

Standardmonome für wundervolle Kompaktifizierungen von Gruppen



Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

dem Fachbereich Mathematik der

Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Katrin Appel

im März 2006

Betreuer: Prof. Dr. Peter Littelmann

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20060137

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3A468-20060137>]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	7
1.1 Die wundervolle Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums . . .	7
1.2 Die Kompaktifizierung einer Gruppe	8
1.3 Standardmonomentheorie für Fahnenvarietäten	10
1.4 Standardmonome auf symmetrischen Räumen	13
2 Standardmonome für Gruppenkompaktifizierungen	16
2.1 Kompatibilität mit B -Orbiten	16
2.2 Frobenius-Splitting	20
2.3 Berechnung von Dimensionen	24
2.4 Konstruktion spezieller Eigenschaften	29
3 Symmetrische Räume	34
3.1 $PSL(n+1)/PSO(n+1)$	34
3.2 Beispiel: $PSL(3)/PSO(3)$	41
Ausblick	46
Literaturverzeichnis	48

Einleitung

In dieser Arbeit wird untersucht, inwieweit sich die klassischen Standardmonome auf Fahnenvarietäten auf wundervolle Kompaktifizierungen X von symmetrischen Räumen G/H erweitern lassen. Für den allgemeinen Fall werden einige partielle Resultate erzielt. Im Fall der Kompaktifizierung einer adjungierten Gruppe können konkretere Ergebnisse angegeben werden. Insbesondere wird für ein Geradenbündel \mathcal{L} eine Basis des Raums der globalen Schnitte $H^0(X, \mathcal{L})$ auf X angegeben, die kompatibel mit der Einschränkung auf Abschlüsse beliebiger B -Orbiten in X ist.

Standardmonomentheorie

Unter dem Begriff Standardmonomentheorie (SMT) werden einige spezielle Ergebnisse und Methoden der Darstellungstheorie zusammengefasst. Ein Ziel der SMT ist es, mit kombinatorischen Mitteln jeder endlichdimensionalen Darstellung einer halbeinfachen algebraischen Gruppe G eine Basis zuzuordnen, die aus Gewichtsvektoren besteht und weitere brauchbare Eigenschaften hat. Ist G eine halbeinfache Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k , so wird eine Basis $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ des Raums der globalen Schnitte $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ gesucht. Hier ist \mathcal{L}_λ das zum dominanten Gewicht λ assoziierte Geradenbündel auf der Fahnenvarietät G/P , wobei P die parabolische Untergruppe von G ist, die λ stabilisiert. Die Elemente dieser Basis sollen Gewichtsvektoren sein und sich unter der Einschränkung auf Schubertvarietäten in G/P günstig verhalten. Da nach dem Borel–Weil–Theorem $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda) \cong V(\lambda)^*$ gilt, erhält man hiermit auch eine Basis des Höchstgewichtsmoduls $V(\lambda)$ von G , die schöne geometrische Eigenschaften hat. Die Elemente von $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ werden Standardmonome genannt.

Mit Hilfe dieser Standardmonome lassen sich relativ einfach eine Charakterformel für endlichdimensionale Darstellungen formulieren, Basen von Weyl– und Demazure–Moduln angeben und verschiedene Aussagen über die Geometrie von Schubertvarietäten beweisen.

Der Ursprung der SMT findet sich in der Arbeit von Hodge (siehe [LLS]), der in [HP52] bestimmte Elemente des Koordinatenrings der Grassmannvarietät stand-

ard nennt. Diese Elemente sind durch Standard Young Tableaus, die beispielsweise Fulton in [F97] beschreibt, indiziert und haben besonders schöne Eigenschaften bezüglich der Schubertvarietäten in der Grassmannvarietät. Darauf aufbauend konnten Lakshmibai und Seshadri in Zusammenarbeit mit Musili in einer Reihe von Artikeln (siehe [LS91]) analoge Basen des homogenen Koordinatenrings allgemeinerer Varietäten, nämlich der Fahnenvarietäten G/B und G/P , konstruieren. Hier steht G für eine klassische algebraische Gruppe, B für eine Borelsche und P für eine parabolische Untergruppe von G . Weitere Berechnungen von Standardmonomen für einige exzeptionelle Gruppen führten zu Vermutungen, wie die Charakterformel und die Basisvektoren der Demazure- und Weylmoduln im Fall einer beliebigen halbeinfachen algebraischen Gruppe aussehen (siehe [Mu03], [La03]).

Bewiesen wurden diese Vermutungen schließlich von Littelmann mit Hilfe völlig neuer Methoden (siehe [Se95]). Die erste ist eine Verallgemeinerung der Young Tableaus, bei der die Indexmenge der zu konstruierenden Basis als eine Menge von Pfaden dargestellt wird, auf denen Wurzeloperatoren operieren (siehe beispielsweise [Li94]). Hiermit lässt sich unter anderem die vermutete Charakterformel beweisen. Dass das Pfadmodell mit der Theorie der Quantengruppen in enger Verbindung steht, zeigt sich darin, dass sich die Operation einerseits der Wurzeloperatoren auf den Pfaden und andererseits der Kashiwaraoperatoren auf kristallinen Basen von Darstellungen von Quantengruppen sehr ähnlich sind. Diese Analogie hat Littelmann ausgenutzt, um mit Hilfe eines Umweg über die Darstellungstheorie von Quantengruppen zu bestimmten Pfaden konkrete Pfadvektoren zu konstruieren (siehe [Li98]). Diese bilden eine Basis des Raums der globalen Schnitte und werden auch Standardmonome genannt. Das Besondere an dieser Methode ist, dass sie nicht nur auf alle halbeinfachen algebraischen Gruppen anwendbar ist, sondern sogar allgemeiner auf Kac–Moody–Gruppen.

Symmetrische Räume

Eine weitere Klasse von Räumen, für deren Untersuchung Basen, wie sie in der SMT auftreten, nützlich sein könnten, sind – neben halbeinfachen algebraischen Gruppen und Kac–Moody–Gruppen – die symmetrischen Räume.

Ist G eine halbeinfache komplexe algebraische Gruppe und $\theta : G \rightarrow G$ eine Involution, also ein Automorphismus von G mit $\theta^2 = \text{id}_G$, dann bezeichne H die Untergruppe von G , die aus den Fixpunkten von θ besteht. Unter einem symmetrischen Raum versteht man den Quotienten G/H , betrachtet als algebraische Varietät.

Möchte man nun eine Standardmonomentheorie für den Raum G/H analog der Theorie für G/B und G/P entwickeln, so treten zusätzliche Probleme auf. Zum

Beispiel ist G/H keine projektive Varietät, wie man sie braucht, um den homogenen Koordinatenring, dem die SMT unter anderem eine Basis zuordnet, überhaupt definieren zu können.

Eine besonders elegante Lösung dieses Problems stellt die wundervolle Kompaktifizierung dar, die 1983 in [CP83] von De Concini und Procesi vorgestellt und seither von vielen weiteren Autoren aufgegriffen und verwendet wurde. Hier wird G/H in den projektiven Raum $\mathbb{P}(V(\lambda))$ eingebettet, wobei $V(\lambda)$ der Höchstgewichtsmodul zum höchsten Gewicht λ der Gruppe G ist. Der Abschluss $X = \overline{G/H}$ des Bildes von G/H in $\mathbb{P}(V(\lambda))$ ist eine projektive Varietät und wird wundervolle Kompaktifizierung von G/H genannt.

Eine Eigenschaft dieser Kompaktifizierung X ist, dass sie einen eindeutigen abgeschlossenen G -Orbit enthält, der isomorph zur Fahnenvarietät G/P mit einer parabolischen Untergruppe P von G ist. Daher kann man X auch als Erweiterung von G/P ansehen. Diese Tatsache nutzen Chirivì und Maffei, um die bereits bekannte SMT für G/P auf X auszudehnen. In [CM03] wird eine Basis des homogenen Koordinatenrings $\bigoplus_{\lambda \in \text{Pic}(X)} H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ angegeben, die aus bekannten Standardmonomen auf G/P und weiteren Faktoren, die auf natürliche Weise bei der Kompaktifizierung auftreten, zusammengesetzt ist. Diese Basis ist so konstruiert, dass sie verträglich mit der Zerlegung von X in G -Orbiten ist. Ziel der klassischen SMT ist jedoch eine Basis, die auch mit der feineren Zerlegung in B -Orbiten verträglich ist, damit die Einschränkung der Basis auf Schubertvarietäten eine möglichst einfache und schöne Form hat.

Ausgehend von der von Chirivì und Maffei konstruierten Basis $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ wird in dieser Arbeit zu jedem B -Orbitabschluss Z die Teilmenge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ der Monome, die standard auf Z sind, definiert. Ihre Einschränkung auf Z liefert linear unabhängige Elemente in $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$. Die Beschreibung dieser Teilmenge ist mit rein kombinatorischen Methoden möglich, wobei auf die den Pfadvektoren zu Grunde liegenden Pfade zurückgegriffen wird. Leider bilden die so definierten Monome im Allgemeinen keine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$. Ein Fall, in dem diese Monome kein Erzeugendensystem des gesamten Raumes bilden, ist $G = PSL(n)$, $H = PSO(n)$, $X = \overline{G/H}$ und Z ein B -Orbitabschluss mit Kodimension 1.

In anderen Fällen bilden die Mengen für jeden B -Orbitabschluss Basen. Im Spezialfall der wundervollen Kompaktifizierung einer Gruppe lassen sich sogar sehr viel weitergehende Aussagen machen.

Gruppenkompaktifizierung

Die wundervolle Kompaktifizierung einer adjungierten halbeinfachen algebraischen Gruppe G kann als besonders interessanter Spezialfall der Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums angesehen werden. Um diese zu konstruieren,

betrachtet man die Gruppe $G \times G$ mit der Involution $\theta : G \times G \rightarrow G \times G, (g, h) \mapsto (h, g)$, die die beiden Komponenten des kartesischen Produktes vertauscht. Die Menge der Fixpunkte von θ ist dann die Diagonale $\delta_G = \{(g, g) \mid g \in G\}$ in $G \times G$, und der Quotient $G \times G / \delta_G$ ist isomorph zu G . Auf diese Art kann man für den Fall, dass G über einem algebraischen Körper der Charakteristik Null definiert ist, die Gruppe G selbst als symmetrischen Raum betrachten und zu diesem die wundervolle Kompaktifizierung $X = \overline{G}$ konstruieren. Für den Fall positiver Charakteristik konstruiert Strickland in [St87] die wundervolle Kompaktifizierung der Gruppe auf ähnliche Weise.

Über die Struktur von X ist in diesem Spezialfall bereits sehr viel bekannt. So beschreibt Springer in [Sp02] die $B \times B$ -Orbiten sowie deren Abschlussrelationen. Zudem kann man hier als Verallgemeinerung der klassischen Schubertvarietäten sogenannte große Schubertvarietäten in X definieren. Deren Geometrie untersuchen beispielsweise Brion und Polo in [BP00].

Ist $X = \overline{G}$ die wundervolle Kompaktifizierung einer Gruppe und Z der Abschluss eines beliebigen $B \times B$ -Orbits in X , so bilden die Einschränkungen der Elemente von $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ sogar eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$. Um dies zu zeigen, wird verwendet, dass es in positiver Charakteristik ein Frobenius-Splitting σ gibt, dass X kompatibel mit den großen Schubertvarietäten spaltet. Mit Hilfe der bekannten Kombinatorik der $B \times B$ -Orbitabschlüsse in X , lässt sich zeigen, dass σ sogar kompatibel mit allen $B \times B$ -Orbitabschlüssen ist. Hieraus folgt wiederum, dass — auch in Charakteristik Null — alle Einschränkungsabbildungen surjektiv sind, und die höheren Kohomologiegruppen verschwinden. Diese Folgerungen werden gebraucht, um zu zeigen, dass für eine geeignete Filtrierung von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ der graduierte Modul die Gestalt

$$\mathrm{gr}_n H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \in L} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu)$$

für eine von λ abhängige Menge L von dominanten Gewichten μ hat. Die Varietät $Z \cap Y$ ist der Schnitt des $B \times B$ -Orbitabschlusses Z mit dem eindeutigen abgeschlossenen $G \times G$ -Orbit $Y \cong G/B \times G/B$. Die rechte Seite der Gleichung lässt sich mit Hilfe der Standardmonome auf $G/B \times G/B$ beschreiben. Die Behauptung kann jetzt durch einen einfachen Vergleich der Dimensionen bewiesen werden.

Somit ist gezeigt, dass im Fall $X = \overline{G}$ die von Chirivì und Maffei beschriebene Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ verträglich mit der Einschränkung auf beliebige $B \times B$ -Orbitabschlüsse in X ist, und welche Elemente von $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ für einen gegebenen $B \times B$ -Orbitabschluss Z auf eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ eingeschränkt werden.

Standardmonome

Leider besitzen diese Einschränkungen nur einen Teil der Eigenschaften, die klassische Standardmonome auszeichnen. Hier gilt, dass die Standardmonome, die auf einer Schubertvarietät $X(w)$ in G/B nicht standard sind, eine Basis des Kerns der Einschränkungsabbildung $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda)$ bilden. Dies ist für die von Chirivì und Maffei definierten Schnitte im Allgemeinen nicht der Fall. Hier kann es durchaus einen Schnitt in $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ geben, der auf einem Orbitabschluss Z nicht standard sind, dessen Einschränkung auf Z aber nicht verschwindet.

Betrachtet man allerdings die Definition der Menge $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ genauer, so stellt man fest, dass hier bei der Konstruktion der Standardmonome auf X zu einem Standardmonom $p_\pi^{(\lambda)}$ auf $G/B \times G/B$ eine beliebige Fortsetzung $x_\pi^{(\lambda)}$ auf X gewählt wird. Diese Freiheit kann man ausnutzen, um Fortsetzungen so geschickt zu wählen, dass Einschränkungen der Elemente, die auf einem $B \times B$ -Orbitabschluss nicht standard sind, zu Null werden. In der Arbeit werden Fortsetzungen auf X der Standardmonome auf $G/B \times G/B$ mit dieser Eigenschaft induktiv konstruiert.

Inhalt der Abschnitte

Im ersten Kapitel werden die bereits bekannten Tatsachen aus den unterschiedlichen Bereichen zusammengefasst. Zunächst wird kurz die wundervolle Kompaktifizierung X eines symmetrischen Raums G/H aus [CP83] beschrieben. Hier wird nicht die vollständige Konstruktion von X angegeben, sondern nur die später benötigte Notation festgelegt und die Eigenschaften der Kompaktifizierung genannt. Die Kompaktifizierung einer Gruppe \overline{G} wird als Spezialfall vorgestellt. Für diesen Fall werden insbesondere die $B \times B$ -Orbiten sowie ihre Abschlussrelationen angegeben.

Abschnitt 1.3 ist der Standardmonomentheorie gewidmet. Hier wird der Zusammenhang von Pfaden, Basen von Darstellungen der Gruppe G und globalen Schnitten auf G/P in zu Gewichten assoziierte Geradenbündel erklärt. Außerdem findet man hier die explizite Beschreibung der geometrischen Eigenschaften der Standardmonome. Es wird angegeben, wie sich die Schnitte unter der Einschränkung auf Schubertvarietäten in G/P verhalten.

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels werden schließlich die beiden Theorien zusammengeführt. Dazu wird die Arbeit von Chirivì und Maffei zusammengefasst, die einerseits die Struktur der wundervollen Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums $\overline{G/H}$ und andererseits die Standardmonome auf G/P benutzt, um neue Standardmonome auf $\overline{G/H}$ zu definieren. In diesem Abschnitt werden zunächst die benötigten grundlegenden Aussagen über wundervolle Kompaktifizierungen angegeben, Notation festgelegt und die neuen Standardmonome definiert.

Im zweiten Kapitel wird untersucht, inwieweit die von Chiriví und Maffei konstruierten Standardmonome mit der Einschränkung auf Abschlüsse von B -Orbiten in X verträglich sind. Dazu wird im ersten Abschnitt für jeden B -Orbit in X eine Teilmenge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ von $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ angegeben, deren Einschränkung auf den Abschluss Z des Orbits eine linear unabhängige Menge in $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ ist. Das Ziel ist zu zeigen, dass im Fall der Kompaktifizierung einer Gruppe $X = \overline{G}$ die Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ sogar eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ darstellt. Dazu werden in den folgenden Abschnitten die technischen Voraussetzungen geschaffen.

Das Ergebnis des Abschnitts 2.2 ist, dass es ein Frobenius-Splitting gibt, das $X = \overline{G}$ kompatibel mit allen Abschlüssen von B -Orbiten spaltet. Hieraus folgen einige Tatsachen, die im darauf folgenden Abschnitt verwendet werden, um die Dimension von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ zu berechnen. Diese stimmt mit der Anzahl der Elemente in $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ überein.

Der letzte Abschnitt des zweiten Kapitels nutzt aus, dass die Fortsetzung x_π des Standardmonoms p_π auf X in der Definition von $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ frei wählbar ist. Es wird gezeigt, dass sich bestimmte Fortsetzungen y_π so konstruieren lassen, dass diese eine weitere Eigenschaft mit den klassischen Standardmonomen gemeinsam haben.

Das dritte Kapitel schließlich zeigt, dass die linear unabhängige Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ für die Kompaktifizierung eines allgemeinen symmetrischen Raums keine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ darstellt. Dafür wird das Beispiel $G/H = PSL(n)/PSO(n)$ explizit ausgeführt. Hier kann man Gewichte λ und Abschlüsse Z von B -Orbiten angeben, für die $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ nicht den gesamten Raum $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ erzeugt.

Die Vorgehensweise beim Nachweis, dass $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ in diesem Fall kein Erzeugendensystem ist, wird veranschaulicht durch das Beispiel $G/H = PSL(3)/PSO(3)$, für das die Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ und der Raum $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ für ein konkretes Gewicht λ beschrieben werden.

Danksagungen

Ich danke Peter Littelmann für die gute Betreuung. Er hat dieses interessante Thema vorgeschlagen und war stets bereit, Entwürfe zu lesen, Fehler zu finden und mir kompetente Ratschläge zu geben. Des Weiteren danke ich Michel Brion für sein Interesse, sowie einige nützliche Hinweise und Anmerkungen. Mein besonderer Dank gilt den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Algebra/Zahlentheorie an der Universität Wuppertal und hiervon insbesondere Christoph Schwer für die geduldige Beantwortung vieler Fragen und hilfreiche Diskussionen.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Die wundervolle Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums

Sei G eine adjungierte halbeinfache algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Seien $\theta : G \rightarrow G$ eine Involution, also ein Automorphismus von G mit $\theta^2 = \text{id}_G$, und $H = G^\theta$ die Untergruppe von G , die aus den Fixpunkten von θ besteht. De Concini und Procesi definieren in [CP83] die wundervolle Kompaktifizierung des symmetrischen Raums G/H , bei der der Quotient G/H in einen projektiven Raum eingebettet wird.

Sei dazu T ein Torus in G , der stabil unter θ ist, $T_0 = T^\theta$ seien die θ -stabilen Elemente von T und $T_1 = \{t \in T \mid \theta(t) = t^{-1}\}$. Hierbei sei T so gewählt, dass $l := \dim T_1$ maximal ist. Dann heißt l auch der **Rang** von G/H .

Zerlege das Wurzelsystem Φ in $\Phi_0 := \Phi^\theta$ und $\Phi_1 := \Phi \setminus \Phi_0$. Die positiven Wurzeln Φ^+ können so gewählt werden, dass $\theta(\alpha) \in \Phi^-$ für alle $\alpha \in \Phi^+ \cap \Phi_1$ (Lemma 1.2 in [CP83]). Dazu seien Δ die einfachen Wurzeln, $\Delta_0 := \Delta \cap \Phi_0$ und $\Delta_1 := \Delta \cap \Phi_1$. Definiert man $\tilde{\alpha} := \alpha - \theta(\alpha)$ für $\alpha \in \Delta_1$, so kann man Δ_1 so ordnen, dass $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l$ paarweise verschieden sind. Setze dann $\tilde{\Delta} := \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l\}$.

Sei λ' ein reguläres spezielles dominantes Gewicht, das heißt $\lambda' = \sum n_i \omega_i$ mit $n_i > 0$, wobei ω_i das fundamentale Gewicht zu $\alpha_i \in \Delta_1$ ist, und $\theta(\lambda') = -\lambda'$. Definiert man $\lambda := 2\lambda'$, so enthält die Höchstgewichtsdarstellung $V(\lambda)$ von G ein bis auf skalare Vielfache eindeutiges Element $h' \neq 0$, das invariant unter H ist (Proposition 1.7 in [CP83]). Bezeichnet nun h_λ die Klasse von h' im projektiven Raum $\mathbb{P}(V(\lambda))$, so ist die Kompaktifizierung X von G/H definiert als der Abschluss von $G \cdot h_\lambda$ in $\mathbb{P}(V(\lambda))$.

Diese Kompaktifizierung X ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Gewichts λ (Abschnitt 4 in [CP83]). Des Weiteren hat sie die folgenden Eigen-

schaften:

Proposition 1.1 (Theorem 3.1 aus [CP83]):

Für die wundervolle Kompaktifizierung X des symmetrischen Raums G/H gilt:

- 1) X ist glatt.
- 2) $X \setminus G \cdot h_\lambda$ ist Vereinigung von glatten Divisoren S_1, \dots, S_l , die sich transversal schneiden.
- 3) Es gibt eine Bijektion zwischen den G -Orbiten in X und den Teilmengen der Indexmenge $D := \{1, 2, \dots, l\}$.
- 4) Der eindeutige abgeschlossene G -Orbit $Y := \bigcap_{i=1}^l S_i$ ist isomorph zu G/P , wobei P eine parabolische Untergruppe von G ist.

Die Abschlüsse der G -Orbiten in X sind genau alle auftretenden Schnitte von Divisoren

$$X_I := \bigcap_{i \notin I} S_i,$$

wobei $I \subseteq D$. Insbesondere hat man $X_D = X$ und $X_\emptyset = Y$. Die entsprechenden G -Orbiten X_I° mit $I \subseteq D$ und $\overline{X_I^\circ} = X_I$ sind

$$X_I^\circ = X_I \setminus \bigcap_{J \subsetneq I} X_J.$$

X setzt sich also aus 2^l G -Orbiten zusammen.

In [CS99] konstruieren De Concini und Springer die wundervolle Kompaktifizierung analog in positiver Charakteristik. Sei G eine halbeinfache adjungierte Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p > 2$. Dann gibt es einen G -Modul V , so dass sich G/H in den projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$ einbetten lässt, und der Abschluss von G/H in $\mathbb{P}(V)$ die Eigenschaften aus Proposition 1.1 hat. Dieser Abschluss ist die wundervolle Kompaktifizierung von G/H .

1.2 Die Kompaktifizierung einer Gruppe

Ein wichtiger Spezialfall dieser Konstruktion ist die wundervolle Kompaktifizierung einer Gruppe. Hier betrachtet man das kartesische Produkt einer halbeinfachen adjungierten algebraischen Gruppe G mit sich selbst und die Involution

$$\theta : G \times G \rightarrow G \times G, \quad \theta((g_1, g_2)) = (g_2, g_1).$$

Der Quotient $G \times G / (G \times G)^\theta$ ist dann isomorph zur Gruppe G selbst, und man erhält mit obiger Konstruktion die Kompaktifizierung $X = \overline{G}$ von G .

Diese Kompaktifizierung erhält man mit obiger Konstruktion für algebraische Gruppen G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0. Strickland gibt in [St87] eine Konstruktion von \overline{G} an, die auch im Fall $\text{char } k = p > 0$ funktioniert.

Der Rang l der $G \times G$ -Varietät $X = \overline{G}$ ist gleich dem Rang der Gruppe G , also die Anzahl der einfachen Wurzeln $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Zu dieser Wahl der positiven Wurzeln sei B die Borelsche Untergruppe von G .

Bemerkung 1.1:

Tatsächlich kann man die Elemente $\tilde{\alpha}_i$ von $\tilde{\Delta}_{G \times G}$ mit den einfachen Wurzeln α_i der Gruppe G identifizieren. Ist T ein maximaler Torus von G , Φ das Wurzelsystem mit positiven Wurzeln Φ^+ und einfachen Wurzeln $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, dann ist $T \times T$ ein θ -stabiler maximaler Torus und $\Phi \dot{\cup} \Phi = \{(\alpha, 0), (0, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Phi\}$ das Wurzelsystem von $G \times G$. Die Involution θ operiert auf $\Phi \dot{\cup} \Phi$ durch Vertauschen der Komponenten. Da es keine θ -invariante Wurzel gibt, ist $(\Phi \dot{\cup} \Phi)_1 = \Phi \dot{\cup} \Phi$. Wählt man als positive Wurzeln $(\Phi \dot{\cup} \Phi)^+ := \Phi^- \dot{\cup} \Phi^+ = \{(-\beta, 0), (0, \alpha) \mid \beta, \alpha \in \Phi^+\}$, so gilt $\theta(\gamma) \in \Phi^+ \dot{\cup} \Phi^- = (\Phi \dot{\cup} \Phi)^-$ für jedes $\gamma \in (\Phi \dot{\cup} \Phi)^+$. Für die einfachen Wurzeln $\Delta_{G \times G} = \Delta^- \dot{\cup} \Delta = \{(-\beta, 0), (0, \alpha) \mid \beta, \alpha \in \Delta\} = (\Delta^- \dot{\cup} \Delta)_1$ von $G \times G$ gilt $(0, \alpha) - \theta((0, \alpha)) = (-\alpha, \alpha)$ mit $\alpha \in \Delta$ beziehungsweise $(-\beta, 0) - \theta((-\beta, 0)) = (-\beta, \beta)$ mit $\beta \in \Delta$. Es ergibt sich

$$\tilde{\Delta}_{G \times G} = \{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l\} = \{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \Delta\} \cong \Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}. \quad \diamond$$

Sowohl die $G \times G$ -Orbiten, als auch die $B \times B$ -Orbiten in X sowie deren Inklusions- und Abschlussrelationen lassen sich explizit angeben.

Die $G \times G$ -Orbiten von X stehen in Bijektion zu den Teilmengen I von $D = \{1, \dots, l\}$. Ihre Abschlüsse werden mit X_I bezeichnet. Der eindeutige abgeschlossene Orbit X_\emptyset wird auch mit Y bezeichnet und ist isomorph zu $(G \times G) / (B \times B) \cong G/B \times G/B$. Für zwei Teilmengen $I, J \subseteq \Delta$ gilt: $I \subseteq J \Leftrightarrow X_I \subseteq X_J$.

In jedem $G \times G$ -Orbit gibt es einen **Basispunkt** h_I , der durch folgende Eigenschaften eindeutig festgelegt ist:

- 1) $(B \times B^-) \cdot h_I$ liegt dicht in X_I und
- 2) es gibt einen Kocharakter γ von T mit $h_I = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$.

Proposition 1.2 (Lemma 1.3 in [Sp02]):

Die $B \times B$ -Orbiten in X lassen sich folgendermaßen beschreiben:

- 1) Die $B \times B$ -Orbiten in X haben die Form

$$[I, x, w] := (B \times B) \cdot (x, w) \cdot h_I,$$

wobei $I \subseteq D$, $x \in W^I$ und $w \in W$. Hier ist W die Weylgruppe von G , W_I die Untergruppe von W , die von den einfachen Spiegelungen s_i zu den Wurzeln α_i mit $i \in I$ erzeugt wird, und W^I die Menge der minimalen Repräsentanten von W/W_I .

- 2) Die Zuordnung zwischen $\{[I, x, w] \mid I \subseteq D, x \in W^I, w \in W\}$ und der Menge der $B \times B$ -Orbiten in X ist eine Bijektion.
- 3) Für die Dimension eines $B \times B$ -Orbits gilt

$$\dim [I, x, w] = l(w_0) - l(x) + l(w) + |I|.$$

Hier bezeichnet $l(w)$ die Länge des Weylgruppenelements w .

Auf der Menge der $B \times B$ -Orbiten ist eine Halbordnung definiert durch

$$[I, x', w'] \leq [J, x, w] \iff \overline{[I, x', w']} \subseteq \overline{[J, x, w]}.$$

Die Abschlüsse der $B \times B$ -Orbiten $[\emptyset, x, w]$ mit $x, w \in W$ sind die bekannten Schubertvarietäten in $Y = G/B \times G/B$. Bezeichnet $S(w)$ die Schubertvarietät in G/B zum Weylgruppenelement w , so hat man

$$\overline{[\emptyset, x, w]} \cong S(xw_0) \times S(w).$$

Die Abschlüsse der $B \times B$ -Orbiten $[D, \text{id}, w]$ mit $w \in W$ heißen **große Schubertvarietäten** und werden mit $X(w)$ bezeichnet.

Proposition 1.3 (Proposition 2.4 in [Sp02]):

Seien $[I, x', w']$ und $[J, x, w]$ $B \times B$ -Orbiten in X mit $I, J \subseteq D$, $x' \in W^I$, $x \in W^J$ und $w', w \in W$. Dann gilt $[I, x', w'] \leq [J, x, w]$ genau dann, wenn

- 1) $I \subseteq J$ und
- 2) es gibt ein $u \in W_I$ und ein $v \in W_J \cap W^I$ mit
 - 1) $l(wv) = l(w) + l(v)$,
 - 2) $x' \geq xvu^{-1}$ und
 - 3) $w'u \leq wv$.

Hier steht \leq für die Bruhatordnung auf der Weylgruppe.

1.3 Standardmonomentheorie für Fahnenvarietäten

Sei G eine einfach zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Bei der Standardmonomentheorie geht

es darum, für den Höchstgewichtsmodul $V(\lambda)$ von G zum dominanten Gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ eine Basis mit schönen Eigenschaften zu konstruieren. Einen wichtigen Beitrag hierzu liefert das Pfadmodell, das zum Beispiel in [LLM98] ausführlich vorgestellt wird.

Pfade sind stückweise lineare Funktionen $\pi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$, auf denen sogenannte Wurzeloperatoren $\{e_\alpha, f_\alpha \mid \alpha \text{ einfache Wurzel von } G\}$ operieren. Eine ausgezeichnete Teilmenge bilden die LS-Pfade. Zu einem dominanten Gewicht λ ist B_λ die Menge der LS-Pfade der Form λ . Diese erhält man durch Anwenden der Wurzeloperatoren auf den Pfad π_λ , der den Ursprung direkt mit λ verbindet. $B_\lambda \cup \{0\}$ ist die kleinste Menge, die stabil unter den Wurzeloperatoren ist und π_λ enthält.

Jeder LS-Pfad π endet in einem Gewicht von G , das heißt $\pi(1) \in \Lambda$. Die Richtungen der linearen Teilstücke sind mit Weylgruppenelementen indiziert, die Startrichtung wird mit $i(\pi) \in W$ bezeichnet. Ist λ nicht regulär, so ist $i(\pi) \in W^\lambda$ ein minimaler Repräsentant eines Elements aus W/W_λ , wobei W_λ der Stabilisator von λ ist.

Für die Menge B_λ der LS-Pfade der Form λ gilt die Charakterformel

$$\text{char } V(\lambda) = \sum_{\pi \in B_\lambda} e^{\pi(1)}.$$

Die LS-Pfade der Form λ können also verwendet werden als Indexmenge für eine Basis des einfachen Moduls $V(\lambda)$, die aus Gewichtsvektoren besteht. Littellmann konstruiert in [Li98] zu jedem LS-Pfad $\pi \in B_\lambda$ mit Hilfe von Quantengruppen an Einheitswurzeln einen sogenannten Pfadvektor $p_\pi \in V(\lambda)^*$ mit Gewicht $-\pi(1)$.

Seien $\lambda \in \Lambda^+$ ein dominantes Gewicht und P die dazugehörige parabolische Untergruppe von G , das heißt $P = \text{Stab}_G(kv_\lambda)$, wobei V_λ ein Höchstgewichtsvektor in $V(\lambda)$ ist. Ist λ regulär, so ist $P = B$. Da das zu λ assoziierte Geradenbündel $\mathcal{L}_\lambda = G \times_P k_{-\lambda}$ linearisiert werden kann, hat $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ eine natürliche G -Modulstruktur, und es gilt $V(\lambda)^* \cong H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$. Daher bilden die Pfadvektoren p_π mit $\pi \in B_\lambda$ eine Basis von $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ aus Gewichtsvektoren und werden auch Standardmonome genannt. Sie haben weiterhin die Eigenschaft, dass sie verträglich mit der Einschränkung von G/P auf Schubertvarietäten sind. Um das präzise zu formulieren, muss definiert werden, wann ein Pfadvektor standard auf einer Schubertvarietät heißen soll.

Seien jetzt $\lambda \in \Lambda^+$, P die Parabolische zu λ und $Z = \bigcup X(\tau_i)$ eine Vereinigung von Schubertvarietäten in G/P .

Definition 1.1:

Ist $Z = \bigcup X(\tau_i)$ die Vereinigung der Schubertvarietäten $X(\tau_i)$ in G/P mit $\tau_i \in W^\lambda$, so heißt der LS-Pfad $\pi \in B_\lambda$ **standard auf Z** , wenn $i(\pi) \leq \tau_i$ für

mindestens ein τ_i gilt. Hier ist $i(\pi) \in W^\lambda$ die erste Richtung des Pfades π und \leq die Bruhatordnung auf der Weylgruppe.

Der zugehörige Pfadvektor $p_\pi \in H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$ heißt **standard auf Z** , wenn π standard auf Z ist.

Proposition 1.4 (Theorem 5.3, Corollary 5.2, Theorem 8.6 in [Li98]):

Mit obigen Bezeichnungen gilt:

- 1) Die Pfadvektoren $\{p_\pi \mid \pi \in B_\lambda\}$ bilden eine Basis von $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda)$.
- 2) $\{p_\pi \mid \pi \in B_\lambda, \pi \text{ standard auf } Z\}$ ist eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z)$.
- 3) $\{p_\pi \mid \pi \in B_\lambda, \pi \text{ nicht standard auf } Z\}$ ist eine Basis des Kerns der Einschränkungabbildung $H^0(G/P, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z)$.

Ist $\lambda \in \Lambda^+$ nicht regulär, so ist für $\pi \in B_\lambda$ die Notation standard auf Vereinigungen von Schubertvarietäten in G/P definiert, wobei $P \supsetneq B$ die Parabolische zu λ ist. Für wundervolle Kompaktifizierungen werden auf Schubertvarietäten in G/B auch Standardmonome der Form λ für nicht reguläre Gewichte λ benötigt.

Definition 1.2:

Sei P die Parabolische zu einem dominanten Gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ und $\pi \in B_\lambda$. Ist $X(\tau)$ die Schubertvarietät zu $\tau \in W$ in G/B , so heißen der Pfad π und der zugehörige Pfadvektor p_π **standard auf $X(\tau)$** , wenn $i(\pi) \leq \tau$ gilt. Hier ist die erste Richtung $i(\pi) \in W^\lambda$ des Pfades ein minimaler Repräsentant in W eines Elements aus W/W_λ . Der Pfad π und der Pfadvektor p_π heißt **standard auf einer Vereinigung von Schubertvarietäten $\bigcup X(\tau_i)$ in G/B** , wenn π und p_π mindestens auf einer Schubertvarietät $X(\tau_i)$ standard sind.

Mit Hilfe des kanonischen Epimorphismus $\text{pr} : G/B \rightarrow G/P$ lässt sich diese Definition wie folgt umschreiben: Der Pfad $\pi \in B_\lambda$ und der Pfadvektor p_π heißen standard auf der Vereinigung von Schubertvarietäten Z in G/B genau dann, wenn sie standard auf $\text{pr}(Z) \subseteq G/P$ sind. Nach Theorem 32 aus [LL03] bilden die so definierten Standardmonome ebenfalls eine Basis der Schnitte auf Z , es gilt also

$$H^0(Z, \text{pr}^*\mathcal{L}_\lambda) = H^0(\text{pr}(Z), \mathcal{L}_\lambda).$$

Das inverse Bild $\text{pr}^*\mathcal{L}_\lambda$ wird auch einfach mit \mathcal{L}_λ bezeichnet.

Hat man die Pfadvektoren zu den dominanten Gewichten $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ gegeben, lassen sich daraus rein kombinatorisch auch Basisvektoren zu den Gewichten $n\lambda$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda + \mu$ konstruieren. Dazu betrachtet man Produkte von n Pfadvektoren der Form λ beziehungsweise je einem Pfadvektor zu λ und einem zu μ und diese als Schnitte in $H^0(X, \mathcal{L}_{n\lambda})$ beziehungsweise $H^0(X, \mathcal{L}_{\lambda+\mu})$. Durch kombinatorische Betrachtungen der zu Grunde liegenden Pfade lässt sich eine Teilmenge

dieser Produkte definieren, die eine Basis des Raums der Schnitte bildet. Deren Elemente werden ebenfalls Standardmonome genannt. Im Allgemeinen sind das jedoch nicht dieselben Elemente wie die direkt zum Gewicht $n\lambda$ beziehungsweise $\lambda + \mu$ konstruierten Pfadvektoren. Auch für diese Standardmonome lässt sich die Eigenschaft standard auf einer Vereinigung von Schubertvarietäten Z definieren (siehe zum Beispiel [LLM98] Definition 7.1 und Definition 8.1 oder Definition 6.4 in [Li98]). In diesen Fällen gilt:

Proposition 1.5 (Theorem 7.2 in [LLM98], nicht explizit in [Li98]):

Die aus Produkten von n Pfadvektoren der Form λ konstruierten Standardmonome bilden eine Basis von $H^0(G/P, \mathcal{L}_{n\lambda})$. Die Teilmenge der Standardmonome, die außerdem standard auf Z sind, bilden eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_{n\lambda})$, der Rest eine Basis des Kerns der Einschränkungabbildung $H^0(G/P, \mathcal{L}_{n\lambda}) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_{n\lambda})$.

Proposition 1.6 (Theorem 8.2 in [LLM98] oder Theorem 6.4 in [Li98]):

Die aus Produkten je eines Pfadvektors der Form λ und μ konstruierten Standardmonome bilden eine Basis von $H^0(G/P, \mathcal{L}_{\lambda+\mu})$. Die Teilmenge der Standardmonome, die außerdem standard auf Z sind, bilden eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda+\mu})$.

Bemerkung 1.2:

Im Fall von Proposition 1.6 liegen die Standardmonome, die nicht standard auf Z sind, im Allgemeinen nicht im Kern der Einschränkungabbildung $H^0(G/P, \mathcal{L}_{\lambda+\mu}) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda+\mu})$!

1.4 Standardmonome auf symmetrischen Räumen

Sei nun $X = \overline{G/H}$ die wundervolle Kompaktifizierung eines symmetrischen Raumes. Da der eindeutige abgeschlossene G -Orbit Y in X isomorph zu G/P ist, kann X als eine Erweiterung von G/P angesehen werden. In [CM03] konstruieren Chiriví und Maffei eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L})$ für $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ aus Standardmonomen, die Fortsetzungen der Standardmonome auf G/P sind.

Zu der adjungierten Gruppe G sei nun \tilde{G} die einfach zusammenhängende Überdeckung mit $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$. Dann ist X auch eine \tilde{G} -Varietät, und jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ kann \tilde{G} -linearisiert werden (siehe Abschnitt 8.1 in [CP83]). So erhält $H^0(X, \mathcal{L})$ die Struktur eines \tilde{G} -Moduls.

Proposition 1.7 (Proposition 8.1 aus [CP83]):

Die Einschränkungabbildung $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ ist injektiv.

Da $\text{Pic}(Y) \cong \Lambda$, kann $\text{Pic}(X)$ mit einem Untergitter Γ des Gewichtegitters Λ von G identifiziert werden. Dieses Untergitter wird erzeugt von den dominanten

Gewichten $\lambda \in \Lambda^+$, für die der Höchstgewichtsmodul $V(\lambda)$ Elemente enthält, die stabil unter $\tilde{H} = \pi^{-1}(G^\theta)$ sind (Lemma 4.6 in [CS99]). Eine explizite Beschreibung von Γ findet man in [CS99], Abschnitt 4.

Bemerkung 1.3:

Im Fall der Kompaktifizierung einer Gruppe $X = \overline{G}$ ist $\text{Pic}(X)$ isomorph zum Untergitter $\Gamma = \{(-w_0\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \cong \Lambda$ von $\Lambda \times \Lambda$ (Lemma 2.4 in [St87]). Die Picardgruppe von X kann also mit dem Gewichtegitter Λ der Gruppe G identifiziert werden. Mit \mathcal{L}_λ werde das Geradenbündel auf X bezeichnet, dessen Einschränkung auf Y das Geradenbündel $\mathcal{L}_{-w_0\lambda} \boxtimes \mathcal{L}_\lambda$ auf $G/B \times G/B$ ist. Hier wird das Geradenbündel \mathcal{L}_λ auf G/B^- identifiziert mit dem Geradenbündel $\mathcal{L}_{w_0\lambda}$ auf G/B . So entspricht das Geradenbündel $\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}_i} = \mathcal{L}_{-\alpha_i} \boxtimes \mathcal{L}_{\alpha_i}$ auf $G/B^- \times G/B$ dem Geradenbündel \mathcal{L}_{α_i} auf X , und man hat wie in Bemerkung 1.1 $\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}_i} = \mathcal{L}_{\alpha_i}$. \diamond

Notation:

Sei $X = \overline{G/H}$ und $\lambda \in \Lambda$ ein Gewicht von G . Für ein weiteres Gewicht $\mu \in \Lambda$ definiere

$$\mu \leq \lambda \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \mu + \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i = \lambda.$$

Hier sind $\tilde{\alpha}_i$ die Elemente von $\tilde{\Delta} = \{\alpha - \theta(\alpha) \mid \alpha \in \Delta_1\}$. \diamond

Bemerkung 1.4:

Aus der Beschreibung des Untergitters Γ folgt, dass $\alpha - \theta(\alpha) \in \text{Pic}(X)$ für alle $\alpha \in \Delta_1$ (siehe Remark 8.1 in [CP83]). Es gilt also $\tilde{\alpha}_i \in \text{Pic}(X)$ für alle $i = 1, \dots, l$ und damit

$$\lambda \in \Gamma, \mu \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad \mu \in \Gamma. \quad \diamond$$

Proposition 1.8 (Theorem 8.3 aus [CP83]):

Sei $\lambda \in \Gamma \cong \text{Pic}(X)$. Dann gilt:

$$H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mu \in \Lambda^+ \text{ mit } \mu \leq \lambda$$

Diese Proposition impliziert insbesondere, dass $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \Gamma^+ = \Gamma \cap \Lambda^+$. Es gilt aber auch $H^0(X, \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}_i}) \neq 0$, da $\mu = 0$ die Bedingungen von Proposition 1.8 erfüllt.

Proposition 1.9 (Corollary 8.2 aus [CP83]):

Für jedes $i = 1, \dots, l$ gibt es einen bis auf skalare Vielfache eindeutigen G -invarianten Schnitt $\sigma_i \in H^0(X, \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}_i})$, dessen Divisor S_i ist.

Proposition 1.10 (Corollary 1.8 in [CM03]):

Für alle $\lambda \in \Gamma^+$ ist die Einschränkungabbildung $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_\lambda)$ surjektiv.

Ist $\lambda \in \Gamma^+$, dann gibt es zu jedem dominanten $\mu \leq \lambda$ und jedem LS-Pfad $\pi \in B_\mu$ einen Pfadvektor $p_\pi^{(\mu)} \in H^0(Y, \mathcal{L}_\mu)$. Wähle nun zu jedem solchen $p_\pi^{(\mu)}$ eine beliebige Fortsetzung auf X , das heißt ein $x_\pi^{(\mu)} \in H^0(X, \mathcal{L}_\mu)$ mit $x_\pi^{(\mu)}|_Y = p_\pi^{(\mu)}$.

Ist $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i$ und $\pi \in B_\mu$, so ist

$$\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} := \sigma_1^{n_1} \cdots \sigma_l^{n_l} x_\pi^{(\mu)} \in H^0(X, \mathcal{L}_{\mu+n_1\tilde{\alpha}_1+\dots+n_l\tilde{\alpha}_l}) = H^0(X, \mathcal{L}_\lambda).$$

Proposition 1.11 (Theorem 3.3 aus [CM03]):

Die Menge $\mathcal{M}^{(\lambda)} := \{\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} \mid \mu \leq \lambda \text{ dominant, } \pi \in B_\mu\}$ ist eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$.

Die folgende Proposition zeigt, dass diese Basis verträglich mit der Unterteilung von X in G -Orbiten ist.

Für den Abschluss X_I des G -Orbits zu $I \subseteq D$ gilt $X_I = \bigcap_{i \notin I} S_i$. Somit ist die Einschränkung des G -invarianten Schnitts σ_i auf X_I genau dann ungleich Null, wenn $i \in I$ gilt. Auf dem eindeutigen abgeschlossenen Orbit $X_\emptyset = Y$ gilt insbesondere $\sigma_1|_Y = \dots = \sigma_l|_Y = 0$.

Definition 1.3:

Seien X_I mit $I \subseteq D$ der Abschluss eines G -Orbits in X und $\lambda, \mu \in \Gamma^+$ dominante Gewichte mit $\mu \leq \lambda$ und $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i$, wobei $n_i \in \mathbb{N}_0$ für alle $i \in D$. Dann heißt $\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} \in \mathcal{M}^{(\lambda)}$ mit $\pi \in B_\mu$ **standard auf X_I** , wenn $n_i = 0$ für alle $i \notin I$.

Proposition 1.12 (Corollary 3.4 aus [CM03]):

Sei X_I mit $I \subseteq D$ der Abschluss eines G -Orbits in X . Dann bilden die Einschränkungen auf X_I der Elemente der Menge

$$\mathcal{M}_{X_I}^{(\lambda)} := \{\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} \in \mathcal{M}^{(\lambda)} \text{ standard auf } X_I\}$$

eine Basis von $H^0(X_I, \mathcal{L}_\lambda)$.

Kapitel 2

Standardmonome für Gruppenkompaktifizierungen

2.1 Kompatibilität mit B -Orbits

Es sei X die wundervolle Kompaktifizierung des symmetrischen Raumes G/H mit allen Bezeichnungen des letzten Kapitels. In diesem Abschnitt wird auf der Grundlage der Standardmonome $\mathcal{M}^{(\lambda)}$, die nach Proposition 1.11 eine Basis des \tilde{G} -Moduls $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ bilden und mit der Einschränkung auf X_I für $I \subseteq D$ verträglich sind, eine Menge linear unabhängiger Elemente im \tilde{B} -Modul $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ definiert, wobei Z der Abschluss eines beliebigen B -Orbits in X ist.

Zur adjungierten Gruppe G sei wieder \tilde{G} die einfach zusammenhängende Überdeckung mit $\tilde{\pi} : \tilde{G} \rightarrow G$, so dass $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ eine \tilde{G} -Modulstruktur hat. Ist Z der Abschluss eines B -Orbits in X und \tilde{B} das Urbild von B unter $\tilde{\pi}$, so ist $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ ein \tilde{B} -Modul.

Notation:

Der Notation aus Abschnitt 1.4 werden für die folgende Betrachtungen noch einige praktische Schreibweisen hinzugefügt. Sei $\lambda \in \Gamma^+ \cong \text{Pic}(X)^+$ ein dominantes Gewicht. Für ein Gewicht $\mu \in \Lambda$ schreibt man $\mu \leq \lambda$, falls es natürlichen Zahlen $n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i$. Ein solches Tupel von Zahlen wird mit \vec{n} bezeichnet, also

$$\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l.$$

Die Norm von \vec{n} ist $|\vec{n}| = \sum_{i=1}^l n_i$. Mit $\vec{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_l)$ ist das Skalarprodukt $\vec{n}\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i$. Das Tupel der σ_i kann mit dem Vektor \vec{n} potenziert werden. Dafür gibt es unterschiedliche Schreibweisen, nämlich

$$\sigma^{\vec{n}} = \sigma_1^{n_1} \dots \sigma_l^{n_l} = \sigma^{(\lambda - \mu)}$$

für $\mu \leq \lambda$ mit $\lambda - \mu = \vec{n}\vec{\alpha}$. Im letzten Fall schreibt man auch $|\lambda - \mu| = |\vec{n}|$.

Sei Z der Abschluss eines beliebigen B -Orbits Z° in X . Der B -Orbit Z° ist enthalten in genau einem G -Orbit X_I° , dessen Abschluss X_I ist. Die dadurch definierte Teilmenge I von D wird mit $I(Z)$ oder $I(Z^\circ)$ bezeichnet. \diamond

Die Schnittmenge $Z \cap Y$ eines B -Orbitabschlusses Z mit dem eindeutigen abgeschlossenen G -Orbit $Y = X_\emptyset$ ist abgeschlossen und B -stabil und daher Vereinigung von Schubertvarietäten in $Y \cong G/P$. Für $\mu \in \Gamma^+$ ist eine Basis von $H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu|_{Z \cap Y})$ gegeben durch die Einschränkungen der Standardmonome $p_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap Y}$, die standard auf $Z \cap Y$ sind.

Zu $\mu \in \Gamma^+$ und $\pi \in B_\mu$ sei wie vorher $x_\pi^{(\mu)} \in H^0(X, \mathcal{L}_\mu)$ eine beliebige Fortsetzung des Standardmonoms $p_\pi^{(\mu)} \in H^0(Y, \mathcal{L}_\mu)$.

Definition 2.1:

Der Pfad $\pi \in B_\mu$ und der zugehörige Pfadvektor $x_\pi^{(\mu)}$ heißen **standard auf Z** genau dann, wenn $p_\pi^{(\mu)} = x_\pi^{(\mu)}|_Y$ standard auf der Vereinigung von Schubertvarietäten $Z \cap Y$ ist.

Satz 2.1:

Sei Z der Abschluss eines B -Orbits in X mit $I(Z) = \{i_1, \dots, i_r\}$. Dann ist

$$\mathcal{M}_Z^{(\lambda)} := \left\{ \sigma_{i_1}^{n_1} \cdots \sigma_{i_r}^{n_r} x_\pi^{(\mu)}|_Z \mid \begin{array}{l} \mu = \lambda - \sum_{k=1}^r n_k \tilde{\alpha}_{i_k} \in \Lambda^+, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0, \\ \pi \in B_\mu \text{ standard auf } Z \end{array} \right\}$$

eine linear unabhängige Menge in $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z)$.

Beweis:

Betrachte den folgenden Ansatz:

$$\sum_{\mu \leq \lambda} \sum_{\pi \in B_\mu} \beta_\pi^{(\mu)} \sigma_{i_1}^{n_1} \cdots \sigma_{i_r}^{n_r} x_\pi^{(\mu)}|_Z = 0 \text{ mit } \beta_\pi^{(\mu)} \in k \text{ und } x_\pi^{(\mu)} \text{ standard auf } Z, \quad (2.1)$$

wobei summiert wird über $\mu = \lambda - \sum_{k=1}^r n_k \tilde{\alpha}_{i_k} \in \Lambda^+$ mit $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}_0$.

Auf $Z \cap Y$ gilt $\sigma_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, l$. Daraus ergibt sich

$$\sum_{\pi \in B_\lambda} \beta_\pi^{(\lambda)} x_\pi^{(\lambda)}|_{Z \cap Y} = 0$$

Da die $p_\pi^{(\lambda)} = x_\pi^{(\lambda)}|_Y$ standard auf $Z \cap Y$ und damit insbesondere linear unabhängig sind, folgt daraus $\beta_\pi^{(\lambda)} = 0$ für alle $\pi \in B_\lambda$.

Nun soll gezeigt werden, dass Gleichung (2.1) auch $\beta_\pi^{(\mu)} = 0$ für alle $\pi \in B_\mu$ und alle $\mu \in M := \{\mu \leq \lambda \mid \mu = \lambda - \sum_{\tilde{\alpha}_i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i \in \Lambda^+, n_i \in \mathbb{N}_0\}$, $\mu \neq \lambda$, impliziert,

und zwar durch Induktion nach der lexikographischen Ordnung der μ . Diese ist folgendermaßen definiert:

Seien $\mu, \mu' \leq \lambda$ mit $\lambda - \mu = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i$, $\lambda - \mu' = \sum_{i=1}^l n'_i \tilde{\alpha}_i$. Dann gelte $\mu >_{\text{lex}} \mu'$ genau dann, wenn es ein $j \in \{1, \dots, l\}$ gibt mit $n_i = n'_i$ für alle $i < j$ und $n_j < n'_j$.

Diese Definition liefert eine totale Ordnung auf der Menge aller $\mu \leq \lambda$, die sich auf die Teilmenge M einschränken lässt, in der die dominanten Gewichte $\mu = \lambda - \sum_{i \in I} n_i \tilde{\alpha}_i \in \Lambda^+$ mit $n_i = 0$ für $i \notin I(Z)$ zusammengefasst sind.

Betrachte nun ein Gewicht $\nu \in M$, $\nu < \lambda$. Es sei bereits gezeigt, dass (2.1) $\beta_\pi^{(\mu)} = 0$ für alle $\pi \in B_\mu$ mit $\mu \in M$ und $\mu >_{\text{lex}} \nu$ impliziert. Zu zeigen ist, dass dann auch $\beta_\pi^{(\nu)} = 0$ für alle $\pi \in B_\nu$ gilt. Seien $\lambda - \nu = \sum_{k=1}^r n_k \tilde{\alpha}_{i_k}$ und $j \in \{1, \dots, r\}$ so, dass $n_1 = \dots = n_{j-1} = 0$ und $n_j \neq 0$.

Auf dem Abschluss des G -Orbits $X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}$ gilt $\sigma_{i_1} = \dots = \sigma_{i_{j-1}} = 0$, also wird aus (2.1) durch Einschränkungen der Schnitte die Gleichung

$$\sum_{\substack{(m_j, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{r-j+1}, \\ \mu = \lambda - \sum_{k=j}^r m_k \tilde{\alpha}_{i_k} \in \Lambda^+}} \sum_{\pi \in B_\mu} \beta_\pi^{(\mu)} \sigma_{i_j}^{m_j} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}} = 0,$$

wobei $m_j \geq n_j$. Alle auftretenden $\sigma_{i_j}^{m_j} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}}$ liegen im Bild von

$$H^0(Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}, \mathcal{L}_{\lambda - n_j \tilde{\alpha}_{i_j}}) \xrightarrow{\sigma_{i_j}^{n_j}} H^0(Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}, \mathcal{L}_\lambda).$$

Die wundervolle Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums ist insbesondere eine vollständige reguläre G -Varietät, daher lässt sich Theorem 1.4 aus [B98] anwenden. Teil (ii) besagt, dass der Schnitt jeder irreduziblen Komponente von $Z \cap X_J$ mit dem G -Orbit X_J° für $J \subseteq I$ nicht leer ist. Da aber σ_{i_j} G -invariant und auf jedem G -Orbit X_J° mit $\tilde{\alpha}_{i_j} \in J$ ungleich Null ist, ist obige Multiplikation mit $\sigma_{i_j}^{n_j}$ eine injektive Abbildung. Die Menge $\{\sigma_{i_j}^{m_j} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}}\}$ ist also linear unabhängig genau dann, wenn es die Menge der Urbilder

$$\{\sigma_{i_j}^{m_j - n_j} \sigma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}}\} \subseteq H^0(Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}, \mathcal{L}_{\lambda - n_j \tilde{\alpha}_{i_j}})$$

ist. Aus der Gleichung

$$\sum_{\substack{(m_j, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{r-j+1}, \\ \mu = \lambda - \sum_{k=j}^r m_k \tilde{\alpha}_{i_k} \in \Lambda^+}} \sum_{\pi \in B_\mu} \beta_\pi^{(\mu)} \sigma_{i_j}^{m_j - n_j} \sigma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_j}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}} = 0$$

wird durch Einschränkung auf den Abschluss des G -Orbits $X_{\{\tilde{\alpha}_{i_{j+1}}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}$

$$\sum_{\substack{(m_{j+1}, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^{r-j}, \\ \mu = \lambda - n_j \tilde{\alpha}_{i_j} - \sum_{k=j+1}^r m_k \tilde{\alpha}_{i_k} \in \Lambda^+}} \sum_{\pi \in B_\mu} \beta_\pi^{(\mu)} \sigma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \cdots \sigma_{i_r}^{m_r} x_\pi^{(\mu)}|_{Z \cap X_{\{\tilde{\alpha}_{i_{j+1}}, \dots, \tilde{\alpha}_{i_r}\}}} = 0.$$

Hier gilt $m_{j+1} \geq n_{j+1}$ nach Induktionsvoraussetzung, daher lassen sich die letzten Schritte und Argumente für $j + 1, j + 2, \dots, r$ wiederholen. So gelangt man schließlich zu der Gleichung

$$\sum_{\pi \in B_\nu} \beta_\pi^{(\nu)} x_\pi^{(\nu)}|_{Z \cap Y} = 0.$$

Diese impliziert $\beta_\pi^{(\nu)} = 0$ für alle $\pi \in B_\nu$, da die $x_\pi^{(\nu)}$ auf $Z \cap Y$ standard sind. \square

Bemerkung 2.1:

Ist $X = \overline{G}$ die wundervolle Kompaktifizierung einer adjungierten Gruppe G und $Z = X(w)$ eine große Schubertvarietät, so zeigen Brion und Polo in [BP00], Theorem 7 für den geeignet graduierten Modul

$$\text{gr } H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda) = \bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} H^0(X(w) \cap Y, \mathcal{L}_\mu).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \dim H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda|_{X(w)}) &= \dim \text{gr } H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda|_{X(w)}) \\ &= \dim \bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} H^0(X(w) \cap Y, \mathcal{L}_\mu|_{X(w) \cap Y}) \\ &= \sum_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} |\{p_\pi^{(\mu)} \text{ standard auf } X(w) \cap Y\}| \\ &= |\mathcal{M}_{X(w)}^{(\lambda)}| \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{M}_{X(w)}^{(\lambda)}$ Basis von $H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda)$. \diamond

Für die wundervolle Kompaktifizierung X eines beliebigen symmetrischen Raums G/H und den Abschluss Z eines B -Orbits in X ist die Dimension des B -Moduls $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ leider nicht bekannt, so dass nicht klar ist, ob die Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ schon eine Basis ist. Dass $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ den Modul $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ im Allgemeinen nicht aufspannt, zeigt das Beispiel $G/H = PSL(n)/PSO(n)$ in Kapitel 3.

Im Fall der Gruppenkompaktifizierung $X = \overline{G}$ lässt sich jedoch die Methode aus Bemerkung 2.1 auf den Abschluss Z eines beliebigen $B \times B$ -Orbits verallgemeinern. Dafür berechnet man analog zum Vorgehen von Brion und Polo in [BP00] die Dimension des graduierten Moduls. Dazu werden einige Tatsachen benötigt, die daraus folgen, dass es ein Frobenius-Splitting von X gibt, dass kompatibel mit den Abschlüssen aller $B \times B$ -Orbiten ist. Das wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

2.2 Frobenius–Splitting

In diesem Abschnitt sei $X = \overline{G}$ die wundervolle Kompaktifizierung der adjungierten Gruppe G über dem Körper k . Zunächst sei $\text{char}(k) = p > 0$, k algebraisch abgeschlossen und $F : X \rightarrow X$ der absolute Frobeniusmorphus auf der wundervollen Kompaktifizierung X der Gruppe G . Ein Homomorphismus $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ **spaltet** X , wenn $\sigma \circ F = \text{id}$ gilt. Ist Z ein abgeschlossenes Unterschema von X und \mathcal{I}_Z die Idealgarbe von Z , so spaltet σ **kompatibel** mit Z , wenn $\sigma(F_*\mathcal{I}_Z) = \mathcal{I}_Z$ gilt.

Brion und Polo konstruieren in [BP00] einen Homomorphismus σ , der X kompatibel mit allen $G \times G$ -Orbitabschlüssen X_I und mit allen großen Schubertvarietäten $X(w)$ spaltet. Dazu seien $\text{St} = H^0(G/B, \mathcal{L}_{(p-1)\varrho})$ der Steinbergmodul, v_+ ein Höchstgewichtsvektor und v_- ein Tiefstgewichtsvektor in $H^0(G/B, \mathcal{L}_\varrho)$. Es gibt eine Abbildung $\varphi : (\text{St} \boxtimes \text{St})^{\otimes 2} \rightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_{2(p-1)\varrho})$, und $\tau = \varphi(a \otimes b)$ sei das Bild unter φ von $a = (v_+ \boxtimes v_+)^{p-1}$ tensoriert mit $b = (v_- \boxtimes v_-)^{p-1}$. Man definiert dann

$$\sigma := \tau \prod_{i=1}^l \sigma_i^{p-1} \in H^0(X, \mathcal{L}_{(p-1)(2\varrho + \sum_{i=1}^l \alpha_i)}).$$

Hier wird mit der Identifikation aus Bemerkung 1.3 $\sigma_i \in H^0(X, \mathcal{L}_{\alpha_i})$ verwendet. Ist ω_X die dualisierende Garbe von X , so gilt nach [St87]

$$\mathcal{L}_{(p-1)(2\varrho + \sum_{i=1}^l \alpha_i)} = \omega_X^{1-p} \text{ und } H^0(X, \omega_X^{1-p}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$

Für das so konstruierte $\sigma \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ gilt

Proposition 2.2 (Theorem 2 in [BP00]):

Der Homomorphismus σ spaltet X kompatibel mit den Abschlüssen der $G \times G$ -Orbiten X_I und mit den großen Schubertvarietäten $X(w)$.

Mit den gleichen Methoden wie im Beweis dieser Proposition zeigt man, dass dieses σ sogar mit den $B \times B$ -Orbiten kompatibel ist.

Satz 2.3:

Die Spaltung von X durch σ ist kompatibel mit den Abschlüssen aller $B \times B$ -Orbiten in X .

Für den Beweis dieses Satzes benutzt man die folgende Proposition.

Proposition 2.4 (Corollary 1.11 in [Ra87]):

Ist das Splitting σ von X kompatibel mit Untervarietäten Y_1, \dots, Y_r von X , so ist σ auch kompatibel mit Vereinigungen, Schnitten und irreduziblen Komponenten der Y_i .

Die folgenden kombinatorischen Lemmas zeigen, dass man jeden beliebigen Abschluss Z eines $B \times B$ -Orbits in X erhält, indem man sukzessive Schnitte und irreduzible Komponenten der X_I mit $I \subseteq D$ und der $X(w)$ mit $w \in W$ betrachtet.

Lemma 2.5:

Seien $J \subseteq I \subseteq D$, $x, \tilde{x} \in W^I$ und $w, \tilde{w} \in W$. Dann gilt:

- 1) $[I, \tilde{x}, \tilde{w}] \leq [I, x, w] \Leftrightarrow \exists u \in W_I : \tilde{x} \geq xu^{-1}, \tilde{w}u \leq w$
- 2) $\overline{[I, x, w]} \cap X_J$ zerfällt folgendermaßen in irreduzible Komponenten:

$$\overline{[I, x, w]} \cap X_J = \bigcup_{\substack{v \in W_I \cap W^J \\ l(wv) = l(w) + l(v)}} \overline{[J, xv, wv]}$$

Insbesondere sind die irreduziblen Komponenten von $X(w) \cap X_J$

$$X(w) \cap X_J = \bigcup_{\substack{v \in W^J \\ l(wv) = l(w) + l(v)}} \overline{[J, v, wv]}.$$

Beweis:

- 1) Benutze die Beschreibung der Abschlussrelation aus Proposition 1.3:

$$W_I \cap W^I = \{\text{id}\} \rightsquigarrow v = \text{id}$$

$$[I, \tilde{x}, \tilde{w}] \leq [I, x, w] \Leftrightarrow \exists u \in W_I : \tilde{x} \geq xu^{-1}, \tilde{w}u \leq w$$

- 2) Nach Teil (ii) von Theorem 1.4 aus [B98] trifft jede irreduzible Komponente von $\overline{[I, x, w]} \cap X_J$ den $G \times G$ -Orbit X_J° . Also ist $\overline{[I, x, w]} \cap X_J$ die Vereinigung aller $\overline{[J, \tilde{x}, \tilde{w}]}$, die in $\overline{[I, x, w]}$ enthalten sind. Es gilt $[J, \tilde{x}, \tilde{w}] \leq [I, x, w]$ genau dann, wenn es ein $v \in W_I \cap W^J$ mit $l(wv) = l(w) + l(v)$ und ein $u \in W_J$ gibt, so dass $\tilde{x} \geq xv u^{-1}$ und $\tilde{w}u \leq wv$. Das sind gerade die Relationen aus 1 mit xv und wv an Stelle von x und w . Somit folgt

$$\overline{[I, x, w]} \cap X_J = \bigcup_{\substack{v \in W_I \cap W^J \\ l(wv) = l(w) + l(v)}} \overline{[J, xv, wv]}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \dim[J, xv, wv] &= l(w_0) - l(xv) + l(wv) + |J| \\ &= l(w_0) - l(x) - l(v) + l(w) + l(v) + |J| \\ &= l(w_0) - l(x) + l(w) + |J| \end{aligned}$$

haben alle vorkommenden Orbits $[J, xv, wv]$ die gleiche Dimension, und deren Abschlüsse sind somit die irreduziblen Komponenten von $\overline{[I, x, w]} \cap X_J$. \square

Folgerung 2.6:

Seien $I \subsetneq D$, $w \in W$ und $x \in W^I$.

- 1) σ spaltet X kompatibel mit $\overline{[I, \text{id}, w]}$.
- 2) σ spaltet X kompatibel mit $\overline{[I, x, w_0]}$.

Beweis:

- 1) Nach Lemma 2.5 ist $\overline{[I, \text{id}, w]}$ irreduzible Komponente von $X(w) \cap X_I$ und Proposition 2.4 kann angewendet werden.
- 2) Mit $v = x \in W^I$ ist $w_0 x^{-1} v = w_0$, und es gilt $l(w_0) = l(w_0 x^{-1}) + l(x)$. Daher ist $\overline{[I, x, w_0]}$ nach Lemma 2.5 irreduzible Komponente von $X(w_0 x^{-1}) \cap X_I$, und Proposition 2.4 zeigt die Behauptung. \square

Lemma 2.7:

Sei Z der Abschluss des $B \times B$ -Orbits $[I, x, w]$ mit $x > \text{id}$ und $w < w_0$. Dann gibt es $B \times B$ -Orbitabschlüsse Z_1 und Z_2 in X_I , so dass Z irreduzible Komponente von $Z_1 \cap Z_2$ ist.

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es eine einfache Spiegelung $s_i \in W$ mit $s_i x \in W^I$ und $x > s_i x$ und ein $s_j \in W$ mit $w < w s_j$. Ist nämlich $x = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ mit $m \geq 1$ eine reduzierte Darstellung von $x \neq \text{id}$, so gilt $l(s_{i_1} x) < l(x)$ und nach Lemma 3.3 aus [Sp04] impliziert das $s_{i_1} x \in W^I$.

Definiere $Z_1 := [I, s_i x, w]$ und $Z_2 := [I, x, w s_j]$. Dann gilt $Z \leq Z_1$, denn $u = \text{id}$ erfüllt die Bedingungen aus Lemma 2.5. Ebenfalls mit $u = \text{id}$ erhält man $Z \leq Z_2$. Da offensichtlich $Z_1 \neq Z_2$ und

$$\begin{aligned} \dim Z_1 &= l(w_0) - l(s_i x) + l(w) + |I| = l(w_0) - (l(x) - 1) + l(w) + |I| \\ &= l(w_0) - l(x) + (l(w) + 1) + |I| = l(w_0) - l(x) + l(w s_j) + |I| \\ &= \dim Z_2 \end{aligned}$$

ist die Dimension des Schnitts $Z_1 \cap Z_2$ echt kleiner als die Dimension von Z_1 . Da Z Kodimension 1 in Z_1 hat, ist Z eine irreduzible Komponente von $Z_1 \cap Z_2$. \square

Beweis von Satz 2.3:

Die Aussage folgt nun mit Proposition 2.4 aus Folgerung 2.6 und Lemma 2.7:

Sei $Z^\circ = [I, x, w]$ ein beliebiger $B \times B$ -Orbit in X . Ist $x = \text{id}$ oder $w = w_0$, so spaltet σ nach Folgerung 2.6 kompatibel mit dem Abschluss Z von Z° . Gilt $x > \text{id}$ und $w < w_0$, so ist Z nach Lemma 2.7 irreduzible Komponente von $Z_1 \cap Z_2$, wobei $Z_1^\circ = [I, x_1, w]$ und $Z_2^\circ = [I, x, w_2]$ mit $x_1 < x$ und $w_2 > w$.

Spaltet σ kompatibel mit Z_1 und Z_2 , so nach Proposition 2.4 auch mit Z . Um zu zeigen, dass σ tatsächlich kompatibel mit Z_1 und Z_2 spaltet, kann man diese Überlegungen für beide Orbits iterieren. In maximal $l(w_0)^2$ Schritten führt man so die Kompatibilität von σ mit Z auf die in Folgerung 2.6 gezeigte Kompatibilität mit $[I, \text{id}, w]$ beziehungsweise $[I, x, w_0]$ zurück. \square

Bemerkung 2.2:

Zum selben Ergebnis kommen auch He und Thomsen in [HT05]. Dort wird mit den gleichen Methoden gezeigt, dass es ein mit allen $B \times B$ -Orbitabschlüssen kompatibles Frobenius-Splitting von X gibt, falls X eine äquivariante Einbettung einer reduktiven Gruppe G über einem Körper positiver Charakteristik ist. \diamond

Ab jetzt sei wieder k algebraisch abgeschlossen und von beliebiger Charakteristik. Das folgende Ergebnis ist die Verallgemeinerung der entsprechenden Aussagen für große Schubertvarietäten in Corollary 3 in [BP00].

Folgerung 2.8:

Seien $\lambda \in \Lambda^+$, X_I der Abschluss eines $G \times G$ -Orbits und Z der Abschluss eines $B \times B$ -Orbits in X . Dann gilt:

- 1) Die Einschränkungsabbildungen $\text{res}_Z: H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ und $\text{res}_{Z \cap Y}: H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\lambda)$ sind surjektiv. Dabei bezeichnet \mathcal{L}_λ auch die Einschränkung von \mathcal{L}_λ auf Z beziehungsweise $Z \cap Y$. Außerdem gilt $H^i(Z, \mathcal{L}_\lambda) = 0$ für alle $i > 0$.
- 2) Der schematheoretische Schnitt $Z \cap X_I$ ist reduziert.

Beweis:

Sei zunächst $\text{char}(k) = p > 0$.

Im Beweis von Theorem 2 in [BP00] wird gezeigt, dass das am Beginn des Abschnitts definierte Splitting $\sigma \in H^0(X, \omega_X^{1-p})$ sowohl mit dem $B \times B$ -stabilen Divisor $D^+ := \sum_{i=1}^l X(w_0 s_i)$ als auch mit dem $B^- \times B^-$ -stabilen Divisor $D^- := (w_0, w_0)D^+ = \sum_{i=1}^l X^-(s_i w_0)$ kompatibel ist. Hier sind B^- die entgegengesetzte Borelsche zu B und $X^-(w) = \overline{B^- w B^-}$ für $w \in W$ eine entgegengesetzte große Schubertvarietät in X . Mit Theorem 1.4.10 in [BK04] folgt, dass σ insbesondere ein $(p-1)D^-$ -Splitting ist.

Der Träger $D := \text{supp}((p-1)D^-) = \bigcup_{i=1}^l X^-(w_0 s_i)$ enthält keinen $B \times B$ -Orbit, denn ist $x \in D$ mit $(B \times B)x \subseteq D$, dann gilt auch $(B^- \times B^-)(B \times B)x \subseteq D$, weil D stabil unter $B^- \times B^-$ ist. Da $B^- B$ dicht in G und D abgeschlossen ist, folgt hieraus $(G \times G)x \subseteq D$. Das ist jedoch nicht möglich, weil D keinen $G \times G$ -Orbit enthält. Somit ist keine irreduzible Komponente einer abgeschlossenen Vereinigung von $B \times B$ -Orbits in $\text{supp}((p-1)D^-)$ enthalten. Das $(p-1)D^-$ -Splitting σ ist

also kompatibel mit allen betrachteten Untervarietäten Z (siehe Definition 1.2 in [Ra87] oder 1.4.1 in [BK04]).

Weiterhin wird im Beweis von Theorem 2 in [BP00] gezeigt, dass das zum Divisor D^- gehörende Geradenbündel $\mathcal{L}_{(p-1)\varrho}$ ist. Dieses ist nach Lemma 1 in [BP00] ample, weil ϱ ein reguläres Gewicht ist. Das Geradenbündel \mathcal{L}_λ wird — ebenfalls nach Lemma 1 in [BP00] — von globalen Schnitten erzeugt, ist also insbesondere ohne Basispunkte.

Damit folgen die Behauptungen in 1 aus Proposition 1.13 (ii) in [Ra87].

Die Abbildung σ ist ein Splitting von X , das kompatibel mit Z und X_I ist. Somit ist der schematheoretische Schnitt $Z \cap X_I$ reduziert (Proposition 1.2.1 in [BK04]).

Da sowohl X als auch alle Abschlüsse von $B \times B$ -Orbiten in X über \mathbb{Z} definiert sind, gelten die Behauptungen der Folgerung nach dem Halbstetigkeitssatz auch für $\text{char}(k) = 0$. \square

2.3 Berechnung von Dimensionen

Mit Hilfe der Folgerungen aus dem Frobenius-Splitting läßt sich nun die Dimension von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ als $\tilde{B} \times \tilde{B}$ -Modul berechnen. Die in diesem Abschnitt bewiesenen Aussagen sind die Verallgemeinerungen auf beliebige Orbitabschlüsse der entsprechenden Aussagen für große Schubertvarietäten, die Brion und Polo in den Abschnitten 2 und 3 in [BP00] zeigen.

Wie bisher sei X die wundervolle Kompaktifizierung einer adjungierten Gruppe G über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beliebiger Charakteristik. Z sei der Abschluss des $B \times B$ -Orbits $[I, x, w]$ mit $I = I(Z) = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq D$, $x \in W^I$ und $w \in W$.

Lemma 2.9:

Sei $\mu \in \Lambda$ ein beliebiges Gewicht. Dann gilt:

- 1) $\mu \in \Lambda^+ \Rightarrow H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) \neq 0$
- 2) $\mu \notin \bigcap_{i \in I} \alpha_i^+ \Rightarrow H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) = 0$

Dabei bezeichnet $\alpha^+ := \{\lambda \in \Lambda \mid \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle \geq 0\}$ die positive Halbebene des Gewichtsgitters bezüglich der einfachen Wurzel α .

Beweis:

- 1) Ist μ dominant, so ist der LS-Pfad $\pi_\mu \in B_\mu$, der den Ursprung direkt mit dem Gewicht μ verbindet, auf jeder Schubertvarietät in G/B standard. Daraus folgt direkt die erste Behauptung.

2) Bezeichnet $S(w)$ die Schubertvarietät zum Weylgruppenelement w in G/B , so gilt nach Lemma 2.5

$$Z \cap Y = \bigcup_{\substack{v \in W_I \\ l(wv)=l(w)+l(v)}} \overline{[\emptyset, xv, wv]} \cong \bigcup_{\substack{v \in W_I \\ l(wv)=l(w)+l(v)}} S(xvw_0) \times S(wv).$$

Die Einschränkung des Geradenbündels \mathcal{L}_μ auf Y ist gerade das Geradenbündel $\mathcal{L}_{-w_0\mu}^{(G/B)} \boxtimes \mathcal{L}_\mu^{(G/B)}$ auf $G/B \times G/B$. Dabrowski zeigt in [D92]

$$H^0(S(w), \mathcal{L}_\mu^{(G/B)}) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \in \alpha^+ \text{ für alle } \alpha \in \Delta \text{ mit } w\alpha \in \Phi^-.$$

Ist $H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) \neq 0$, so gibt es ein $v \in W_I$ mit $l(wv) = l(w) + l(v)$, so dass $H^0(S(xvw_0), \mathcal{L}_{-w_0\mu}^{(G/B)}) \neq 0$ und $H^0(S(wv), \mathcal{L}_\mu^{(G/B)}) \neq 0$. Hierfür gilt

$$H^0(S(wv), \mathcal{L}_\mu^{(G/B)}) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \in \alpha^+ \text{ für alle } \alpha \in \Delta \text{ mit } wv\alpha \in \Phi^-$$

$$\begin{aligned} H^0(S(xvw_0), \mathcal{L}_{-w_0\mu}^{(G/B)}) \neq 0 &\Leftrightarrow -w_0\mu \in \alpha^+ \text{ für alle } \alpha \in \Delta \text{ mit } xvw_0\alpha \in \Phi^- \\ &\Leftrightarrow -w_0\mu \in (-w_0\alpha)^+ \text{ für alle } \alpha \in \Delta \\ &\quad \text{mit } xvw_0(-w_0\alpha) \in \Phi^- \\ &\Leftrightarrow \mu \in \alpha^+ \text{ für alle } \alpha \in \Delta \text{ mit } xv\alpha \in \Phi^+ \end{aligned}$$

Sei $i \in I$. Falls $v\alpha_i \in \Phi^-$, dann ist auch $wv\alpha_i \in \Phi^-$, da $l(wv) = l(w) + l(v)$. Falls $v\alpha_i \in \Phi^+$, dann ist auch $xv\alpha_i \in \Phi^+$, da $v \in W_I$ und $x \in W^I$. Somit impliziert $H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) \neq 0$, dass $\mu \in \alpha_i^+$ für alle $i \in I$. \square

Sei $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l$ mit $n_i = 0$ für alle $i \notin I$. Die Multiplikation mit

$$\sigma^{\vec{n}} : H^0(U, \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_Z)$$

ist für jede offene Menge U in Z injektiv. Definiere eine Idealgarbe $\sigma^{\vec{n}}\mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}$ von $\mathcal{O}(Z)$ durch

$$(\sigma^{\vec{n}}\mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}})(U) = \sigma^{\vec{n}}|_U \cdot \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}(U) \subseteq H^0(U, \mathcal{L}_{\vec{n}\vec{\alpha}} \otimes_{\mathcal{O}(Z)} \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}) = H^0(U, \mathcal{O}_Z)$$

für jede offene Menge U in Z .

Lemma 2.10:

Sei \mathcal{I} die Idealgarbe von $Z \cap Y$ in \mathcal{O}_Z . Dann gilt:

1) \mathcal{I} wird erzeugt von $\{\sigma_i \mid i \in I\} = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r}\}$, das heißt

$$\mathcal{I} = \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{N}_0^l \\ |\vec{n}| \geq 1 \\ n_i = 0 \ \forall i \notin I}} \sigma^{\vec{n}}\mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}.$$

2) $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_r})$ bilden eine reguläre Sequenz in \mathcal{O}_Z .

3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \cong \bigoplus_{\substack{|\vec{n}|=n \\ n_i=0 \ \forall i \notin I}} \sigma^{\vec{n}} \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}|_{Z \cap Y}.$$

Beweis:

1) $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ erzeugen die Idealgarbe \mathcal{I}_Y von Y in \mathcal{O}_X (siehe [BP00, vor Corollary 4]). Da alle σ_i $G \times G$ -invariant sind, gilt

$$\sigma_i|_Z = 0 \Leftrightarrow \sigma_i|_{X_I} = 0 \Leftrightarrow i \notin I.$$

Da weiter nach Folgerung 2.8 der schematheoretische Schnitt $Z \cap Y$ reduziert ist, wird \mathcal{I} von den σ_i mit $i \in I$ erzeugt.

2) Sei $1 < j \leq r$. Mit

$$Z_j := Z \cap X_{\{i_j, \dots, i_r\}} = Z \cap \bigcap_{k=1}^{j-1} S_{i_k}$$

gilt $\mathcal{O}_{Z_j} = \mathcal{O}_Z / (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{j-1}})$, da S_{i_k} der Divisor zu σ_{i_k} ist. Nach Folgerung 2.8 ist Z_j reduziert. Nach Lemma 2.5 zerfällt Z_j in die irreduziblen Komponenten $Z_{j,v} := \overline{[J, xv, wv]}$, wobei $J = \{i_j, \dots, i_r\}$ und $v \in W_I \cap W^J$ mit $l(wv) = l(w) + l(v)$. Da keine dieser irreduziblen Komponenten in S_{i_j} enthalten ist, ist die Einschränkung von σ_{i_j} auf $Z_{j,v}$ für alle v ungleich Null. Sei nun $f \in \mathcal{O}_Z(Z)$ mit $\sigma_{i_j} \cdot f = 0$. Dann gilt insbesondere für die Einschränkung $\sigma_{i_j} \cdot f|_{Z_{j,v}} = 0$. Da $Z_{j,v}$ irreduzibel und reduziert ist, ist $\mathcal{O}_Z(Z_{j,v})$ integer. Da aber $\sigma_{i_j}|_{Z_{j,v}} \neq 0$, folgt $f|_{Z_{j,v}} = 0$. Daraus folgt $f = 0$, und σ_{i_j} ist kein Nullteiler in $\mathcal{O}_{Z_j} = \mathcal{O}_Z / (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_{j-1}})$.

3) Wegen der ersten beiden Aussagen hat man

$$\mathcal{I}^n = \sum_{\vec{n}} \sigma^{\vec{n}} \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}, \text{ das heißt } H^0(Z, \mathcal{I}^n) = \sum_{\vec{n}} \sigma^{\vec{n}} H^0(Z, \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}),$$

wobei über alle $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l$ mit $\sum_{i=1}^l n_i \geq n$ und $n_i = 0$ für alle $i \notin I$ summiert wird. Daraus folgt direkt

$$\mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \cong \bigoplus_{|\vec{n}|=n} \sigma^{\vec{n}} \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}|_{Z \cap Y},$$

das heißt

$$H^0(Z, \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}) = \bigoplus_{|\vec{n}|=n} \sigma^{\vec{n}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_{-\vec{n}\vec{\alpha}}).$$

□

Sei $\lambda \in \Lambda^+$ ein dominantes Gewicht. Mit Hilfe der Idealgarbe \mathcal{I} aus dem letzten Lemma lässt sich eine Filtrierung auf dem $\tilde{B} \times \tilde{B}$ -Modul $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ definieren. Und zwar bilden die

$$F_n := H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n) \text{ mit } n \in \mathbb{N}_0$$

eine endliche, absteigende Filtrierung von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$. Ist $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l$ mit $n_i = 0$ für alle $i \notin I = I(Z)$, so ist die Multiplikation mit

$$\sigma^{\vec{n}} : H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$$

injektiv. Da \mathcal{I} von den σ_i mit $i \in I$ erzeugt wird, und alle σ_i invariant unter $\tilde{G} \times \tilde{G}$ und damit insbesondere unter $\tilde{B} \times \tilde{B}$ sind, ist

$$F_{\vec{n}} := \text{Im}(\sigma^{\vec{n}})$$

ein $\tilde{B} \times \tilde{B}$ -Untermodule von F_n mit $n = |\vec{n}|$.

Satz 2.11:

Mit den Bezeichnungen von vorher gilt:

$$F_n = \sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}}$$

$$\text{gr}_n H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) = F_n / F_{n+1} \cong \bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \text{ dom.} \\ |\lambda - \mu| = n}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu)$$

Beweis:

Die kurze exakte Sequenz von Garben auf Z

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n \rightarrow \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1} \rightarrow 0$$

induziert die lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_n \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}) \rightarrow \dots,$$

aus der folgt, dass es eine Inklusion

$$\text{gr}_n H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) = F_n / F_{n+1} \hookrightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1})$$

gibt. Mit dem vorherigen Lemma gilt

$$H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}) = \bigoplus_{|\vec{n}|=n} \sigma^{\vec{n}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}).$$

Hier wird immer über solche $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l$ summiert, für die $n_i = 0$ für alle $i \notin I = I(Z)$ gilt. Bezeichnet man $\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}$ mit μ , so gilt für jedes $j \notin I$

$$\langle \mu, \check{\alpha}_j \rangle = \langle \lambda - \sum_{i \in I} n_i \alpha_i, \check{\alpha}_j \rangle = \underbrace{\langle \lambda, \check{\alpha}_j \rangle}_{\geq 0, \text{ da } \lambda \in \Lambda^+} - \sum_{i \in I} n_i \underbrace{\langle \alpha_i, \check{\alpha}_j \rangle}_{\leq 0, \text{ da } i \neq j} \geq 0.$$

Man hat also entweder $\mu \in \Lambda^+ = \bigcap_{i=1}^l \alpha_i^+$ oder $\mu \notin \bigcap_{i \in I} \alpha_i^+$. Im zweiten Fall gilt aber nach Lemma 2.9, dass $H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) = 0$. Daher gilt schon

$$H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda \otimes \mathcal{I}^n / \mathcal{I}^{n+1}) = \bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \text{ dom.} \\ |\lambda - \mu| = n}} \sigma^{(\lambda - \mu)} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu).$$

Insgesamt erhält man eine Inklusion

$$\text{gr}_n H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \text{ dom.} \\ |\lambda - \mu| = n}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu).$$

Betrachte $\vec{n} = (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}_0^l$ mit $n_i = 0$ für alle $i \notin I$. Da die Multiplikation mit $\sigma^{\vec{n}} : H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ eine injektive Abbildung ist, ist ihr Bild $F_{\vec{n}}$ isomorph zu $H^0(Z, \mathcal{L}_\mu)$ mit $\mu = \lambda - \vec{n}\vec{\alpha}$. Identifiziert man $\sum_{|\vec{n}|=n} H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}})$ mit $\sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}} \subseteq H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$, so erhält man eine wohldefinierte Einschränkungsbildung

$$\sum_{|\vec{n}|=n} H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}) \rightarrow \bigoplus_{|\vec{n}|=n} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}),$$

denn jedes Element, das für mindestens zwei verschiedene \vec{n} mit $|\vec{n}| = n$ in $\text{Im}(\sigma^{\vec{n}})$ liegt, verschwindet auf Y . Nach Folgerung 2.8 ist die Einschränkungsbildung $H^0(Z, \mathcal{L}_\mu) \rightarrow H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu)$ für alle dominanten Gewichte $\mu \in \Lambda^+$ surjektiv. Ist $\mu = \lambda - \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$ nicht dominant, dann gibt es einen Index $i \in I$, so dass $\mu \notin \alpha_i^+$. In diesem Fall folgt $H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) = 0$ aus Lemma 2.9. Insgesamt erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}} & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & \sum_{|\vec{n}|=n} H^0(Z, \mathcal{L}_{\lambda - \vec{n}\vec{\alpha}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n & \twoheadrightarrow F_n / F_{n+1} = \text{gr}_n H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda) \hookrightarrow & \bigoplus_{\substack{\mu \leq \lambda \text{ dom.} \\ |\lambda - \mu| = n}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu). \end{array}$$

Da diese Abbildung surjektiv ist, folgt hieraus direkt der zweite Teil der Behauptung. Aus $F_n / F_{n+1} \cong \bigoplus_{\mu} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu)$ folgt

$$F_n \cong \bigoplus_{\mu} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu) \oplus F_{n+1}.$$

Da sowohl $\sum F_{\vec{n}}$ als auch F_{n+1} Untermoduln von F_n sind, und die obige Abbildung $\sum F_{\vec{n}} \rightarrow \bigoplus H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu)$ surjektiv ist, erhält man

$$F_n = \sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}} + F_{n+1}.$$

Durch Iteration dieser Schritte gelangt man schließlich zu

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}} + \sum_{|\vec{n}|=n+1} F_{\vec{n}} + F_{n+2} \\ &= \sum_{|\vec{n}|=n} F_{\vec{n}} + F_{n+2}, \end{aligned}$$

denn falls für $m = (m_1, \dots, m_l)$ und $n = (n_1, \dots, n_l)$ gilt, dass $m_i \geq n_i$ für alle $1 \leq i \leq l$, so hat man $F_{\vec{m}} \subseteq F_{\vec{n}}$. Da die Filtrierung endlich ist, erhält man per Induktion auch den ersten Teil der Behauptung. \square

Folgerung 2.12:

Mit den Bezeichnungen von Satz 2.1 gilt: $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ ist Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z)$.

Beweis:

Nach Satz 2.1 ist $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ linear unabhängig, nach Satz 2.11 gilt

$$\begin{aligned} \dim H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z) &= \dim \operatorname{gr} H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda|_Z) \\ &= \dim \bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} H^0(Z \cap Y, \mathcal{L}_\mu|_{Z \cap Y}) \\ &= \sum_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} |\{p_\pi^{(\mu)} \text{ standard auf } Z \cap Y \mid \pi \in B_\mu\}| \\ &= |\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}|. \end{aligned}$$

\square

2.4 Konstruktion spezieller Eigenschaften

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, für die wundervolle Kompaktifizierung $X = \overline{G}$ einer Gruppe und ein dominantes Gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ zu konstruieren, die — analog zu den klassischen Standardmonomen — folgende Eigenschaften hat:

- 1) Die Basiselemente werden indiziert durch die Menge der Pfade $\bigcup_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} B_\mu$. Die Basiselemente sind Gewichtsvektoren, deren Gewicht bestimmt wird vom Endpunkt des zugehörigen Pfades.

- 2) Sei Z der Abschluss eines $B \times B$ -Orbits in X . Die Einschränkungen auf Z der Basiselemente von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$, die standard auf Z bezüglich λ sind, bilden eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$.
- 3) Sei Z der Abschluss eines $B \times B$ -Orbits in X . Die Einschränkungen auf Z der Basiselemente, die nicht standard auf Z bezüglich λ sind, bilden eine Basis des Kerns der Einschränkungsabbildung $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$.

Definition 2.2:

Seien $\lambda \in \Lambda^+$ ein dominantes Gewicht und Z der Abschluss eines $B \times B$ -Orbits $[I, x, w]$ in X . Ein LS-Pfad $\pi \in B_\mu$ heißt **standard auf Z bezüglich λ** , wenn π standard auf Z ist und $\mu \leq \lambda$, wobei $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i \in \Lambda^+$ mit $n_i = 0$ für alle $i \notin I$.

Die Menge $\mathcal{M}^{(\lambda)} = \{\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} \mid \mu \leq \lambda \text{ dom.}, \pi \in B_\mu\}$ ist eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$, die mit der Einschränkung von X auf Abschlüsse von $B \times B$ -Orbiten kompatibel ist. Sie erfüllt die Bedingungen 1 und 2. Das gilt für jede Wahl der Fortsetzung $x_\pi^{(\mu)} \in H^0(X, \mathcal{L}_\mu)$ des Standardmonoms $p_\pi^{(\mu)} \in H^0(Y, \mathcal{L}_\mu)$.

Wähle nun für alle $\lambda \in \Lambda^+$ und $\pi \in B_\lambda$ eine feste Fortsetzung $x_\pi^{(\lambda)}$ des Standardmonoms $p_\pi^{(\lambda)} \in H^0(Y, \mathcal{L}_\lambda)$ auf X . Hiermit hat die Menge $\mathcal{M}^{(\lambda)} = \{\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)} \mid \mu \leq \lambda \text{ dom.}, \pi \in B_\mu\}$ leider nicht notwendigerweise die Eigenschaft 3, denn die Einschränkung von $\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)}$ auf einen $B \times B$ -Orbit, auf dem π nicht standard ist, ist im Allgemeinen ungleich Null.

Im Folgenden werden mit Hilfe von $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ neue Standardmonome $\sigma^{(\lambda-\mu)} y_\pi^{(\mu)}$ als Linearkombinationen aus den $\sigma^{(\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)}$ konstruiert, die auch Eigenschaft 3 haben. Sind deren Einschränkungen auf Y immer noch Standardmonome auf $G/B \times G/B$, so erfüllen die neuen Monome auch die Bedingungen 1 und 2.

Satz 2.13:

Sei $\lambda \in \Lambda^+$. Zu jedem $\pi \in B_\lambda$ gibt es ein $y_\pi^{(\lambda)} \in H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ mit $y_\pi^{(\lambda)}|_Y = p_\pi^{(\lambda)}$ und $y_\pi^{(\lambda)}|_Z = 0$ für alle Abschlüsse Z von $B \times B$ -Orbiten, auf denen π nicht standard ist.

Beweis:

Die Aussage wird bewiesen, indem die $y_\pi^{(\lambda)}$ rekursiv für alle λ konstruiert werden. Sei $\lambda \in \Lambda^+$. Zu jedem dominanten Gewicht $\mu < \lambda$ seien alle $y_\nu^{(\mu)}$ mit $\nu \in B_\mu$ bereits konstruiert. Zu einem Pfad $\pi \in B_\lambda$ betrachte

$$\hat{Z}_\pi := \bigcup_{\substack{\pi \text{ nicht standard} \\ \text{auf } [I, x, w]}} [I, x, w].$$

\hat{Z}_π ist abgeschlossen und $B \times B$ -stabil. Die irreduziblen Komponenten Z_1, \dots, Z_t von \hat{Z}_π sind jeweils Abschlüsse von $B \times B$ -Orbiten. Auf jedem Z_i lässt sich $x_\pi^{(\lambda)}$

als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{M}_{Z_i}^{(\lambda)}$ schreiben, die dasselbe Gewicht haben, es gibt also Koeffizienten $\alpha_{i\nu}, \beta_{i\nu} \in k$, so dass

$$x_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i} = \sum_{\substack{\nu \in B_\lambda \\ \nu \text{ standard auf } Z_i \\ \nu(1)=\pi(1)}} \alpha_{i\nu} x_\nu^{(\lambda)}|_{Z_i} + \sum_{\substack{\mu < \lambda \text{ dom.} \\ \nu \in B_\mu \\ \nu \text{ standard auf } Z_i \text{ bzgl. } \lambda \\ \nu(1)=\pi(1)}} \beta_{i\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i}.$$

Für die Einschränkung auf $Z_i \cap Y$ folgt daraus

$$\begin{aligned} x_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y} &= \sum \alpha_{i\nu} x_\nu^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y} \\ \parallel & \parallel \\ p_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y} &= \sum \alpha_{i\nu} p_\nu^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y} \end{aligned}$$

Da π auf $Z_i \cap Y$ nicht standard ist, gilt für das Standardmonom $p_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y} = 0$. Die $p_\nu^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Y}$ bilden aber eine Basis von $H^0(Z_i \cap Y, \mathcal{L}_\lambda)$, daher folgt $\alpha_{i\nu} = 0$ für alle ν .

Ist $\lambda \in \Lambda^+$ minimal, das heißt es gibt kein $\mu \in \Lambda^+$ mit $\mu < \lambda$, dann gilt $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \cong H^0(Y, \mathcal{L}_\lambda)$. Daher gibt es eine eindeutige Fortsetzung $y_\pi^{(\lambda)}$ von $p_\pi^{(\lambda)}$, und diese genügt den Anforderungen der Behauptung. Für größere λ bleibt

$$x_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i} = \sum_{\substack{\mu < \lambda \text{ dom.} \\ \nu \in B_\mu \\ \nu \text{ standard auf } Z_i \text{ bzgl. } \lambda \\ \nu(1)=\pi(1)}} \beta_{i\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i}.$$

Die folgende Argumentation zeigt, dass die Koeffizienten $\beta_{i\nu}$ so gewählt werden können, dass $\beta_{i\nu} = \beta_{j\nu}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, t\}$. Ist ν nicht standard auf Z_i , so ist $y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i} = 0$ und $\beta_{i\nu}$ kann beliebig gewählt werden. Jedes ν ist aber auf mindestens einem Z_i standard. Sind Z_i und Z_j zwei irreduzible Komponenten, so ist jedes ν , das auf beiden standard ist, auch auf deren Schnitt $Z_i \cap Z_j$ standard. Dies ist eine Verallgemeinerung der analogen Aussage für Schubertvarietäten und wird anschließend in Lemma 2.15 bewiesen. Es gilt

$$x_\pi^{(\lambda)}|_{Z_i \cap Z_j} = \sum_{\substack{\nu \text{ standard auf } Z_i \\ \text{bzgl. } \lambda}} \beta_{i\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j} = \sum_{\substack{\nu \text{ standard auf } Z_j \\ \text{bzgl. } \lambda}} \beta_{j\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j}$$

Da $\sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j} = 0$ für alle ν , die nicht standard auf $Z_i \cap Z_j$ bezüglich λ sind, folgt

$$\sum_{\substack{\nu \text{ standard auf } Z_i \cap Z_j \\ \text{bzgl. } \lambda}} \beta_{i\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j} = \sum_{\substack{\nu \text{ standard auf } Z_i \cap Z_j \\ \text{bzgl. } \lambda}} \beta_{j\nu} \sigma^{(\lambda-\mu)} y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j}$$

Die in diesen Summen auftretenden $\sigma^{(\lambda-\mu)}y_\nu^{(\mu)}|_{Z_i \cap Z_j}$ sind aber linear unabhängig, daher folgt $\beta_{i\nu} = \beta_{j\nu}$.

Definiert man $\beta_\nu := \beta_{1\nu} = \dots = \beta_{t\nu}$, so ergibt sich

$$x_\pi^{(\lambda)}|_{\hat{Z}_\pi} = \sum \beta_\nu \sigma^{(\lambda-\mu)}y_\nu^{(\mu)}|_{\hat{Z}_\pi}.$$

Setze jetzt

$$y_\pi^{(\lambda)} := x_\pi^{(\lambda)} - \sum \beta_\nu \sigma^{(\lambda-\mu)}y_\nu^{(\mu)}.$$

Dann erhält man für die Einschränkung auf Y

$$y_\pi^{(\lambda)}|_Y = x_\pi^{(\lambda)}|_Y - 0 = p_\pi^{(\lambda)}$$

und für die Einschränkung auf \hat{Z}_π

$$y_\pi^{(\lambda)}|_{\hat{Z}_\pi} = x_\pi^{(\lambda)}|_{\hat{Z}_\pi} - \sum \beta_\nu \sigma^{(\lambda-\mu)}y_\nu^{(\mu)}|_{\hat{Z}_\pi} = 0.$$

□

Folgerung 2.14:

Sei $\lambda \in \Lambda^+$. Die Menge

$$\mathcal{S}^{(\lambda)} := \{\sigma^{(\lambda-\mu)}y_\nu^{(\mu)} \mid \mu \leq \lambda \text{ dominant, } \pi \in B_\mu\}$$

hat die Eigenschaften 1, 2 und 3.

Um den Beweis von Satz 2.13 zu vervollständigen, wird noch die folgende Aussage benötigt.

Lemma 2.15:

Seien Z_1 und Z_2 irreduzible Komponenten von \hat{Z}_π zu $\pi \in B_\lambda$. Ist $\mu < \lambda$ dominant und $\nu \in B_\mu$ standard auf Z_1 und Z_2 bezüglich λ , so ist ν auch standard auf $Z_1 \cap Z_2$ bezüglich λ .

Beweis:

Es gelte $Z_1 = \overline{[I_1, x_1, w_1]}$, $Z_2 = \overline{[I_2, x_2, w_2]}$ und $\lambda - \mu = \sum n_k \alpha_k$. Aus $\nu \in B_\mu$ standard auf Z_i folgt $n_k = 0$ für alle $k \notin I_i$, also $n_k = 0$ für alle $k \notin I_1 \cap I_2$. Da $Z_1 \cap Z_2 \subseteq X_{I_1 \cap I_2}$, erfüllt μ die Bedingung aus Definition 2.2.

Der Pfad $\nu \in B_\mu$ heißt standard auf Z_i genau dann, wenn ν standard auf $Z_i \cap Y$ ist. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass ein Pfad, der auf zwei Schubert-varietäten in $G/B \times G/B$ standard ist, auch auf deren Schnitt standard ist.

Behauptung: Sei $\nu \in B_\mu$ standard auf $Y_i = \overline{[\emptyset, x_i, w_i]}$ für $i = 1, 2$. Dann ist ν auch standard auf $Y_1 \cap Y_2$. Beweis:

ν ist standard auf $Y = \overline{[\emptyset, x, w]} \cong S(xw_0) \times S(w)$ genau dann, wenn für die erste Richtung $i(\nu)$ des Pfades ν gilt $i(\nu) \leq (xw_0, w)$. Mit der Bezeichnung $i(\nu) = (\tilde{x}w_0, \tilde{w})$ ist ν standard auf Y , falls $\tilde{x} \geq x$ und $\tilde{w} \leq w$. Insbesondere ist ν standard auf $\overline{[\emptyset, \tilde{x}, \tilde{w}]}$.

$$\begin{aligned}
\nu \text{ standard auf } Y_1 \text{ und } Y_2 &\Leftrightarrow \tilde{x} \geq x_1, \tilde{x} \geq x_2, \tilde{w} \leq w_1, \tilde{w} \leq w_2 \\
&\Leftrightarrow [\emptyset, \tilde{x}, \tilde{w}] \leq [\emptyset, x_1, w_1] \text{ und } [\emptyset, \tilde{x}, \tilde{w}] \leq [\emptyset, x_2, w_2] \\
&\Leftrightarrow \overline{[\emptyset, \tilde{x}, \tilde{w}]} \subseteq Y_1 \cap Y_2 \\
&\Rightarrow \nu \text{ standard auf } Y_1 \cap Y_2
\end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Symmetrische Räume

3.1 $PSL(n+1)/PSO(n+1)$

Sei X die wundervolle Kompaktifizierung eines symmetrischen Raums. Ist Z der Abschluss eines beliebigen B -Orbits und $\lambda \in \text{Pic}(X)$, so ist die im Abschnitt 2.1 definierte Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)} \subset H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ linear unabhängig. Im Fall $X = \overline{G}$ bildet $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ sogar eine Basis von $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$. Das folgende Beispiel zeigt, dass dies für beliebige symmetrische Räume falsch ist.

Seien $k = \mathbb{C}$ und $G = PSL(n+1)$ mit der Involution $\theta : G \rightarrow G, g \mapsto (g^t)^{-1}$. Dann ist $H = G^\theta = \{g \in G \mid g^t = g^{-1}\} \cong PSO(n+1)$. Die wundervolle Kompaktifizierung $X = \overline{G/H}$ des symmetrischen Raums G/H lässt sich wie in [CP83] beschrieben konstruieren.

Die einfach zusammenhängende Überdeckung von G ist $\tilde{G} = SL(n+1)$ mit Epimorphismus $\tilde{\pi} : SL(n+1) \rightarrow PSL(n+1), g \mapsto [g]$. Wählt man \tilde{T} als die Menge der Diagonalmatrizen in $SL(n+1)$, so ist $T := \tilde{\pi}(\tilde{T})$ ein θ -stabiler Torus in G mit $T_1 = T$. Die einfachen Wurzeln seien

$$\alpha_i : [\text{diag}(t_1, \dots, t_{n+1})] \mapsto \frac{t_i}{t_{i+1}} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Dann ist \tilde{B} die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in $SL(n+1)$ und $B = \tilde{\pi}(\tilde{B})$. Ist U eine beliebige Untergruppe von G , so wird mit $\tilde{U} = \tilde{\pi}^{-1}(U) \subseteq \tilde{G}$ das Urbild von U unter $\tilde{\pi}$ bezeichnet.

Der Rang der Varietät $X = \overline{G/H}$ ist $l = \dim T = n$, X besteht also aus $n!$ G -Orbiten. Für die einfachen Wurzeln gilt $\theta(\alpha_i) = -\alpha_i$ und somit $\tilde{\alpha}_i = 2\alpha_i$. Die Picardgruppe $\text{Pic}(X) = \langle 2\omega_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ von X wird von den doppelten fundamentalen Gewichten erzeugt und entspricht dem Untergitter $\Gamma = 2\Lambda$. Für die globalen Schnitte auf X in das Geradenbündel \mathcal{L}_λ zu einem dominanten Gewicht

$\lambda \in \Gamma^+$ gilt

$$H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \cong \bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} H^0(G/B, \mathcal{L}_\mu) \cong \bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} V(\mu)^*,$$

wobei man für $\lambda, \mu \in \Gamma$ definiert

$$\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \exists n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}_0 : \lambda - \mu = \sum_{i=1}^l n_i \tilde{\alpha}_i = \sum_{i=1}^l 2n_i \alpha_i.$$

Die globalen Schnitte auf X in das Geradenbündel \mathcal{L}_λ zu einem dominanten Gewicht $\lambda \in \Gamma^+$ lassen sich darstellen als Koordinatenfunktionen einer Einbettung

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)^*) \cong \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} V(\mu)\right).$$

Eine Einbettung des dichten G -Orbits $G/H \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{\mu \leq \lambda \text{ dom.}} V(\mu)\right)$ ist gegeben durch $gH \mapsto [(g \cdot r_\mu)_\mu]$, wobei $r_\mu \in V(\mu)$ ein H -stabiles Element ist.

Der symmetrische Raum G/H setzt sich aus mehreren B -Orbits zusammen, die als Ecken eines Graphen $\Gamma(G/H)$ betrachtet werden können. Diesen Graph definiert und beschreibt Brion in [B01]. Im Beispiel $G/H = PSL(n+1)/PSO(n+1)$ hat dieser Graph die Eigenschaft, dass vom dichten B -Orbit \mathcal{O} von jeder Farbe eine Kante vom Typ N abgeht, wie in Lemma 3.1 gezeigt wird. Das heißt, für $1 \leq i \leq n$ gibt es einen B -Orbit \mathcal{O}_i in G/H , für den gilt

$$P_{\alpha_i} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_i \cup \mathcal{O} \text{ und die Abbildung } \pi : P_{\alpha_i} \times_B \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O} \text{ hat Grad 2.}$$

Der Abschluss des Orbits \mathcal{O}_i in X wird mit Z_i bezeichnet.

Zu einem regulären dominanten Gewicht $\lambda \in \Lambda^+$ betrachte die Einschränkungsbildung

$$\text{res}_i : H^0(X, \mathcal{L}_{2\lambda}) \rightarrow H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda}).$$

Es soll nun gezeigt werden, dass $\text{Im}(\text{res}_i)$ Gewichtsvektoren enthält, deren Gewichte in der Menge $\mathcal{M}_{Z_i}^{(2\lambda)}$ nicht auftreten. Dafür wird die Einbettung von X in $\mathbb{P}(V(2\lambda))$ explizit konstruiert und ihre Einschränkung auf Z_i untersucht.

Sei zunächst $\lambda = \omega_j$ ein fundamentales Gewicht und $\pi_{2\omega_j} : V(\omega_j) \otimes V(\omega_j) \rightarrow V(2\omega_j)$ die G -äquivalente Projektion. Ist $\{x_i \mid i = 1, \dots, k_j\}$ eine Basis von $V(\omega_j)$ aus Gewichtsvektoren, dann erhält man mit der Konstruktion aus Abschnitt 1.7 in [CP83] den Vektor $r_{2\omega_j} := \pi_{2\omega_j}\left(\sum_{i=1}^{k_j} x_i \otimes x_i\right)$, der stabil unter H ist.

Sei $\lambda \in \Lambda^+$ beliebig, das heißt $2\lambda \in \Gamma^+$. Schreibe $2\lambda = \sum_{j=1}^n n_j 2\omega_j$ und betrachte die G -äquivalente Projektion $\pi_{2\lambda} : \bigotimes_{j=1}^n V(2\omega_j)^{\otimes n_j} \rightarrow V(2\lambda)$. Dann

ist die Klasse von $r_{2\lambda} := \pi_{2\lambda}(\bigotimes_{j=1}^n r_{2\omega_j}^{\otimes n_j}) \in V(2\lambda)$ – ebenfalls mit $r_{2\lambda}$ bezeichnet – ein H -stabiler Vektor im projektiven Raum $\mathbb{P}(V(2\lambda))$. Ist λ regulär, so ist der Stabilisator von $r_{2\lambda}$ in G gerade H und $r_{2\lambda}$ definiert eine Einbettung $X = \overline{G \cdot r_{2\lambda}} \subseteq \mathbb{P}(V(2\lambda))$ (siehe [CP83], Abschnitt 2).

$\tilde{B} \cap \tilde{H}$ ist die Menge der Diagonalmatrizen in $SL(n+1)$, deren Quadrat die Einheitsmatrix ist, also insbesondere endlich. Daher ist die Dimension von BH gleich der Dimension von G , und BH liegt dicht in G . Damit ist $\mathcal{O} := Br_{2\lambda} = BHr_{2\lambda}$ der dichte B -Orbit in $X = \overline{G/H}$.

Seien $s_i = s_{\alpha_i} \in W$ eine einfache Spiegelung und $S \in SL(n+1)$ die Matrix mit Einträgen

$$S_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \neq i, i+1 \\ \xi & \text{falls } (k,l) = (i, i+1) \text{ oder } (i+1, i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\xi^2 = -1$ gelten soll. Dieses $S \in \tilde{G}$ ist ein symmetrischer Repräsentant von $s_i \in N(T)/T$. Daher gibt es ein $g \in \tilde{P}_{\alpha_i}$ mit $gg^t = S$. Definiere $r_{2\lambda}^{(i)} := [g]r_{2\lambda} \in X$.

Lemma 3.1:

Der Vektor $r_{2\lambda}^{(i)}$ ist ein Repräsentant des B -Orbits $\mathcal{O}_i = Br_{2\lambda}^{(i)}$, der durch eine doppelte Kante der Farbe α_i mit dem offenen B -Orbit $\mathcal{O} = Br_{2\lambda}$ verbunden ist.

Beweis:

Definiere $f = (f_{k,l})_{k,l}, g = (g_{k,l})_{k,l} \in SL(n+1)$ durch

$$f_{k,l} = g_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \neq i, i+1 \\ 0 & \text{falls } k \neq l \text{ und } k, l \neq i, i+1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$f' = \begin{pmatrix} f_{i,i} & f_{i,i+1} \\ f_{i+1,i} & f_{i+1,i+1} \end{pmatrix} := 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} \xi & -1 \\ 1 & -\xi \end{pmatrix}$$

$$g' = \begin{pmatrix} g_{i,i} & g_{i,i+1} \\ g_{i+1,i} & g_{i+1,i+1} \end{pmatrix} := 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Für diese Matrizen gilt $ff^t = gg^t = S$. Für $h := f^{-1}g$ erhält man

$$h_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \neq i, i+1 \\ 0 & \text{falls } k \neq l \text{ und } k, l \neq i, i+1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$h' = \begin{pmatrix} h_{i,i} & h_{i,i+1} \\ h_{i+1,i} & h_{i+1,i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also ein $h \in \tilde{H} = SO(n+1)$ mit $g = fh$. Da $r_{2\lambda}$ invariant unter $H = \tilde{\pi}(\tilde{H})$ ist, ist $r_{2\lambda}^{(i)} := [g]r_{2\lambda} = [f][h]r_{2\lambda} = [f]r_{2\lambda}$ wohldefiniert. Man rechnet leicht nach,

dass $[g] \notin BH = \text{Stab}_{Gr_{2\lambda}}$. Sei dafür $\pi : \tilde{P}_{\alpha_i} \rightarrow SL(2)$ die Projektion der Parabolischen $\tilde{P}_{\alpha_i} \subseteq SL(n+1)$ auf die Standardleviuntergruppe $\tilde{L}_{\alpha_i} \cong SL(2)$. Angenommen $[g] \in BH$, dann gibt es $b \in \tilde{B} \subseteq \tilde{P}_{\alpha_i}$, $h \in \tilde{H}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ mit $zg = bh$. Dann gilt $b, h \in \tilde{P}_{\alpha_i}$ und $z\pi(g) = \pi(bh) = \pi(b)\pi(h)$. Diese Matrizen haben die Form

$$\begin{aligned}\pi(g) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \xi^2 = -1, \\ \pi(b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2) \text{ und} \\ \pi(h) &= \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in SO(2).\end{aligned}$$

Die Rechnung

$$\begin{aligned}\pi(b)\pi(h) &= \begin{pmatrix} ax + cy & -cx + ay \\ cx^{-1} & ax^{-1} \end{pmatrix} = \frac{z}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow c &= \frac{z}{\sqrt{2}}\xi x, \quad a = \frac{z}{\sqrt{2}}x \\ \Rightarrow x^2 + \xi xy &= 1, \quad -\xi x^2 + xy = \xi \Leftrightarrow -x^2 - \xi xy = 1 \\ \Rightarrow 1 = x^2 + \xi xy &= -x^2 - \xi xy \quad \Rightarrow 1 = 0\end{aligned}$$

führt zu einem Widerspruch, deshalb gilt $[g] \notin BH$. Somit liegt $r_{2\lambda}^{(i)} = [g]r_{2\lambda}$ nicht im offenen B -Orbit $Br_{2\lambda} = \mathcal{O}$. Der Orbit $Br_{2\lambda}^{(i)}$ werde mit \mathcal{O}_i bezeichnet. Wegen $[g^{-1}]r_{2\lambda}^{(i)} = r_{2\lambda}$ und $[g^{-1}] \in P_{\alpha_i}$ ist \mathcal{O}_i mit \mathcal{O} durch eine Kante der Farbe α_i verbunden. Da $[h] \notin B$, sind die Bilder von $[f]$ und $[g]$ in P_{α_i}/B verschieden. Es handelt sich also um eine doppelte Kante, weil die Abbildung $\pi : P_{\alpha_i} \times_B \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}$ Grad 2 hat. \square

Lemma 3.2:

In der Zerlegung des so konstruierten $r_{2\lambda}^{(i)}$ in Gewichtsvektoren treten nur Vektoren mit Gewichten aus α_i^\perp auf.

Beweis:

Betrachte eine fundamentale Darstellung $V(\omega_j)$ mit Basis $\{x_1, \dots, x_N\}$ aus Gewichtsvektoren und $\varrho : G \rightarrow \text{End}(V(\omega_j)) \cong \mathbb{C}^{N \times N}$. Die Zerlegung von $r_{2\omega_j}^{(i)}$ in eine Summe von Gewichtsvektoren in $\mathbb{P}(V(2\omega_j))$ hat die Form

$$\begin{aligned}g \cdot r_{2\omega_j} &= g \cdot \pi_{2\omega_j} \left(\sum_{k=1}^N x_k \otimes x_k \right) = \pi_{2\omega_j} \left(\sum_{k=1}^N g \cdot x_k \otimes g \cdot x_k \right) \\ &= \pi_{2\omega_j} \left(\sum_{k=1}^N \varrho(g)x_k \otimes \varrho(g)x_k \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi_{2\omega_j} \left(\sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \varrho(g)_{l,k} x_l \otimes \sum_{m=1}^N \varrho(g^t)_{k,m} x_m \right) \\
&= \pi_{2\omega_j} \left(\sum_{l,m=1}^N \varrho(gg^t)_{l,m} x_l \otimes x_m \right) = \sum_{l,m=1}^N \varrho(S)_{l,m} \pi_{2\omega_j}(x_l \otimes x_m).
\end{aligned}$$

Hier ist $S = gg^t$ ein Repräsentant der Spiegelung s_i , daher bildet $\varrho(S)$ Gewichtsvektoren in $V(\omega_j)$ auf Gewichtsvektoren ab, wobei die Gewichte mit s_i permutiert werden. Für einen Basisvektor x_l gilt $\varrho(S)(x_l) \in \mathbb{C}x_m$, wobei $\text{wt}(x_m) = s_i \cdot \text{wt}(x_l)$. Wir haben also $\varrho(S)_{l,m} \neq 0$ nur für $\text{wt}(x_m) = s_i \cdot \text{wt}(x_l)$. Für die zugehörigen Gewichtsvektoren $x_l \otimes x_m$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l \otimes x_m) \rangle &= \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l) + s_i \cdot \text{wt}(x_l) \rangle \\
&= \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l) \rangle + \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l - \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l) \rangle \alpha_i) \rangle \\
&= 2\langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l) \rangle - \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_l) \rangle \langle \alpha_i^\vee, \alpha_i \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung für die fundamentalen Gewichte. Ist nun $\lambda \in \Lambda^+$ mit $\lambda = \sum_{j=1}^n n_j \omega_j$, so gilt

$$\begin{aligned}
g \cdot r_{2\lambda} &= g \cdot \pi_{2\lambda} \left(\bigotimes_{j=1}^n r_{2\omega_j}^{\otimes n_j} \right) = \pi_{2\lambda} \left(\bigotimes_{j=1}^n (g \cdot r_{2\omega_j})^{\otimes n_j} \right) \\
&= \pi_{2\lambda} \left(\bigotimes_{j=1}^n \left(\sum_k z_{j,k} v_{j,k} \right)^{\otimes n_j} \right) \text{ mit } z_{j,k} \in \mathbb{C} \text{ und } \text{wt}(v_{j,k}) \in \alpha_i^\perp.
\end{aligned}$$

Somit ist auch $r_{2\lambda}^{(i)}$ zu beliebigem $\lambda \in \Lambda^+$ Summe von Gewichtsvektoren mit Gewichten aus α_i^\perp . \square

Bemerkung 3.1:

Diese Rechnung zeigt, dass das in der Bruhatordnung kleinste in der Zerlegung von $r_{2\lambda}^{(i)}$ in Gewichtsvektoren vorkommende Gewicht auf der α_i -Kette zwischen den Extremalgewichten $w_0 \cdot 2\lambda$ und $s_i w_0 \cdot 2\lambda$ liegt:

Seien $\lambda = \sum_j n_j \omega_j$, $x_j \in V(\omega_j)$ der Tiefstgewichtsvektor mit $\text{wt}(x_j) = w_0 \omega_j$ und $x_j^{(i)} \in V(\omega_j)$ mit Gewicht $\text{wt}(x_j^{(i)}) = s_i \cdot \text{wt}(x_j)$. Der Gewichtsvektor mit dem kleinsten Gewicht, der als Summand in $r_{2\lambda}^{(i)}$ auftritt, ist

$$\begin{aligned}
v_0 &:= \pi_{2\lambda} \left(\bigotimes_{j=1}^n \pi_{2\omega_j}(v_j^{(i)})^{\otimes n_j} \right), \text{ wobei} \\
v_j^{(i)} &= \begin{cases} x_j \otimes x_j, & \text{falls } s_i w_0 \omega_j = w_0 \omega_j \\ x_j \otimes x_j^{(i)} + x_j^{(i)} \otimes x_j, & \text{falls } s_i w_0 \omega_j \neq w_0 \omega_j \end{cases}.
\end{aligned}$$

Definiert man $u \in SL(n+1)$ durch

$$u_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \neq i, i+1 \\ 0 & \text{falls } k \neq l \text{ und } k, l \neq i, i+1 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$u' = \begin{pmatrix} u_{i,i} & u_{i,i+1} \\ u_{i+1,i} & u_{i+1,i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $g \in SL(n+1)$ wie im Beweis von Lemma 3.1, so rechnet man leicht nach, dass $v_j^{(i)} = (u + g^2 - \text{id})x_j \otimes x_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Daher sind alle auftretenden Bilder von Projektionen ungleich Null, und das Gewicht von v_0 ist

$$\begin{aligned} \text{wt}(v_0) &= \sum_j n_j \{ \text{wt}(x_j) + s_i \cdot \text{wt}(x_j) \} \\ &= \sum_j n_j \{ \text{wt}(x_j) + \text{wt}(x_j - \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(x_j) \rangle \alpha_i) \} \\ &= \sum_j 2n_j w_0 \omega_j - \sum_j n_j \langle \alpha_i^\vee, w_0 \omega_j \rangle \alpha_i \\ &= w_0 \cdot 2\lambda + n\alpha_i \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

liegt also auf der α_i -Kette durch $w_0 \cdot 2\lambda$. \diamond

Bemerkung 3.2:

Anschaulich ist der Zusammenhang zwischen $r_{2\lambda}$ und $r_{2\lambda}^{(i)}$ dieser: Die Gewichte, die in der Zerlegung von $r_{2\lambda}^{(i)}$ in Gewichtsvektoren auftreten, sind gewissermaßen die Projektionen auf α_i^\perp längs α_i der Gewichte, die in der Zerlegung von $r_{2\lambda}$ in Gewichtsvektoren auftreten. \diamond

In der Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V(2\lambda))$ entspricht Z_i also

$$Z_i \cong \overline{B \cdot r_{2\lambda}^{(i)}} \subseteq \mathbb{P}(V(2\lambda)).$$

Dass $H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})$ gerade durch die Koordinatenfunktionen dieser Einbettung gegeben ist, zeigt das folgende Lemma. Es beruht auf einem Hinweis von M. Brion und gibt eine Beschreibung der Schnitte auf Z_i .

Lemma 3.3:

Die Einschränkungabbildung $\text{res}_i : H^0(X, \mathcal{L}_{2\lambda}) \rightarrow H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})$ ist für alle regulären dominanten Gewichte $\lambda \in \Lambda^+$ surjektiv.

Beweis:

Betrachte die G -äquivalente Abbildung

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{P}(V(2\omega_i)^*) \cong \mathbb{P}(V(-w_0 \cdot 2\omega_i)), \\ gH &\mapsto [g \cdot r_{-w_0 \cdot 2\omega_i}]. \end{aligned}$$

Die Rechnungen in Bemerkung 3.1 zeigen, dass Z_i gerade das Pullback der Nullstellenvarietät des Höchstgewichtsvektors $s \in V(-w_0 \cdot 2\omega_i)^* \cong H^0(X, \mathcal{L}_{-w_0 \cdot 2\omega_i})$ ist. Daher ist die Idealgarbe der Untervarietät Z_i von X isomorph zum dualen Geradenbündel $\mathcal{L}_{2\omega_j}^\vee$, wobei $\omega_j = -w_0 \cdot 2\omega_i$. Mit

$$\mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{L}_{2\omega_j}^\vee \cong \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{L}_{-2\omega_j} \cong \mathcal{L}_{2\lambda-2\omega_j}$$

erhält man

$$H^1(X, \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{I}_{Z_i}) \cong H^1(X, \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{L}_{2\omega_j}^\vee) \cong H^1(X, \mathcal{L}_{2\lambda-2\omega_j}).$$

Ist λ regulär, so ist $\lambda - \omega_j$ dominant und daher $H^1(X, \mathcal{L}_{2\lambda-2\omega_j}) = 0$ (z.B. [CP83], Theorem 8.3). Damit folgt die Behauptung aus der langen, exakten Kohomologiesequenz der kurzen, exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{I}_{Z_i} \rightarrow \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}_{2\lambda} \otimes \mathcal{O}_{Z_i} \rightarrow 0.$$

□

Lemma 3.4:

Sei $\lambda \in \Lambda^+$ ein reguläres Gewicht. Dann gilt:

$$\langle \mathcal{M}_{Z_i}^{(2\lambda)} \rangle \subsetneq H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})$$

Beweis:

Es wird gezeigt, dass in $H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})$ Gewichte auftreten, die in $\mathcal{M}_{Z_i}^{(2\lambda)}$ nicht vorkommen. Dafür wird ein Pfad $\eta \in B_{2\lambda}$ angegeben mit $\eta(1) \neq \pi(1)$ für alle $\pi \in B_\mu$ zu $\mu \leq 2\lambda$, die standard auf $Z_i \cap Y$ sind, für den aber gilt $x_\eta^{(2\lambda)}|_{Z_i} \neq 0$.

Sei $r_{2\lambda}^{(i)} = \sum_{k=0}^m v_k$, wobei v_k Gewichtsvektoren in $V(2\lambda)$ sind. Von diesen habe der Vektor v_0 das kleinste Gewicht bezüglich der Bruhatordnung. Nach Bemerkung 3.1 liegt $\text{wt}(v_0)$ auf der α_i -Kette zwischen $w_0 \cdot 2\lambda$ und $s_i w_0 \cdot 2\lambda$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$\text{wt}(v_0) + n\alpha_i = s_i w_0 \cdot 2\lambda.$$

Da das Gewicht λ regulär ist, liegt zwar $\text{wt}(v_0)$ nach Lemma 3.2 in α_i^\perp , nicht aber die Extremalgewichte der Darstellung $V(2\lambda)$. Also ist $n \geq 1$. Der Pfad $\eta \in B_{2\lambda}$ mit $\eta(1) = \text{wt}(v_0) + (n-1)\alpha_i = s_i w_0 \cdot 2\lambda - \alpha_i$ hat die gesuchten Eigenschaften, denn

- 1) Betrachte $b \in U_{\alpha_i}$, $b \neq 1$ und schreibe $b \cdot r_{2\lambda}^{(i)}$ als Summe von Gewichtsvektoren

$$b \cdot r_{2\lambda}^{(i)} = \sum c_\pi^{(\mu)} v_\pi^{(\mu)},$$

wobei $c_\pi^{(\mu)} \in \mathbb{C}$ und $\{v_\pi^{(\mu)} \mid \mu \leq 2\lambda \text{ dom.}, \pi \in B_\mu\}$ die zu $\{x_\pi^{(\mu)} \mid \mu \leq 2\lambda \text{ dom.}, \pi \in B_\mu\}$ duale Basis von $\bigoplus_{\mu \leq 2\lambda \text{ dom.}} V(\mu)$ ist. Dann ist $c_\pi^{(2\lambda)} \neq 0$ für alle $\pi \in B_{2\lambda}$ mit $\pi(1) \in \{\text{wt}(v_0), \text{wt}(v_0) + \alpha_i, \dots, \text{wt}(v_0) + n\alpha_i\}$. Aus $c_\eta^{(2\lambda)} \neq 0$ folgt direkt $x_\eta^{(2\lambda)}|_{Z_i} \neq 0$.

- 2) Es gibt keinen Pfad $\pi \in B_{2\lambda}$ mit $\pi(1) = \eta(1)$, der standard auf $Z_i \cap Y$ ist: Sei $Z_i \cap Y = \bigcup_{j \in J} S(\tau_j)$ die Vereinigung der Schubertvarietäten $S(\tau_j)$ in $Y \cong G/B$ zu den Weylgruppenelementen $\tau_j \in W$. Dann enthält $\mathcal{M}_{Z_i}^{(2\lambda)}$ nur fortgesetzte Pfadvektoren zu Pfaden π , für die gilt

$$\pi(1) = \tau_j \mu + \sum_{i=1}^l n_i \alpha_i \text{ mit } j \in J, \mu \leq 2\lambda \text{ dominant und } n_i \in \mathbb{N}_0.$$

Gibt es einen Pfad $\pi \in B_{2\lambda}$ mit $\pi(1) = \eta(1)$, der standard auf $Z_i \cap Y$ ist, so ist auch $\pi' \in B_{2\lambda}$ mit $\pi'(1) = w_0 \cdot 2\lambda$ standard auf $Z_i \cap Y$. Das steht im Widerspruch zu der Annahme, dass v_0 der Summand von $r_{2\lambda}^{(i)}$ mit dem kleinsten Gewicht bezüglich der Bruhatordnung ist, weil in $Z_i^\circ = B \cdot r_{2\lambda}^{(i)}$ nur Gewichtsvektoren mit größerem Gewicht als $\text{wt}(v_0)$ auftreten können.

- 3) Es gibt keinen Pfad $\pi \in B_\mu$ zu $\mu < 2\lambda$ mit $\pi(1) = \eta(1)$, weil sonst die Differenz von 2λ und μ gerade α_i sein müsste. Das ist ein Widerspruch zu $\mu \leq 2\lambda$. \square

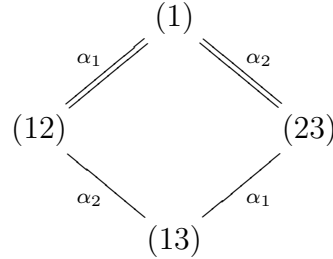
Bemerkung 3.3:

Weil das kleinste Gewicht in $H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})^*$ für reguläres $\lambda \in \Lambda^+$ kein Extremalgewicht von $V(2\lambda)$ ist, lässt sich $H^0(Z_i, \mathcal{L}_{2\lambda})$ nicht aus Demazuremoduln konstruieren. Daher können die Pfadvektoren, deren Einschränkungen auf Z_i nicht verschwinden, nicht durch Eigenschaften der zu Grunde liegenden Pfade beschrieben werden. \diamond

3.2 Beispiel: $PSL(3)/PSO(3)$

Betrachte das Beispiel für $n = 2$, also $X = \overline{PSL(3)/PSO(3)}$. Der symmetrische Raum $G/H = PSL(3)/PSO(3)$ besteht aus $2! = 4$ B -Orbiten, die durch die Involutionen $\{(1), (12), (23), (13)\}$ der Weylgruppe $W \cong S_3$ indiziert sind (siehe

zum Beispiel [P01]). Der Graph $\Gamma(G/H)$ hat folgende Form:



Untersucht werden soll der B -Orbit $\mathcal{O}_1 \hat{=} (12)$, der durch eine doppelte Kante der Farbe α_1 mit dem dichten B -Orbit $\mathcal{O} \hat{=} (1)$ verbunden ist. Sein Abschluss in X wird mit Z_1 bezeichnet.

Springer beschreibt in [Sp04] in Corollary 4.8, das sich nach 4.9.b auf dieses Beispiel anwenden lässt, aus welchen Schubertvarietäten sich der Schnitt eines B -Orbitabschlusses in G/H mit dem abgeschlossenen G -Orbit $Y \cong G/B$ zusammensetzt. Angewendet auf den B -Orbit \mathcal{O}_1 erhält man

$$Z_1 \cap Y = S(s_2 s_1).$$

Betrachte das reguläre Gewicht $\lambda = \omega_1 + 2\omega_2 \in \Lambda^+$. Es gibt zwei dominante Gewichte $\mu \leq 2\lambda$, nämlich $\mu_1 = 4\omega_1$ und $\mu_2 = 2\omega_2$. Es gilt also

$$H^0(X, \mathcal{L}_{2\lambda}) \cong H^0(G/B, \mathcal{L}_{2\lambda}) \oplus H^0(G/B, \mathcal{L}_{\mu_1}) \oplus H^0(G/B, \mathcal{L}_{\mu_2}).$$

Die Endpunkte der Pfade $\pi \in B_\mu$, die standard auf $Z_1 \cap Y$ sind, sind Gewichte, die im Demazuremodul $V(\mu)_{s_2 s_1}$ auftreten. Diese Gewichte sind für 2λ , μ_1 und μ_2 in Abbildung 3.1 auf Seite 43 dargestellt. Das Gewicht eines Elements $\sigma^{(2\lambda-\mu)} x_\pi^{(\mu)}$ aus $\mathcal{M}_{Z_1}^{(2\lambda)}$ ist $-\pi(1)$, wobei der Endpunkt des Pfades π im gekennzeichneten Bereich liegt.

In Abbildung 3.2 auf Seite 44 werden die Gewichte in $H^0(Z_1, \mathcal{L}_{2\lambda})^*$ veranschaulicht.

Die Gewichte der Summanden von $r_{2\lambda} \in V(2\lambda)$ sind $\{2\nu \mid \exists v \in V(\lambda) : \text{wt}(v) = \nu\}$. Sie sind in Abbildung 3.2 durch Punkte dargestellt. Die in der Zerlegung von $r_{2\lambda}^{(1)}$ auftretenden Gewichte sind ihre Projektionen auf $\alpha_1^\perp = \langle \omega_2 \rangle$, in Abbildung 3.2 durch Kreise dargestellt. Es gilt also $r_{2\lambda}^{(1)} = v_0 + v_1 + v_2 + v_3$, wobei $\text{wt}(v_0) = -4\omega_2$, $\text{wt}(v_1) = -\omega_2$, $\text{wt}(v_2) = 2\omega_2$ und $\text{wt}(v_3) = 5\omega_2$.

Die Schnitte $H^0(X, \mathcal{L}_{2\lambda})$ sind die Koordinatenfunktionen der Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V(2\lambda) \oplus V(\mu_1) \oplus V(\mu_2))$, wobei

$$\begin{aligned} G/H &\hookrightarrow \mathbb{P}(V(2\lambda) \oplus V(\mu_1) \oplus V(\mu_2)) \\ gH &\mapsto [(g \cdot r_{2\lambda}, g \cdot r_{\mu_1}, g \cdot r_{\mu_2})]. \end{aligned}$$

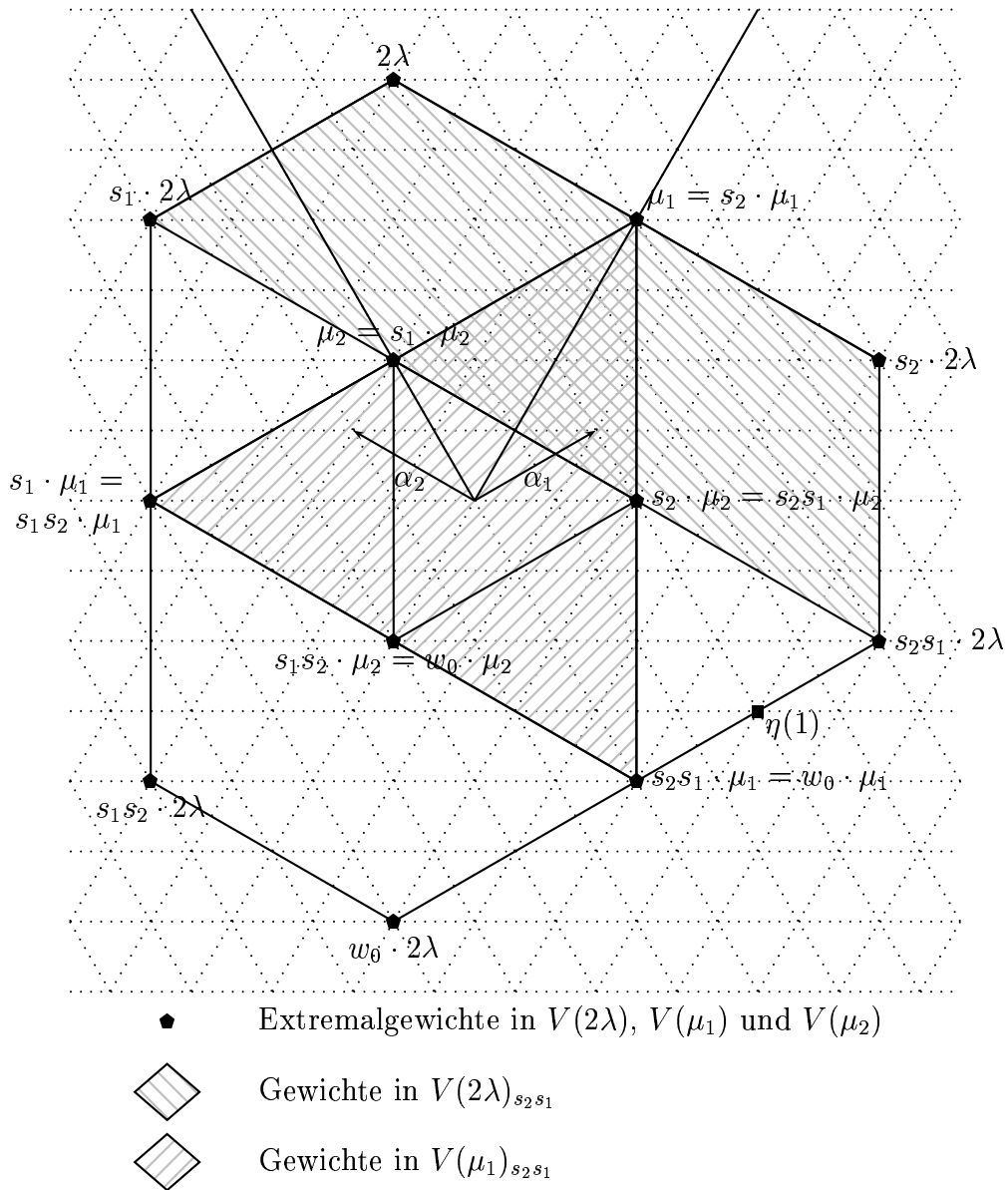


Abbildung 3.1: Gewichte in $\mathcal{M}_{Z_1}^{(2\lambda)}$

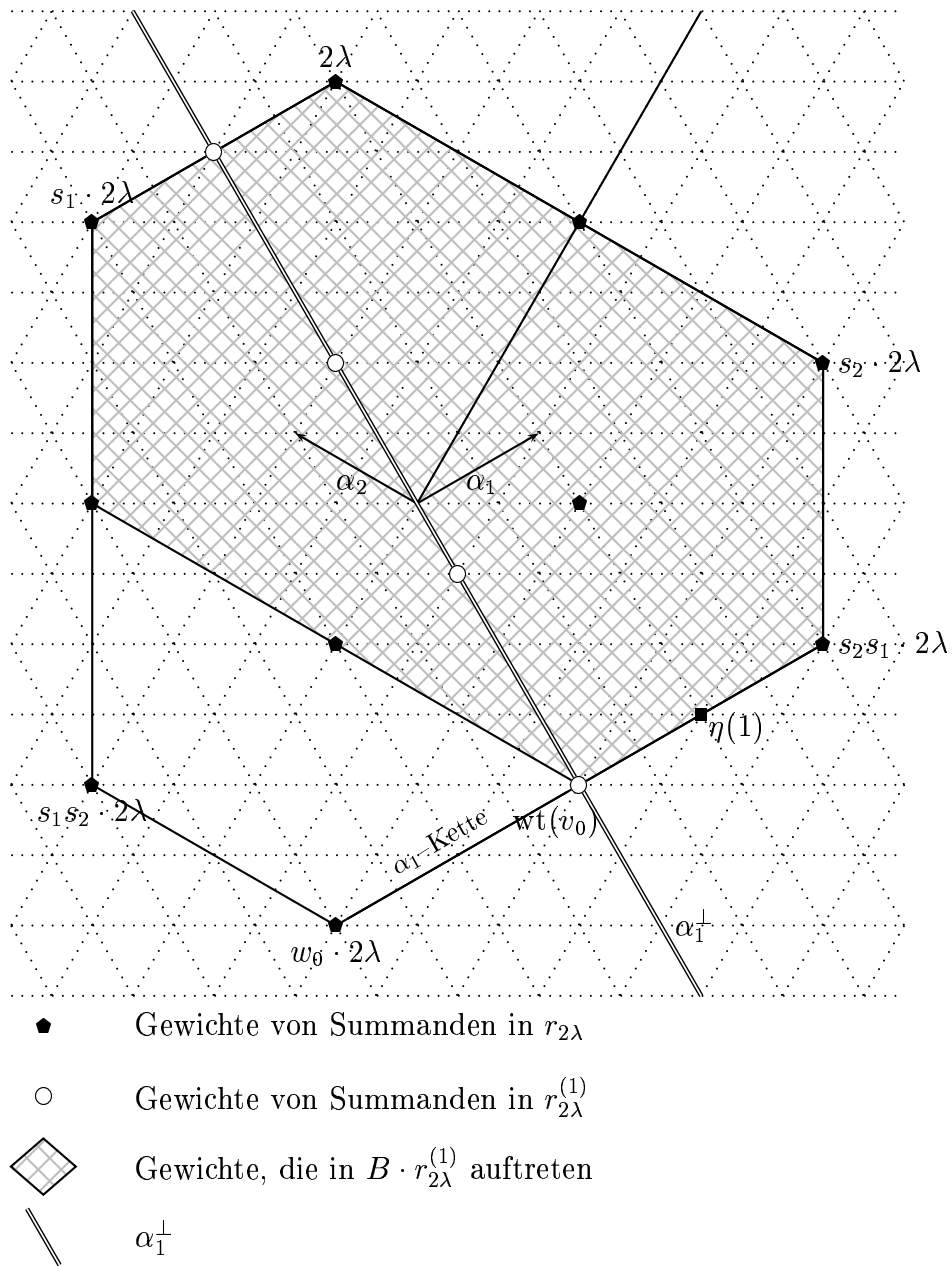


Abbildung 3.2: Gewichte in $H^0(Z_1, \mathcal{L}_{2\lambda})^*$

Eine Teilmenge hiervon stellen die Koordinatenfunktionen der Einbettung

$$G/H \hookrightarrow \mathbb{P}(V(2\lambda)), \quad gH \mapsto [g \cdot r_{2\lambda}]$$

dar. Die Koordinatenfunktionen der Einbettung des B -Orbits

$$\mathcal{O}_1 \hookrightarrow G/H \hookrightarrow \mathbb{P}(V(2\lambda)), \quad bgH \mapsto [b \cdot r_{2\lambda}^{(1)}],$$

wobei $g \cdot r_{2\lambda} = r_{2\lambda}^{(1)}$ gilt, beschreiben Einschränkungen dieser Schnitte auf Z_1 . Diese werden nun untersucht.

In $Br_{2\lambda}^{(1)}$ treten nur Gewichte auf, die in der Bruhatordnung größer als $\text{wt}(v_0)$ sind. Diese sind in Abbildung 3.2 gekennzeichnet. Wählt man insbesondere

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_{\alpha_1},$$

so erhält man

$$br_{2\lambda}^{(1)} = v_0 + v_{01} + v_{02} + \sum_j \tilde{v}_j,$$

wobei $\text{wt}(v_0) = -4\omega_2$, $\text{wt}(v_{01}) = 2\omega_1 - 5\omega_2 = \text{wt}(v_0) + \alpha_1$, $\text{wt}(v_{02}) = 4\omega_1 - 6\omega_2 = \text{wt}(v_0) + 2\alpha_1 = s_2 s_1 \cdot 2\lambda$ und $\text{wt}(\tilde{v}_j)$ größer $s_2 s_1 \cdot 2\lambda$ in der Bruhatordnung. Das zeigt, dass insbesondere die Einschränkung der Koordinatenfunktion $x_\eta^{(2\lambda)}$ zum eindeutigen LS-Pfad $\eta \in B_{2\lambda}$ mit Endpunkt $\eta(1) = 2\omega_1 - 5\omega_2 = \text{wt}(v_{01})$ auf Z_1 ungleich Null ist. Diese hat Gewicht $\text{wt}(x_\eta^{(2\lambda)}) = -\eta(1)$.

Ein Vergleich der beiden Abbildungen zeigt, dass es in $\mathcal{M}_{Z_1}^{(2\lambda)}$ kein Element mit Gewicht $-\eta(1)$ gibt.

Ausblick

In dieser Arbeit werden Standardmonome auf wundervollen Kompaktifizierungen symmetrischer Räume betrachtet und insbesondere ihre Kompatibilität mit B -Orbitabschlüssen untersucht. Für den Spezialfall der wundervollen Kompaktifizierung einer Gruppe werden sehr schöne Ergebnisse erzielt, während für den allgemeinen Fall nur wenige Aussagen gemacht werden können. Das führt zu interessanten Fragen, die bisher unbeantwortet sind.

Die in Abschnitt 2.1 vorgestellten Ergebnisse sind für beliebige wundervolle Kompaktifizierungen symmetrischer Räume $X = \overline{G/H}$ gültig. Insbesondere gibt es immer Fortsetzungen der Standardmonome auf dem eindeutigen abgeschlossenen G -Orbit $Y \cong G/P$. Diese bilden eine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$, und ihre Einschränkungen auf Abschlüsse von G -Orbiten lassen sich einfach beschreiben. Bei der Untersuchung der Einschränkungen dieser Schnitte auf B -Orbitabschlüsse treten jedoch Schwierigkeiten auf.

Ein prinzipielles Problem bei der Ausweitung der Standardmonomentheorie auf die wundervolle Kompaktifizierung beliebiger symmetrischer Räume ist, dass die B -Orbiten in $\overline{G/H}$ und ihre Abschlüsse im Allgemeinen nicht so leicht beschrieben werden können wie bei der wundervollen Kompaktifizierung einer Gruppe. Die B -Orbiten im dichten G -Orbit G/H sind bekannt, und die B -Orbiten in den übrigen G -Orbiten lassen sich auf B -Orbiten in kleineren symmetrischen Räumen zurückführen (siehe [Sp04], Abschnitt 3). Die Abschlussrelationen dieser B -Orbiten innerhalb eines G -Orbits lassen sich ebenfalls angeben (Proposition 4.2 in [Sp04]). Die Menge aller B -Orbiten, die im Abschluss eines beliebigen B -Orbits liegen, ist jedoch nur in Spezialfällen – wie $G/H = PSL(n)/PSO(n)$ – bekannt. Springer gibt in [Sp04], Abschnitt 4 einige partielle Ergebnisse an.

Doch auch wenn die B -Orbiten in X mit ihrem Abschlussrelationen bekannt sind, ist nicht klar, ob alle Einschränkungsabbildungen

$$\text{res}_\lambda : H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$$

von globalen Schnitten auf einen B -Orbitabschluss Z surjektiv sind. Damit sich die Standardmonomentheorie anwenden lässt, sollte dies für alle Gewichte λ mit

$H^0(X, \mathcal{L}_\lambda) \neq 0$ der Fall sein. Gibt es Einschränkungsabbildungen, die nicht surjektiv sind, kann es eine einfache Verallgemeinerung der klassischen Standardmonomentheorie auf diese Räume nicht geben. Jedoch gibt es Klassen von symmetrischen Räumen, bei denen es sich lohnt, einen genaueren Blick auf sie zu werfen.

Das Beispiel $PSL(n)/PSO(n)$ aus Kapitel 3 zeigt, dass die in Abschnitt 2.1 beschriebene Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ im Allgemeinen keine Basis von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ ist, wenn Z der Abschluss eines B -Orbits der Kodimension 1 in G/H ist. Dieser Orbit ist im Graphen $\Gamma(G/H)$ durch eine doppelte Kante mit dem dichten B -Orbit verbunden. Da $PSL(2)/PSO(2)$ gewissermaßen der Prototyp einer doppelten Kante ist, kann man vielleicht jede doppelte Kante in $\Gamma(G/H)$ auf diesen Fall zurückführen und so zeigen, dass die Menge $\mathcal{M}_Z^{(\lambda)}$ den Raum $H^0(Z, \mathcal{L}_\lambda)$ für gewisse Gewichte λ nicht erzeugt, wenn zwischen dem B -Orbit Z° und dem dichten B -Orbit im Graphen $\Gamma(G/H)$ eine solche Kante auftritt.

Eine Klasse von symmetrischen Räumen G/H , deren Graph $\Gamma(G/H)$ weder doppelte, noch Kanten vom Typ U enthält, sind Varietäten von minimalem Rang (siehe [Re05]). Zu diesen gehören insbesondere die Gruppenkompaktifizierungen. Es könnte sein, dass sich die Theorie auf diese Fälle ausdehnen lässt. Allerdings gibt es hier nur eine übersichtliche Menge an Beispielen, nämlich außer den bereits erwähnten und trivialen noch $PSL(2n)/PSp(2n)$ und $PSO(2n)/SO(2n-1)$ für $n \geq 2$, sowie E_6/F_4 .

Es ist jedoch nicht klar, ob und wie sich die verwendeten Beweismethoden auf solche Fälle übertragen lassen. Bei der Berechnung der Dimension von $H^0(X, \mathcal{L}_\lambda)$ gehen sehr viele Aussagen über Struktur und Geometrie der wundervollen Kompaktifizierung einer Gruppe ein, die für Varietäten von minimalem Rang nicht bekannt sind. So ist zum Beispiel die Frage offen, ob es auch hier ein mit allen B -Orbitabschlüssen kompatibles Frobenius-Splitting gibt.

Natürlich ist es wünschenswert, für möglichst allgemeine Klassen von Räumen eine Standardmonomentheorie zur Verfügung zu haben. Parallelen zur klassischen Standardmonomentheorie auf Fahnenvarietäten ermöglichen die Übertragung der Anwendung der Standardmonome auf neue Fälle. So werden Standardmonome zum Beispiel genutzt, um mit Hilfe darstellungstheoretischer Methoden neue Erkenntnisse über die Geometrie der betrachteten Räume zu gewinnen. Allein die damit bislang erzielten Ergebnisse sind Motivation genug, sich mit möglichen Verallgemeinerungen der klassischen Standardmonomentheorie zu beschäftigen.

Literaturverzeichnis

- [B98] M. Brion: The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition, *Comment. Math. Helv.* **73** (1998) no. 1, 137–174
- [B01] M. Brion: On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties, *Comment. Math. Helv.* **76** (2001) no. 2, 263–299
- [BK04] M. Brion, S. Kumar: Frobenius splitting methods in geometry and representation theory, Birkhäuser, 2004
- [BP00] M. Brion, P. Polo: Large Schubert varieties, *Represent. Theory* **4** (2000), 97–126
- [CM03] R. Chirivì, A. Maffei: The ring of sections of a complete symmetric variety, *J. Algebra* **261** (2003) no.2, 310–326
- [CP83] C. De Concini, C. Procesi: Complete symmetric varieties, *Invariant Theory*, Lect. Notes in Math. vol. 996, Springer, 1983, 1–44
- [CS99] C. De Concini, T. A. Springer: Compactification of symmetric varieties, *Transform. Groups* **4** (1999) no.2–3, 273–300
- [D92] R. Dabrowski: A simple proof of a necessary and sufficient condition for the existence of nontrivial global sections of a line bundle on a Schubert variety, *Kazhdan-Lusztig theory and related topics*, Contemp. Math. 139 (1992), Amer. Math. Soc., 113–120
- [F97] W. Fulton: Young tableaux, LMSST 35, Cambridge University Press, 1997
- [HP52] W. D. V. Hodge, D. Pedoe: Methods of algebraic geometry Vol. II, Camb. Univ. Press, Cambridge (1952)
- [HT05] X. He, J. F. Thomsen: Geometry of $B \times B$ -orbit closures in equivariant embeddings, arXiv:math.AG/0510088v1
- [La03] V. Lakshmibai: The development of standard monomial theory II, *A Tribute to C. S. Seshadri*, Birkhäuser, 2003, 283–309

- [Li94] P. Littelmann: A Littlewood-Richardson formula for symmetrizable Kac-Moody algebras, *Invent. Math.* **116** (1994), 329–346
- [Li98] P. Littelmann: Contracting modules and standard monomial theory for symmetrizable Kac-Moody algebras, *J. of the AMS*, **11** Vol. 3 (1998), 551–567
- [LL03] V. Lakshmibai, P. Littelmann: Richardson varieties and equivariant K-theory, *J. Algebra* **260** (2003), 230–260
- [LLM98] V. Lakshmibai, P. Littelmann, P. Magyar: Standard monomial theory and its applications, *Representation Theories and Algebraic Geometry*, Kluwer, 1998, 319–364
- [LLS] V. Lakshmibai, P. Littelmann, C. S. Seshadri: Geometry of Schubert varieties, to be published
- [LS91] V. Lakshmibai, C. S. Seshadri: Standard monomial theory, *Proc. of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups*, manoj prakashan, 1991, 279–322
- [Mu03] C. Musili: The development of standard monomial theory I, *A Tribute to C. S. Seshadri*, Birkhäuser, 2003, 385–420
- [P01] S. Pin: Adhérences d’orbites des sous-groupes de Borel dans les espaces symétriques, Thèse de doctorat de l’université Joseph Fourier, erhältlich unter www-fourier.ujf-grenoble.fr
- [Ra87] A. Ramanathan: Equations defining Schubert varieties and Frobenius splitting of diagonals, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, **65** (1987), 61–90
- [Re05] N. Ressayre: Spherical homogeneous spaces of minimal rank, preprint (2004), erhältlich unter www.math.univ-montp2.fr/~ressayre
- [Se95] C. S. Seshadri: The work of P. Littelmann and standard monomial theory, *Current trends in mathematics and physics*, Narosa, 1995, 178–197
- [Sp02] T. A. Springer: Intersection cohomology of $B \times B$ -orbit closures in group compactifications, *J. Algebra* **258** (2002), 71–111
- [Sp04] T. A. Springer: Combinatorics of B -orbits in a wonderful compactification, *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2002, 99–117
- [St87] E. Strickland: A vanishing theorem for group compactifications, *Math. Ann.* **277** (1987), 165–171