

Lothar Papula

Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler

8., durchgesehene und ergänzte Auflage

Mit zahlreichen Abbildungen
und Rechenbeispielen
und einer ausführlichen Integraltafel

Viewegs Fachbücher der Technik



Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie	1
1 Grundlegende Begriffe über Mengen	1
1.1 Definition und Darstellung einer Menge	1
1.2 Mengenoperationen	2
2 Rechnen mit reellen Zahlen	2
2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften	2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen	2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen	4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen	5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade	5
2.1.5 Grundrechenarten	6
2.2 Zahlensysteme	7
2.3 Intervalle	8
2.4 Bruchrechnung	8
2.5 Potenzen und Wurzeln	10
2.6 Logarithmen	12
2.7 Binomischer Lehrsatz	14
3 Elementare (endliche) Reihen	16
3.1 Definition einer Reihe	16
3.2 Arithmetische Reihen	16
3.3 Geometrische Reihen	16
3.4 Spezielle Zahlenreihen	16
4 Gleichungen mit einer Unbekannten	17
4.1 Algebraische Gleichungen n -ten Grades	17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen	17
4.1.2 Lineare Gleichungen	18
4.1.3 Quadratische Gleichungen	18
4.1.4 Kubische Gleichungen	19
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen	20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen	21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren	22
4.4 Regula falsi	23
4.5 Tangentenverfahren von Newton	24
5 Ungleichungen mit einer Unbekannten	25

6	Lehrsätze aus der elementaren Geometrie	26
6.1	Satz des Pythagoras	26
6.2	Höhensatz	26
6.3	Kathetensatz (Euklid)	27
6.4	Satz des Thales	27
6.5	Strahlensätze	27
6.6	Sinussatz	28
6.7	Kosinussatz	28
7	Ebene geometrische Körper (Planimetrie)	28
7.1	Dreiecke	28
7.1.1	Allgemeine Beziehungen	28
7.1.2	Spezielle Dreiecke	29
7.1.2.1	Rechtwinkliges Dreieck	29
7.1.2.2	Gleichschenkliges Dreieck	29
7.1.2.3	Gleichseitiges Dreieck	30
7.2	Quadrat	30
7.3	Rechteck	30
7.4	Parallelogramm	31
7.5	Rhombus oder Raute	31
7.6	Trapez	31
7.7	Reguläres n -Eck	32
7.8	Kreis	32
7.9	Kreis Sektor oder Kreisabschnitt	32
7.10	Kreissegment oder Kreisabschnitt	32
7.11	Kreisring	33
7.12	Ellipse	33
8	Räumliche geometrische Körper (Stereometrie)	33
8.1	Prisma	33
8.2	Würfel	34
8.3	Quader	34
8.4	Pyramide	34
8.5	Pyramidenstumpf	35
8.6	Tetraeder oder dreiseitige Pyramide	35
8.7	Keil	36
8.8	Gerader Kreiszyylinder	36
8.9	Gerader Kreiskegel	36
8.10	Gerader Kreiskegelstumpf	37
8.11	Kugel	37
8.12	Kugelausschnitt oder Kugelsektor	37
8.13	Kugelschicht oder Kugelzone	38
8.14	Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte	38
8.15	Ellipsoid	38
8.16	Rotationsparaboloid	39
8.17	Tonne oder Faß	39
8.18	Torus	40
8.19	Guldinsche Regeln für Rotationskörper	40

9	Koordinatensysteme	41
9.1	Ebene Koordinatensysteme	41
9.1.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	41
9.1.2	Polarkoordinaten	42
9.1.3	Koordinatentransformationen	42
9.1.3.1	Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems	42
9.1.3.2	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten	42
9.1.3.3	Drehung eines kartesischen Koordinatensystems	43
9.2	Räumliche Koordinatensysteme	44
9.2.1	Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten	44
9.2.2	Zylinderkoordinaten	44
9.2.3	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten	44
9.2.4	Kugelkoordinaten	45
9.2.5	Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten	45
II	Vektorrechnung	46
1	Grundbegriffe	46
1.1	Vektoren und Skalare	46
1.2	Spezielle Vektoren	46
1.3	Gleichheit von Vektoren	47
1.4	Kollineare, parallele und anti-parallele Vektoren, inverser Vektor	47
2	Komponentendarstellung eines Vektors	48
2.1	Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem	48
2.2	Komponentendarstellung spezieller Vektoren	48
2.3	Betrag und Richtungswinkel eines Vektors	49
3	Vektoroperationen	50
3.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	50
3.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	51
3.3	Skalarprodukt (inneres Produkt)	51
3.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	53
3.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	55
3.6	Formeln für Mehrfachprodukte	56
4	Anwendungen	56
4.1	Arbeit einer konstanten Kraft	56
4.2	Vektorielle Darstellung einer Geraden	57
4.2.1	Punkt-Richtungs-Form	57
4.2.2	Zwei-Punkte-Form	57
4.2.3	Abstand eines Punktes von einer Geraden	58

4.2.4	Abstand zweier paralleler Geraden	58
4.2.5	Abstand zweier windschiefer Geraden	59
4.2.6	Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden	60
4.3	Vektorielle Darstellung einer Ebene	60
4.3.1	Punkt-Richtungs-Form	60
4.3.2	Drei-Punkte-Form	61
4.3.3	Ebene senkrecht zu einem Vektor	62
4.3.4	Abstand eines Punktes von einer Ebene	62
4.3.5	Abstand einer Geraden von einer Ebene	63
4.3.6	Abstand zweier paralleler Ebenen	64
4.3.7	Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene	65
4.3.8	Schnittwinkel zweier Ebenen	66
III Funktionen und Kurven		67
1 Grundbegriffe		67
1.1	Definition einer Funktion	67
1.2	Darstellungsformen einer Funktion	67
1.2.1	Analytische Darstellung	67
1.2.2	Parameterdarstellung	67
1.2.3	Kurvengleichung in Polarkoordinaten	68
1.2.4	Graphische Darstellung	68
2 Allgemeine Funktionseigenschaften		68
2.1	Nullstellen	68
2.2	Symmetrie	69
2.3	Monotonie	69
2.4	Periodizität	70
2.5	Umkehrfunktion (inverse Funktion)	70
3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion		71
3.1	Grenzwert einer Folge	71
3.2	Grenzwert einer Funktion	72
3.2.1	Grenzwert für $x \rightarrow x_0$	72
3.2.2	Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$	72
3.3	Rechenregeln für Grenzwerte	72
3.4	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	73
3.5	Stetigkeit einer Funktion	74
4 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)		75
4.1	Definition der ganzrationalen Funktionen	75
4.2	Lineare Funktionen (Geraden)	75
4.2.1	Allgemeine Geradengleichung	75
4.2.2	Hauptform einer Geraden	75
4.2.3	Punkt-Steigungs-Form einer Geraden	75
4.2.4	Zwei-Punkte-Form einer Geraden	76

4.2.5	Achsenabschnittsform einer Geraden	76
4.2.6	Hessesche Normalform einer Geraden	76
4.2.7	Abstand eines Punktes von einer Geraden	76
4.2.8	Schnittwinkel zweier Geraden	77
4.3	Quadratische Funktionen (Parabeln)	77
4.3.1	Hauptform einer Parabel	77
4.3.2	Produktform einer Parabel	78
4.3.3	Scheitelpunktsform einer Parabel	78
4.4	Polynomfunktionen höheren Grades (n -ten Grades)	78
4.4.1	Abspaltung eines Linearfaktors	78
4.4.2	Nullstellen einer Polynomfunktion	78
4.4.3	Produktdarstellung einer Polynomfunktion	78
4.5	Horner-Schema	79
4.6	Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung)	80
4.7	Interpolationspolynome	81
4.7.1	Allgemeine Vorbetrachtungen	81
4.7.2	Interpolationsformel von Lagrange	81
4.7.3	Interpolationsformel von Newton	83
5	Gebrochenrationale Funktionen	85
5.1	Definition der gebrochenrationalen Funktionen	85
5.2	Nullstellen, Definitionslücken, Pole	86
5.3	Asymptotisches Verhalten im Unendlichen	87
6	Potenz- und Wurzelfunktionen	87
6.1	Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten	87
6.2	Wurzelfunktionen	89
6.3	Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten	89
7	Trigonometrische Funktionen	90
7.1	Winkelmaße	90
7.2	Definition der trigonometrischen Funktionen	91
7.3	Sinus- und Kosinusfunktion	92
7.4	Tangens- und Kotangensfunktion	93
7.5	Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen	93
7.6	Trigonometrische Formeln	94
7.6.1	Additionstheoreme	94
7.6.2	Formeln für halbe Winkel	95
7.6.3	Formeln für Winkelvielfache	95
7.6.4	Formeln für Potenzen	96
7.6.5	Formeln für Summen und Differenzen	96
7.6.6	Formeln für Produkte	97
7.7	Anwendungen in der Schwingungslehre	97
7.7.1	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion	97
7.7.2	Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen)	98
7.7.2.1	Gleichung einer harmonischen Schwingung	98
7.7.2.2	Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm	98

7.7.3	Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen	99
8	Arkusfunktionen	100
8.1	Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion	100
8.2	Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion	101
8.3	Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen	102
9	Exponentialfunktionen	103
9.1	Definition der Exponentialfunktionen	103
9.2	Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen	104
9.2.1	Abklingfunktion	104
9.2.2	Sättigungsfunktion	104
9.2.3	Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve)	105
9.2.4	Kettenlinie	105
10	Logarithmusfunktionen	106
10.1	Definition der Logarithmusfunktionen	106
10.2	Spezielle Logarithmusfunktionen	106
11	Hyperbelfunktionen	107
11.1	Definition der Hyperbelfunktionen	107
11.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen	108
11.3	Formeln	109
11.3.1	Additionstheoreme	109
11.3.2	Formeln für halbe Argumente	109
11.3.3	Formeln für Vielfache des Arguments	110
11.3.4	Formeln für Potenzen	110
11.3.5	Formeln für Summen und Differenzen	111
11.3.6	Formeln für Produkte	111
11.3.7	Formel von Moivre	111
12	Areafunktionen	112
12.1	Definition der Areafunktionen	112
12.2	Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen	113
13	Kegelschnitte	114
13.1	Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes	114
13.2	Kreis	114
13.2.1	Geometrische Definition	115
13.2.2	Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung)	115
13.2.3	Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform)	115
13.2.4	Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten	115
13.2.5	Parameterdarstellung eines Kreises	115

13.3	Ellipse	116
13.3.1	Geometrische Definition	116
13.3.2	Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung)	116
13.3.3	Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform)	116
13.3.4	Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten	117
13.3.5	Parameterdarstellung einer Ellipse	117
13.4	Hyperbel	118
13.4.1	Geometrische Definition	118
13.4.2	Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung)	118
13.4.3	Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform)	118
13.4.4	Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten	119
13.4.5	Parameterdarstellung einer Hyperbel	120
13.4.6	Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel	120
13.4.7	Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$)	120
13.5	Parabel	121
13.5.1	Geometrische Definition	121
13.5.2	Scheitelgleichung einer Parabel	121
13.5.3	Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform)	121
13.5.4	Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten	122
13.5.5	Parameterdarstellung einer Parabel	122
14	Spezielle Kurven	123
14.1	Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve)	123
14.2	Epizykloide	123
14.3	Hypozykloide	124
14.4	Astroide (Sternkurve)	125
14.5	Kardioide (Herzkurve)	125
14.6	Lemniskate (Schleifenkurve)	126
14.7	Strophoide	126
14.8	Cartesisches Blatt	127
14.9	„Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern	127
14.10	Spiralen	128
14.10.1	Archimedische Spirale	128
14.10.2	Logarithmische Spirale	128
IV	Differentialrechnung	129
1	Differenzierbarkeit einer Funktion	129
1.1	Differenzenquotient	129
1.2	Differentialquotient oder 1. Ableitung	129
1.3	Ableitungsfunktion	129
1.4	Höhere Ableitungen	130
1.5	Differential einer Funktion	130
2	Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle)	131

3 Ableitungsregeln	132
3.1 Faktorregel	132
3.2 Summenregel	132
3.3 Produktregel	132
3.4 Quotientenregel	133
3.5 Kettenregel	133
3.6 Logarithmische Differentiation	134
3.7 Ableitung der Umkehrfunktion	134
3.8 Implizite Differentiation	135
3.9 Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve)	135
3.10 Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve	136
4 Anwendungen der Differentialrechnung	136
4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung	136
4.2 Tangente und Normale	137
4.3 Linearisierung einer Funktion	137
4.4 Charakteristische Kurvenpunkte	138
4.4.1 Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung	138
4.4.2 Krümmung einer ebenen Kurve	139
4.4.3 Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	140
4.4.4 Wendepunkte, Sattelpunkte	142
V Integralrechnung	143
1 Bestimmtes Integral	143
1.1 Definition eines bestimmten Integrals	143
1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals	144
1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale	145
2 Unbestimmtes Integral	146
2.1 Definition eines unbestimmten Integrals	146
2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale	146
2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale	148
3 Integrationsmethoden	149
3.1 Integration durch Substitution	149
3.1.1 Allgemeines Verfahren	149
3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle)	150
3.2 Partielle Integration (Produktionsintegration)	152
3.3 Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden	153
3.3.1 Partialbruchzerlegung	153
3.3.2 Integration der Partialbrüche	156
3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden	157
3.5 Numerische Integration	157
3.5.1 Trapezformel	157
3.5.2 Simpsonsche Formel	158
3.5.3 Romberg-Verfahren	160

4 Uneigentliche Integrale	163
4.1 Unendliches Integrationsintervall	163
4.2 Integrand mit Pol	163
5 Anwendungen der Integralrechnung	164
5.1 Integration der Bewegungsgleichung	164
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral)	164
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion	165
5.3.1 Linearer Mittelwert	165
5.3.2 Quadratischer Mittelwert	165
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion	165
5.4 Flächeninhalt	165
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	167
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	168
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve	168
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen)	169
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche)	170
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers	171
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	172
VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen	174
1 Unendliche Reihen	174
1.1 Grundbegriffe	174
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe	174
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe	174
1.2 Konvergenzkriterien	175
1.2.1 Quotientenkriterium	175
1.2.2 Wurzelkriterium	176
1.2.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen	176
1.3 Spezielle konvergente Reihen	176
2 Potenzreihen	177
2.1 Definition einer Potenzreihe	177
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe	178
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen	178
3 Taylor-Reihen	179
3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel	179
3.1.1 Taylorsche Formel	179
3.1.2 Mac Laurinsche Formel	179
3.2 Taylorsche Reihe	180
3.3 Mac Laurinsche Reihe	180
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle)	181
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle)	183

4	Fourier-Reihen	185
4.1	Fourier-Reihe einer periodischen Funktion	185
4.2	Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung	187
4.3	Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle)	188
VII	Lineare Algebra	191
1	Reelle Matrizen	191
1.1	Grundbegriffe	191
1.1.1	Definition einer reellen Matrix	191
1.1.2	Spezielle Matrizen	192
1.1.3	Gleichheit von Matrizen	192
1.2	Spezielle quadratische Matrizen	192
1.2.1	Diagonalmatrix	193
1.2.2	Einheitsmatrix	193
1.2.3	Dreiecksmatrix	193
1.2.4	Symmetrische Matrix	193
1.2.5	Schiefsymmetrische Matrix	193
1.2.6	Orthogonale Matrix	194
1.3	Rechenoperationen für Matrizen	194
1.3.1	Addition und Subtraktion von Matrizen	194
1.3.2	Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar	194
1.3.3	Multiplikation von Matrizen	195
1.4	Reguläre Matrix	196
1.5	Inverse Matrix	196
1.5.1	Definition einer inversen Matrix	196
1.5.2	Berechnung einer inversen Matrix	197
1.5.2.1	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten	197
1.5.2.2	Berechnung der inversen Matrix A^{-1} nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren)	197
1.6	Rang einer Matrix	198
1.6.1	Definitionen	198
1.6.1.1	Unterdeterminanten einer Matrix	198
1.6.1.2	Rang einer Matrix	198
1.6.1.3	Elementare Umformungen einer Matrix	198
1.6.2	Rangbestimmung einer Matrix	199
1.6.2.1	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A unter Verwendung von Unterdeterminanten	199
1.6.2.2	Rangbestimmung einer (m, n) -Matrix A mit Hilfe elementarer Umformungen	199
2	Determinanten	200
2.1	Zweireihige Determinanten	200
2.2	Dreireihige Determinanten	201
2.3	Determinanten höherer Ordnung	202
2.3.1	Unterdeterminante D_{ik}	202
2.3.2	Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik}	202
2.3.3	Definition einer n -reihigen Determinante	202

2.4	Laplacescher Entwicklungssatz	203
2.5	Rechenregeln für n -reihige Determinanten	203
2.6	Regeln zur praktischen Berechnung einer n -reihigen Determinante	205
2.6.1	Elementare Umformungen einer n -reihigen Determinante	205
2.6.2	Reduzierung und Berechnung einer n -reihigen Determinante	205
3	Lineare Gleichungssysteme	206
3.1	Grundbegriffe	206
3.1.1	Definition eines linearen Gleichungssystems	206
3.1.2	Spezielle lineare Gleichungssysteme	206
3.2	Lösungsverhalten eines linearen (m, n) -Gleichungssystems	207
3.2.1	Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	207
3.2.2	Lösungsmenge eines linearen (m, n) -Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$	207
3.3	Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems	208
3.4	Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus)	209
3.4.1	Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n) -Systems	209
3.4.2	Gaußscher Algorithmus	209
3.5	Cramersche Regel	212
3.6	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	212
4	Komplexe Matrizen	213
4.1	Definition einer komplexen Matrix	213
4.2	Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen	214
4.3	Konjugiert komplexe Matrix	214
4.4	Konjugiert transponierte Matrix	215
4.5	Spezielle komplexe Matrizen	215
4.5.1	Hermiteische Matrix	215
4.5.2	Schiefhermitesche Matrix	215
4.5.3	Unitäre Matrix	216
5	Eigenwertprobleme	216
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix	216
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n -reihiger Matrizen	218
VIII	Komplexe Zahlen und Funktionen	219
1	Darstellungsformen einer komplexen Zahl	219
1.1	Algebraische oder kartesische Form	219
1.2	Polarformen	220
1.2.1	Trigonometrische Form	220
1.2.2	Exponentialform	220
1.3	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	221
1.3.1	Polarform \rightarrow Kartesische Form	221
1.3.2	Kartesische Form \rightarrow Polarform	221

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen	222
2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	222
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen	222
2.3 Division komplexer Zahlen	223
3 Potenzieren	224
4 Radizieren (Wurzelziehen)	225
5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl	226
6 Ortskurven	227
6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen	227
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl	227
6.3 Inversion einer Ortskurve	228
7 Komplexe Funktionen	229
7.1 Definition einer komplexen Funktion	229
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen	229
7.2.1 Trigonometrische Funktionen	229
7.2.2 Hyperbelfunktionen	229
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion)	230
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln	230
7.3.1 Eulersche Formeln	230
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion	230
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument	230
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument	230
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument	231
8 Anwendungen in der Schwingungslehre	231
8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger	231
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“)	232
IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen	234
1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung	234
1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen	234
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen	234
1.2.1 Analytische Darstellung	234
1.2.2 Graphische Darstellung	235
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum	235
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme	235
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm	235

1.3	Spezielle Flächen (Funktionen)	236
1.3.1	Ebenen	236
1.3.2	Rotationsflächen	236
1.3.2.1	Gleichung einer Rotationsfläche	236
1.3.2.2	Spezielle Rotationsflächen	237
2	Partielle Differentiation	238
2.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung	238
2.1.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$	238
2.1.2	Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	239
2.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	240
2.3	Totales oder vollständiges Differential einer Funktion	241
2.4	Anwendungen	243
2.4.1	Linearisierung einer Funktion	243
2.4.2	Relative Extremwerte (Maxima, Minima)	244
3	Mehrfachintegrale	246
3.1	Doppelintegrale	246
3.1.1	Definition eines Doppelintegrals	246
3.1.2	Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten	247
3.1.3	Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten	249
3.1.4	Anwendungen	249
3.1.4.1	Flächeninhalt	249
3.1.4.2	Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche	250
3.1.4.3	Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades)	251
3.2	Dreifachintegrale	252
3.2.1	Definition eines Dreifachintegrals	252
3.2.2	Berechnung eines Dreifachintegrals in kartesischen Koordinaten	253
3.2.3	Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten	255
3.2.4	Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten	255
3.2.5	Anwendungen	256
3.2.5.1	Volumen eines zylindrischen Körpers	256
3.2.5.2	Schwerpunkt eines homogenen Körpers	256
3.2.5.3	Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers	257
X	Gewöhnliche Differentialgleichungen	259
1	Grundbegriffe	259
1.1	Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n -ter Ordnung	259
1.2	Lösungen einer Differentialgleichung	259
1.3	Anfangswertprobleme	259
1.4	Randwertprobleme	260
2	Differentialgleichungen 1. Ordnung	260
2.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen	260
2.2	Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle)	261

2.3	Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung	262
2.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	263
2.4.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung	263
2.4.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	263
2.4.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	263
2.4.3.1	Integration durch Variation der Konstanten	263
2.4.3.2	Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	264
2.4.4	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	264
2.5	Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung	266
2.5.1	Streckenzugverfahren von Euler	266
2.5.2	Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung	268
2.5.3	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung	269
3	Differentialgleichungen 2. Ordnung	272
3.1	Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen	272
3.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	273
3.2.1	Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	273
3.2.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	273
3.2.2.1	Wronski-Determinante	273
3.2.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen Differential- gleichung	273
3.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	274
3.3	Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung	277
4	Anwendungen	280
4.1	Mechanische Schwingungen	280
4.1.1	Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik	280
4.1.2	Freie ungedämpfte Schwingung	280
4.1.3	Freie gedämpfte Schwingung	281
4.1.3.1	Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)	281
4.1.3.2	Aperiodischer Grenzfall	282
4.1.3.3	Aperiodische Schwingung (Kriechfall)	282
4.1.4	Erzwungene Schwingung	283
4.1.4.1	Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung	283
4.1.4.2	Stationäre Lösung	283
4.2	Elektromagnetische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis	284
5	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	285
5.1	Definition einer linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	285
5.2	Integration der homogenen linearen Differentialgleichung	285
5.2.1	Wronski-Determinante	285
5.2.2	Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	286
5.2.3	Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung	287

6 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	288
6.1 Grundbegriffe	288
6.2 Integration des homogenen linearen Systems	289
6.3 Integration des inhomogenen linearen Systems	290
6.3.1 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung	290
6.3.2 Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren	290
XI Fehler- und Ausgleichsrechnung	292
1 Gaußsche Normalverteilung	292
2 Auswertung einer Meßreihe	293
3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz	296
3.1 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen	296
3.2 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen	298
4 Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz	298
5 Ausgleichskurven	300
5.1 Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate	300
5.2 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	301
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	303
XII Laplace-Transformationen	304
1 Grundbegriffe	304
2 Allgemeine Eigenschaften der Laplace-Transformation	305
2.1 Linearität (Satz über Linearkombinationen)	305
2.2 Ähnlichkeitssatz	306
2.3 Verschiebungssätze	306
2.4 Dämpfungssatz	308
2.5 Ableitungssätze	308
2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion	308
2.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion	309
2.6 Integralsätze	310
2.6.1 Integralsatz für die Originalfunktion	310
2.6.2 Integralsatz für die Bildfunktion	311
2.7 Faltungssatz	311
2.8 Grenzwertsätze	312
3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion	313
4 Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse)	314

5 Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme	320
5.1 Allgemeines Lösungsverfahren	320
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	321
5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ..	322
6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen	323
XIII Vektoranalysis	328
1 Ebene und räumliche Kurven	328
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	328
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	329
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion	329
1.2.2 Tangentenvektor	329
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte	329
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	330
1.3 Bogenlänge einer Kurve	331
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve	331
1.5 Krümmung einer Kurve	332
2 Flächen im Raum	334
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	334
2.2 Flächenkurven	335
2.3 Flächennormale und Flächenelement	335
2.4 Tangentialebene	336
2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$	336
2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x; y)$	337
2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x; y; z) = 0$	337
3 Skalar- und Vektorfelder	338
3.1 Skalarfelder	338
3.2 Vektorfelder	338
4 Gradient eines Skalarfeldes	340
5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	342
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	342
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	343
5.3 Spezielle Vektorfelder	344
6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen	345
6.1 Darstellung in Polarkoordinaten	345
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten	347
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten	350

7	Linien- oder Kurvenintegrale	352
7.1	Linienintegral in der Ebene	352
7.2	Linienintegral im Raum	354
7.3	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals	354
7.4	Konservative Vektorfelder	355
7.5	Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes)	356
8	Oberflächenintegrale	357
8.1	Definition eines Oberflächenintegrals	357
8.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals	358
8.2.1	Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerichten Koordinaten	358
8.2.2	Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern	359
9	Integralsätze von Gauß und Stokes	360
9.1	Gaußscher Integralsatz	360
9.2	Stokes'scher Integralsatz	361
XIV	Wahrscheinlichkeitsrechnung	363
1	Hilfsmittel aus der Kombinatorik	363
1.1	Permutationen	363
1.2	Kombinationen	364
1.3	Variationen	364
2	Grundbegriffe	365
3	Wahrscheinlichkeit	367
3.1	Absolute und relative Häufigkeit	367
3.2	Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	368
3.3	Laplace-Experimente	368
3.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	369
3.5	Multiplikationssatz	369
3.6	Stochastisch unabhängige Ereignisse	370
3.7	Mehrstufige Zufallsexperimente	370
4	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	372
4.1	Zufallsvariable	372
4.2	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	373
4.3	Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung	375
5	Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	377
5.1	Binomialverteilung	377
5.2	Hypergeometrische Verteilung	379
5.3	Poisson-Verteilung	381
5.4	Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle)	382