Über elektromagnetische Längskräfte in stromdurchflossenen Leitern

4.5.2024

Tilmann Schneider

Rüdesheimer Str. 58, D-53175 Bonn

E-mail: admin@relativistische-asynchronmaschine.de

Abstract. In this paper a special case in magnetostatics is presented to show a contradiction in Maxwell's equations. This necessarily leads to their generalisation and consequently results in quantitative predictions of a longitudinal force. This force additionally appears to already known forces (electric and magnetic force) and depends on magnetic vector potential. It can lead to mechanical deformations of current-carrying conductors which can be tested in experiments. If this proof is successful it will be an evidence for the fact that the vector potential is a real measurable physical variable in classical electrodynamics.

Zusammenfassung. In dieser Arbeit wird an einem besonderen Beispiel der Magnetostatik ein Widerspruch in den Maxwellgleichungen aufgezeigt. Dies führt notwendigerweise zu deren Verallgemeinerung. Als Konsequenz ergeben sich quantitative Vorhersagen zu einer Längskraft, die zusätzlich zu den bereits bekannten Kräften (der elektrischen und magnetischen Kraft) auftritt und vom Vektorpotential abhängt. Sie kann zu mechanischen Verformungen an stromdurchflossenen Leitern führen, die sich experimentell überprüfen lassen. Sollte dieser Nachweis gelingen, wäre dies ein Beweis dafür, dass das Vektorpotential eine reale, messbare physikalische Größe in der klassischen Elektrodynamik ist.

PACS numbers: 41.20.-q

1. Die Kraft im radial durchströmten, dickwandigen Hohlzylinder

1.1. Das Magnetfeld im Leiterinneren

Betrachtet wird ein elektrischer Leiter in Form eines dickwandigen Hohlzylinders, der in radialer Richtung von einem Strom durchflossen wird. Die Mantelflächen bei $r = r_1$ und $r = r_2$ seien ideal leitend und bilden somit Äquipotentialflächen. Angelegt werde eine Gleichspannung U. Es soll das Magnetfeld $\vec{B}$ bestimmt werden.

Ausgehend von der Laplace-Gleichung

$$\Delta V = 0 \tag{1.1}$$

erhält man das elektrische Potential

$$V(r) = -U \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \tag{1.2}$$

Mit der elektrischen Leitfähigkeit κ ergibt sich dann für die Stromdichte

$$i_r(r) = \kappa E_r = -\kappa \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\kappa U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r}. \tag{1.3}$$

Sie erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{i} = 0. \tag{1.4}$$

Zur Berechnung des Magnetfeldes wird die folgende Gleichung des Vektorpotentials benutzt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{i}. \tag{1.5}$$

An dieser Gleichung ist zu sehen, dass das Vektorpotential parallel zur Stromdichte liegt. Da hier die Stromdichte nur eine radiale Komponente hat, kann das Vektorpotential ebenfalls nur eine radiale Komponente haben. Aufgrund der Rotationssymmetrie einerseits und der axialen Translationssymmetrie andererseits kann diese Radialkomponente nur vom Radius abhängen. Daher muss die Lösung für das Vektorpotential die Form

$$\vec{A} = A_r(r) \vec{e}_r \tag{1.6}$$

haben. Dieses Feld ist wirbelfrei und für das Magnetfeld gilt daher

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = 0. \tag{1.7}$$

Obwohl der Leiter von einem Strom durchflossen wird, entsteht in ihm kein Magnetfeld. Das steht im Widerspruch zum Durchflutungsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{i}, \tag{1.8}$$

(ein anderer Weg ohne Vektorpotential zu einem Widerspruch ist im Anhang 4.7 beschrieben). Die Gültigkeit des Durchflutungsgesetzes ist aber durch viele andere experimentelle Erfahrungen belegt. Es stellt sich daher die Frage, ob die zur Laplace-Gleichung (1.1) analogen Poisson-Gleichungen

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{i}. \tag{1.9}$$

auf eine Weise hergeleitet werden können, die das Vorhandensein eines Magnetfeldes nicht zwingend voraussetzt.

1.2. Erweiterung der Maxwellgleichungen

In einer anderen Arbeit [3] hat der Verfasser Verallgemeinerungen der Maxwellgleichungen vorgeschlagen, die von der Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}} = -q\,\mathrm{grad}V \tag{1.10}$$

ausgehen. Sie lauten

$$S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta, \tag{1.11a}$$

$$\partial_\alpha S^{\alpha\beta} = \mu_0 i^\beta. \tag{1.11b}$$

Im Anhang 4.1 und 4.2 wird gezeigt, dass diese Gleichungen jeweils als Lösung eines Variationsproblems aufgefasst werden können. In beiden Gleichungen sind die Maxwellgleichungen

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \tag{1.12a}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 i_{\mathrm{F}}^\beta \tag{1.12b}$$

als Spezialfälle enthalten. $F_{\alpha\beta}$ ist das elektromagnetische Feld

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\vec{E}}{c} \\ -\frac{\vec{E}}{c} & -\mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Die Gleichungen können dazu wie folgt umgeformt werden:

$$S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + \partial_\beta A_\alpha = F_{\alpha\beta} + \partial_\beta A_\alpha, \tag{1.14a}$$

$$\partial_\alpha S^{\alpha\beta} = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha = \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial^\beta \partial_\alpha A^\alpha = \mu_0 i^\beta. \tag{1.14b}$$

Die Summe $\partial_\alpha A^\alpha$ des zweiten Terms in der zweiten Gleichung muss dabei nicht unbedingt verschwinden (wie bei der Lorenz-Eichung). Das Tensorfeld $S_{\alpha\beta}$ lässt sich in Matrizenform wie folgt darstellen:

$$(S_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{V}{c}) & -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \nabla(\frac{V}{c}) & -\nabla \otimes \vec{A} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

wobei das Zeichen $\otimes$ das dyadische Produkt zweier Vektoren bezeichnet. Gleichung (1.11b) lautet dann

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{V}{c}) & \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ -\nabla(\frac{V}{c}) & -\nabla \otimes \vec{A} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \rho_0 c & \vec{i} \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Für den hier betrachteten magnetostatischen Fall mit zeitlich konstanten Potentialen und nicht vorhandener Raumladung ρ_0 ergibt sich

$$\nabla\left(-\nabla\left(\frac{V}{c}\right)\right) = -\Delta\left(\frac{V}{c}\right) = 0 \tag{1.17a}$$

$$\nabla(-\nabla \otimes \vec{A}) = -\Delta\vec{A} = \mu_0\vec{i}. \tag{1.17b}$$

Zwischen dem Magnetfeld $\mathbf{B}$ und dem Feld

$$\mathbf{S} = \nabla \otimes \vec{A} \tag{1.18}$$

besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} - \mathbf{S}^T. \tag{1.19}$$

Das Feld **S** enthält im Unterschied zum Magnetfeld **B** i. a. nicht verschwindende Hauptdiagonal-Komponenten. Während im vorliegenden Fall alle Komponenten des Magnetfeldes verschwinden, sind beim Feld **S** noch Hauptdiagonal-Komponenten vorhanden. In Zylinderkoordinaten hat das Feld mit (1.6) die Gestalt

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{\partial A_r}{r\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r} & \frac{\partial A_\varphi}{r\partial\varphi} + \frac{A_r}{r} & \frac{\partial A_z}{r\partial\varphi} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} & \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Die Laplace-Gleichung (1.1) und die Poisson-Gleichungen (1.9) sind auch bei verschwindendem Magnetfeld gültig.

1.3. Berechnung des Vektorpotentials

Zur Berechnung des Vektorpotentials werden die Poisson-Gleichungen (1.9) in Zylinderkoordinaten angegeben [2]:

$$\Delta A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{A_r}{r^2} = -\mu_0 i_r, \tag{1.21a}$$

$$\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2} = -\mu_0 i_\varphi, \tag{1.21b}$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 i_z. \tag{1.21c}$$

Δ ist der Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.22}$$

Da wegen (1.6) die φ- und z-Komponente entfallen, bleibt nur der Radialteil übrig:

$$\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} = -\mu_0 i_r. \tag{1.23}$$

Für $A_r(r)$ in der Wand des Hohlzylinders ($r_1 \leq r \leq r_2$) folgt daraus die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} = -\mu_0 \frac{\kappa U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}. \tag{1.24}$$

Für die Gebiete innerhalb und außerhalb des Hohlzylinders gilt:

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{A_r}{r^2} = 0. \tag{1.25}$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$B_0 = \mu_0 \frac{\kappa U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}, \tag{1.26a}$$

$$x = \frac{r}{r_1}, \tag{1.26b}$$

$$y(x) = \frac{A_r(r)}{B_0 r_1}. \tag{1.26c}$$

Das führt zur folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \text{ (Gebiet I)}, \\ -\frac{1}{x} & 1 \leq x \leq x_2 \text{ (Gebiet II)}, \\ 0 & x > x_2 \text{ (Gebiet III)}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist im Anhang 4.3 gezeigt. Für das Vektorpotential erhält man

$$A_r(r) = \begin{cases} -\frac{c_{1\mathrm{I}}}{2}B_0\frac{{r_1}^2}{r} + c_{2\mathrm{I}}B_0 r & 0 < r < r_1, \\ -\frac{c_{1\mathrm{II}}}{2}B_0\frac{{r_1}^2}{r} + c_{2\mathrm{II}}B_0 r - \frac{B_0}{2}r\ln\frac{r}{r_1} & r_1 \leq r \leq r_2, \\ -\frac{c_{1\mathrm{III}}}{2}B_0\frac{{r_1}^2}{r} + c_{2\mathrm{III}}B_0 r & r > r_2. \end{cases} \tag{1.28}$$

Um Singularitäten im Ursprung und im Unendlichen zu vermeiden, werden die Integrationskonstanten $c_{1\mathrm{I}}$ und $c_{2\mathrm{III}}$ zu Null gesetzt. Für die Bestimmung der übrigen vier Integrationskonstanten werden vier Grenzbedingungen benötigt. Diese ergeben sich aus der Forderung, dass die Komponenten des Feldes $\mathbf{S}$ bei r_1 und r_2 stetig sein sollen, d.h.

$$A_{\mathrm{I}r}(r_1) = A_{\mathrm{II}r}(r_1), \tag{1.29a}$$

$$A'_{\mathrm{I}r}(r_1) = A'_{\mathrm{II}r}(r_1), \tag{1.29b}$$

$$A_{\mathrm{II}r}(r_2) = A_{\mathrm{III}r}(r_2), \tag{1.29c}$$

$$A'_{\mathrm{II}r}(r_2) = A'_{\mathrm{III}r}(r_2). \tag{1.29d}$$

Die Ableitung des Vektorpotentials lautet

$$A'_r(r) = \begin{cases} c_{2\mathrm{I}}B_0 & 0 \leq r < r_1, \\ \frac{c_{1\mathrm{II}}}{2}B_0\frac{{r_1}^2}{r^2} + c_{2\mathrm{II}}B_0 - \frac{B_0}{2}(1 + \ln\frac{r}{r_1}) & r_1 \leq r \leq r_2, \\ \frac{c_{1\mathrm{III}}}{2}B_0\frac{{r_1}^2}{r^2} & r > r_2. \end{cases} \tag{1.30}$$

Nach Einsetzen der übrigen Integrationskonstanten ergibt sich schließlich für das Vektorpotential

$$A_r(r) = \begin{cases} \frac{B_0}{2}(\ln\frac{r_2}{r_1})r & 0 \leq r < r_1, \\ \frac{B_0}{4}r_1(\frac{r}{r_1} - \frac{r_1}{r}) + \frac{B_0}{2}(\ln\frac{r_2}{r})r & r_1 \leq r \leq r_2, \\ \frac{B_0}{4}\frac{{r_2}^2 - {r_1}^2}{r} & r > r_2. \end{cases} \tag{1.31}$$

Wie zu sehen ist, erzeugt die Stromdichte hier kein Magnetfeld, sondern entsprechend (1.14*b*) nur ein Vektorpotential mit nicht verschwindender Divergenz.

Hier wurde das Vektorpotential direkt aus den drei Poisson-Gleichungen (1.9) berechnet. Alternativ dazu kann die Berechnung auch mit einer anderen Gleichung erfolgen, indem man die Bedingung $\vec{B} = 0$ und das berechnete Potential (1.2) nutzt, siehe Anhang 4.4.

1.4. Berechnung der Kräfte

Mit (1.11a) und (1.14a) gilt für die Kraft auf eine bewegliche Probeladung

$$K_\alpha = q\partial_\alpha A_\beta u^\beta = qS_{\alpha\beta}u^\beta = qF_{\alpha\beta}u^\beta + qu^\beta\partial_\beta A_\alpha. \tag{1.32}$$

Für ein Ladungselement dq in einem Leiter gilt entsprechend

$$\mathrm{d}K_\alpha = \mathrm{d}qF_{\alpha\beta}u^\beta + \mathrm{d}qu^\beta\partial_\beta A_\alpha = \rho\mathrm{d}VF_{\alpha\beta}u^\beta + \rho\mathrm{d}Vu^\beta\partial_\beta A_\alpha. \tag{1.33}$$

Mit der Kraftdichte

$$k_\alpha = \frac{\mathrm{d}K_\alpha}{\mathrm{d}V} \tag{1.34}$$

gilt dann

$$k_\alpha = \rho F_{\alpha\beta}u^\beta + \rho u^\beta\partial_\beta A_\alpha = F_{\alpha\beta}i^\beta + i^\beta\partial_\beta A_\alpha. \tag{1.35}$$

Für den räumlichen Anteil gilt dann in Vektorschreibweise

$$\vec{k} = \rho\vec{E} + \vec{i}\times\vec{B} + (\vec{i}\nabla)\vec{A} = \rho\vec{E} + \vec{k}_\mathrm{q} + \vec{k}_\mathrm{l}. \tag{1.36}$$

Der erste Anteil ist Ursache für die elektrische Verlustleistungsdichte, die zur Erwärmung des Leiters führt.

$\vec{k}_\mathrm{q}$ ist die Lorentzkraftdichte, die quer zur Stromflussrichtung wirkt. Sie kann auf eine Divergenz des Maxwellschen Spannungstensors zurückgeführt werden. Mit Hilfe der Beziehung

$$\nabla(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a}) + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\nabla)\vec{b} \tag{1.37}$$

bildet man aus dem Gradienten der magnetischen Feldenergiedichte

$$\nabla(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}) = \frac{1}{2\mu_0}\nabla(\vec{B}\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0}[\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}) + (\vec{B}\nabla)\vec{B}]. \tag{1.38}$$

Im ersten Term kann das Durchflutungsgesetz (1.8) eingesetzt werden. Der zweite wird mit der Beziehung

$$\nabla(\vec{a}\otimes\vec{b}) = (\vec{a}\,\nabla)\vec{b} + \vec{b}(\nabla\vec{a}) \tag{1.39}$$

weiter umgeformt. Dann ergibt sich

$$\nabla(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}) = \vec{B}\times\vec{i} + \frac{1}{\mu_0}[\nabla(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\vec{B})]. \tag{1.40}$$

Der letzte Term verschwindet wegen der Quellenfreiheit des Magnetfeldes. Die Gleichung wird nun umgestellt:

$$\vec{k}_\mathrm{q} = \frac{1}{\mu_0}\nabla(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \nabla(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}). \tag{1.41}$$

Am zweiten Term rechts ändert sich nichts, wenn man ihn mit der Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ multipliziert:

$$\vec{k}_\mathrm{q} = \frac{1}{\mu_0}\nabla(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \nabla(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0})\mathbf{I} = \frac{1}{\mu_0}\nabla(\vec{B}\otimes\vec{B} - \frac{\vec{B}^2}{2}\mathbf{I}). \tag{1.42}$$

Mit dem Maxwellschen Spannungstensor des magnetisches Feldes

$$\mathbf{T}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{\vec{B}^2}{2}\mathbf{I}) \tag{1.43}$$

ergibt sich

$$\vec{k}_{\mathrm{q}} = \nabla \mathbf{T}_{\mathrm{B}}. \tag{1.44}$$

Die Lorentzkraftdichte verschwindet im hier vorliegenden Fall.

Für die in Stromflussrichtung wirkende Kraftdichte $\vec{k}_{\mathrm{l}}$ kann mit (1.39) ein entsprechender Ausdruck hergeleitet werden:

$$\vec{k}_{\mathrm{l}} = (\vec{i}\,\nabla)\vec{A} = \nabla(\vec{i} \otimes \vec{A}) - \vec{A}(\nabla\vec{i}). \tag{1.45}$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (1.4) verschwindet der letzte Term und es wird

$$\vec{k}_{\mathrm{l}} = \nabla \mathbf{T}_{\mathrm{A}} \tag{1.46}$$

mit dem Spannungstensor

$$\mathbf{T}_{\mathrm{A}} = \vec{i} \otimes \vec{A}. \tag{1.47}$$

Da Stromdichte und Vektorpotential parallel zueinander liegen, kann die Stromdichte mit einer geeignet gewählten, skalaren Funktion λ geschrieben werden als

$$\vec{i} = \lambda \vec{A}. \tag{1.48}$$

Der Tensor

$$\boxed{\mathbf{T}_{\mathrm{A}} = \lambda \vec{A} \otimes \vec{A}} \tag{1.49}$$

ist also symmetrisch. Im Anhang 4.5 wird gezeigt, dass alle Nichtdiagonalkomponenten verschwinden.

Neben den bekannten elektromagnetischen Kräften tritt zusätzlich eine Kraft in Stromflussrichtung in Erscheinung, die nur vom Vektorpotential abhängt. Das Vektorpotential muss daher in der klassischen Feldtheorie als reale, messbare physikalische Größe angesehen werden.

Der Tensor $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}$ für den hier vorliegenden Fall lautet

$$\mathbf{T}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

mit der radialen mechanischen Hauptspannung

$$\sigma_r = \frac{\mathrm{d}K_r}{\mathrm{d}F} = i_r A_r. \tag{1.51}$$

Für die Kraftdichte folgt mit der Divergenz eines symmetrischen Tensors in Zylinderkoordinaten (siehe Anhang 4.6):

$$k_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) - \frac{\sigma_\varphi}{r}. \tag{1.52}$$

Daraus ergibt sich mit $\sigma_\varphi = 0$ für die Kraftdichte am Innen- und Außenrand des Hohlzylinders

$$k_r = \begin{cases} \dfrac{{B_0}^2}{2\mu_0 r_1}\ln\dfrac{r_2}{r_1} & r = r_1, \\ -\dfrac{{B_0}^2}{4\mu_0 r_2}(1 - \dfrac{{r_1}^2}{{r_2}^2}) & r = r_2. \end{cases} \tag{1.53}$$

Das bedeutet, dass die Wand des Hohlzylinders zusammengepresst wird. Die Polarität der Gleichspannung spielt dabei keine Rolle, da sie quadratisch in die Kraftdichte eingeht.

Im folgenden Abschnitt wird ein Experiment vorgeschlagen, mit dem sich die radiale Kraftdichte nachweisen ließe.

1.5. Verformung der Oberfläche einer elektrisch leitenden Flüssigkeit in einem Zylinderkondensator

Ein Gefäß in Form eines Zylinderkondensators ist bis zur Höhe h mit einer elektrisch leitenden Flüssigkeit der Dichte ϱ und der Leitfähigkeit κ (z. B. Quecksilber) gefüllt. Der Kondensator wird an eine Gleichspannung U gelegt. Für das Kraftdichte-Gleichgewicht an der Oberfläche gilt dann:

$$\varrho g \sin\alpha = k_r(r)\cos\alpha. \tag{1.54}$$

Der Winkel α ist ein Maß für die Steigung der Oberfläche in radialer Richtung. Für die Kraftdichte in der Flüssigkeit bei Stromfluss folgt aus (1.52):

$$\begin{aligned} k_r(r) &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\frac{\kappa U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\frac{1}{r}\{\frac{B_0}{4}(r - \frac{{r_1}^2}{r}) + \frac{B_0}{2}r\ln\frac{r_2}{r}\}] \\ &= \frac{{B_0}^2}{2\mu_0 r}(\frac{{r_1}^2}{2r^2} + \ln\frac{r_2}{r} - \frac{1}{2}), \end{aligned} \tag{1.55}$$

mit (1.26a)

$$B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi h}\frac{2\pi h\kappa}{\ln\frac{r_2}{r_1}}U = \frac{\mu_0}{2\pi h}I. \tag{1.56}$$

Bestimmung des Oberflächenprofils z aus (1.54):

$$\tan\alpha = z' = \frac{k_r(r)}{\varrho g}. \tag{1.57}$$

Integration ergibt:

$$\begin{aligned} z(r) &= \frac{1}{\varrho g}\int k_r(r)\mathrm{d}r \\ &= -\frac{{B_0}^2}{4\mu_0\varrho g}(\frac{{x_1}^2}{2x^2} + \ln^2 x + \ln x + C), \end{aligned} \tag{1.58}$$

mit $x = \frac{r}{r_2}$ und $x_1 = \frac{r_1}{r_2}$. Wählt man für $x_2 = 1$ $z(x_2) = 0$ d.h.

$$C = -\frac{{x_1}^2}{2} \tag{1.59}$$

und setzt

$$z_0 = \frac{{B_0}^2}{4\mu_0 \varrho g} = \frac{\mu_0}{\varrho g}(\frac{I}{4\pi h})^2, \tag{1.60}$$

so gilt

$$z(x) = -z_0(\frac{{x_1}^2}{2x^2} + \ln^2 x + \ln x - \frac{{x_1}^2}{2}). \tag{1.61}$$

Für die spezielle Wahl $x_1 = \frac{1}{4}$ ergibt sich in normierter Darstellung

$$\frac{z(x)}{z_0} = -\frac{1}{32x^2} - \ln^2 x - \ln x + \frac{1}{32}. \tag{1.62}$$

Dieser Graph ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

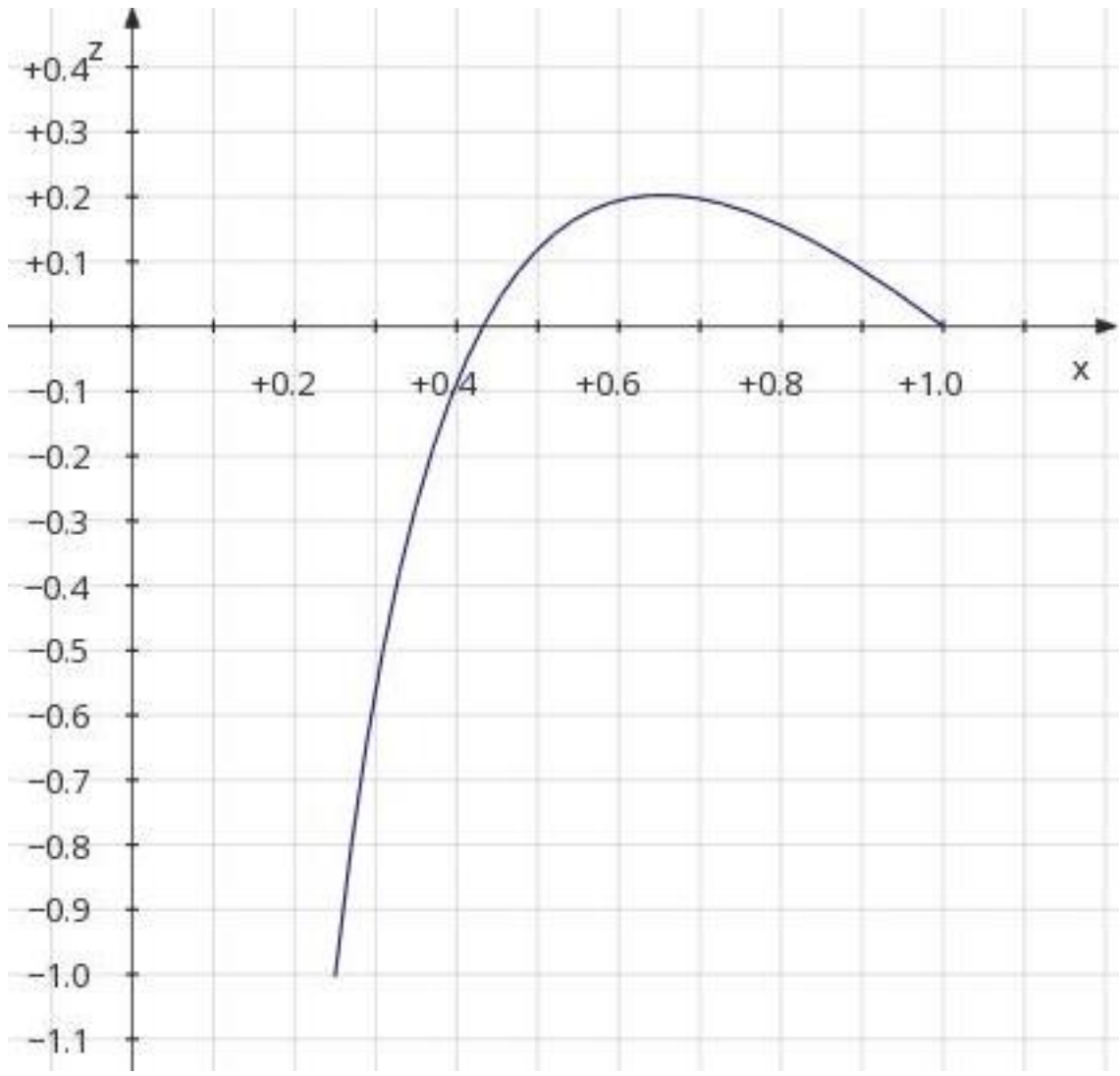

Abbildung 1. Oberflächenprofil für $x_1 = \frac{1}{4}$

Die Flüssigkeit wölbt sich zu einem Maximum auf und fällt zum inneren und äußeren Rand hin ab. Die Absenkung am inneren Rand ist stärker, da dort die Stromdichte größer ist.

1.6. Berechnung der Induktivität

In der eben besprochenen Versuchsanordnung sollte auch eine Induktivität vorhanden sein, obwohl kein Magnetfeld vorhanden ist. Es gilt

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{1.63}$$

und wegen (1.7)

$$\vec{A} = -\text{grad}P. \tag{1.64}$$

Mit (4.45) aus Anhang 4.4 gilt dann

$$V_{\text{ind}} = -\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{1.65}$$

Also ist

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= V_{\text{ind}}(r_1) - V_{\text{ind}}(r_2) = -\frac{\partial}{\partial t}[P(r_1) - P(r_2)] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_1}^{r_2} A_r(r)\mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Für langsam veränderliche Felder wird angenommen, dass (1.31) näherungsweise gültig bleibt. Dann ergibt sich mit (1.56) nach Integration

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mu_0}{8\pi h}({r_2}^2 - {r_1}^2 - {r_1}^2 \ln\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2})\frac{\partial I}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t}, \tag{1.67}$$

also für die Induktivität

$$L = \frac{\mu_0}{8\pi h}({r_2}^2 - {r_1}^2 - {r_1}^2 \ln\frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}). \tag{1.68}$$

2. Die Kräfte in einem Draht mit Kreisquerschnitt

Ein Draht mit Kreisquerschnitt werde von einem Gleichstrom I durchflossen. Dann gilt für die Stromdichte

$$i_z = \frac{I}{\pi R^2}. \tag{2.1}$$

Die Poisson-Gleichung lautet dann

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu_0 i_z, \tag{2.2}$$

da A_z wegen der Rotationssymmetrie nur vom Radius abhängt. Für das Leiterinnere erhält man

$$A_z = -\mu_0 \frac{r^2}{4} i_z. \tag{2.3}$$

Daraus ergibt sich für die magnetische Feldstärke

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}. \tag{2.4}$$

Die Lorentzkraftdichte ist dann

$$k_r = -\frac{\mu_0}{2}(\frac{I}{\pi R^2})^2 r, \tag{2.5}$$

d. h. der Draht wird radialer Richtung zusammengequetscht (Pinch-Effekt).

Zusätzlich tritt aber auch eine Kraft entlang des Drahtes auf, die aus zwei Anteilen besteht. Der Tensor

$$\mathbf{T}_{\mathrm{B}} = \frac{{B_\varphi}^2}{2\mu_0} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

liefert die axiale Hauptspannung

$$\sigma_{\mathrm{B}z} = -\frac{\mu_0}{2}(\frac{I}{2\pi R})^2(\frac{r}{R})^2. \tag{2.7}$$

Nach Integration über den Kreisquerschnitt ergibt sich der Kraftanteil

$$K_{\mathrm{B}z} = -\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}. \tag{2.8}$$

Der zweite Anteil wird durch das Vektorpotential selbst erzeugt. Mit dem Tensor

$$\mathbf{T}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_z A_z \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ergibt sich die Hauptspannung

$$\sigma_{\mathrm{A}z} = -\mu_0(\frac{I}{2\pi R})^2(\frac{r}{R})^2 \tag{2.10}$$

und die Kraft

$$K_{\mathrm{A}z} = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi}. \tag{2.11}$$

Die gesamte axiale Kraft ist dann

$$K_z = -\frac{3\mu_0 I^2}{16\pi}. \tag{2.12}$$

Diese Kraft drückt den Draht in Längsrichtung zusammen. Für einen Strom $I = 10\,\mathrm{kA}$ ergibt sich eine Druckkraft $K_z = 7,5\,\mathrm{N}$. Kräfte dieser Art können zur Verformung von Stromschienen führen. Solche Erscheinungen wurden bei der Erforschung und Entwicklung sogenannter Railguns beobachtet [1].

3. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden zwei besondere magnetostatische Fälle behandelt, die folgende Ergebnisse gebracht haben:

- Am Beispiel eines radial durchströmten Hohlzylinders wurde ein Widerspruch in den Maxwellgleichungen aufgezeigt.
- Dieser Widerspruch gibt Anlass zu einer Verallgemeinerung der Maxwellgleichungen.
- Diese Erweiterung führt zu der Erkenntnis, dass das Vektorpotential der klassischen Elektrodynamik eine reale, messbare Größe ist.
- Das berechnete Vektorpotential und die daraus resultierenden Kräfte führen zu der experimentell überprüfbaren Vorhersage, dass die Wand des Hohlzylinders zusammengedrückt werden sollte.
- In einem anderen Experiment sollte die radiale Kraftdichte zu einer Aufwölbung von elektrisch leitenden Flüssigkeiten führen.
- Am Beispiel eines stromdurchflossenen Drahtes wurde unter Berücksichtigung der verallgemeinerten Maxwellgleichungen eine Druckkraft in Längsrichtung auf den Draht berechnet.
- Diese Längskraft entsteht zu einem Drittel unter dem Einfluss des Magnetfeldes und zu zwei Dritteln unter dem Einfluss des Vektorpotentials.
- Längskräfte dieser Art wurden bereits in der Vergangenheit beobachtet.

Was zu tun bleibt ist, diese vorhergesagten Kräfte in Experimenten quantitativ genau nachzuprüfen.

4. Anhang

4.1. Herleitung der homogenen Feldgleichung aus der Lagrangefunktion

Ausgangspunkt ist die Herleitung aus einem Wirkungsprinzip mit Hilfe der Lagrangefunktion

$$L(t,\vec{x},\vec{v}) = T(t,\vec{x},\vec{v}) - U(t,\vec{x}). \tag{4.1}$$

Um auf diese Weise die Maxwellschen Gleichungen herleiten zu können, werden üblicherweise nicht-konservative Kräfte angenommen. In die Lagrangefunktion wird dazu ein verallgemeinertes, geschwindigkeitsabhängiges Potential eingeführt:

$$L(t,\vec{x},\vec{v}) = T(t,\vec{x},\vec{v}) - U(t,\vec{x},\vec{v}). \tag{4.2}$$

Hier wird auf diese Art der Verallgemeinerung verzichtet und mit konservativen Kräften gerechnet. Wie sich zeigen wird, entstehen dadurch verallgemeinerte Feldgleichungen der Elektrodynamik, welche die Maxwellgleichungen als Spezialfall enthalten.

4.1.1. Berechnung für den nichtrelativistischen Fall Zunächst wird die Rechnung für $v \ll c$ durchgeführt. Um ein Potential für konservative Kräfte einzuführen, wird die Lagrangefunktion der Maxwellschen Theorie um eine Nebenbedingung ergänzt:

$$L(t,\vec{x},\vec{v},\lambda) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - q(V - \vec{v}\vec{A}) + \lambda q(V - \vec{v}\vec{A} - V_0), \tag{4.3}$$

wobei λ der Lagrange-Multiplikator ist. Zur Bestimmung der Bewegungsgleichung werden die folgenden Gleichungen benötigt:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \tag{4.4a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0. \tag{4.4b}$$

Die erste Gleichung liefert die Nebenbedingung

$$V_0(t,\vec{x}) = V - \vec{v}\vec{A}. \tag{4.5}$$

Es existiert also ein Bezugssystem, in dem sich die Erscheinungen der Elektrodynamik auf ein konservatives Feld zurückführen lassen. Die zweite Euler-Lagrange-Gleichung liefert zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q(1-\lambda)\vec{A}, \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -q(1-\lambda)\nabla(V - \vec{v}\vec{A}) - \lambda q \nabla V_0. \tag{4.6b}$$

und daraus für die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{v}} &= q(1-\lambda)[-\nabla V - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} + \nabla(\vec{v}\vec{A})] - \lambda q \nabla V_0 \\ &= q(1-\lambda)[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + \nabla(\vec{v}\vec{A})] - \lambda q \nabla V_0 \\ &= q(1-\lambda)[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})] - \lambda q \nabla V_0 \\ &= q(1-\lambda)(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - \lambda q \nabla V_0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Wird $\lambda = 1$ gewählt, so ist eine Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung möglich:

$$m\dot{\vec{v}} = -q\nabla V_0 = -q\nabla(V - \vec{v}\vec{A}) \tag{4.8}$$

$$= -q\nabla V + q\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + q(\vec{v}\,\nabla)\vec{A} \tag{4.9}$$

$$= q[-\nabla V + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})] + q\vec{v}(\nabla \otimes \vec{A}) \tag{4.10}$$

$$= q[-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A})] + q[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \otimes \vec{A})] \tag{4.11}$$

$$= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + q(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\mathbf{S}) \tag{4.12}$$

$$= q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + (c, \vec{v}) \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix}] \tag{4.13}$$

$$= q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + (c, \vec{v})(S_{\beta a})]. \tag{4.14}$$

Der Ausdruck

$$\boxed{(S_{\beta a}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{S} \end{pmatrix}} \tag{4.15}$$

ist dann ein Feld, welches zu den bisher bekannten elektrischen und magnetischen Feldern hinzukommt. Es lässt sich mit einer 4x3-Matrix beschreiben.

Die Ruheinduktion wird üblicherweise mit der Lenzschen Regel beschrieben: Die induzierte elektrische Spannung ist so gerichtet, dass sie der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses entgegenwirkt. Die induzierte elektrische Feldstärke lässt sich aber analog zur klassischen Mechanik auch als Änderung eines Impulses auffassen:

$$\vec{E}_{\text{ind}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{4.16a}$$

$$\vec{K} \quad = -\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{4.16b}$$

Diese Sichtweise hat den Vorteil, dass sie nicht auf das Vorhandensein eines Magnetfeldes angewiesen ist. Wird die obere der beiden Gleichungen geschrieben als

$$\vec{E}_{\text{ind}} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0, \tag{4.17}$$

so entspricht dies einer Impulserhaltung: In einer ruhenden, geschlossenen und ringförmigen Leiterschleife werde ein Strom induziert. Längs der Leiterschleife wirkt dann gemäß (4.12) als Antwort eine Kraft $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ in die entgegengesetzte Richtung und sollte sie in eine Rotationsbewegung versetzen. In Analogie zur klassischen Mechanik entspricht dies z. B. dem Rückstoß, der beim Abfeuern eines Geschosses entsteht.

4.1.2. Kovariante Bewegungsgleichung Für Geschwindigkeiten $v < c$ lässt sich die kovariante Bewegungsgleichung aus einer kovarianten Lagrangefunktion

$$L = -mc\sqrt{u_\beta u^\beta} - qA_\beta u^\beta \tag{4.18}$$

herleiten. Um auf konservative Kräfte zu kommen, wird zusätzlich die Nebenbedingung

$$A_\beta u^\beta - V = 0 \tag{4.19}$$

eingeführt. Die Lagrangefunktion lautet dann analog zu (4.7)

$$L = -mc\sqrt{u_\beta u^\beta} - qA_\beta u^\beta + \lambda q(A_\beta u^\beta - V). \tag{4.20}$$

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = 0 \tag{4.21}$$

ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m\dot{u}_\alpha = (1-\lambda)qF_{\alpha\beta}u^\beta + \lambda q\partial_\alpha V. \tag{4.22}$$

Wird der Lagrange-Multiplikator

$$\lambda = 1 \tag{4.23}$$

gewählt, so verschwindet der geschwindigkeitsabhängige Term und es bleibt

$$m\dot{u}_\alpha = q\partial_\alpha V. \tag{4.24}$$

Mit der eingesetzten Nebenbedingung lautet die Verallgemeinerung von (4.8) und (4.14)

$$m\dot{u}_\alpha = q\partial_\alpha A_\beta u^\beta = qS_{\alpha\beta}u^\beta, \tag{4.25}$$

wobei u nur von der Eigenzeit τ abhängt. Zieht man von der rechten Seite einen Term $qS_{\beta\alpha}u^\beta$ ab, um ihn sofort wieder hinzuzufügen, so erhält man analog zu (4.12):

$$m\dot{u}_\alpha = q(S_{\alpha\beta} - S_{\beta\alpha})u^\beta + qu^\beta S_{\beta\alpha} = qF_{\alpha\beta}u^\beta + qu^\beta S_{\beta\alpha}. \tag{4.26}$$

Die Maxwellgleichungen bleiben als Spezialfall in der Bewegungsgleichung enthalten.

4.2. Herleitung der inhomogenen Feldgleichung aus der Lagrangedichte

Gleichung (1.11*b*) kann als Lösung eines Variationsproblems aufgefasst werden. Für die Lagrangedichte wird als Ansatz gewählt:

$$\mathcal{L}(A_\beta, \partial_\alpha A_\beta) = \mathcal{L}(A_\beta, S_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2\mu_0}S_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta} + i^\beta A_\beta + \mathcal{L}_0. \tag{4.27}$$

Dann gelten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} = 0. \tag{4.28}$$

Es ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = i^\beta \tag{4.29}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial S_{\alpha\beta}}S^{\alpha\beta} + S_{\gamma\delta}\frac{\partial S^{\gamma\delta}}{\partial S_{\alpha\beta}}\right) = \frac{1}{\mu_0}S^{\alpha\beta}. \tag{4.30}$$

Einsetzen von (4.29) und (4.30) in (4.28) ergibt (1.11*b*).

4.3. Eine inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben ist die folgende inhomogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = -f(x), \quad x > 0. \tag{4.31}$$

Durch die Wahl der Substitution

$$y(x) = xg(x) \tag{4.32}$$

geht diese Differentialgleichung in die einfachere Form

$$g'' + \frac{3}{x}g' = -\frac{f(x)}{x} \tag{4.33}$$

über. Durch eine weitere Substitution

$$g'(x) = z(x) \tag{4.34}$$

erhält man eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' + \frac{3}{x}z = -\frac{f(x)}{x}, \tag{4.35}$$

die sich durch Variation der Konstanten lösen lässt. Der Ansatz ist

$$z = c(x)e^{-\int \frac{3}{x}\mathrm{d}x} = \frac{c(x)}{x^3}. \tag{4.36}$$

Für $c(x)$ ergibt sich nach Einsetzen das Integral

$$c(x) = -\int x^2 f(x)\mathrm{d}x + c_1. \tag{4.37}$$

Nun werden zwei Sonderfälle für $f(x)$ gewählt. Im Fall der homogenen Differentialgleichung ($f(x) = 0$) ergibt sich als endgültige Lösung:

$$y = -\frac{c_1}{2x} + c_2\, x. \tag{4.38}$$

Für den inhomogenen Fall

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{4.39}$$

erhält man entsprechend

$$y = -\frac{c_1}{2x} + c_2\, x - \frac{x}{2}\ln x. \tag{4.40}$$

4.4. Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential bei verschwindendem Magnetfeld

Für den dreidimensionalen Fall folgt aus (1.14*b*):

$$-\Delta\vec{A} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} = \mu_0\vec{i}. \tag{4.41}$$

Mit (1.7) ist

$$-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} = \mu_0\vec{i} = \mu_0\kappa\vec{E}. \tag{4.42}$$

Mit der Hilfsgröße

$$Z = \mathrm{div}\vec{A} \tag{4.43}$$

gilt

$$-\mathrm{grad}Z = \mu_0\kappa\vec{E}. \tag{4.44}$$

Andererseits gilt

$$-\mathrm{grad}V = \vec{E}. \tag{4.45}$$

Der Vergleich von (4.44) und (4.45) liefert:

$$Z = Z_0 + \mu_0\kappa V. \tag{4.46}$$

Die zusätzliche Konstante Z_0 ändert dabei nichts am Wert der elektrischen Feldstärke. Es folgt mit (4.43)

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{A} = Z_0 + \mu_0\kappa V}. \tag{4.47}$$

Für Gebiete mit verschwindender Stromdichte entfällt der zweite Term. Aus dieser Gleichung kann mit (1.2) durch Integration das gesuchte Vektorpotential berechnet werden. Z_0 und die Integrationskonstante lassen sich mit Hilfe der beiden Randbedingungen für das Vektorpotential bestimmen. Für Z_0 ergibt sich

$$Z_0 = \mu_0\kappa U. \tag{4.48}$$

4.5. Energie-Impuls-Tensor

Mit Gleichung (1.14*a*) gilt für die Kraftdichte:

$$k_\alpha = S_{\alpha\beta} i^\beta = F_{\alpha\beta} i^\beta + i^\beta \partial_\beta A_\alpha. \tag{4.49}$$

Die Kraftdichte lässt sich auf beiden Seiten als Divergenz eines Energie-Impuls-Tensors darstellen. Zunächst erfolgt die Berechnung für die linke Seite. Mit den Feldgleichungen (1.11*a*) und (1.11*b*) gilt:

$$\begin{aligned} k_\alpha = S_{\alpha\beta} i^\beta &= \frac{1}{\mu_0} S_{\alpha\beta} \partial_\gamma S^{\gamma\beta} = \frac{1}{\mu_0} [\partial_\gamma (S_{\alpha\beta} S^{\gamma\beta}) - S^{\gamma\beta} (\partial_\gamma S_{\alpha\beta})] \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\partial_\gamma (S_{\alpha\beta} S^{\gamma\beta}) - S^{\gamma\beta} (\partial_\alpha S_{\gamma\beta})]. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Im letzten Term wurde die Beziehung

$$\partial_\gamma S_{\alpha\beta} = \partial_\gamma \partial_\alpha A_\beta = \partial_\alpha \partial_\gamma A_\beta = \partial_\alpha S_{\gamma\beta} \tag{4.51}$$

verwendet. Dann kann man setzen:

$$S^{\gamma\beta} (\partial_\alpha S_{\gamma\beta}) = \frac{1}{2} \partial_\alpha (S_{\gamma\beta} S^{\gamma\beta}) = \partial_\alpha \bar{S}, \tag{4.52}$$

mit der Abkürzung

$$\bar{S} = \frac{1}{2} S_{\gamma\beta} S^{\gamma\beta}. \tag{4.53}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} k_\alpha &= \frac{1}{\mu_0} [\partial_\gamma (S_{\alpha\beta} S^{\gamma\beta}) - \partial_\alpha \bar{S}] = \frac{1}{\mu_0} [\partial_\gamma (S_{\alpha\beta} S^{\gamma\beta}) - \delta^\gamma_\alpha \partial_\gamma \bar{S}] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \partial_\gamma (S_{\alpha\beta} S^{\gamma\beta} - \delta^\gamma_\alpha \bar{S}) = \frac{1}{\mu_0} \partial_\beta (S_{\alpha\gamma} S^{\beta\gamma} - \delta^\beta_\alpha \bar{S}) = \partial_\beta T_\alpha{}^\beta. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Im letzten Schritt wurden die Indizes β und γ vertauscht. Die Größe

$$T_\alpha{}^\beta = \frac{1}{\mu_0} (S_{\alpha\gamma} S^{\beta\gamma} - \delta^\beta_\alpha \bar{S}) \tag{4.55}$$

ist der Energie-Impuls-Tensor des Feldes S. Durch Hochziehen des Index α entsteht der Tensor

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} (S^\alpha{}_\gamma S^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} \bar{S}). \tag{4.56}$$

Wie die folgende Umformung zeigt, ist dieser Tensor symmetrisch:

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} (g_{\delta\gamma} S^{\alpha\delta} S^{\beta\gamma} - g^{\alpha\beta} \bar{S}) = T^{\beta\alpha}. \tag{4.57}$$

Für die Kraftdichte kann man dann auch schreiben

$$k^\alpha = \partial_\beta T^{\beta\alpha}. \tag{4.58}$$

Die rechte Seite kann wie folgt geschrieben werden:

$$k_\alpha = \partial_\beta {T_{\mathrm{EM}\alpha}}^\beta + i^\beta \partial_\beta A_\alpha. \tag{4.59}$$

Dabei ist

$${T_{\mathrm{EM}\alpha}}^\beta = \frac{1}{\mu_0}[F_{\alpha\gamma}F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\delta_\alpha^\beta(F_{\delta\gamma}F^{\delta\gamma})] \tag{4.60}$$

der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Der zweite Term kann wegen der Ladungserhaltung weiter umgeformt werden:

$$k_\alpha = \partial_\beta {T_{\mathrm{EM}\alpha}}^\beta + \partial_\beta(A_\alpha i^\beta) - A_\alpha \partial_\beta i^\beta = \partial_\beta {T_{\mathrm{EM}\alpha}}^\beta + \partial_\beta {T_{\mathrm{A}\alpha}}^\beta, \tag{4.61}$$

mit

$${T_{\mathrm{A}\alpha}}^\beta = A_\alpha i^\beta. \tag{4.62}$$

Mit (4.49) gilt dann

$${T_\alpha}^\beta = {T_{\mathrm{EM}\alpha}}^\beta + {T_{\mathrm{A}\alpha}}^\beta. \tag{4.63}$$

Wird der Index α hochgezogen erhält man

$$T^{\alpha\beta} = {T_{\mathrm{EM}}}^{\alpha\beta} + {T_{\mathrm{A}}}^{\alpha\beta}. \tag{4.64}$$

Da $T^{\alpha\beta}$ und ${T_{\mathrm{EM}}}^{\alpha\beta}$ symmetrisch sind muss auch ${T_{\mathrm{A}}}^{\alpha\beta}$ symmetrisch sein. Das ist jedoch nur möglich, wenn alle Nichtdiagonalkomponenten in T_{A} verschwinden:

$${T_{\mathrm{A}}}^{\alpha\beta} = \begin{cases} A^\alpha i^\alpha & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{4.65}$$

Das bedeutet, dass im Spannungstensor T_{A} nur Hauptspannungen vorkommen.

4.6. Divergenz eines symmetrischen Tensors in Zylinderkoordinaten

Der Spannungstensor lautet in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\varphi} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\varphi z} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{4.66}$$

Dann lautet die Divergenz dieses Tensors:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{T} = &(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z})\vec{e}_r \\ &+ (\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z})\vec{e}_\varphi \\ &+ (\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z})\vec{e}_z. \end{aligned} \tag{4.67}$$

4.7. Lösung des Durchflutungsgesetzes bei radialer Stromdichte

Für einen Hohlzylinder mit Rotationssymmetrie und axialer Translationssymmetrie und einer radialen Stromdichte $i_r(r)$ hat das Durchflutungsgesetz (1.8) die Gestalt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = \mu_0 i_r(r), \tag{4.68a}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0, \tag{4.68b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0. \tag{4.68c}$$

Ferner muss das Magnetfeld quellenfrei ($\mathrm{div}\vec{B} = 0$) sein, d. h.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{4.69}$$

Aufgrund der Symmetrie muss die Lösung die Form $\vec{B} = \vec{B}(r)$ haben. Aus (4.68b) folgt daher

$$B_z(r) = c_3, \tag{4.70}$$

aus (4.68c)

$$B_\varphi(r) = \frac{c_2}{r} \tag{4.71}$$

und mit diesen beiden Ergebnissen aus (4.69)

$$B_r(r) = \frac{c_1}{r}. \tag{4.72}$$

Setzt man diese Komponenten in (4.68a) ein, so ergibt sich

$$i_r(r) = 0 \tag{4.73}$$

als Widerspruch zur Lösung (1.3).

5. Literaturhinweise

[1] Graneau, Peter: *Amperian recoil and the efficiency of railguns.* Journal of Applied Physics, Vol. 62, 1987, p. 3006.

[2] Lehner, Günther: *Elektromagnetische Feldtheorie.* Berlin : Springer, 1990, S. 261.

[3] Schneider, Tilmann: *Die Unipolarmaschine zweiter Art.* Bonn : urn:nbn:de:101:1-2015020917870, 2015.