Lothar Papula

Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler

9., durchgesehene und erweiterte Auflage

Mit über 400 Abbildungen,
zahlreichen Rechenbeispielen
und einer ausführlichen Integraltafel

Viewegs Fachbücher der Technik

vieweg

Inhaltsverzeichnis

I Allgemeine Grundlagen aus Algebra, Arithmetik und Geometrie 1

1 Grundlegende Begriffe über Mengen 1

1.1 Definition und Darstellung einer Menge 1
1.2 Mengenoperationen 2

2 Rechnen mit reellen Zahlen 2

2.1 Reelle Zahlen und ihre Eigenschaften 2
2.1.1 Natürliche und ganze Zahlen 2
2.1.2 Rationale, irrationale und reelle Zahlen 4
2.1.3 Rundungsregeln für reelle Zahlen 5
2.1.4 Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlengerade 5
2.1.5 Grundrechenarten 6
2.2 Zahlensysteme 7
2.3 Intervalle 8
2.4 Bruchrechnung 8
2.5 Potenzen und Wurzeln 10
2.6 Logarithmen 12
2.7 Binomischer Lehrsatz 14

3 Elementare (endliche) Reihen 16

3.1 Definition einer Reihe 16
3.2 Arithmetische Reihen 16
3.3 Geometrische Reihen 16
3.4 Spezielle Zahlenreihen 16

4 Gleichungen mit einer Unbekannten 17

4.1 Algebraische Gleichungen n-ten Grades 17
4.1.1 Allgemeine Vorbetrachtungen 17
4.1.2 Lineare Gleichungen 18
4.1.3 Quadratische Gleichungen 18
4.1.4 Kubische Gleichungen 19
4.1.5 Bi-quadratische Gleichungen 20
4.2 Allgemeine Lösungshinweise für Gleichungen 21
4.3 Graphisches Lösungsverfahren 22
4.4 Regula falsi 23
4.5 Tangentenverfahren von Newton 24

5 Ungleichungen mit einer Unbekannten 25

6 Lehrsätze aus der elementaren Geometrie ... 26

6.1 Satz des Pythagoras ... 26
6.2 Höhensatz ... 26
6.3 Kathetensatz (Euklid) ... 27
6.4 Satz des Thales ... 27
6.5 Strahlensätze ... 27
6.6 Sinussatz ... 28
6.7 Kosinussatz ... 28

7 Ebene geometrische Körper (Planimetrie) ... 28

7.1 Dreiecke ... 28
7.1.1 Allgemeine Beziehungen ... 28
7.1.2 Spezielle Dreiecke ... 29
7.1.2.1 Rechtwinkliges Dreieck ... 29
7.1.2.2 Gleichschenkliges Dreieck ... 29
7.1.2.3 Gleichseitiges Dreieck ... 30
7.2 Quadrat ... 30
7.3 Rechteck ... 30
7.4 Parallelogramm ... 31
7.5 Rhombus oder Raute ... 31
7.6 Trapez ... 31
7.7 Reguläres n-Eck ... 32
7.8 Kreis ... 32
7.9 Kreissektor oder Kreisausschnitt ... 32
7.10 Kreissegment oder Kreisabschnitt ... 32
7.11 Kreisring ... 33
7.12 Ellipse ... 33

8 Räumliche geometrische Körper (Stereometrie) ... 33

8.1 Prisma ... 33
8.2 Würfel ... 34
8.3 Quader ... 34
8.4 Pyramide ... 34
8.5 Pyramidenstumpf ... 35
8.6 Tetraeder oder dreiseitige Pyramide ... 35
8.7 Keil ... 36
8.8 Gerader Kreiszylinder ... 36
8.9 Gerader Kreiskegel ... 36
8.10 Gerader Kreiskegelstumpf ... 37
8.11 Kugel ... 37
8.12 Kugelausschnitt oder Kugelsektor ... 37
8.13 Kugelschicht oder Kugelzone ... 38
8.14 Kugelabschnitt, Kugelsegment, Kugelkappe oder Kalotte ... 38
8.15 Ellipsoid ... 38
8.16 Rotationsparaboloid ... 39
8.17 Tonne oder Faß ... 39
8.18 Torus ... 40
8.19 Guldinsche Regeln für Rotationskörper ... 40

9 Koordinatensysteme ... 41

9.1 Ebene Koordinatensysteme ... 41
9.1.1 Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten ... 41
9.1.2 Polarkoordinaten ... 42
9.1.3 Koordinatentransformationen ... 42
9.1.3.1 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems ... 42
9.1.3.2 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Polarkoordinaten ... 42
9.1.3.3 Drehung eines kartesischen Koordinatensystems ... 43
9.2 Räumliche Koordinatensysteme ... 44
9.2.1 Rechtwinklige oder kartesische Koordinaten ... 44
9.2.2 Zylinderkoordinaten ... 44
9.2.3 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Zylinderkoordinaten ... 44
9.2.4 Kugelkoordinaten ... 45
9.2.5 Zusammenhang zwischen den kartesischen und den Kugelkoordinaten ... 45

II Vektorrechnung ... 46

1 Grundbegriffe ... 46

1.1 Vektoren und Skalare ... 46
1.2 Spezielle Vektoren ... 46
1.3 Gleichheit von Vektoren ... 47
1.4 Kollineare, parallele und anti-parallele Vektoren, inverser Vektor ... 47

2 Komponentendarstellung eines Vektors ... 48

2.1 Komponentendarstellung in einem kartesischen Koordinatensystem ... 48
2.2 Komponentendarstellung spezieller Vektoren ... 48
2.3 Betrag und Richtungswinkel eines Vektors ... 49

3 Vektoroperationen ... 50

3.1 Addition und Subtraktion von Vektoren ... 50
3.2 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ... 51
3.3 Skalarprodukt (inneres Produkt) ... 51
3.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) ... 53
3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt) ... 55
3.6 Formeln für Mehrfachprodukte ... 56

4 Anwendungen ... 56

4.1 Arbeit einer konstanten Kraft ... 56
4.2 Vektorielle Darstellung einer Geraden ... 57
4.2.1 Punkt-Richtungs-Form ... 57
4.2.2 Zwei-Punkte-Form ... 57
4.2.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden ... 58

4.2.4 Abstand zweier paralleler Geraden ... 58
4.2.5 Abstand zweier windschiefer Geraden ... 59
4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden ... 60
4.3 Vektorielle Darstellung einer Ebene ... 60
4.3.1 Punkt-Richtungs-Form ... 60
4.3.2 Drei-Punkte-Form ... 61
4.3.3 Ebene senkrecht zu einem Vektor ... 62
4.3.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene ... 62
4.3.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene ... 63
4.3.6 Abstand zweier paralleler Ebenen ... 64
4.3.7 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene ... 65
4.3.8 Schnittwinkel zweier Ebenen ... 66

III Funktionen und Kurven ... 67

1 Grundbegriffe ... 67

1.1 Definition einer Funktion ... 67
1.2 Darstellungsformen einer Funktion ... 67
1.2.1 Analytische Darstellung ... 67
1.2.2 Parameterdarstellung ... 67
1.2.3 Kurvengleichung in Polarkoordinaten ... 68
1.2.4 Graphische Darstellung ... 68

2 Allgemeine Funktionseigenschaften ... 68

2.1 Nullstellen ... 68
2.2 Symmetrie ... 69
2.3 Monotonie ... 69
2.4 Periodizität ... 70
2.5 Umkehrfunktion (inverse Funktion) ... 70

3 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion ... 71

3.1 Grenzwert einer Folge ... 71
3.2 Grenzwert einer Funktion ... 72
3.2.1 Grenzwert für $x \to x_0$ ... 72
3.2.2 Grenzwert für $x \to \pm\infty$ ... 72
3.3 Rechenregeln für Grenzwerte ... 72
3.4 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital ... 73
3.5 Stetigkeit einer Funktion ... 74

4 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) ... 75

4.1 Definition der ganzrationalen Funktionen ... 75
4.2 Lineare Funktionen (Geraden) ... 75
4.2.1 Allgemeine Geradengleichung ... 75
4.2.2 Hauptform einer Geraden ... 75
4.2.3 Punkt-Steigungs-Form einer Geraden ... 75
4.2.4 Zwei-Punkte-Form einer Geraden ... 76

4.2.5 Achsenabschnittsform einer Geraden ... 76
4.2.6 Hessesche Normalform einer Geraden ... 76
4.2.7 Abstand eine Punktes von einer Geraden ... 76
4.2.8 Schnittwinkel zweier Geraden ... 77
4.3 Quadratische Funktionen (Parabeln) ... 77
4.3.1 Hauptform einer Parabel ... 77
4.3.2 Produktform einer Parabel ... 78
4.3.3 Scheitelpunktsform einer Parabel ... 78
4.4 Polynomfunktionen höheren Grades (n-ten Grades) ... 78
4.4.1 Abspaltung eines Linearfaktors ... 78
4.4.2 Nullstellen einer Polynomfunktion ... 78
4.4.3 Produktdarstellung einer Polynomfunktion ... 78
4.5 Horner-Schema ... 79
4.6 Reduzierung einer Polynomfunktion (Nullstellenberechnung) ... 80
4.7 Interpolationspolynome ... 81
4.7.1 Allgemeine Vorbetrachtungen ... 81
4.7.2 Interpolationsformel von Lagrange ... 81
4.7.3 Interpolationsformel von Newton ... 83

5 Gebrochenrationale Funktionen ... 85

5.1 Definition der gebrochenrationalen Funktionen ... 85
5.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole ... 86
5.3 Asymptotisches Verhalten im Unendlichen ... 87

6 Potenz- und Wurzelfunktionen ... 87

6.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten ... 87
6.2 Wurzelfunktionen ... 89
6.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten ... 89

7 Trigonometrische Funktionen ... 90

7.1 Winkelmaße ... 90
7.2 Definition der trigonometrischen Funktionen ... 91
7.3 Sinus- und Kosinusfunktion ... 92
7.4 Tangens- und Kotangensfunktion ... 93
7.5 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen ... 93
7.6 Trigonometrische Formeln ... 94
7.6.1 Additionstheoreme ... 94
7.6.2 Formeln für halbe Winkel ... 95
7.6.3 Formeln für Winkelvielfache ... 95
7.6.4 Formeln für Potenzen ... 96
7.6.5 Formeln für Summen und Differenzen ... 96
7.6.6 Formeln für Produkte ... 97
7.7 Anwendungen in der Schwingungslehre ... 97
7.7.1 Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion ... 97
7.7.2 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen) ... 98
7.7.2.1 Gleichung einer harmonischen Schwingung ... 98
7.7.2.2 Darstellung einer harmonischen Schwingung im Zeigerdiagramm ... 98

7.7.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter harmonischer Schwingungen 99

8 Arkusfunktionen 100

8.1 Arkussinus- und Arkuskosinusfunktion 100
8.2 Arkusstangens- und Arkuskotangensfunktion 101
8.3 Wichtige Beziehungen zwischen den Arkusfunktionen 102

9 Exponentialfunktionen 103

9.1 Definition der Exponentialfunktionen 103
9.2 Spezielle Exponentialfunktionen aus den Anwendungen 104
9.2.1 Abklingfunktion 104
9.2.2 Sättigungsfunktion 104
9.2.3 Gauß-Funktion (Gaußsche Glockenkurve) 105
9.2.4 Kettenlinie 105

10 Logarithmusfunktionen 106

10.1 Definition der Logarithmusfunktionen 106
10.2 Spezielle Logarithmusfunktionen 106

11 Hyperbelfunktionen 107

11.1 Definition der Hyperbelfunktionen 107
11.2 Wichtige Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen 108
11.3 Formeln 109
11.3.1 Additionstheoreme 109
11.3.2 Formeln für halbe Argumente 109
11.3.3 Formeln für Vielfache des Arguments 110
11.3.4 Formeln für Potenzen 110
11.3.5 Formeln für Summen und Differenzen 111
11.3.6 Formeln für Produkte 111
11.3.7 Formel von Moivre 111

12 Areafunktionen 112

12.1 Definition der Areafunktionen 112
12.2 Wichtige Beziehungen zwischen den Areafunktionen 113

13 Kegelschnitte 114

13.1 Allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes 114
13.2 Kreis 114
13.2.1 Geometrische Definition 115
13.2.2 Mittelpunktsgleichung eines Kreises (Ursprungsgleichung) 115
13.2.3 Kreis in allgemeiner Lage (Hauptform) 115
13.2.4 Gleichung eines Kreises in Polarkoordinaten 115
13.2.5 Parameterdarstellung eines Kreises 115

13.3 Ellipse ... 116
13.3.1 Geometrische Definition ... 116
13.3.2 Mittelpunktsgleichung einer Ellipse (Ursprungsgleichung) ... 116
13.3.3 Ellipse in allgemeiner Lage (Hauptform) ... 116
13.3.4 Gleichung einer Ellipse in Polarkoordinaten ... 117
13.3.5 Parameterdarstellung einer Ellipse ... 117
13.4 Hyperbel ... 118
13.4.1 Geometrische Definition ... 118
13.4.2 Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel (Ursprungsgleichung) ... 118
13.4.3 Hyperbel in allgemeiner Lage (Hauptform) ... 118
13.4.4 Gleichung einer Hyperbel in Polarkoordinaten ... 119
13.4.5 Parameterdarstellung einer Hyperbel ... 120
13.4.6 Gleichung einer um 90° gedrehten Hyperbel ... 120
13.4.7 Gleichung einer gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel ($a = b$) ... 120
13.5 Parabel ... 121
13.5.1 Geometrische Definition ... 121
13.5.2 Scheitelgleichung einer Parabel ... 121
13.5.3 Parabel in allgemeiner Lage (Hauptform) ... 121
13.5.4 Gleichung einer Parabel in Polarkoordinaten ... 122
13.5.5 Parameterdarstellung einer Parabel ... 122

14 Spezielle Kurven ... 123

14.1 Gewöhnliche Zykloide (Rollkurve) ... 123
14.2 Epizykloide ... 123
14.3 Hypozykloide ... 124
14.4 Astroide (Sternkurve) ... 125
14.5 Kardioide (Herzkurve) ... 125
14.6 Lemniskate (Schleifenkurve) ... 126
14.7 Strophoide ... 126
14.8 Cartesisches Blatt ... 127
14.9 „Kleeblatt“ mit n bzw. $2n$ Blättern ... 127
14.10 Spiralen ... 128
14.10.1 Archimedische Spirale ... 128
14.10.2 Logarithmische Spirale ... 128

IV Differentialrechnung ... 129

1 Differenzierbarkeit einer Funktion ... 129

1.1 Differenzenquotient ... 129
1.2 Differentialquotient oder 1. Ableitung ... 129
1.3 Ableitungsfunktion ... 129
1.4 Höhere Ableitungen ... 130
1.5 Differential einer Funktion ... 130

2 Erste Ableitung der elementaren Funktionen (Tabelle) ... 131

3 Ableitungsregeln ... 132

3.1 Faktorregel ... 132
3.2 Summenregel ... 132
3.3 Produktregel ... 132
3.4 Quotientenregel ... 133
3.5 Kettenregel ... 133
3.6 Logarithmische Differentiation ... 134
3.7 Ableitung der Umkehrfunktion ... 134
3.8 Implizite Differentiation ... 135
3.9 Ableitungen einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) ... 135
3.10 Ableitungen einer in Polarkoordination dargestellten Kurve ... 136

4 Anwendungen der Differentialrechnung ... 136

4.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung ... 136
4.2 Tangente und Normale ... 137
4.3 Linearisierung einer Funktion ... 137
4.4 Charakteristische Kurvenpunkte ... 138
4.4.1 Geometrische Deutung der 1. und 2. Ableitung ... 138
4.4.2 Krümmung einer ebenen Kurve ... 139
4.4.3 Relative Extremwerte (Maxima, Minima) ... 140
4.4.4 Wendepunkte, Sattelpunkte ... 142

V Integralrechnung ... 143

1 Bestimmtes Integral ... 143

1.1 Definition eines bestimmten Integrals ... 143
1.2 Berechnung eines bestimmten Integrals ... 144
1.3 Elementare Integrationsregeln für bestimmte Integrale ... 145

2 Unbestimmtes Integral ... 146

2.1 Definition eines unbestimmten Integrals ... 146
2.2 Allgemeine Eigenschaften der unbestimmten Integrale ... 146
2.3 Tabelle der Grund- oder Stammintegrale ... 148

3 Integrationsmethoden ... 149

3.1 Integration durch Substitution ... 149
3.1.1. Allgemeines Verfahren ... 149
3.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen (Tabelle) ... 150
3.2 Partielle Integration (Produktionsintegration) ... 152
3.3 Integration einer gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden ... 153
3.3.1 Partialbruchzerlegung ... 153
3.3.2 Integration der Partialbrüche ... 156
3.4 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden ... 157
3.5 Numerische Integration ... 157
3.5.1 Trapezformel ... 157
3.5.2 Simpsonsche Formel ... 158
3.5.3 Romberg-Verfahren ... 160

4 Uneigentliche Integrale ... 163

4.1 Unendliches Integrationsintervall ... 163
4.2 Integrand mit Pol ... 163

5 Anwendungen der Integralrechnung ... 164

5.1 Integration der Bewegungsgleichung ... 164
5.2 Arbeit einer ortsabhängigen Kraft (Arbeitsintegral) ... 164
5.3 Lineare und quadratische Mittelwerte einer Funktion ... 165
5.3.1 Linearer Mittelwert ... 165
5.3.2 Quadratischer Mittelwert ... 165
5.3.3 Zeitliche Mittelwerte einer periodischen Funktion ... 165
5.4 Flächeninhalt ... 165
5.5 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche ... 167
5.6 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades) ... 168
5.7 Bogenlänge einer ebenen Kurve ... 168
5.8 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen) ... 169
5.9 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche) ... 170
5.10 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers ... 171
5.11 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers ... 172

VI Unendliche Reihen, Taylor- und Fourier-Reihen ... 174

1 Unendliche Reihen ... 174

1.1 Grundbegriffe ... 174
1.1.1 Definition einer unendlichen Reihe ... 174
1.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe ... 174
1.2 Konvergenzkriterien ... 175
1.2.1 Quotientenkriterium ... 175
1.2.2 Wurzelkriterium ... 176
1.2.3 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen ... 176
1.3 Spezielle konvergente Reihen ... 176

2 Potenzreihen ... 177

2.1 Definition einer Potenzreihe ... 177
2.2 Konvergenzradius und Konvergenzbereich einer Potenzreihe ... 178
2.3 Wichtige Eigenschaften der Potenzreihen ... 178

3 Taylor-Reihen ... 179

3.1 Taylorsche und Mac Laurinsche Formel ... 179
3.1.1 Taylorsche Formel ... 179
3.1.2 Mac Laurinsche Formel ... 179
3.2 Taylorsche Reihe ... 180
3.3 Mac Laurinsche Reihe ... 180
3.4 Spezielle Potenzreihenentwicklungen (Tabelle) ... 181
3.5 Näherungspolynome einer Funktion (mit Tabelle) ... 183

4 Fourier-Reihen ... 185
4.1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ... 185
4.2 Fourier-Zerlegung einer nichtsinusförmigen Schwingung ... 187
4.3 Spezielle Fourier-Reihen (Tabelle) ... 188

VII Lineare Algebra ... 191

1 Reelle Matrizen ... 191
1.1 Grundbegriffe ... 191
1.1.1 Definition einer reellen Matrix ... 191
1.1.2 Spezielle Matrizen ... 192
1.1.3 Gleichheit von Matrizen ... 192
1.2 Spezielle quadratische Matrizen ... 192
1.2.1 Diagonalmatrix ... 193
1.2.2 Einheitsmatrix ... 193
1.2.3 Dreiecksmatrix ... 193
1.2.4 Symmetrische Matrix ... 193
1.2.5 Schiefsymmetrische Matrix ... 193
1.2.6 Orthogonale Matrix ... 194
1.3 Rechenoperationen für Matrizen ... 194
1.3.1 Addition und Subtraktion von Matrizen ... 194
1.3.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ... 194
1.3.3 Multiplikation von Matrizen ... 195
1.4 Reguläre Matrix ... 196
1.5 Inverse Matrix ... 196
1.5.1 Definition einer inversen Matrix ... 196
1.5.2 Berechnung einer inversen Matrix ... 197
1.5.2.1 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten ... 197
1.5.2.2 Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach dem Gaußschen Algorithmus (Gauß-Jordan-Verfahren) ... 197
1.6 Rang einer Matrix ... 198
1.6.1 Definitionen ... 198
1.6.1.1 Unterdeterminanten einer Matrix ... 198
1.6.1.2 Rang einer Matrix ... 198
1.6.1.3 Elementare Umformungen einer Matrix ... 198
1.6.2 Rangbestimmung einer Matrix ... 199
1.6.2.1 Rangbestimmung einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ unter Verwendung von Unterdeterminanten ... 199
1.6.2.2 Rangbestimmung einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe elementarer Umformungen ... 199

2 Determinanten ... 200
2.1 Zweireihige Determinanten ... 200
2.2 Dreireihige Determinanten ... 201
2.3 Determinanten höherer Ordnung ... 202
2.3.1 Unterdeterminate D_{ik} ... 202
2.3.2 Algebraisches Komplement (Adjunkte) A_{ik} ... 202
2.3.3 Definition einer n-reihigen Determinante ... 202

2.4 Laplacescher Entwicklungssatz ... 203
2.5 Rechenregeln für n-reihige Determinanten ... 203
2.6 Regeln zur praktischen Berechnung einer n-reihigen Determinante ... 205
2.6.1 Elementare Umformungen einer n-reihigen Determinante ... 205
2.6.2 Reduzierung und Berechnung einer n-reihigen Determinante ... 205

3 Lineare Gleichungssysteme ... 206

3.1 Grundbegriffe ... 206
3.1.1 Definition eines linearen Gleichungssystems ... 206
3.1.2 Spezielle lineare Gleichungssysteme ... 206
3.2 Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems ... 207
3.2.1 Kriterium für die Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ... 207
3.2.2 Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ... 207
3.3 Lösungsverhalten eines quadratischen linearen Gleichungssystems ... 208
3.4 Lösungsverfahren für ein lineares Gleichungssystem nach Gauß (Gaußscher Algorithmus) ... 209
3.4.1 Äquivalente Umformungen eines linearen (m, n)-Systems ... 209
3.4.2 Gaußscher Algorithmus ... 209
3.5 Cramersche Regel ... 212
3.6 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren ... 212

4 Komplexe Matrizen ... 213

4.1 Definition einer komplexen Matrix ... 213
4.2 Rechenoperationen und Rechenregeln für komplexe Matrizen ... 214
4.3 Konjugiert komplexe Matrix ... 214
4.4 Konjugiert transponierte Matrix ... 215
4.5 Spezielle komplexe Matrizen ... 215
4.5.1 Hermitesche Matrix ... 215
4.5.2 Schiefthermitesche Matrix ... 215
4.5.3 Unitäre Matrix ... 216

5 Eigenwertprobleme ... 216

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix ... 216
5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller n-reihiger Matrizen ... 218

VIII Komplexe Zahlen und Funktionen ... 219

1 Darstellungsformen einer komplexen Zahl ... 219

1.1 Algebraische oder kartesische Form ... 219
1.2 Polarformen ... 220
1.2.1 Trigonometrische Form ... 220
1.2.2 Exponentialform ... 220
1.3 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen ... 221
1.3.1 Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form ... 221
1.3.2 Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform ... 221

2 Grundrechenarten für komplexe Zahlen ... 222

2.1 Addition und Subtraktion komplexer Zahlen ... 222
2.2 Multiplikation komplexer Zahlen ... 222
2.3 Division komplexer Zahlen ... 223

3 Potenzieren ... 224

4 Radizieren (Wurzelziehen) ... 225

5 Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl ... 226

6 Ortskurven ... 227

6.1 Komplexwertige Funktion einer reellen Variablen ... 227
6.2 Ortskurve einer parameterabhängigen komplexen Zahl ... 227
6.3 Inversion einer Ortskurve ... 228

7 Komplexe Funktionen ... 229

7.1 Definition einer komplexen Funktion ... 229
7.2 Definitionsgleichungen einiger elementarer Funktionen ... 229
7.2.1 Trigonometrische Funktionen ... 229
7.2.2 Hyperbelfunktionen ... 229
7.2.3 Exponentialfunktion (e-Funktion) ... 230
7.3 Wichtige Beziehungen und Formeln ... 230
7.3.1 Eulersche Formeln ... 230
7.3.2 Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der komplexen e-Funktion ... 230
7.3.3 Trigonometrische und Hyperbelfunktionen mit imaginärem Argument ... 230
7.3.4 Additionstheoreme der trigonometrischen und Hyperbelfunktionen für komplexes Argument ... 230
7.3.5 Arkus- und Areafunktionen mit imaginärem Argument ... 231

8 Anwendungen in der Schwingungslehre ... 231

8.1 Darstellung einer harmonischen Schwingung durch einen rotierenden komplexen Zeiger ... 231
8.2 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen („Superpositionsprinzip“) ... 232

IX Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen ... 234

1 Funktionen von mehreren Variablen und ihre Darstellung ... 234

1.1 Definition einer Funktion von mehreren Variablen ... 234
1.2 Darstellungsformen einer Funktion von zwei Variablen ... 234
1.2.1 Analytische Darstellung ... 234
1.2.2 Graphische Darstellung ... 235
1.2.2.1 Darstellung einer Funktion als Fläche im Raum ... 235
1.2.2.2 Schnittkurvendiagramme ... 235
1.2.2.3 Höhenliniendiagramm ... 235

1.3 Spezielle Flächen (Funktionen) ... 236
1.3.1 Ebenen ... 236
1.3.2 Rotationsflächen ... 236
1.3.2.1 Gleichung einer Rotationsfläche ... 236
1.3.2.2 Spezielle Rotationsflächen ... 237

2 Partielle Differentiation ... 238

2.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung ... 238
2.1.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $z = f(x; y)$ ... 238
2.1.2 Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ... 239
2.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung ... 240
2.3 Totales oder vollständiges Differential einer Funktion ... 241
2.4 Anwendungen ... 243
2.4.1 Linearisierung einer Funktion ... 243
2.4.2 Relative Extremwerte (Maxima, Minima) ... 244

3 Mehrfachintegrale ... 246

3.1 Doppelintegrale ... 246
3.1.1 Definition eines Doppelintegrals ... 246
3.1.2 Berechnung eines Doppelintegrals in kartesischen Koordinaten ... 247
3.1.3 Berechnung eines Doppelintegrals in Polarkoordinaten ... 249
3.1.4 Anwendungen ... 249
3.1.4.1 Flächeninhalt ... 249
3.1.4.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche ... 250
3.1.4.3 Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente 2. Grades) 251
3.2 Dreifachintegrale ... 252
3.2.1 Definition eines Dreichfachintegrals ... 252
3.2.2 Berechnung eines Dreichfachintegrals in kartesischen Koordinaten ... 253
3.2.3 Berechnung eines Dreifachintegrals in Zylinderkoordinaten ... 255
3.2.4 Berechnung eines Dreifachintegrals in Kugelkoordinaten ... 255
3.2.5 Anwendungen ... 256
3.2.5.1 Volumen eines zylindrischen Körpers ... 256
3.2.5.2 Schwerpunkt eines homogenen Körpers ... 256
3.2.5.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers ... 257

X Gewöhnliche Differentialgleichungen ... 259

1 Grundbegriffe ... 259

1.1 Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung ... 259
1.2 Lösungen einer Differentialgleichung ... 259
1.3 Anfangswertprobleme ... 259
1.4 Randwertprobleme ... 260

2 Differentialgleichungen 1. Ordnung ... 260

2.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung mit trennbaren Variablen ... 260
2.2 Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch Substitutionen lösbar sind (Tabelle) ... 261

2.3 Exakte Differentialgleichungen 1. Ordnung ... 262
2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung ... 263
2.4.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ... 263
2.4.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung ... 263
2.4.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung ... 263
2.4.3.1 Integration durch Variation der Konstanten ... 263
2.4.3.2 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung 264
2.4.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ... 264
2.5 Numerische Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung ... 266
2.5.1 Streckenzugverfahren von Euler ... 266
2.5.2 Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung ... 268
2.5.3 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ... 269

3 Differentialgleichungen 2. Ordnung ... 272

3.1 Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen lassen ... 272
3.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 273
3.2.1 Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ... 273
3.2.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung ... 273
3.2.2.1 Wronski-Determinante ... 273
3.2.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ... 273
3.2.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung ... 274
3.3 Numerische Integration einer Differentialgleichung 2. Ordnung ... 277

4 Anwendungen ... 280

4.1 Mechanische Schwingungen ... 280
4.1.1 Allgemeine Schwingungsgleichung der Mechanik ... 280
4.1.2 Freie ungedämpfte Schwingung ... 280
4.1.3 Freie gedämpfte Schwingung ... 281
4.1.3.1 Schwache Dämpfung (Schwingungsfall) ... 281
4.1.3.2 Aperiodischer Grenzfall ... 282
4.1.3.3 Aperiodische Schwingung (Kriechfall) ... 282
4.1.4 Erzwungene Schwingung ... 283
4.1.4.1 Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung ... 283
4.1.4.2 Stationäre Lösung ... 283
4.2 Elektromagnetische Schwingungen in einem Reihenschwingkreis ... 284

5 Lineare Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 285

5.1 Definition einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ... 285
5.2 Integration der homogenen linearen Differentialgleichung ... 285
5.2.1 Wronski-Determinante ... 285
5.2.2 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 286
5.2.3 Integration der inhomogenen linearen Differentialgleichung ... 287

6 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ... 288

6.1 Grundbegriffe ... 288
6.2 Integration des homogenen linearen Systems ... 289
6.3 Integration des inhomogenen linearen Systems ... 290
6.3.1 Integration durch Aufsuchen einer partikulären Lösung ... 290
6.3.2 Einsetzungs- oder Eliminationsverfahren ... 290

XI Fehler- und Ausgleichsrechnung ... 292

1 Gaußsche Normalverteilung ... 292

2 Auswertung einer Meßreihe ... 293

3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz ... 296

3.1 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen ... 296
3.2 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für eine Funktion von n unabhängigen Variablen ... 298

4 Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz ... 298

5 Ausgleichskurven ... 300

5.1 Ausgleichung nach dem Gaußschen Prinzip der kleinsten Quadrate ... 300
5.2 Ausgleichs- oder Regressionsgerade ... 301
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsparabel ... 303

XII Fourier-Transformationen ... 304

1 Grundbegriffe ... 304

2 Spezielle Fourier-Transformationen ... 309

3 Wichtige „Hilfsfunktionen" in den Anwendungen ... 311

3.1 Sprungfunktionen ... 311
3.2 Rechtechige Impulse ... 313
3.3 Diracsche δ-Funktion ... 314

4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze) ... 317

4.1 Linearität (Satz über Linearkombinationen) ... 317
4.2 Ähnlichkeitssatz ... 317
4.3 Verschiebungssatz (Zeitverschiebungssatz) ... 318
4.4 Dämpfungssatz (Frequenzverschiebungssatz) ... 319
4.5 Ableitungssätze ... 320
4.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion ... 320
4.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion ... 321
4.6 Integrationssätze ... 322
4.7 Faltungssatz ... 322

5 Anwendung: Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ... 323

5.1 Allgemeines Lösungsverfahren ... 323
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 324
5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 325

6 Tabellen spezieller Fourier-Transformationen ... 325

XIII Laplace-Transformationen ... 331

1 Grundbegriffe ... 331

2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze) ... 332

2.1 Linearität (Satz über Linearkombinationen) ... 332
2.2 Ähnlichkeitssatz ... 333
2.3 Verschiebungssätze ... 334
2.4 Dämpfungssatz ... 335
2.5 Ableitungssätze ... 335
2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion ... 335
2.5.2 Ableitungssatz für die Bildfunktion ... 337
2.6 Integralsätze ... 337
2.6.1 Integralsatz für die Originalfunktion ... 337
2.6.2 Integralsatz für die Bildfunktion ... 338
2.7 Faltungssatz ... 339
2.8 Grenzwertsätze ... 340

3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion ... 341

4 Laplace-Transformierte spezieller Funktionen (Impulse) ... 342

5 Anwendung: Lösung linearer Anfangswertprobleme ... 347

5.1 Allgemeines Lösungsverfahren ... 347
5.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 348
5.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten .. 349

6 Tabelle spezieller Laplace-Transformationen ... 350

XIV Vektoranalysis ... 355

1 Ebene und räumliche Kurven ... 355

1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve ... 355
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter ... 356
1.2.1 Ableitung einer Vektorfunktion ... 356
1.2.2 Tangentenvektor ... 356
1.2.3 Ableitungsregeln für Summen und Produkte ... 356
1.2.4 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes ... 357

1.3 Bogenlänge einer Kurve ... 358
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve ... 358
1.5 Krümmung einer Kurve ... 359

2 Flächen im Raum ... 361

2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche ... 361
2.2 Flächenkurven ... 362
2.3 Flächennormale und Flächenelement ... 362
2.4 Tangentialebene ... 363
2.4.1 Tangentialebene beim Flächentyp $\vec{r} = \vec{r}(u;\ v)$ ... 363
2.4.2 Tangentialebene beim Flächentyp $z = f(x;\ y)$ ... 364
2.4.3 Tangentialebene beim Flächentyp $F(x;\ y;\ z) = 0$ ... 364

3 Skalar- und Vektorfelder ... 365

3.1 Skalarfelder ... 365
3.2 Vektorfelder ... 365

4 Gradient eines Skalarfeldes ... 367

5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes ... 369

5.1 Divergenz eines Vektorfeldes ... 369
5.2 Rotation eines Vektorfeldes ... 370
5.3 Spezielle Vektorfelder ... 371

6 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in speziellen Koordinatensystemen ... 372

6.1 Darstellung in Polarkoordinaten ... 372
6.2 Darstellung in Zylinderkoordinaten ... 374
6.3 Darstellung in Kugelkoordinaten ... 377

7 Linien- oder Kurvenintegrale ... 379

7.1 Linienintegral in der Ebene ... 379
7.2 Linienintegral im Raum ... 381
7.3 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals ... 381
7.4 Konservative Vektorfelder ... 382
7.5 Arbeitsintegral (Arbeit eines Kraftfeldes) ... 383

8 Oberflächenintegrale ... 384

8.1 Definition eines Oberflächenintegrals ... 384
8.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals ... 385
8.2.1 Berechnung eines Oberflächenintegrals in symmetriegerechten Koordinaten ... 385
8.2.2 Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern ... 386

9 Integralsätze von Gauß und Stokes ... 387

9.1 Gaußscher Integralsatz ... 387
9.2 Stokes'scher Integralsatz ... 388

XV Wahrscheinlichkeitsrechnung ... 390

1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik ... 390

1.1 Permutationen ... 390
1.2 Kombinationen ... 391
1.3 Variationen ... 391

2 Grundbegriffe ... 392

3 Wahrscheinlichkeit ... 394

3.1 Absolute und relative Häufigkeit ... 394
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff ... 395
3.3 Laplace-Experimente ... 395
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit ... 396
3.5 Multiplikationssatz ... 396
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse ... 397
3.7 Mehrstufige Zufallsexperimente ... 397

4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen ... 399

4.1 Zufallsvariable ... 399
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen ... 400
4.3 Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung ... 402

5 Spezielle diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen ... 404

5.1 Binomialverteilung ... 404
5.2 Hypergeometrische Verteilung ... 406
5.3 Poisson-Verteilung ... 408
5.4 Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Tabelle) ... 409

6 Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen ... 410

6.1 Gaußsche Normalverteilung ... 410
6.1.1 Allgemeine Normalverteilung ... 410
6.1.2 Standardnormalverteilung ... 411
6.1.3 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ... 412
6.1.4 Quantile der Standardnormalverteilung ... 413
6.2 Exponentialverteilung ... 414

7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen ... 415

7.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable ... 415
7.2 Summen, Linearkombinationen und Produkte von Zufallsvariablen ... 417
7.2.1 Additionssätze für Mittelwerte und Varianzen ... 417
7.2.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte ... 418
7.2.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe ... 418

8 Prüf- und Testverteilungen ... 419

8.1 Chi-Quadrat-Verteilung („χ^2-Verteilung") ... 419
8.2 t-Verteilung von Student ... 421

XVI Grundlagen der mathematischen Statistik ... 423

1 Grundbegriffe ... 423

1.1 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit ... 423
1.2 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe ... 424
1.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben ... 426

2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe ... 429

2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe ... 429
2.2 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion ... 431
2.3 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe ... 432

3 Statistische Schätzmethoden für unbekannte Parameter („Parameterschätzungen") ... 433

3.1 Aufgaben der Parameterschätzung ... 433
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für unbekannte Parameter („Punktschätzungen") ... 433
3.2.1 Schätz- und Stichprobenfunktionen ... 433
3.2.2 Schätzungen für den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 ... 434
3.2.3 Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) ... 435
3.2.4 Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen ... 435
3.3 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für unbekannte Parameter („Intervallschätzungen") ... 436
3.3.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle ... 436
3.3.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 ... 437
3.3.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2 ... 438
3.3.4 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert μ bei einer beliebigen Verteilung ... 439
3.3.5 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung ... 440

3.3.6 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) ... 441
3.3.7 Musterbeispiel für die Bestimmung eines Vertrauensintervalls ... 442

4 Statistische Prüfverfahren für unbekannte Parameter („Parametertests") ... 443

4.1 Statistische Hypothesen und Parametertests ... 443
4.2 Spezielle Parametertests ... 444
4.2.1 Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 ... 444
4.2.2 Test für den unbekannten Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2 ... 446
4.2.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen („Differenzentests") ... 447
4.2.3.1 Differenzentests für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben ... 448
4.2.3.2 Differenzentests für Mittelwerte bei unabhängigen Stichproben ... 449
4.2.4 Tests für die unbekannte Varianz σ^2 einer Normalverteilung ... 453
4.2.5 Tests für den unbekannten Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung) ... 455
4.2.6 Musterbeispiel für einen Parametertest ... 457

5 Chi-Quadrat-Test ... 458