehrschluß in Form der Regel  $C \rightarrow A$  gilt nicht notwendigerweise, wenn man Eliminierbarkeit aus Beweisen mit Annahmen verlangt. Denn ein Beweis, der  $C \rightarrow A$  verwendet:

$$\frac{\mathcal{D}}{A} C \rightarrow A$$

hat nicht wie im annahmefreien Fall immer die Gestalt

$$\frac{\mathcal{D}_1}{\frac{A}{C} A \rightarrow C} C \rightarrow A$$

die reduzierbar wäre zu

$$\frac{\mathcal{D}_1}{A} .$$

Eine solche Situation liegt z. B. vor, wenn  $\mathcal{D}$  einfach aus der Annahme  $C$  besteht, also die Form

$$\frac{C}{A} C \rightarrow A$$

hat. Dieser Beweis ist irreduzibel, es sei denn, es gibt einen Beweis von  $A$  aus  $C$ :

$$\frac{C}{\vdots} A,$$

d. h., die Regel  $C \rightarrow A$  ist beweisbar, was eine sehr starke Forderung darstellt. Die Umkehrung von induktiven Regelsystemen wäre damit nicht mehr gegeben.

Eine fundamentale Grundannahme der Zulässigkeitstheorie ist also der *Primat geschlossener, d. h. annahmefreier Beweise gegenüber offenen, d. h. von Annahmen*

*abhängigen Beweisen.* Dies gilt nicht nur für die spezielle Lorenzensehe Zulässigkeits-theorie, sondern in verwandter Weise für alle intuitionistisch inspirierten Semantiken. Die Brouwer-Heyting-Kolmogorow-Interpretation der Implikation beruht darauf ebenso wie die beweistheoretische Semantik in der von Dummett und Prawitz begründeten Tradition. In allen Fällen wird die Gültigkeit von implikativen Aussagen über Verfahren definiert, die geschlossene Beweise in geschlossene Beweise transferieren.

Man sieht sofort, daß mit dem Primat geschlossener über offene Beweise eine Auffassung direkt verknüpft ist, die ich die Transmissionsauffassung der Konsequenz nennen möchte. Der Nachweis der Zulässigkeit von  $A \rightarrow B$  über ein Eliminationsverfahren gestaltete sich ja so, daß man zeigen mußte, daß sich aus einem (geschlossenen) Beweis der Prämisse  $A$  ein (geschlossener) Beweis der Konklusion  $B$  gewinnen läßt. Das heißt, Zulässigkeit bedeutet, daß sich ein geschlossener Beweis der Prämisse in einen geschlossenen Beweis der Konklusion umformen läßt. Ganz analog verfahren die verwandten intuitionistischen Konzeptionen.

Hier handelt es sich um Eigenarten konstruktiver (intuitionistischer) Ansätze, insofern auf den Begriff des konstruktiven Verfahrens zurückgegriffen wird. Man kann es sogar als das Kennzeichen intuitionistischer Ansätze ansehen, die Implikation (und auch den Allquantor) durch den Begriff des konstruktiven Verfahrens zu deuten. Wenn man von dieser konstruktiven Eigenheit jedoch absieht, d.h. von der Konstruktivitätsforderung an Transmissionsprozeduren, so haben wir hier zwei Charakteristika vorliegen, die gleichermaßen den klassischen Konsequenzbegriff kennzeichnen. Statt vom Primat geschlossener über offene Beweise möchte ich allgemeiner vom *Primat des Kategorischen über das Hypothetische* sprechen, und wenn ich von der *Transmissionsauffassung der Konsequenz* rede, dann möchte ich nur ausdrücken, daß, wenn die Prämisse gilt, dann auch die Konklusion.

Das gilt beides auch für die klassische modelltheoretische Folgerung. Diese geht als Grundbegriff vom Begriff der Wahrheit in einer Struktur aus und definiert den Begriff der Folgerung als Übertragung der Wahrheit in einer Struktur von den Prämissen auf die Konklusion (für alle Strukturen). Das heißt, wir haben auch hier die Situation vorliegen, daß das Kategorische (hier die Wahrheit) primär gegenüber dem Hypothetischen (hier der Folgerung) ist, und daß ferner das Hypothetische (die Folgerung) definiert wird als die Transmission des kategorischen Konzepts (der Wahrheit) von den Prämissen auf die Konklusion. Nichts anderes besagt die Vorstellung von Folgerung als Wahrheitskonservierung.

Diese konzeptionelle Verwandtschaft zwischen klassischem und konstruktivem Vorgehen wird offensichtlich, wenn man beide Begriffe formalisiert: Klassische Folgerung bedeutet

$$(\forall \mathfrak{M}) [(\mathfrak{M} \models A_1), \dots, (\mathfrak{M} \models A_n) \Rightarrow \mathfrak{M} \models B],$$

wobei  $\mathfrak{M} \models A$  die (kategorische) Gültigkeit von  $A$  in der Struktur  $\mathfrak{M}$  bedeutet. Konstruktive (intuitionistische) Folgerung könnte man hingegen formalisieren als

$$(\forall \mathfrak{C}_1 \dots \mathfrak{C}_n) [(\mathfrak{C}_1 \models A_1), \dots, (\mathfrak{C}_n \models A_n) \Rightarrow f(\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n) \models B],$$

wobei  $\mathfrak{C} \models A$  die konstruktive Gültigkeit von  $A$  in einer geeigneten intuitionistisch verstandenen Struktur  $\mathfrak{C}$  darstellt (bei der Zulässigkeitsinterpretation ist das die Ableitbarkeit im gegebenen Kalkül  $K$ ) und  $f$  die konstruktive Transformation. Abgesehen von dem (natürlich wichtigen) Unterschied, daß in die Transformation des kategorischen Begriffs von den Prämissen zur Konklusion im konstruktiven Fall die konstruktive Funktion  $f$  eingeht, haben wir eine erstaunliche Parallelität der Begrifflichkeiten vorliegen. Ich spreche hier von den *beiden Dogmen der Standardsemantik*, wobei »Standardsemantik« sowohl die klassische modelltheoretische Semantik meint als auch die konstruktive intuitionistische Semantik in der Auffassung, wie sie den meisten Fassungen, einschließlich beweistheoretischer Interpretationen, zugrundeliegt:

Dogma 1: Das Kategorische ist primär gegenüber dem Hypothetischen.

Dogma 2: Konsequenz ist Transmission des kategorischen Begriffs von den Prämissen auf die Konklusion.

Ohne die fundamentalen Unterschiede zwischen klassischer und konstruktiver Auffassung verwischen zu wollen: Es gibt hier eine grundsätzliche Gemeinsamkeit, die die Rangordnung von Kategorischem (Wahrheit, geschlossene Beweisbarkeit) und Hypothetischem (Folgerung, offene Beweisbarkeit) und die Rückführung des Hypothetischen auf das Kategorische (Transmission des kategorischen Begriffs) angeht<sup>26</sup>.

Hinzu kommt bei der Betrachtung von Definitionen noch ein weiteres Dogma, das ich als *Dogma der Wohlfundiertheit* bezeichnen möchte. Traditionell wird in der Definitionstheorie vorausgesetzt, daß korrekte Definitionsketten an ein Ende kommen, d. h. nicht zyklisch werden oder zu einem unendlichen Regreß führen. Diese Rückführbarkeit wird insbesondere im konstruktivistischen Bereich sehr stark in den Vordergrund gerückt. Das gilt insbesondere für die spätere Philosophie Lorenzens Erlanger Provenienz. Dieser Punkt kann hier nicht im einzelnen diskutiert werden. Es ist aber klar, daß man sich damit von der Interpretation nichtwohlfundierter Phänomene, wie z. B. der semantischen und mathematischen Paradoxien, ausschließt, bzw. von vornherein in die Diskussion gedrängt wird, wie man Definitionen von Begriffen einschränken muß, damit Wohlfundiertheit und damit Nichtzirkularität gewährleistet ist. Dem würde eine positive Deutung solcher Phänomene gegenüberstehen, d. h. eine Anerkennung ihres Status als möglicher begrifflicher Konstruktionen, ohne daß man damit notwendigerweise globale Widersprüche in Kauf nehmen muß.

Der Ansatz, den ich gemeinsam mit Lars Hallnäs vorgeschlagen habe, besteht darin, eine Konzeption von definitorischem Rasonnieren vorzulegen, die nicht auf den beiden Dogmen der Standardsemantik aufbaut und auch nicht das Dogma der Wohlfundiertheit voraussetzt. Anstelle dessen entwickelt er die Idee der *lokalen Inversion* von Regeln, d. h. ein Inversionsprinzip, das die Umkehrung von Regeln lokal erlaubt, ohne dabei zugleich globale Anforderungen an den Beweisbegriff zu machen. Die von uns kritisierte globale Perspektive ist eine Folge der Dogmen der Standardsemantik, wo-

<sup>26</sup> Vgl. P. Schroeder-Heister, »Proof-Theoretic versus Model-Theoretic Consequence«; P. Schroeder-Heister/P. Contu, »Folgerung«.

nach hypothetische Urteile (Implikationen) gerechtfertigt werden durch den Nachweis globaler Eigenschaften von Beweissystemen, nämlich Beweisreduktionsverfahren, wie sie auch Zulässigkeitsbeweise zugrundeliegen. Wie in der Lorenzenschen Zulässigkeitstheorie gehen wir also von »Definition« genannten Regelsystemen aus. Wir führen jedoch keine Zulässigkeitsbeweise, sondern generieren daraus direkt Konsequenzbehauptungen. Anders als das erste Dogma der Standardsemantik gehen wir also davon aus, daß der Folgerungsbegriff primär gegenüber dem Wahrheitsbegriff ist, bzw., da wir uns in einem konstruktiven Rahmen bewegen, daß offene Beweise gegenüber geschlossenen Beweisen primär sind. Geschlossene Beweise sind Grenzfälle von offenen Beweisen, genauso wie wir Wahrheit als Grenzfall der Folgerung ansehen würden. Wir schlagen also eine Umkehr der Ordnung der Begriffe »Wahrheit« und »Folgerung« bzw. »geschlossener Beweis« und »offener Beweis« vor.

Auf diese Weise glauben wir, die traditionelle Begründungszentriertheit deduktiven Rasonnierens überwinden zu können, d. h. die Tatsache, daß wir in erster Linie darauf aus sind, Behauptungen zu *begründen*. Diese Idee wurde auch schon von Popper aufgebracht<sup>27</sup>. Während Popper allerdings eine Widerlegungszentriertheit an die Stelle der Begründungszentriertheit setzen wollte, geht es uns um Bidirektionalität, d. h. darum, daß die Begriffe von Begründung (Vorwärtsrasonnieren) und Annahme (Rückwärtsrasonnieren) gleichursprünglich sind<sup>28</sup>. Unser Deduktionskonzept ist derart, daß man in jedem Stadium der Deduktion entweder vorwärts zu neuen Behauptungen übergeht oder rückwärts neue Annahmen einführt. Annahmen sind somit nicht mehr Platzhalter für Begründungen (so wenig wie Behauptungen Platzhalter für Widerlegungen sind). Unsere Idee ist, daß jedem Vorwärtsschluß ein Rückwärtsschluß entspricht und umgekehrt, daß wir also eine Dualität von Inferenzen haben, die beide Richtungen des Rasonnierens betrifft.

Es gibt ein formales Modell für diese Art von Schließen, nämlich Gentzens Sequenzenkalkül. Nach diesem Modell wird in jedem Schritt eine Folgerungsbeziehung behauptet, die durch eine Sequenz etwa der Form

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B$$

ausgedrückt wird. D. h., es wird behauptet, daß *B* unter den Annahmen  $A_1, \dots, A_n$  gilt. Und jeder Schritt besteht darin, daß entweder die rechte Seite (die Behauptungsseite) oder die linke Seite (die Annahmenseite) modifiziert wird. Es gibt also rechte und linke Einführungsregeln, was philosophisch so zu interpretieren ist, daß man Behauptungen oder Annahmen einführen kann.

Auf diese Weise erhält der Sequenzenkalkül, den Gentzen in erster Linie als technisches Instrument eingeführt hatte, eine philosophische Signifikanz. Er verkörpert die Idee, daß man Annahmen aufgrund ihrer Form einführen kann. D. h. anders als im Kalkül des natürlichen Schließens, in dem die Einführung von Annahmen unspezifisch ist, gibt es im Sequen-

<sup>27</sup> K. R. Popper, »On the Sources of Knowledge and of Ignorance«.

<sup>28</sup> P. Schroeder-Heister, »Begründungsrationalität und Logik«.

zenkalkül bedeutungsspezifische Regeln für die Einführung von Annahmen. Jedes logische Zeichen hat seine eigenen Annahmeneinführungsregeln: Die Konjunktion z. B. die Regel

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

und die Implikation die Regel

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash C.}$$

Die Änderung des Paradigmas gegenüber dem natürlichen Schließen ist offenkundig. Das ist unabhängig vom Format. Wir können diesen Sequenzenkalkül auch nach Art des natürlichen Schließens formalisieren, indem wir beim natürlichen Schließen eine Erweiterung von Beweisen nach oben zulassen. Man erhält so einen Kalkül des bidirektionalen natürlichen Schließens, der aber letztlich eine Adaptation des Sequenzenkalküls in einem anderen formalen Rahmen darstellt.<sup>29</sup>

Wir erhalten auf diese Weise eine völlig symmetrische Behandlung von Annahmen und Behauptungen. Die Platzhalterfunktion von Annahmen für geschlossene Beweise wird aufgegeben. Annahmen sind als Gegenstände der Deduktion gleichursprünglich mit Behauptungen. Man muß sich dabei von der Grundannahme lösen, Begründungen, d. h. Beweise von Behauptungen, seien primär gegenüber Beweisen aus Annahmen (die man, wenn sie zur Absurdität führen, als Widerlegungen auffassen kann.) Vielmehr haben wir beim Deduzieren Annahmen und Behauptungen gleichermaßen im Fokus.

Das Problem der Umkehrschlüsse stellt sich damit in ganz anderer Weise. Wir haben nicht mehr primäre vorwärtsgerichtete Schlüsse, denen dann, z. B. über Zulässigkeitsüberlegungen, gewisse Umkehrschlüsse entsprechen. Vielmehr haben wir, von einer Definition ausgehend, gleichursprünglich zwei Arten von Schlüssen: vorwärts und rückwärts. Das bedeutet Bidirektionalität. Das Verhältnis von Schluß und Umkehrschluß ist damit nicht mehr dasjenige der Rechtfertigung des letzteren aus dem ersteren, sondern ein Verhältnis von zwei Schlußarten, die gleichberechtigte Weisen sind, bestimmte definitorische Regeln in Aktion zu setzen.

Es liege eine Definition vor, die folgende Klauseln<sup>30</sup> für  $A$  enthält:

$$\mathbb{D} \left\{ \begin{array}{l} B_1 \rightarrow A \\ \vdots \\ B_n \rightarrow A. \end{array} \right.$$

<sup>29</sup> Vgl. P. Schroeder-Heister, »Sequent Calculi and Bidirectional Natural Deduction: On the Proper Basis of Proof-Theoretic Semantics«.

<sup>30</sup> Im Anschluß an die in der Logikprogrammierung gebräuchliche Terminologie sprechen wir häufig von »Klauseln« statt von »Regeln«. Mit »Klauseln« sind ausschließlich definitorische Regeln, d. h. Objekte der Form  $A \rightarrow B$  gemeint, während »Regeln« auch für Schlußschemata, z. B. in Sequenzenkalkülen, verwendet wird, darunter insbesondere solche, die Klauseln anwenden.

Dann besagt die darauf aufbauende Behauptungsregel als Rechts-Einführung eines Sequenzenkalküls, daß man  $A$  behaupten kann, falls man eine seiner definitorischen Bedingungen  $B_i$  zu Recht behauptet hat:

$$\frac{\Delta \vdash B_i}{\Delta \vdash A} (\vdash A).$$

Die auf  $\mathbb{D}$  aufbauende Annahmenregel als Links-Einführung eines Sequenzenkalküls besagt, daß man  $A$  als Annahme einführen darf, wenn man aus allen Bedingungen für  $A$  alles das herleiten kann, was man aus  $A$  herleiten will, d. h.

$$\frac{\Delta, B_1 \vdash C \quad \dots \quad \Delta, B_n \vdash C}{\Delta, A \vdash C} (A \vdash).$$

Das kann man auch so ausdrücken, daß aus  $A$  alles das gefolgert werden kann, was aus allen möglichen definitorischen Bedingungen von  $A$  gefolgert werden kann. Diese Formulierung einer Sequenzenregel entspricht der Lorenzenschen Formulierung des Inversionsprinzips. Während letzteres jedoch auf einer Zulässigkeitsinterpretation hypothetischer Urteile aufbaute, ist die obige Formulierung als Grundsluß verstanden.

Das Schlußschema  $(\vdash A)$  heißt auch »definitorischer Abschluß«, da es dazu dient, Aussagen unter den gegebenen definitorischen Klauseln abzuschließen. Das Schlußschema  $(A \vdash)$  heißt auch »definitorische Reflexion«, weil es einen Reflexionsschritt auf die Definition als Ganze beinhaltet und so die Extremalklausel von induktiven Definitionen interpretiert. In beiden Fällen handelt es sich um Grundschlüsse, die wir als einsichtige Prinzipien postulieren. Das Problem von Schluß und Umkehrschluß ist jetzt nicht mehr das Problem der Gewinnung von letzterem aus ersterem, sondern das Problem, das Schlußpaar von definitorischem Abschluß und definitorischer Reflexion plausibel zu machen.

Der große Vorteil dieses Ansatzes besteht nicht nur darin, daß Annahmen jetzt gleichberechtigt neben Behauptungen stehen, sondern vor allem in seiner Lokalität. Die Beziehung zwischen Schlüssen und Umkehrschlüssen ist nicht mehr durch globale Zulässigkeitsbehauptungen vermittelt, die sich auf die Gesamtstruktur eines Beweises richten, sondern es geht um ein Paar von Schlüssen, das sich aus den definitorischen Klauseln für ein Atom  $A$  ergeben, unabhängig von der globalen Struktur von Herleitungen. Das zahlt sich bei der Diskussion von Paradoxien unmittelbar aus. Jetzt ist es nämlich z. B. möglich,  $A$  durch seine eigene Negation zu definieren, also z. B. eine Definition

$$\mathbb{D} \{ (A \rightarrow \perp) \rightarrow A$$

zuzulassen. Eine solche Definition, bei der  $A$  in seiner eigenen definitorischen Bedingung in negativer Position auftritt, würde den Rahmen von Zulässigkeitsüberlegungen und verwandter intuitionistischer Semantiken sprengen. In unserem lokalen Rahmen würde dies jedoch einfach zu dem Schlußpaar:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow \perp}{\Gamma \vdash A} \quad \frac{\Gamma, A \rightarrow \perp \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}$$

führen, das sich wie Schluß und Umkehrschluß verhält. Anders als man erwarten würde, führt das nicht zu global desaströsen Konsequenzen im Sinne der Widersprüchlichkeit, einfach weil in einem solchen System bestimmte globale Eigenschaften wie z. B. Schnittelimination nicht vorhanden sind. Während die Zulässigkeitsinterpretation und verwandte Ansätze darauf aufbauen, daß globales Wohlverhalten im Sinne von Normalisierung oder Schnittelimination vorliegt, machen wir hier keine solche Annahme. Die lokale Perspektive auf Schlußregeln bedeutet, daß globale Eigenschaften, so erwünscht sie auch sein mögen, nicht mehr durch den deduktiven Rahmen erzwungen werden.

Für weitergehende Erläuterungen wird auf andere Publikationen verwiesen<sup>31</sup>. Wir halten als Zwischenresultat fest: Schlüsse und Umkehrschlüsse sind zwei Seiten eines bidirektionalen deduktiven Verhaltens, das man aus einer Definition extrahieren kann. Ob möglicherweise die dialogischen Ansätze, wie sie Lorenzen nach seiner *Operativen Logik* entwickelt hat und wie sie in neuester Zeit wieder in den Vordergrund gerückt sind, diese Direktionalität neu beleuchten können, wird am Ende dieses Artikels kurz erörtert<sup>32</sup>.

### 3. Umkehrschlüsse aufgrund negativer Information

Wir haben bisher das Problem von Schluß und Umkehrschluß unter dem Gesichtspunkt behandelt, ob man aus  $A \rightarrow B$  gegebenenfalls  $B \rightarrow A$  gewinnen kann, und dies auf dem Hintergrund definitorischer Klauseln der Form  $A \rightarrow B$  diskutiert. Ähnliche Gesichtspunkte ergeben sich, wenn man die Negation einbezieht und die Umkehrung auf den Schluß von  $A \rightarrow B$  auf  $\neg A \rightarrow \neg B$  bezieht, der in gewöhnlichen Kontexten ebenfalls einen klassischen Fehlschluß darstellt. Daß zwischen beiden Ideen eine Beziehung besteht, verwundert nicht, ist doch der Negationsbegriff eng mit dem Annahmenbegriff verwandt. Eine Negation zu behaupten, bedeutet z. B. im Intuitionismus, eine Annahme zum Widerspruch zu führen.

Die definitorische Reflexion als lokale Variante des Inversionsprinzips besagte, daß man aufgrund einer Definition von  $A$ :

$$\mathbb{D} \left\{ \begin{array}{l} B_1 \rightarrow A \\ \vdots \\ B_n \rightarrow A \end{array} \right.$$

aus  $A$  alles das folgern kann, was man aus allen definitorischen Bedingungen von  $A$  erhält:

$$\frac{\Delta, B_1 \vdash C \quad \dots \quad \Delta, B_n \vdash C}{\Delta, A \vdash C} (A \vdash).$$

<sup>31</sup> L. Hallnäs/P. Schroeder-Heister, »A Survey of Definitional Reflection«; P. Schroeder-Heister, »The Categorical and the Hypothetical«.

<sup>32</sup> Für das Problem der Inversion in Sequenzkalkülen und die Dualität von Einführungsregeln im Antezedens und Sukzedens in dem Fall, in dem die definierenden Klauseln sich direkt auf Sequenzen beziehen, vgl. W. de Campos Sanz/T. Piecha, »Inversion by Definitional Reflection and the Admissibility of Logical Rules«.

Wenn man das analog auf den Begriff der Negation oder besser noch auf den Begriff der Bestreitung als Pendant zum Begriff der Behauptung bezieht, so könnte man sagen, daß man  $A$  widerlegen kann, wenn man alle definitorischen Bedingungen von  $A$  widerlegen kann. Notieren wir die Bestreitung mit  $\sim$  und verzichten wir hier auf Sequenznotation, um den Begriff der Bestreitung nicht auch noch mit dem Begriff der Annahme verknüpfen zu müssen, erhält man aus  $\mathbb{D}$  als Behauptungsregeln

$$\frac{B_1}{A} \quad \dots \quad \frac{B_n}{A}$$

und als entsprechende Umkehrungen die Bestreitungsregel

$$\frac{\sim B_1 \quad \dots \quad \sim B_n}{\sim A}$$

Das setzt natürlich voraus, daß klar ist, was mit der Bestreitung  $\sim B_i$  einer Bedingung von  $A$  gemeint ist. Das ist nichttrivial, wenn  $B_i$  komplex ist, wie es in der Regel der Fall sein wird. Zum Beispiel gibt es diverse Möglichkeiten, die Bestreitung einer Implikation zu verstehen. Eine naheliegende, aber nicht die einzig mögliche Interpretation besteht darin,  $\sim(A \rightarrow B)$  im Sinne von  $(A, \sim B)$  zu verstehen. Wansing<sup>33</sup> diskutiert in seinem Beitrag zu diesem Band diverse Möglichkeiten, die Bestreitung einer Negation aufzulösen, die zu verschiedenen Systemen konnexiver Logik führt<sup>34</sup>

Die Grundidee der Inversion aufgrund von Bestreitung ist also, daß die Bestreitung der Bedingungen einer Aussage zur Bestreitung dieser Aussage selbst Anlaß gibt, vorausgesetzt, daß die angegebenen definitorischen Bedingungen einer Aussage erschöpfend sind. Insofern handelt es sich hier wieder um die Interpretation der Extremalklausel einer induktiven Definition: Weil es keine weiteren definitorischen Bedingungen für  $A$  als  $B_1, \dots, B_n$  gibt, reicht die Widerlegung jeder dieser Bedingungen zur Widerlegung von  $A$  aus.

Wie an anderer Stelle erläutert<sup>35</sup>, kann man diesen Ansatz weiter differenzieren, indem man verschiedene Arten von Behauptung und Bestreitung unterscheidet. Man könnte in die induktive Definition Regeln sowohl für die Behauptung als auch für die Bestreitung von  $a$  einführen, d. h. Definitionen der Art

$$\mathbb{D} \left\{ \begin{array}{l} B_1 \rightarrow A \\ \vdots \\ B_n \rightarrow A \\ C_1 \rightarrow \sim A \\ \vdots \\ C_n \rightarrow \sim A \end{array} \right.$$

<sup>33</sup> H. Wansing, »Negation in der konstruktiven Logik«.

<sup>34</sup> Vgl. auch H. Wansing, »Connexive Logic«. Zur philosophischen Diskussion des Negations- und Bestreitungsbegriffs in der beweistheoretischen Semantik vgl. auch L. Tranchini, »The Role of Negation in Proof-Theoretic Semantics«.

<sup>35</sup> P. Schroeder-Heister, »Definitional Reasoning in Proof-Theoretic Semantics and the Square of Opposition«.



betrachten. Auf diese Art hat man Regeln für die Bestreitung von Aussagen zur Verfügung, die noch nicht definitorische Reflexion, d. h. die Interpretation der Extremalklausel, benutzen, sondern einfach die definitorischen Klauseln anwenden:

$$\frac{C_1}{\sim A} \quad \dots \quad \frac{C_n}{\sim A}.$$

Umgekehrt erhält man neuartige Regeln für die Begründung von Aussagen durch definitorische Reflexion, indem man die Bestreitungsklauseln als erschöpfende Charakterisierung der Bestreitung von  $A$  ansieht. Die Motivation ist hier, daß die Widerlegung aller definitorischen Bedingungen für die Bestreitung von  $A$  die Begründung von  $A$  nach sich zieht:

$$\frac{\sim C_1 \dots \sim C_n}{A}.$$

So wie wir vorher per Reflexion von der Widerlegung aller Bedingungen von  $A$  zur Widerlegung von  $A$  gekommen sind, kommen wir jetzt per Reflexion von der Widerlegung aller Bedingungen von  $\sim A$  zur Begründung von  $A$ . Dies ist die Variante des bestreitungsbasierten Umkehrschlusses, die zur Behauptung führt.

Hier ist eine weitere Differenzierung angebracht: Es ist plausibel, explizite Regeln für die Begründung und Widerlegung von  $A$ , wie sie in

$$\mathbb{D} \left( \begin{array}{l} B_1 \rightarrow A \\ \vdots \\ B_n \rightarrow A \\ C_1 \rightarrow \sim A \\ \vdots \\ C_n \rightarrow \sim A \end{array} \right.$$

vorliegen, als Regeln für die *direkte* Begründung und Widerlegung anzusehen, und sie zu unterscheiden von einer *indirekten* Begründung und Widerlegung, die aufgrund definitorischer Reflexion geschieht, d. h. aufgrund der Betrachtung der Definition als Ganzer. Entsprechend kann man vier Urteilsformen unterscheiden: Die direkte Behauptung ( $A$ ), die indirekte Behauptung ( $+A$ ), die direkte Bestreitung ( $\sim A$ ) und die indirekte Bestreitung ( $-A$ ). Klauseln hätten dann immer die Form

$$B \rightarrow A$$

oder

$$B \rightarrow \sim A,$$

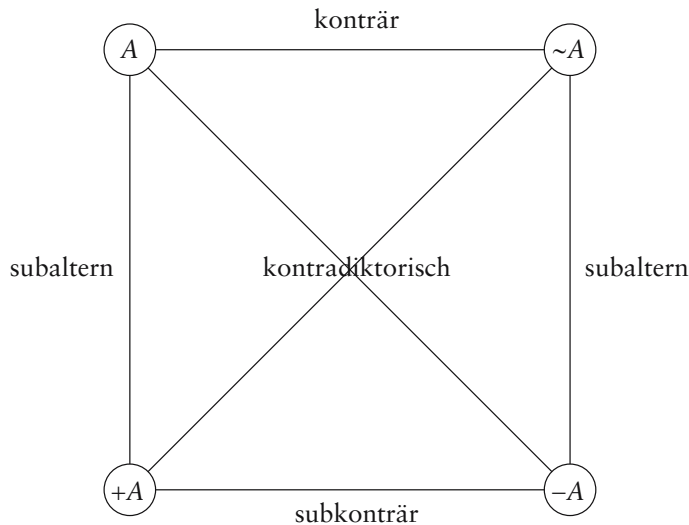
d. h. der Kopf einer Klausel ist immer direkt, während der Rumpf  $B$  alle vier Urteilsformen enthalten kann. Zur indirekten Behauptung oder Bestreitung gelangt man nur

durch definitorische Reflexion, die jetzt durch zwei Regeln repräsentiert wird, je nachdem ob sie zur indirekten Bestreitung oder Behauptung führt:

$$\frac{\widehat{B}_1 \dots \widehat{B}_n}{-A} \quad \frac{\widehat{C}_1 \dots \widehat{C}_n}{+A}$$

Dabei ist  $\widehat{\phantom{x}}$  eine Operation, die eine Bedingung in ihr kontradiktorisches Gegenteil verkehrt, wobei für ein Atom  $A$  sowohl  $A$  und  $-A$  als auch  $\sim A$  und  $+A$  kontradiktorische Gegenteile voneinander sind.<sup>36</sup>

Wenn man diesen Ansatz im einzelnen ausführt und auch berücksichtigt, daß indirekte Behauptungen und Bestreitungen den direkten Varianten untergeordnet sein sollten, dann erhält man nichts geringeres als das logische Quadrat zur Darstellung der deduktiven Beziehungen zwischen den betrachteten vier Urteilsformen.



Die Grundidee, die wir sowohl bei der Annahmenkonzeption als auch bei der Widerlegungskonzeption zur Generierung von Umkehrschlüssen befolgt haben, ist das Begriffspaar *Abschluß* vs. *Reflexion* in bezug auf eine Definition. Einerseits können wir den Abschluß bilden unter den definitorischen Regeln, indem wir diese Regeln einfach anwenden. Andererseits können wir auf die Definition als Ganze reflektieren und uns überlegen, daß gegebene Bedingungen erschöpfend sind und daher zu Umkehrschlüssen – entweder in bezug auf Annahmen, oder in bezug auf Bestreitungen – Anlaß geben.

Wie definitorische Reflexion bezüglich Annahmen mit definitorischer Reflexion bezüglich Bestreitungen interagiert, wäre ein Thema weiterführender Überlegungen.

<sup>36</sup> Da unter  $\widehat{\phantom{x}}$  nicht nur Atome, sondern komplexere Strukturen stehen können, sind hier allerdings weitergehende Festlegungen nötig; vgl. P. Schroeder-Heister, »Definitional Reasoning in Proof-Theoretic Semantics and the Square of Opposition«.

## 4. Duale Begriffe

Im Zusammenhang mit Umkehrschlüssen sollte das Konzept der Dualität nicht unerwähnt bleiben. Die Dualisierung von Begriffen ermöglicht es, die Schlußrichtung umzukehren. Es gehört zum Wesen dualer Begriffe, daß die Konsequenzbeziehung  $A \models B$  in eine Konsequenzbeziehung  $B^* \models A^*$  übergeht, wenn  $*$  die Dualisierung der Begriffe in  $A$  und  $B$  bezeichnet.

Der geläufigste Fall von Dualität ist diejenige in der klassischen Aussagenlogik aufgrund von Wahrheitstafeln. Man erhält dort den zu einem gegebenen Junktordualen Junktordualen, indem man in der Wahrheitstafel *überall* (nicht nur in den Eingangsspalten oder der Ausgangsspalte) die Wahrheitswerte 0 und 1 miteinander vertauscht. Auf diese Weise erhält man aus der Konjunktion ( $\wedge$ ) die Disjunktion ( $\vee$ ) und umgekehrt – der bekannteste Fall –, und auch z. B. aus der Implikation ( $\rightarrow$ ) die Co-Implikation ( $\leftarrow$ ):

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftarrow$
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

Die Negation ist offenbar selbstdual. Das korrespondierende logische Gesetz lautet wie folgt: Für eine junktorenlogische Formel  $A$  sei  $A^*$  ihr Dual, das durch Ersetzung von Junktoren durch ihre dualen Junktoren entsteht.  $A'$  entstehe aus  $A^*$  durch Ersetzung von Literalen durch deren Komplemente (d. h.  $p$  durch  $\neg p$  und  $\neg p$  durch  $p$ ). Sei  $\nu$  diejenige Belegung der Aussagevariablen, die die Werte der Belegung  $\nu$  vertauscht. Dann gilt für den Wahrheitswert  $\llbracket \ ]^\nu$  unter der Belegung  $\nu$ :

$$\llbracket A' \rrbracket^\nu = \llbracket A^* \rrbracket^{\bar{\nu}} = \llbracket \overline{A} \rrbracket^{\bar{\nu}} = \llbracket \neg A \rrbracket^\nu \text{ und damit } A' \models \neg A.$$

Entsprechendes gilt für die Quantorenlogik. Dies ist Dualisierung in einem starken Sinn, die für jede einzelne Belegung gilt und in der intuitionistischen Logik nicht zur Verfügung steht. In letzterer gilt jedoch Dualisierung in dem schwachen Sinne, daß

$$A_1, \dots, A_n \vdash A \quad \text{genau dann, wenn} \quad \neg A_1^*, \dots, \neg A_n^* \vdash \neg A^*.$$

Dies ist ein philosophisch höchst signifikantes Resultat, das häufig übersehen wird, weil man Dualität meist nur in der klassischen Logik erwartet. Es zeigt nämlich, daß mit deduktiven Mitteln alleine die logischen Zeichen nicht eindeutig spezifiziert werden können, sofern man noch nicht weiß, was »wahr« und was »falsch«, bzw. was die Negation bedeutet, da man auch in der intuitionistischen Logik logische Zeichen von den zu ihnen dualen Zeichen inferentiell nicht unterscheiden kann.

Schwache Dualität gehört zur verbandstheoretischen Fassung von Dualität, bei der Dualitätsaussagen durch Vertauschung dualer Operationen sowie von  $\leq$  und  $\geq$  ineinander übergehen. So geht z. B. die Aussage

$$A \wedge B \leq A$$

über in

$$A \vee B \geq A,$$

d. h. in

$$A \leq A \vee B.$$

Die zu einer Operation vorhandene duale Operation bezeichnet man dabei häufig als die entsprechende »Co-« Operation. Konjunktion ist damit die Co-Disjunktion, und die Disjunktion die Co-Konjunktion. Entsprechend verhält es sich mit der Implikation. Definiert man die Implikation als Residuum bezüglich der Konjunktion, für das gilt

$$A \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq B \rightarrow C,$$

dann ergibt sich als dualisierte Aussage für die Co-Implikation  $\leftarrow$ :

$$A \vee B \geq C \Rightarrow A \geq B \leftarrow C,$$

d. h.

$$C \leq A \vee B \Rightarrow B \leftarrow C \leq A.$$

Mithilfe der dualen Begrifflichkeit lassen sich also aus Schlüssen Umkehrschlüsse generieren. Ob dies dann Umkehrschlüsse im Vollsinn sind, kann man natürlich anzweifeln, da es sich eigentlich um die ursprünglichen Schlüsse in anderer Gestalt handelt.<sup>37</sup>

<sup>37</sup> Leider ist die Literatur zur »Co-Implikation« durch eine terminologische Konfusion geprägt. Ich selbst habe als Zeichen für die Co-Implikation das auch hier verwendete Zeichen  $\leftarrow$  vorgeschlagen, das ich bei Bochénski und Menne (siehe M. J. Bocheński/A. Menne, *Grundriß der Logistik*) gefunden habe. Dort wird es im Rahmen einer Diskussion der klassischen aussagenlogischen Junktoren als dual zur Implikation  $\rightarrow$  eingeführt und »Präsektion« genannt. In seiner Darstellung der klassischen Junktorenlogik bezeichnet es Lorenzen (siehe P. Lorenzen, *Formale Logik*) in einer verbandstheoretischen Terminologie als »konverse Subtraktion« und notiert es als » $\leftarrow$ «. Letzteres ist eine präzise Kennzeichnung, die die verbandstheoretische Dualität ausdrückt. Entsprechend der oben beschriebenen verbandstheoretischen Dualität von und/oder und Implikation/Co-Implikation ist für die Co-Implikation die Charakterisierung

$$C \leq A \vee B \Rightarrow B \leftarrow C \leq A$$

maßgeblich. Hier ist offensichtlich  $\leftarrow$  die Umkehrung (Konversion) der Subtraktion  $\dashv$ , für die gilt

$$C \leq A \vee B \Rightarrow C \dashv B \leq A$$

Leider hat aber Rauszer (siehe C. Rauszer, »A Formalization of the Propositional Calculus of H-B Logic«) fehlerhafterweise die Subtraktion als dual zur intuitionistischen Implikation bezeichnet. Maßgebliche Autoren, die zur dualen intuitionistischen Logik und zur Co-Implikation (wie sie die Subtraktion dann teilweise nannten) gearbeitet haben, wie Urbas (siehe I. Urbas, »Dual-

## 5. Co-Zulässigkeit und Co-Inversion

Wir waren ausgegangen von Lorenzens Idee, über den Begriff der Zulässigkeit definitivische Regeln zu invertieren. Was ergibt sich, wenn wir diesen Begriff selbst dualisieren, also versuchen etwas zu definieren, was man »Co-Zulässigkeit« nennen könnte? Das ist nicht eine rein technische Angelegenheit, sondern hat ein gewisses Fundament in Lorenzen's späterer Definitionstheorie, auch wenn diese sehr rudimentär ist. In der gemeinsam mit Kamlah verfaßten *Logischen Propädeutik*<sup>38</sup> wird folgendes Regelsystem angegeben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Terminus} \rightarrow \text{Prädikator} \\ \text{Terminus} \rightarrow \text{explizit\_vereinbart.} \end{array} \right.$$

Daraus gewinnen Kamlah/Lorenzen die umgekehrte Richtung

$$\text{Prädikator, explizit\_vereinbart} \rightarrow \text{Terminus}$$

Intuitionistic Logic«), Goré (siehe R.Goré, »Dual Intuitionistic Logic Revisited«), und Wansing (siehe H.Wansing, »Constructive Negation, Implication, and Co-Implication«; H.Wansing, »Negation in der konstruktiven Logik«) haben sich dieser Terminologie angeschlossen, wobei Goré das Symbol  $-$  als Alternative zur Subtraktion  $\dot{-}$  eingeführt hat (ohne Kenntnis von M.J. Bocheński/A.Menne, *Grundriß der Logistik*). Andere Autoren wie Wolter (siehe F.Wolter, »On Logics with Coimplication«) und Wolski (siehe M.Wolski, »Information Quanta and Approximation Operators: Once More Around the Track«) verwenden den Terminus »Co-Implikation« (unter Benutzung einer anderen Symbolik) in korrekter Weise. Wolter (a. a. O.) scheint dabei der erste zu sein, der den Terminus »Co-Implikation« vorgeschlagen hat. Der Fehler, die Subtraktion als dual zur Implikation anzusehen, mag letztlich in einer verbandstheoretischen Terminologie begründet liegen, in der die Implikation  $A \rightarrow B$  als relatives Pseudokomplement auch in umgekehrter Reihenfolge als  $B \dot{-} A$  notiert wurde, wie Lorenzen (siehe P.Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, 55) anführt. Der dazu duale Junktor ist dann in der Tat die Subtraktion. Genauer gesagt, würde  $A \dot{-} B$  ausdrücken: » $B$  co-impliziert  $A$ «. Wansing (siehe H.Wansing, »Constructive Negation, Implication, and Co-Implication«) hat diese Redeweise sogar als die Lesart von  $A \dot{-} B$  vorgeschlagen, ohne allerdings, was konsequent gewesen wäre, die Notation der Redeweise anzupassen. In den verbandstheoretischen Erörterungen der *Operativen Logik* behandelt Lorenzen die Subtraktion, dort bezeichnet mit  $\dot{-}$ , als dual zur konversen Implikation  $\dot{\rightarrow}$  (siehe P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, 62). Er weist mit Recht darauf hin, daß die Subtraktion in der Mengenlehre eine besondere Signifikanz hat und daß dort z. B. das subtraktive Analogon zur Peirceschen Aussage gilt (das Lorenzen als das »Dual« zur Peirceschen Aussage bezeichnet, weil er die Peircesche Aussage selbst mithilfe der konversen Implikation  $\dot{\rightarrow}$  formuliert). Letztlich geht die Konfusion schon auf Curry (siehe H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*) zurück, der bei der Diskussion der von ihm so genannten »Skolem lattices« sowohl implikative als auch subtraktive Verbände betrachtet (siehe H.B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, 139 ff.). Curry bezeichnet die Subtraktion als dual zur Implikation, verwendet sie de facto aber wie Lorenzen (siehe P.Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*) als dual zur konversen Implikation, indem er die Implikation ausdrücklich umgekehrt notiert: »The operation dual to ply [Implikation, P. S. -H.] will be a kind of subtraction. We use the infix  $\dot{-}$  for it, the argument being written, however, in the order which is customary in algebra, so that  $a \dot{-} b$  is the dual of  $b \supset a$ .« (H.B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, 144).

<sup>38</sup> W. Kamlah/P. Lorenzen, *Logische Propädeutik*, 78.

und somit eine Explizitdefinition des Terminus »Terminus«. Kamlah/Lorenzen sprechen hier von einem »abgeschlossenen« Regelsystem, womit offensichtlich gemeint ist, daß die Regeln in bezug auf »Terminus« erschöpfend sind. D. h., sie haben offensichtlich eine Art von definitorischer Reflexion im Blick, die ihnen eine Regelumkehrung erlaubt.

Die hier vorliegende Situation ist jedoch eine andere als diejenige, die wir bisher betrachtet haben. Jetzt handelt es sich um Regeln mit dem zu definierenden Zeichen (hier »Terminus«) als Prämisse und nicht als Konklusion einer Regel. In diesem Fall werden zwei erschöpfende Möglichkeiten angegeben, aus einer Prämisse etwas herzuleiten. Während bei der Zulässigkeitskonzeption bei mehreren definitorischen Regeln für denselben Regelkopf die definitorischen Bedingungen alternativ zu verstehen waren, sind nun die verschiedenen definitorischen Konsequenzen derselben Regelprämisse konjunktiv zu verstehen: In Lorenzens Beispiel können wir aus »Terminus« sowohl »Prädikator« als auch »explizit vereinbart« gewinnen. Das entspricht unserer Idee, die Zulässigkeitsinterpretation insgesamt zu dualisieren. Dementsprechend wollen wir auch von »Co-Zulässigkeit« sprechen.

Definitorische Regelsysteme erhalten nun eine etwas andere Gestalt als bisher in dem Sinne, daß sie nun Beseitigungsregeln für das zu definierende Atom sind. D. h., eine definitorische Regel für  $A$  hat nun die Form  $A \rightarrow$  oder die Form  $A \rightarrow B$ . Ersteres ist die konklusionslose Regel, die der prämissenfreien Regel  $\rightarrow A$  bei der Zulässigkeitskonzeption entspricht, letzteres ist eine Regel, die es erlaubt, aus  $A$  eine definitorische Konsequenz  $B$  zu generieren, was bei der Zulässigkeitskonzeption der umgekehrten Regel  $B \rightarrow A$  zur Einführung von  $A$  entspricht.

Allerdings sei hier auf einen Unterschied hingewiesen. Bei der Zulässigkeitskonzeption konnte eine Regel mehrere Prämissen haben:  $B_1, \dots, B_n \rightarrow A$ . Entsprechend müßte man bei der dualisierten Konzeption Regeln mit mehreren Konklusionen  $A \rightarrow B_1, \dots, B_n$  einführen, und entsprechend einen dualisierten Beweisbegriff verwenden, der von einzelnen Annahmen ausgeht und sich nach unten zu mehreren Konklusionen verzweigt. So weit soll an dieser Stelle nicht gegangen werden. Der Beweisbegriff soll derselbe sein wie vorher. Grundsätzlich soll es daher auch möglich sein, definitorische Regeln mit mehreren Prämissen zu verwenden. In diesem Falle muß aber festgelegt sein, welche Prämisse als Hauptprämisse fungieren soll, die also das Definiendum darstellt, das eliminiert werden soll. Auf diese Weise ist es möglich, im Rahmen eines »konventionellen« Ableitbarkeitsbegriffes Atome in einer Weise zu definieren, die einer oder-Verknüpfung entspricht (das Lorenzense »Terminus«-Beispiel entspricht der konjunktiven Verknüpfung). Wir können jetzt definieren:

$$\boxed{C}, (A \rightarrow D), (B \rightarrow D) \rightarrow D,$$

wobei die Box das Atom  $C$  als Hauptprämisse der definitorischen Beseitigungsregel ausweist. Wir kommen in diesem Rahmen natürlich nicht umhin, zu erläutern, was die Implikationen im Rumpf dieser Regel bedeuten. Wir müssen sie dann als iterierte Zulässigkeitsaussagen verstehen. Alternativ können wir fordern, daß der Rumpf einer Regel immer aus einem einzigen Atom besteht und die entsprechenden Nebenprämissen in der Konklusion verpacken, die jetzt eine iterierte Implikation sein kann:

$$\{C \rightarrow [(A \rightarrow D, B \rightarrow D) \rightarrow D]\}.$$

Da wir jetzt definitivische Klauseln ohne Konklusion verwenden, betrachten wir entsprechend Beweise, die mit der leeren Formel enden (wir können sie auch mit  $\perp$  notieren, so wie wir geschlossene (annahmenfreie) Beweise als Beweise aus  $\top$  verstehen können.) Wir sprechen auch von *konklusionsfreien* Beweisen. Ein offener Beweis ist dann ein Beweis, der mit einer nichtleeren Formel endet, während ein geschlossener Beweis ein Beweis ist, der mit der leeren Formel endet. Eine Regel ist jetzt *co-zulässig*, wenn ihre Anwendung aus geschlossenen (d.h. konklusionsfreien) Beweisen eliminiert werden kann.

So sind, wenn z. B.

$$\{\boxed{C}, (A \rightarrow D), (B \rightarrow D) \rightarrow D$$

eine erschöpfende definitivische Klausel für  $C$  ist, die Umkehrungen  $A \rightarrow C$  und  $B \rightarrow C$  co-zulässig, was man wie folgt einsieht: Die Regel  $A \rightarrow C$  sei in einem konklusionsfreien Beweis angewendet. Da  $C$  gemäß der Definitionsregel von  $A$  nur als Hauptprämisse einer entsprechenden Beseitigungsregel angewendet sein kann, sieht der konklusionsfreie Beweis, in der die Regel  $A \rightarrow C$  verwendet wird, wie folgt aus:

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{A}{C} A \rightarrow C \end{array} \quad \begin{array}{c} A \rightarrow D \\ B \rightarrow D \\ \vdots \end{array}}{D} .$$

Unter Verwendung der Nebenprämisse können wir direkt von  $A$  zu  $D$  übergehen, also ohne Anwendung von  $A \rightarrow C$  auskommen:

$$\frac{A}{D} A \rightarrow D .$$

Analog verfährt man mit  $B \rightarrow C$ .

Entsprechend würden wir Atome, die gemäß der Co-Zulässigkeitskonzeption definiert sind, durch Minimalitätsbedingungen statt durch Maximalitätsbedingungen charakterisieren. D.h., wenn  $C$  definiert ist durch

$$\begin{cases} C \rightarrow A \\ C \rightarrow B \end{cases}$$

und diese Definition erschöpfend ist, d.h. eine erschöpfende Festlegung der definitivischen Konsequenzen aus  $C$  darstellt, dann soll  $C$  die schwächste Aussage sein, die sowohl  $A$  als auch  $B$  impliziert. Genauer soll  $\{C\}$  die schwächste Aussagenmenge sein, die sowohl  $A$  als auch  $B$  impliziert. Da auf jeden Fall die Aussagenmenge  $\{A, B\}$  sowohl  $A$  als auch  $B$  impliziert, ist  $C$  schwächer als  $\{A, B\}$ , d.h. wir würden die Implikation  $A, B \rightarrow C$  als gültig ansehen. Entsprechend würden wir bei der Definition

$$\{\boxed{C}, (A \rightarrow D), (B \rightarrow D) \rightarrow D$$

$C$  als die schwächste Aussage auffassen, die zusammen mit  $A \rightarrow D$  und  $B \rightarrow D$  die Aussage  $D$  impliziert, woraus sich die Gültigkeit von  $A \rightarrow C$  und  $B \rightarrow C$  ergibt.

Diese Überlegungen bezogen sich nur auf Zulässigkeit und Co-Zulässigkeit. Sie lassen sich auch übertragen auf lokale Begriffe der definatorischen Reflexion sowie auf die Inversion von Negationsbegriffen. Bei letzteren würde man z. B. ein Atom als widerlegt ansehen, wenn man *eine (nicht alle)* ihrer definatorischen Konsequenzen widerlegen kann.

Bei der hier nur angedeuteten Dualisierung von Zulässigkeit und definatorischer Reflexion sind noch viele Probleme zu lösen, vor allem dann, wenn man nicht auch den Beweisbegriff komplett »auf den Kopf stellen« will, d. h. nur einfache Prämissen, aber mehrfache, disjunktiv verstandene Konklusionen zulassen will. Das Hauptproblem ist die erwähnte Behandlung von iterierten Implikationsaussagen, die in Regeln eingehen, die den Sinn von disjunktiv verstandenen Atomen erfassen sollen.

Es sollte aber insgesamt klar geworden sein, daß Definitionen die Grundlage für Inversionen, d. h. Umkehrungen sein können. Schlüsse generieren normalerweise keine Umkehrschlüsse. Definatorische Klauseln generieren jedoch sowohl Schlüsse als auch Umkehrschlüsse: Während die Schlüsse einfach die Anwendung der definatorischen Klauseln sind, erwachsen die zugehörigen Umkehrschlüsse aus der Reflexion auf den erschöpfenden Charakter der Definition, d. h. aus der Überlegung, daß »nichts sonst« als die vorliegenden Klauseln das betrachtete Atom definieren.

## 6. Ausblick: Dialogsemantik

Bei der präsentierten Konzeption konnte man den Eindruck gewinnen, daß wir primäre und sekundäre Schlüsse haben: Primäre Schlüsse, die direkte Anwendungen von definatorischen Klauseln sind, und sekundäre Schlüsse, die man durch Reflexion auf die Definition als Ganzes gewinnt. Bei der in Abschnitt 3 skizzierten Inversion aufgrund von negativer Information waren diese Schlüsse sogar ausdrücklich als »direkt« und »indirekt« gekennzeichnet. Das gilt nicht nur für die Zulässigkeits- und Co-Zulässigkeitskonzeption, sondern auch für die auf definatorischer Reflexion aufbauende und hier präferierte lokale Konzeption (Abschnitt 2). Man kann sich fragen, ob es nicht möglicherweise eine alternative Konzeption gibt, bei der man zwar zu Schlüssen und Umkehrschlüssen kommt, diese aber aus einem einheitlichen Prinzip entspringen, so daß sie zwar wechselseitig Inversionen voneinander sind, aber keine Inferenz als Schluß gegenüber einem Umkehrschluß ausgezeichnet ist.

Ein möglicher Ansatzpunkt für ein solches einheitliches Prinzip liefert die Dialogsemantik. In dieser ebenfalls auf Lorenzen<sup>39</sup> zurückgehenden Konzeption unterscheidet man zwischen Spielebene und Strategieebene. Auf der Spielebene werden Angriffs- und Verteidigungsregeln für logische Zeichen definiert, auf der Strategieebene werden Überlegungen angestellt, ob ein Proponent gegen jeden Opponenten eine Gewinnstrategie hat. Nur auf der Strategieebene würde man unterscheiden zwischen gerechtfertigten Schlüssen und deren gerechtfertigten Umkehrschlüssen, nicht jedoch

<sup>39</sup> P. Lorenzen, »Logik und Agon«; P. Lorenzen/K. Lorenz, *Dialogische Logik*.



auf der Spielebene. Entsprechend erhält man gültige Paare von Schlüssen und Umkehrschlüssen unabhängig voneinander durch Strategieüberlegungen in bezug auf einheitliche Spielregeln. Es werden also nicht Umkehrschlüsse aus Schlüssen gerechtfertigt.

Dieser Ansatz läßt sich auch auf den hier vertretenen definitorischen Rahmen übertragen. Es lassen sich Angriffs- und Verteidigungsregeln für Spiele definieren, die vorgegebene Definitionen zum Gegenstand haben. Ein Angriff auf ein definiertes Atom würde z. B. verteidigt durch Behauptung einer seiner definierenden Bedingungen etc. Wenn man das ausführt, erhält man die hier diskutierten Schlüsse und Umkehrschlüsse aus Strategieüberlegungen für Spiele über induktive Definitionen. Auf diese Weise erhält man beide Arten von Schlüssen aus einer einheitlichen semantischen Basis, die unterhalb der Schlußebene liegt.

Man würde so die philosophische Attraktivität der dialogischen oder spieltheoretischen Semantik fruchtbar machen, wonach die Semantik von Zeichen auf der Spielebene und nicht auf der (der Ebene der Beweise entsprechenden) Strategieebene angesiedelt wird. Inwieweit sich dieser Ansatz als tragfähig erweist und die Nicht-Kompositionalität des Strategiebegriffs nicht selbst wieder ein konzeptionelles Problem darstellt, muß noch untersucht werden.

### *Literatur*

- Aczel, Peter: »An Introduction to Inductive Definitions«, in: J. Barwise (Hg.): *Handbook of Mathematical Logic*, Amsterdam 1977, 739–782.
- Arndt, Michael: *Logical Tomography. Exposing the Structural Constituents of Logic*. Dissertation, Universität Tübingen 2008.
- Bocheński, Joseph M./Menne, Albert: *Grundriß der Logistik*, 2. Auflage. Paderborn 1962.
- de Campos Sanz, Wagner/Piecha, Thomas: »Inversion by Definitional Reflection and the Admissibility of Logical Rules«, in: *Review of Symbolic Logic* 2 (2009), 550–569.
- Curry, Haskell B.: *Foundations of Mathematical Logic*, New York 1963.
- Gentzen, Gerhard: »Untersuchungen über das logische Schließen«, in: *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934/35), 176–210, 405–431.
- Girard, Jean-Yves: »From Foundations to Ludics«, in: *Bulletin of Symbolic Logic* 9 (2003), 131–168.
- Goré, Rajeev: »Dual Intuitionistic Logic Revisited«, in: R. Dyckhoff (Hg.): *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods (Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol. 1847)*, Berlin 2000, 252–267.
- Hallnäs, Lars: »Partial Inductive Definitions«, in: *Theoretical Computer Science* 87 (1991), 115–142.
- Hallnäs, Lars: »On the Proof-Theoretic Foundation of General Definition Theory«, in: *Synthese* 148 (2006), 589–602.

- Hallnäs, Lars/Schroeder-Heister, Peter: »A Proof-Theoretic Approach to Logic Programming: I. Clauses as Rules. II. Programs as Definitions.« in: *Journal of Logic and Computation* 1 (1990/91), 261–283, 635–660.
- Hallnäs, Lars/Schroeder-Heister, Peter: »A Survey of Definitional Reflection« (in preparation).
- Hermes, Hans: »Zum Inversionsprinzip der operativen Logik«, in: A. Heyting (Hg.): *Constructivity in Mathematics*, Amsterdam 1959, 62–68.
- Hertz, Paul: »Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. I. Teil. Sätze ersten Grades. (Über die Axiomensysteme von der kleinsten Satzszahl und den Begriff des idealen Elementes).«, in: *Mathematische Annalen* 87 (1922), 246–269.
- Hertz, Paul: »Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. II. Teil. Sätze höheren Grades.« in: *Mathematische Annalen* 89 (1923), 76–100.
- Hertz, Paul: »Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme«, in: *Mathematische Annalen* 101 (1929), 457–514.
- Kamlah, Wilhelm/Lorenzen, Paul: *Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens*, Mannheim 1967, 2. Aufl. 1973.
- Lenk, Hans: *Kritik der logischen Konstanten. Philosophische Begründungen der Urteilsformen vom Idealismus bis zur Gegenwart*, Berlin 1968.
- Lloyd, John W.: *Foundations of Logic Programming*, Berlin 1984, 2. Aufl. 1987.
- Lorenzen, Paul: »Konstruktive Begründung der Mathematik«, in: *Mathematische Zeitschrift* 53 (1950), 162–202.
- Lorenzen, Paul: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin 1955, 2. Aufl. 1969.
- Lorenzen, Paul: »Logik und Agon«, in: *Atti del XII Congresso Internazionale di Filosofia (Venezia, 1958)*, Firenze 1960, 187–194.
- Lorenzen, Paul: *Formale Logik* (4. Auflage), Berlin 1970.
- Lorenzen, Paul/Lorenz, Kuno: *Dialogische Logik*, Darmstadt 1978.
- Moriconi, Enrico/Tesconi, Laura: »On Inversion Principles«, in: *History and Philosophy of Logic* 29 (2008), 103–113.
- Popper, Karl R.: »On the Sources of Knowledge and of Ignorance«, in: *Conjectures and Refutations: The Growth of Scientific Knowledge*, London 1963, 3–30.
- Post, Emil L.: »Introduction to a General Theory of Elementary Propositions«, in: *American Journal of Mathematics* 43 (1921), 163–185.
- Post, Emil L.: »Formal Reductions of the General Combinatorial Decision Problem«, in: *American Journal of Mathematics* 65 (1943), 197–215.
- Prawitz, Dag: *Natural Deduction. A Proof-Theoretical Study*, Stockholm 1965 (wiederabgedruckt: Mineola NY, 2006).
- Rauszer, Cecylia: »A Formalization of the Propositional Calculus of H-B Logic«, in: *Studia Logica* 33 (1974), 23–34.
- Schroeder-Heister, Peter: *Untersuchungen zur regellogischen Deutung von Aussagenverknüpfungen*. Dissertation, Universität Bonn 1981.
- Schroeder-Heister, Peter: »A Natural Extension of Natural Deduction«, in: *Journal of Symbolic Logic* 49 (1984), 1284–1300.

- Schroeder-Heister, Peter: »Uniform Proof-Theoretic Semantics for Logical Constants (Abstract)«, in: *Journal of Symbolic Logic* 56 (1991), 1142.
- Schroeder-Heister, Peter: »Rules of Definitional Reflection«, in: *Proceedings of the 8th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (Montreal 1993)*, Los Alamitos 1993, 222–232.
- Schroeder-Heister, Peter: »Resolution and the Origins of Structural Reasoning: Early Proof-Theoretic Ideas of Hertz and Gentzen«, in: *Bulletin of Symbolic Logic* 8 (2002), 246–265.
- Schroeder-Heister, Peter: »Begründungsrationalität und Logik«, in: G. Wolters/M. Carrier (Hgg.): *Homo Sapiens und Homo Faber: Epistemische und technische Rationalität in Antike und Gegenwart*. Festschrift für Jürgen Mittelstraß, Berlin 2005, 285–296.
- Schroeder-Heister, Peter: »Generalized Definitional Reflection and the Inversion Principle«, in: *Logica Universalis* 1 (2007), 355–376.
- Schroeder-Heister, Peter: »Lorenzens operative Logik und moderne beweistheoretische Semantik«, in: J. Mittelstraß (Hg.): *Der Konstruktivismus in der Philosophie im Ausgang von Wilhelm Kamlah und Paul Lorenzen*, Paderborn 2007, 167–196.
- Schroeder-Heister, Peter: »Lorenzen's Operative Justification of Intuitionistic Logic«, in: M. van Atten et al. (Hgg.): *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007)*. The Cerisy Conference, Basel 2008, 214–240 [Literaturangaben für gesamten Band: 391–416].
- Schroeder-Heister, Peter: »Proof-Theoretic versus Model-Theoretic Consequence«, in: M. Peliš (Hg.): *The Logica Yearbook 2007*, Prag 2008, 187–200.
- Schroeder-Heister, Peter: »The Categorical and the Hypothetical: A Critique of Certain Fundamental Assumptions of Standard Semantics«, in: S. Lindström/E. Palmgren/D. Westerståhl (Hgg.): *Philosophy of Logical Consequence and Inference* (Sonderheft von *Synthese*), 2011.
- Schroeder-Heister, Peter: »Definitional Reasoning in Proof-Theoretic Semantics and the Square of Opposition«, in: J.-Y. Béziau/G. Payette (Hgg.): *New Perspectives on the Square of Opposition*, Bern 2011.
- Schroeder-Heister, Peter: »Sequent Calculi and Bidirectional Natural Deduction: On the Proper Basis of Proof-Theoretic Semantics«, in: M. Peliš (Hg.): *The Logica Yearbook 2008*, London 2009, 237–251.
- Schroeder-Heister, Peter: »Proof-Theoretic Semantics«, in: E. Zalta (Hg.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (plato.stanford.edu) 2011.
- Schroeder-Heister, Peter/Contu, Patrizio: »Folgerung«, in: W. Spohn/P. Schroeder-Heister/E. J. Olsson (Hgg.): *Logik in der Philosophie*, Heidelberg 2005, 247–276.
- Stegmüller, Wolfgang: »Rezension von: P. Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin 1955«, in: *Philosophische Rundschau* 6 (1958), 161–182.
- Tranchini, Luca: »The Role of Negation in Proof-Theoretic Semantics: A Proposal«, in: M. Peliš (Hg.): *The Logica Yearbook 2008*, London 2009, 265–279.
- Urbas, Igor: »Dual-Intuitionistic Logic«, in: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 37 (1996), 440–451.

- Wansing, Heinrich: »Connexive Logic«, in: E. Zalta (Hg.): *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2006 Edition), Stanford (URL: <http://plato.stanford.edu>), 2006.
- Wansing, Heinrich: »Constructive Negation, Implication, and Co-Implication«, in: *Journal of Applied Non-Classical Logics* 18 (2008), 341–364.
- Wansing, Heinrich: »Negation in der konstruktiven Logik«, in: C.F. Gethmann (Hg.): XXI. *Deutscher Kongreß für Philosophie*, Hamburg 2011 (dieser Band).
- Wolski, Marcin: »Information Quanta and Approximation Operators: Once More Around the Track«, in: J.F. Peters/A.Skowron (Hgg.): *Transactions on Rough Sets VIII* (Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 5084), Berlin 2008, 237–250
- Wolter, Frank: »On Logics with Coimplication«, in: *Journal of Philosophical Logic* 27 (1998), 353–387.