

Inhaltsverzeichnis

I Vektoranalysis	1
1 Ebene und räumliche Kurven	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor	16
1.5 Krümmung einer Kurve	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten	27
2 Flächen im Raum	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche	31
2.2 Flächenkurven	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$	43
3 Skalar- und Vektorfelder	47
3.1 Ein einführendes Beispiel	47
3.2 Skalarfelder	50
3.3 Vektorfelder	51
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld	55
3.4.2 Kugelsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld)	56
3.4.3 Zylindersymmetrisches Vektorfeld	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder	60
4 Gradient eines Skalarfeldes	61
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten	61
4.2 Richtungsableitung	65
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$	67
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung	69

5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes	71
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes	71
5.1.1 Ein einführendes Beispiel	71
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz	75
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	78
5.2 Rotation eines Vektorfeldes	79
5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation	79
5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe	83
5.3 Spezielle Vektorfelder	85
5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld	85
5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld	86
5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung	88
5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes	92
6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme	92
6.1 Polarkoordinaten	92
6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten	92
6.1.2 Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten	94
6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Polarkoordinaten	100
6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung	103
6.2 Zylinderkoordinaten	105
6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten	105
6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten	110
6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Zylinderkoordinaten	115
6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder	118
6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massen- punktes in Zylinderkoordinaten	120
6.3 Kugelkoordinaten	122
6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten	122
6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten	128
6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace- Operator in Kugelkoordinaten	134
6.3.4 Kugelsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	136
6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer geladenen Kugel	139

7 Linien- oder Kurvenintegrale	142
7.1 Ein einführendes Beispiel	142
7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals	145
7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals	147
7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder	151
7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	159
7.5.1 Kugelsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)	159
7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	160
7.5.3 Elektrisches Feld eines geladenen Drahtes	161
7.6 Arbeitsintegral	163
7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes	163
7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld	164
8 Oberflächenintegrale	166
8.1 Ein einführendes Beispiel	166
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals	171
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals	173
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen Koordinaten	174
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern	186
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	191
8.4.1 Fluß eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels	191
8.4.2 Fluß eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders	195
8.4.3 Fluß eines kugelsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel	198
9 Integralsätze von Gauß und Stokes	201
9.1 Gaußscher Integralsatz	201
9.1.1 Ein einführendes Beispiel	201
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum	203
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene	207
9.2 Stokes'scher Integralsatz	210
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik	217
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders	217
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters	222
Übungsaufgaben	226
Zu Abschnitt 1	226
Zu Abschnitt 2	228
Zu Abschnitt 3	230
Zu Abschnitt 4	232
Zu Abschnitt 5	233
Zu Abschnitt 6	235

Zu Abschnitt 7	238
Zu Abschnitt 8	241
Zu Abschnitt 9	245
II Wahrscheinlichkeitsrechnung	249
1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik	249
1.1 Urnenmodell	249
1.2 Permutationen	250
1.3 Kombinationen	253
1.4 Variationen	258
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln	262
2 Grundbegriffe	262
2.1 Einführende Beispiele	262
2.2 Zufallsexperimente	266
2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments	267
2.4 Ereignisse und Ereignisraum	268
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen	270
3 Wahrscheinlichkeit	274
3.1 Laplace-Experimente	274
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome	279
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten	279
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff	282
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit)	284
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum	285
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse	288
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit	290
3.5 Multiplikationssatz	293
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse	297
3.7 Ereignisbäume	300
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayes'sche Formel	306
4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen	313
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen	313
4.1.1 Einführende Beispiele	313
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen	315
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	316
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)	317
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)	325

5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung	332
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen	333
5.1.1 Ein einführendes Beispiel	333
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen	333
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen	334
5.2 Erwartungswert einer Funktion	336
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen	337
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen	341
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion	344
6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	346
6.1 Binomialverteilung	346
6.2 Hypergeometrische Verteilung	357
6.3 Poisson-Verteilung	363
6.4 Gaußsche Normalverteilung	367
6.4.1 Allgemeine Normalverteilung	367
6.4.2 Standardnormalverteilung	370
6.4.3 Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	372
6.4.4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	374
6.4.5 Quantile der Standardnormalverteilung	384
6.5 Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Normalverteilung	386
6.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen	394
6.7 Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung	394
7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen	397
7.1 Ein einführendes Beispiel	397
7.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	400
7.2.1 Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	400
7.2.2 Diskrete zweidimensionale Verteilung	402
7.2.3 Stetige zweidimensionale Verteilung	405
7.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable	411
7.4 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	417
7.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen	419
7.5.1 Additionssatz für Mittelwerte	419
7.5.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte	421
7.5.3 Additionssatz für Varianzen	424
7.5.4 Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen	427

7.6 Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen	430
7.6.1 Zentraler Grenzwertsatz	430
7.6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen ..	432
7.6.3 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	434
8 Prüf- oder Testverteilungen	435
8.1 Chi-Quadrat-Verteilung	435
8.2 t -Verteilung von Student	440
Übungsaufgaben	
Zu Abschnitt 1	445
Zu Abschnitt 2	447
Zu Abschnitt 3	448
Zu Abschnitt 4	451
Zu Abschnitt 5	453
Zu Abschnitt 6	456
Zu Abschnitt 7	460
III Grundlagen der mathematischen Statistik	465
1 Grundbegriffe	465
1.1 Ein einführendes Beispiel	465
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	466
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	468
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe	468
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe	471
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen)	473
2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe	479
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	480
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe	483
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion	483
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	485
3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)	487
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung	487
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)	488
3.2.1 Ein einführendes Beispiel	489
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen	489

3.2.3	Schätzungen für den Mittelwert μ	492
3.2.4	Schätzungen für die Varianz σ^2	493
3.2.5	Schätzungen für einen Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	494
3.2.6	Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte	494
3.3	Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen	497
3.3.1	Maximum-Likelihood-Methode	498
3.3.2	Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	500
3.3.2.1	Binomialverteilung	500
3.3.2.2	Poisson-Verteilung	502
3.3.2.3	Gaußsche Normalverteilung	505
3.4	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“)	508
3.4.1	Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit ...	508
3.4.2	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	512
3.4.3	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	519
3.4.4	Vertrauensintervalle für die unbekannt Varianz σ^2 einer Normalverteilung	524
3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekannt Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	528
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekannt Mittelwert μ einer beliebigen Verteilung	533
4	Statistische Prüfverfahren für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)	534
4.1	Ein einführendes Beispiel	534
4.2	Statistische Hypothesen und Parametertests	538
4.3	Planung und Durchführung eines Parametertests	539
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest	544
4.5	Spezielle Parametertests	549
4.5.1	Tests für den unbekannt Mittelwert μ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2	549
4.5.2	Tests für den unbekannt Mittelwert μ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz σ^2	558
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekannt Mittelwerte μ_1 und μ_2 zweier Normalverteilungen (Differenzentests)	563
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben	563
4.5.3.2	Differenzentests bei abhängigen Stichproben	565
4.5.3.3	Differenzentests bei unabhängigen Stichproben	570
4.5.4	Tests für die unbekannt Varianz σ^2 einer Normalverteilung	582
4.5.5	Tests für einen unbekannt Anteilswert p (Parameter p einer Binomialverteilung)	587
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten	593

5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)	598
5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests	598
5.2 Ein einführendes Beispiel	599
5.3 Chi-Quadrat-Test („ χ^2 -Test“)	601
6 Korrelation und Regression	614
6.1 Korrelation	614
6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe	614
6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ..	624
6.2 Regression	627
Übungsaufgaben	
Zu Abschnitt 1	633
Zu Abschnitt 2	636
Zu Abschnitt 3	636
Zu Abschnitt 4	639
Zu Abschnitt 5	642
Zu Abschnitt 6	643
IV Fehler- und Ausgleichsrechnung	645
1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Meßabweichungen).	
Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung	645
2 Statistische Verteilung der Meßwerte und Meßabweichungen („Meßfehler“) ...	649
2.1 Häufigkeitsverteilungen	649
2.2 Normalverteilte Meßgrößen	651
3 Auswertung einer Meßreihe	657
3.1 Mittelwert und Standardabweichung	657
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert μ , Meßunsicherheit, Meßergebnis ..	665
4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß	674
4.1 Ein einführendes Beispiel	674
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Meßgröße	675
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz)	678
4.4 Meßergebnis für eine „indirekte“ Meßgröße	682
5 Ausgleichs- oder Regressionskurven	689
5.1 Ein einführendes Beispiel	689
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ ..	691

5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	696
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden	696
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung. . . .	704
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	710
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurück- führbar sind	714
Übungsaufgaben	
Zu Abschnitt 3	725
Zu Abschnitt 4	727
Zu Abschnitt 5	730
Anhang	735
Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	736
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung	736
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung	738
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung	740
Tabelle 4: Quantile der t -Verteilung von „Student“	742
Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben	745
I Vektoranalysis	746
Abschnitt 1	746
Abschnitt 2	747
Abschnitt 3	750
Abschnitt 4	754
Abschnitt 5	756
Abschnitt 6	760
Abschnitt 7	764
Abschnitt 8	768
Abschnitt 9	772
II Wahrscheinlichkeitsrechnung	775
Abschnitt 1	775
Abschnitt 2	776
Abschnitt 3	776
Abschnitt 4	779
Abschnitt 5	782
Abschnitt 6	785
Abschnitt 7	789

III Grundlagen der mathematischen Statistik	793
Abschnitt 1	793
Abschnitt 2	799
Abschnitt 3	800
Abschnitt 4	803
Abschnitt 5	809
Abschnitt 6	813
IV Fehler- und Ausgleichsrechnung	816
Abschnitt 3	816
Abschnitt 4	817
Abschnitt 5	819
Literaturhinweise	825
Sachwortverzeichnis	826