

# Lineare Regression und Varianzanalyse

Von

Prof. Dr. Fritz Pokropp

Universität der Bundeswehr Hamburg

R. Oldenbourg Verlag München Wien

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundstruktur linearer Modelle . . . . .	1
1.2	Spezielle Typen linearer Modelle . . . . .	5
1.3	Behandelte Probleme . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Einfache lineare Regression</b>	<b>13</b>
2.1	Regression mit vollem Rang . . . . .	13
	Das Modell . . . . .	13
	OLS-Schätzer . . . . .	15
	Normalgleichungen . . . . .	16
	Varianz-Zerlegung . . . . .	16
	Unverzerrtheit/Erwartungstreue . . . . .	17
2.2	Einfache lineare Regression in Matrix-Notation . . . . .	18
	Matrizen . . . . .	18
	Modell in Matrix-Form . . . . .	21
2.3	Regression mit nicht vollem Rang . . . . .	23
	Lineare Abhängigkeit. Nicht-Existenz der Inversen . . . . .	23
	Generalisierte Inverse. Lösungen der Normalgleichungen . . . . .	24
	Identifizierbarkeit. Schätzbarkeit . . . . .	25
2.4	Aufgaben . . . . .	26

<b>3</b>	<b>Univariate Multiple Regression</b>	<b>29</b>
3.1	Das Modell. OLS-Schätzer.	
	Normalgleichungen und ihre Lösungen . . . . .	29
	Modellannahmen . . . . .	29
	Normalgleichungen und OLS-Schätzer . . . . .	31
	Wichtige Summen von Quadraten . . . . .	35
	Konstruktion von $g$ -Inversen . . . . .	36
	Homogene/inhomogene Regression . . . . .	41
	Bestimmtheitsmaße, Korrelationskoeffizienten . . . . .	43
3.2	Schätzbarkeit. (Co-)Varianzen. Gauß-Markov-Theorem . . . . .	47
	Schätzbarkeit . . . . .	47
	Covarianz-Matrizen . . . . .	51
	Gauß-Markov-Theorem . . . . .	52
3.3	Schätzung der (Co-)Varianzen . . . . .	55
	Schätzung von $\sigma^2$ . . . . .	55
	Diagonalisierung von Matrizen . . . . .	55
	Wichtige symmetrische, idempotente Matrizen . . . . .	57
	Unverzerrte Schätzer von Covarianz-Matrizen . . . . .	58
	Prognosen . . . . .	60
3.4	Aufgaben . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Normalverteilung.</b>	
	<b>Quadratische Formen</b>	<b>67</b>
4.1	Multivariate Normalverteilung . . . . .	67
4.2	Die Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .	70
	Zentrale/Nicht-Zentrale Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .	70
	Unabhängigkeit quadratischer Formen . . . . .	72
4.3	Fishers $F$ -Verteilung . . . . .	73

<b>5</b>	<b>Multiple Regression unter Normalverteilung</b>	<b>75</b>
5.1	ML-Schätzer und Konfidenzbereiche . . . . .	75
	Multiples Regressionsmodell mit Normalverteilung . . . . .	75
	Maximum-Likelihood-Schätzer . . . . .	76
	Konfidenzintervalle für $\sigma^2$ . . . . .	77
	Konfidenzbereiche für $\beta$ . . . . .	78
5.2	Tests über Modellparameter . . . . .	80
	Grundsätzliches über Tests . . . . .	80
	Tests über Varianzen . . . . .	82
	Testbare lineare Hypothesen über $\beta$ . . . . .	83
	Teststatistiken für lineare Hypothesen über $\beta$ . . . . .	84
	Tests über lineare Hypothesen . . . . .	86
	Berechnungsformeln für Teststatistiken . . . . .	86
5.3	Spezielle Testprobleme über $\beta$ . . . . .	89
	Vier wichtige Hypothesen . . . . .	89
	(1) Die Hypothese $\beta = \beta_0$ . . . . .	90
	(2) Die Hypothese $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \dots, \beta_q = 0$ . . . . .	92
	Sonderfall im inhomogenen Modell . . . . .	94
	(3) Die Hypothese $\beta_1 = \beta_{01}, \dots, \beta_q = \beta_{0q}$ . . . . .	95
	(4) Die Hypothese $\beta_1 = \dots = \beta_q$ . . . . .	98
5.4	Aufgaben . . . . .	101

<b>6</b>	<b>Verallgemeinerte kleinste Quadrate (GLS)</b>	<b>107</b>
6.1	Modell-Annahmen . . . . .	107
	Allgemeine Varianz-Struktur . . . . .	107
	Heteroskedastizität . . . . .	109
	Autokorrelation . . . . .	109
6.2	Verallgemeinerte Kleinste-Quadrate-Schätzer (GLS) . . . . .	110
	Aitken-Schätzer, Gauß-Markov-Theorem . . . . .	110
	Varianz-Schätzung . . . . .	112
6.3	Durbin-Watson-Test . . . . .	113
6.4	Aufgaben . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Varianz- und Kovarianz-Analyse bei Einfach-Klassifikation</b>	<b>119</b>
7.1	Varianz-Analyse ohne allgemeinen Effekt . . . . .	119
	Modell-Annahmen . . . . .	119
	OLS-Schätzer . . . . .	121
	Vier wichtige Hypothesen . . . . .	123
	Die Hypothese $\beta_1 = 0, \dots, \beta_q = 0$ . . . . .	123
	Die Hypothese $\beta = \beta_0$ . . . . .	124
	Die Hypothese $\beta_1 = \dots = \beta_q$ . . . . .	125
	Die Hypothese $\bar{\beta} = b_0$ . . . . .	127
7.2	Varianz-Analyse mit allgemeinem Effekt . . . . .	128
	Modell-Annahmen . . . . .	128
	Schätzbare Funktionen, Testbare Hypothesen . . . . .	129
	Tests unter problematischen Restriktionen . . . . .	131
	Schätzungen und Tests unter sinnvollen Restriktionen . . . . .	132
	Grundsätzliches über Modelle mit nicht vollem Rang . . . . .	135
7.3	Kovarianz-Analyse . . . . .	137

Modell-Annahmen . . . . .	137
BLU-Schätzer (Modell ohne allgemeinen Effekt) . . . . .	138
SSR und SSE (Modell ohne allgemeinen Effekt) . . . . .	140
Drei wichtige Hypothesen (ohne allgemeinen Effekt) . . . . .	141
Modell mit allgemeinem Effekt . . . . .	145
Schätzen und Testen unter Restriktionen . . . . .	146
7.4 Aufgaben . . . . .	150
<b>8 Varianzanalyse bei Zweifach-Klassifikation</b>	<b>155</b>
8.1 Modellstrukturen . . . . .	155
Das allgemeine Modell für zwei Faktoren . . . . .	155
Spezifizierte Modelle für zwei Faktoren . . . . .	157
8.2 Vollständige Kreuzklassifikation mit Wechselwirkung . . . . .	158
Das Modell . . . . .	158
Berechnung von SSR und SSE . . . . .	160
Schätzbare Parameter. Testbare Hypothesen . . . . .	162
Berechnung von Teststatistiken für ausgewogene Versuchspläne . . . . .	167
Teststatistiken bei nicht-ausgewogenen Versuchsplänen . . . . .	169
ANOVA-Tafeln . . . . .	171
Kombinationen von Hypothesen . . . . .	172
8.3 Vollständige Kreuz-Klassifikation ohne Wechselwirkung . . . . .	174
Modell und testbare Hypothesen . . . . .	174
Berechnung von SSE . . . . .	176
Berechnung von Teststatistiken und ANOVA-Tafeln im ausgewogenen Fall . . . . .	177
8.4 Hierarchische Klassifikation . . . . .	179
Spezifikation des Modells . . . . .	179
Testbare Hypothesen . . . . .	181
Berechnung der Teststatistiken . . . . .	183
8.5 Aufgaben . . . . .	186

XIV *Inhaltsverzeichnis*

<b>Anhang 1</b>	<b>193</b>
APL-Programme . . . . .	193
<b>Anhang 2</b>	<b>213</b>
Prozentpunkte der $F$ -Verteilung . . . . .	213
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>232</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>235</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>238</b>