

Koszulität der semiregulären Blöcke der \mathfrak{sl}_3 in positiver Charakteristik



Dissertation

zur Erlangung
des Doktorgrades der Naturwissenschaften
dem Fachbereich C
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Sebastian Holzmann
im Februar 2008

Die Dissertation kann wie folgt zitiert werden:

urn:nbn:de:hbz:468-20080169

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=urn%3Anbn%3Ade%3Ahbz%3A468-20080169>]

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1 Grundlagen	11
1.1 Restringierte \mathfrak{g} -Moduln	11
1.2 Deformierte Moduln	15
1.3 Kombinatorik	16
2 Bestimmung der Algebra	20
2.1 Die $p\mathbb{Z}R$ -Operation und $p\mathbb{Z}R$ -Erzeuger	20
2.2 Zerlegungslemma	21
2.3 Ein Spezialfall der Lusztig-Vermutung	25
2.4 Konstruktion der Objekte	26
2.5 Der Köcher von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$	36
3 Koszulität	41
3.1 Graduierte Kategorien und ihre quadratischen Dualen	41
3.2 Projektive Auflösungen konkret	47

Einleitung

Darstellungstheorie algebraischer Gruppen in positiver Charakteristik

Die Darstellungstheorie reductiver algebraischer Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} ist zunächst unabhängig von der Charakteristik von \mathbb{K} . Wählt man in der Gruppe G eine Borelsche Untergruppe B und einen maximalen Torus T , so werden die endlichdimensionalen einfachen Moduln parametrisiert durch die bezüglich B dominanten Gewichte von T . Im Fall der Charakteristik 0 ist jeder endlichdimensionale Modul halbeinfach, und mit der Weylschen Charakterformel erhält man ein explizites Resultat für die Charaktere der einfachen Moduln.

In Charakteristik $p > 0$ versagen diese Mittel leider. Der *Steinbergsche Tensorproduktsatz* legt nahe, statt der Gruppe G ihren (schematheoretischen) *Frobenius-Kern* G_1 zu betrachten. Dessen einfache Darstellungen werden nämlich parametrisiert durch den restringierten Gewichtsraum von T , also durch diejenigen Gewichte λ , auf denen alle Kowurzeln einen Wert zwischen 0 und $p - 1$ annehmen. Schreibt man nun ein beliebiges Gewicht als $\lambda = \sum_{i=0}^m p^i \lambda_i$ mit restringierten λ_i , so ist der einfache G -Modul vom Gewicht λ ein Tensorprodukt der geeignet getwisteten einfachen G_1 -Moduln zu den Gewichten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Auf diesem Weg kann man nun Strukturaussagen über G aus der Struktur der G_1 -Moduln gewinnen.

Darüberhinaus ist es hilfreich, statt der G_1 -Moduln Darstellungen der Gruppe $G_1 T$ zu betrachten. Geht man zur Lie-Algebra \mathfrak{g} von G über, so entsprechen die endlich erzeugten $G_1 T$ -Moduln den endlich erzeugten Darstellungen der *restringierten universellen Einhüllenden* $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$, auf denen der Torus diagonalisierbar operiert. Dabei entsteht $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ aus der herkömmlichen universellen Einhüllenden $U(\mathfrak{g})$ durch Quotientenbildung: Die formale p -te Potenz der Lie-Algebren-Elemente in $U(\mathfrak{g})$ soll operieren wie die interne Potenz in $\mathfrak{g} \subset \text{End } \mathbb{K}[G]$. Die Algebra $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ ist endlichdimensional, ihre Di-

mension ist $p^{\dim \mathfrak{g}}$. Die Zerlegung in Gewichtsräume von T liefert auf jedem G_1T -Modul eine X -Graduierung, die die Torusoperation vollständig codiert.

In der Charakteristik-0-Theorie ist das Analogon die Kategorie \mathcal{O} von Bernstein, Gelfand und Gelfand aus [BGG75], wobei man wegen der endlichen Dimension von $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ auf die lokale Endlichkeit bezüglich der Borelschen verzichten kann. Die einfachen G_1T -Moduln werden realisiert als Quotienten der *Baby-Verma-Moduln* $Z(\lambda)$, wobei nun λ über das gesamte Gewichtegitter (und nicht nur über die dominanten Gewichte) läuft. Die Baby-Verma-Moduln wiederum erhält man aus den eindimensionalen T -Moduln vom Gewicht λ durch Induktion auf $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$.

Eine der wichtigsten Strukturaussagen ist Andersens *linkage principle* aus [And80]. Es verwendet die Operation der *affinen Weylgruppe* \mathcal{W} auf dem Gewichtegitter, die dadurch entsteht, dass die offensichtliche Operation als Spiegelungsgruppe zunächst mit p gestreckt und dann um die negative Halbsumme der positiven Wurzeln verschoben wird:

Linkage principle: Sind $L(\lambda), L(\mu)$ zwei einfache G_1T -Moduln mit

$$\text{Ext}^1(L(\lambda), L(\mu)) \neq 0,$$

so liegen λ und μ in derselben Bahn der \mathcal{W} -Operation.

Die Kategorie \mathcal{C} der G_1T -Moduln zerfällt also in eine direkte Summe voller Unterkategorien $\mathcal{C}(\Omega)$, die *Blöcke*. Dabei läuft Ω über die Bahnen der affinen Weylgruppe und $\mathcal{C}(\Omega)$ besteht aus denjenigen Objekten, deren Kompositionsreihen nur einfache Moduln zu Gewichten aus Ω enthalten. Mit jedem einfachen Modul $L(\lambda)$ liegt auch der Baby-Verma-Modul $Z(\lambda)$, aus dem er hervorgegangen ist, sowie seine projektive Decke $Q(\lambda)$ in $\mathcal{C}(\Omega)$.

Die Struktur der $\mathcal{C}(\Omega)$ hängt nun nur noch davon ab, welche der Kowurzeln auf den Elementen von Ω einen Wert aus $p\mathbb{Z}$ annehmen. Sind dies alle, so nennt man den Block *speziell*, und $\mathcal{C}(\Omega)$ ist halbeinfach: Die einfachen Moduln bilden keine nichttrivialen Erweiterungen. Der entgegengesetzte Fall der *regulären* Blöcke, wo keine der Kowurzeln einen Wert aus $p\mathbb{Z}$ annimmt, wird von Andersen, Jantzen und Soergel in [AJS94] behandelt. Die allgemeine Struktur der übrigen Summanden ist bisher praktisch unverstanden.

Andersen, Jantzen und Soergel zeigen, dass die regulären Blöcke Morita-äquivalent zu einer Algebra sind, die eine kompatible Koszul-Graduierung zulässt, sofern für den Körper die Lusztig-Vermutung zutrifft. Die Vermutung, dass dies auch für die übrigen Blöcke gelten sollte, bildet den Ausgangspunkt dieser Arbeit.

Koszul-Algebren und Koszul-Kategorien

Der Begriff der *Koszul-Algebra* stammt ursprünglich von Priddy [Pri70]. In die Darstellungstheorie der Lie-Algebren fand er Einzug durch die Arbeit von Beilinson, Ginzburg und Soergel [BGS96]. Eine (endlichdimensionale) \mathbb{Z} -graduierte Algebra $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ heißt *Koszul*, falls $A_i = 0$ für $i < 0$, A_0 halbeinfach ist und als graduiertes A -Modul eine projektive Auflösung

$$\dots P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow A_0$$

besitzt, so dass $P^i = AP_i^i$ für alle $i \geq 0$.

Das einfachste Beispiel für eine Koszul-Algebra ist die symmetrische Algebra $S(V)$ eines endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums V . Offensichtlich ist $S(V)_0 = \mathbb{K}$ halbeinfach, und der *Koszul-Komplex*

$$\dots \rightarrow S(V) \otimes \bigwedge^2 V \rightarrow S(V) \otimes V \rightarrow S(V) \rightarrow k$$

liefert die gewünschte projektive Auflösung.

Koszul-Algebren kommen der Halbeinfachkeit so nahe, wie es mit der graduierten Struktur gerade noch verträglich ist. Sind M, N zwei endlichdimensionale Moduln einer Koszul-Algebra A , die in den Graden m bzw. n konzentriert sind, so gilt nämlich:

$$\text{Ext}^i(M, N) = 0,$$

falls nicht $i = m - n$ ist. [BGS96, Proposition 2.1.3].

Ferner kann man durch $A^! = \text{Ext}^\bullet(A_0, A_0)$ die *Koszul-duale* Algebra zu A definieren. Im Falle der symmetrischen Algebra von oben führt dies zu

$$S(V)^! = \bigwedge V^*$$

und zu der Äquivalenz derivierter Modulkategorien

$$\mathcal{D}^b(S(V)) \cong \mathcal{D}^b(\bigwedge V^*)$$

von Bernstein, Gelfand und Gelfand in [BGG78].

Beilinson, Ginzburg und Soergel zeigen in [BGS96], dass jeder Block der Kategorie \mathcal{O} äquivalent zu den Darstellungen einer Koszul-Algebra ist. Bisher war jedoch unbekannt, ob dieses Resultat auch gilt, falls die Charakteristik des Körpers positiv ist. Für die regulären Blöcke haben Andersen, Jantzen und Soergel in [AJS94] gezeigt, dass die Existenz einer solchen Koszul-Algebra aus der Lusztig-Vermutung folgt. Für die speziellen Blöcke ist die Aussage wegen der Halbeinfachkeit trivial.

Leider liefern diese beiden Ergebnisse nur für den Fall einer Lie-Algebra vom Rang 1, also \mathfrak{sl}_2 , ein umfassendes Ergebnis. In dieser Arbeit wird der einfachste der weiteren Fälle behandelt, die Lie-Algebra \mathfrak{sl}_3 . Hier existiert neben den regulären und speziellen Blöcken nur noch ein weiterer Typ Blöcken, die *semiregulären*.

Die Koszul-duale Algebra $A^! = \text{Ext}_A^\bullet(A_0, A_0)$ kann man auch auf eine zweite Weise erhalten. Jede Koszul-Algebra ist nämlich *quadratisch*, das heißt sie wird als Algebra erzeugt von A_1 und A_0 mit Relationen R vom Grad 2. Bildet man nun die orthogonalen Relationen

$$R^\perp \subset A_1^* \otimes A_1^* = (A_1 \otimes A_1)^*,$$

so ist

$$A^! \cong T_{\mathbb{K}}A_1 / (R^\perp),$$

wobei $T_{\mathbb{K}}A_1$ die freie Tensoralgebra über A_1 bezeichnet. Koszul-duale und quadratisch duale Algebra stimmen somit überein. Kennt man Erzeuger und Relationen der ursprünglichen Algebra, so lässt sich die quadratisch duale Algebra durch einfache Rechnung bestimmen. In vielen Fällen, so auch in dem hier betrachteten, lassen es die dualen Relationen leichter zu, die für den Beweis der Koszultät benötigten projektiven Auflösungen konkret anzugeben. Da eine Algebra genau dann Koszul ist, wenn dies für ihre quadratisch duale Algebra zutrifft, liefert dies das gewünschte Ergebnis.

Im von uns behandelten Fall ist die untersuchte Algebra allerdings nicht endlichdimensional. Arbeit von Mazorchuk, Ovsienko und Stroppel [MOS06] liefert jedoch den nötigen Hintergrund, um die obigen Ausführungen zu übertragen. Sie definieren *positiv graduierte Kategorien*, also Kategorien mit positiv graduierten Morphismenräumen, die zusätzliche Endlichkeitsbedingungen erfüllen. Betrachtet man endlichdimensionale Algebren als Wegealgebren von Köchern mit den primitiven Idempotenten als Punkten und ihren Erweiterungen als Pfeilen, so entspricht dies der Verallgemeinerung auf Köcher mit unendlich vielen Punkten, so dass je zwei davon nur durch jeweils endlich viele Wege einer bestimmten Länge verbunden sind. Mazorchuk, Ovsienko und Stroppel erarbeiten die nötigen Resultate, um die bekannten Konstruktionen praktisch unverändert anwenden zu können.

Beschreibung des Vorgehens

Im ersten Kapitel fassen wir die verwendeten Bezeichnungen und grundlegenden Sätze der Theorie zusammen. Sie stammen aus [AJS94] und [Soe95].

Zunächst deformieren wir die Kategorie \mathcal{C} durch eine Vervollständigung der symmetrischen Algebra $S(\mathfrak{h})$ über der Cartanschen \mathfrak{h} von \mathfrak{g} . Diese deformierte Kategorie zerfällt auf dieselbe Weise in Blöcke wie die ursprüngliche, und die projektiven Objekte in einem festen Block lassen sich durch eine Kombinatorik beschreiben, die die Elemente ihrer Verma-Fahnen sowie deren Struktur bei Lokalisierung auf den Rang-2-Fall codieren. Diese Konstruktion hat die spezielle Eigenschaft, dass sie die Morphismenräume zwischen den Projektiven erhält.

Zu kombinatorischen Objekten, die den unzerlegbaren projektiven Moduln entsprechen, gelangen wir durch Anwendung von Jantzens *Verschiebungsfunktoren* auf die Projektiven in den speziellen Blöcken. Störend erweist sich dabei, dass die Vereinbarkeit der darstellungstheoretischen und der in [AJS94] definierten kombinatorischen Verschiebungsfunktoren nur für die Fälle nachgewiesen ist, in denen auf mindestens einer Seite der Verschiebung ein regulärer Block steht.

Wir verwenden in Kapitel 2 nur solche Verschiebungen, müssen dafür aber in Kauf nehmen, dass dabei zerlegbare Objekte auftreten. Deshalb gilt es an zentraler Stelle, einen unzerlegbaren Summanden eines Objekts zu bestimmen. Hier hilft uns die Lusztig-Vermutung, die die Zerlegung der regulären Objekte angibt, und Satz 2.1, mit dessen Hilfe wir diese Zerlegung über die Verschiebungsfunktoren auf den semiregulären Fall übertragen können.

Haben wir die kombinatorischen Entsprechungen der unzerlegbaren Projektiven einmal gefunden, ist die Bestimmung der Morphismenräume nur noch eine reine Fleißarbeit, mit der wir schließlich den Endomorphismenring eines projektiven Erzeugers des Blocks explizit in Form der Wegealgebra eines Köchers mit Relationen angeben können. Der Transfer auf den nicht deformierten Fall gelingt mühelos mit einem Dimensionsargument.

In Kapitel 3 betrachten wir schließlich die soeben gewonnene Algebra im Lichte der Theorie positiv graduerter Kategorien. Dem hindernden Umstand, dass die projektiven Auflösungen der einfachen Moduln eine unendliche Länge haben, begegnen wir dadurch, dass wir die quadratisch duale Kategorie bilden. Nun sind zwar die projektiven Objekte in der Auflösung unendlichdimensional, doch haben die dualen Relationen eine angenehmere Gestalt. So gelingt es in Satz 3.6, die Koszulität der quadratisch dualen Kategorie und damit auch die der ursprünglichen Algebra und der semiregulären Blöcke von $U^{\text{res}}(\mathfrak{sl}_3)$ nachzuweisen.

Zum Abschluss geben wir die (endlich langen) projektiven Auflösungen noch explizit an.

Ausblick

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse erscheint schwierig. In erster Linie bleibt die Frage offen, ob es gelingt, die AJS-Kombinatorik mit Verschiebungen „in den Wänden“ verträglich zu konstruieren. Im Erfolgsfalle wäre der Typ A_n dann nur noch eine Frage von geschickter Buchhaltung und der richtigen Heuristik bei der Wahl der Erzeuger. Für die übrigen Typen führt dieser Weg jedoch nicht zu einem vollständigen Satz projektiver Decken. Hier verbleiben die unbewiesenen Fälle der Lusztig-Vermutung als gewichtige Hindernisse im Wege. Bezrukavnikov, Mirković und Rumynin geben in [BMR02] und [BMR06] eine geometrische Beschreibung der (derivierten Kategorie der) \mathfrak{g} -Moduln als kohärente Garben auf den *parabolischen Springer-Fasern*. Sie konstruieren auch eine Entsprechung für die Verschiebungsfunktoren, und es liegt nahe zu untersuchen, wie die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit auf der geometrischen Seite reproduziert werden können, um in einem weiteren Schritt mit geometrischen Methoden höhere Dimensionen und andere Typen anzugehen.

Schließlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Kategorie der Moduln über Lusztigs *kleiner Quantengruppe* $u_q(\mathfrak{sl}_3)$ an einer p -ten Einheitswurzel (siehe [Lus90a] und [Lus90b]) nach [AJS94] durch dieselbe Kombinatorik beschrieben wird. Die hier vorliegenden Ergebnisse lassen sich daher unmittelbar auf diesen Fall übertragen.

Danksagung: Von den vielen, die meine Arbeit unterstützt haben, möchte ich einigen besonders danken: Peter Littelmann dafür, dass er trotz des für ihn recht ungewohnten Themas die Betreuung übernommen und stete Hilfe geleistet hat; Catharina Stroppel, Peter Fiebig und Wolfgang Soergel für viele hilfreiche Anregungen und Diskussionen sowie die gewährte Gastfreundschaft in Glasgow bzw. Freiburg; den Mitgliedern und Gästen der Algebra-Arbeitsgruppen in Wuppertal und Köln für die anregende und stets angenehme Arbeitsatmosphäre; Katrin Appel und Klaus Wiele für die gewissenhafte Prüfung der Orthographie, Zeichensetzung und Grammatik – an noch verbliebenen Fehlern sind sie selbstverständlich unschuldig. Ohne die großzügige Unterstützung des DFG-Graduiertenkollegs „Darstellungstheorie und ihre Anwendungen in Mathematik und Physik“ hätte diese Arbeit nicht entstehen können. Auch hierfür sei gedankt!

Hinweis zur Notation

Ist \mathcal{C} eine Kategorie, so schreiben wir $M \in \mathcal{C}$ für ein Objekt M von \mathcal{C} . Für die Menge der Morphismen in \mathcal{C} von M nach N schreiben wir $\mathcal{C}(M, N)$, analog bezeichnet $\mathcal{C}(M)$ die Endomorphismen des Objektes M .

Kapitel 1

Grundlagen

Sei \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$. Des weiteren sei G eine algebraische Gruppe über \mathbb{K} , in der wir eine Borelsche Untergruppe B und einen maximalen Torus T fest wählen. Diese Wahl zeichnet in der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G eine Borelsche und eine Cartansche Unteralgebra \mathfrak{b} bzw. \mathfrak{h} aus. Es sei $X = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, \mathbb{K}^\times)$ das Gewichtsgitter von T , sowie R das Wurzelsystem mit den durch die Wahl von B ausgezeichneten positiven Wurzeln R^+ und einfachen Wurzeln R^{++} . Auf R operiert die Weylgruppe W , erzeugt von den Spiegelungen $s_\beta, \beta \in R^+$. Wir versehen X mit der üblichen Ordnung:

$$\lambda \leq \mu \iff \mu - \lambda \in \sum_{\alpha \in R^{++}} \mathbb{N}\alpha$$

Beweise zu den Aussagen in diesem Kapitel finden sich in [AJS94] und [Soe95], woraus sie entnommen sind.

1.1 Restringierte \mathfrak{g} -Moduln

Die Lie-Algebra \mathfrak{g} trägt die Struktur einer p -Lie-Algebra, gegeben durch einen Endomorphismus

$$\cdot^{[p]} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Realisiert man $\mathfrak{g} \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[G]$ als die linkstranslationsinvarianten Derivationen, so ist $\cdot^{[p]}$ die übliche p -te Potenz.

Diejenigen \mathfrak{g} -Moduln, die die $\cdot^{[p]}$ -Struktur respektieren, heißen *restringierte* \mathfrak{g} -Moduln. Äquivalent dazu können wir die Moduln über der *restringierten*

einhüllenden Algebra

$$U^{\text{res}}(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) / (D^{[p]} - D^p | D \in \mathfrak{g})$$

betrachten.

Berücksichtigt man zusätzlich noch die adjungierte Operation von T auf \mathfrak{g} , die eine X -Graduierung auf den \mathfrak{g} -Moduln induziert, so erhält man in natürlicher Weise eine Kategorie, deren nähere Beschreibung Gegenstand dieser Arbeit ist.

Definition 1.1. Die volle Unterkategorie

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}} = \left\{ U^{\text{res}}(\mathfrak{g})\text{-Mod}_X \left| \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt,} \\ Hm = \nu(H)m, \text{ falls} \\ H \in \mathfrak{h}, \nu \in X, m \in M_{\nu} \end{array} \right. \right\}$$

in der Kategorie der X -graduierten U^{res} -Moduln heißt *Kategorie der endlich erzeugten G_1T -Moduln*.

Hier identifizieren wir, wie im folgenden stillschweigend immer, ein Element $\nu \in X$ bei der Anwendung auf $H \in \mathfrak{h}$ mit seinem Differential $\bar{\nu} \in \mathfrak{h}^*$. Der Name der Kategorie weist auf die Verbindung zu den Darstellungen des ersten Frobenius-Kerns von G hin (siehe dazu auch [Jan87]).

$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ enthält zu jedem $\lambda \in X$ als Standardobjekt den *Baby-Verma-Modul*

$$Z(\lambda) = U^{\text{res}}(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{K}_{\lambda}.$$

Dabei ist \mathbb{K}_{λ} der eindimensionale $U(\mathfrak{b})$ -Modul, konzentriert im Grad λ , auf dem $U(\mathfrak{h})$ durch λ und der Rest von $U(\mathfrak{b})$ trivial operiert.

Lemma 1.1. *Die einfachen Objekte von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ sind genau die eindeutigen einfachen Quotienten $L(\lambda)$ der $Z(\lambda)$, $\lambda \in X$. Ihre projektiven Decken $Q(\lambda)$ besitzen eine Filtrierung durch Baby-Verma-Moduln. Dabei gilt für die Häufigkeit, mit der $Z(\mu)$ als Subquotient von $Q(\lambda)$ auftritt:*

$$(Q(\lambda) : Z(\mu)) = [Z(\mu), L(\lambda)].$$

Die affine Weylgruppe $\mathcal{W} = W \ltimes \mathbb{Z}R$ operiert auf $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ als affine Spiegelungsgruppe mittels der (\cdot_p) -Operation, erzeugt von den Spiegelungen $s_{\alpha, n}$ an den Wänden

$$H_{\alpha, n} = \{ \lambda \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^{\vee} \rangle = np \},$$

wobei wie üblich $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$. Für $H = H_{\alpha, n}$ sei

$$\begin{aligned} H^+ &= \{\lambda \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle > np\}, \\ H^- &= \{\lambda \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle < np\}. \end{aligned}$$

Die Zusammenhangskomponenten des Komplementes der Vereinigung aller $H_{\alpha, n}$ heißen *Alkoven*. Die Menge aller $H_{\alpha, n}$ bezeichnen wir mit \mathcal{H} .

Gilt für ein $\beta \in R^+$ und ein $\mu \in X$, dass

$$(n-1)p \leq \langle \mu + \rho, \beta^\vee \rangle \leq np,$$

so setzen wir

$$\beta \uparrow \mu = s_{\beta, n} \cdot_p \mu.$$

Anschaulich gesprochen ist $\beta \uparrow \mu$ das Bild von μ unter der Spiegelung an der nächsthöheren β -Wand. Ist $\mu' = \beta \uparrow \mu$, so schreiben wir $\mu = \beta \downarrow \mu'$.

Die Kategorie $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ zerfällt in eine direkte Summe über die Bahnen der \mathcal{W} -Operation

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{\Omega} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Omega).$$

Dabei ist $\mathcal{C}(\Omega)$ die volle Unterkategorie der Objekte, die eine Kompositionsreihe aus Objekten $L(\lambda)$ mit $\lambda \in \Omega$ besitzen. Wir erhalten zu jeder Bahn Ω kanonische Funktoren

$$\begin{aligned} i_{\Omega} &: \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{K}}, \\ \text{pr}_{\Omega} &: \mathcal{C}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Omega). \end{aligned}$$

Definition 1.2. Eine \mathcal{W} -Bahn Ω heiße

- *regulär*, falls Ω keine Wand trifft:

$$\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin p\mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in R^+,$$

- *speziell*, falls Ω auf allen Wänden liegt:

$$\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in p\mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in R^+,$$

- *semiregulr*, falls Ω auf genau einer Wand liegt:

$$\langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \in p\mathbb{Z} \text{ für genau ein } \alpha = \alpha(\lambda) \in R^+$$

Bahnen, die keine dieser Bedingungen erfüllen, bekommen auch keine eigene Bezeichnung.

Reguläre Bahnen treffen jeden Alkoven in genau einem Punkt. Sie existieren nur, falls p größer ist als die Coxeter-Zahl von R . Dies wollen wir im folgenden immer annehmen. Die speziellen Bahnen bestehen genau aus den Elementen von $pX - \rho$.

Die Summanden (Blöcke) zu speziellen Bahnen sind besonders einfach aufgebaut. Jantzen hat gezeigt [Jan87]:

Lemma 1.2. *Ist $\lambda \in pX - \rho$, so gilt $Q(\lambda) = Z(\lambda) = L(\lambda)$.*

Liegt die Bahn Γ auf mehr Wänden als Ω , d. h. zu jedem $\lambda \in \Omega$ existiert ein eindeutiges $\lambda_\Gamma \in \Gamma$, so dass

$$\{(\alpha, n) | \lambda \in H_{\alpha, n}\} \subset \{(\alpha, n) | \lambda_\Gamma \in H_{\alpha, n}\},$$

so schreiben wir $\Omega \rightarrow \Gamma$.

Die Beobachtung aus Lemma 1.2 nehmen wir als Ausgangspunkt der weiteren Ausführungen. Den Mittler zwischen verschiedenen Blöcken bilden dabei die *Verschiebungsfunktoren*.

Definition 1.3. Seien Ω, Γ zwei \mathcal{W} -Bahnen, es gelte $\Omega \rightarrow \Gamma$ oder $\Gamma \rightarrow \Omega$. Die Gewichte $\lambda \in \Omega$ und $\mu \in \Gamma$ seien aus dem Abschluss eines festen Alkovens gewählt, E_Ω^Γ sei ein einfacher G -Modul mit extremalem Gewicht $\mu - \lambda$. Das bedeutet, es existiert ein $w \in W$, so dass $w(\mu - \lambda)$ das Höchstgewicht von E_Ω^Γ ist. Der Funktor

$$T_\Omega^\Gamma = \text{pr}_\Gamma \circ (E_\Omega^\Gamma \otimes) \circ i_\Omega : \mathcal{C}_\mathbb{K}(\Omega) \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{K}(\Gamma)$$

heißt *Verschiebungsfunktor von Ω nach Γ* .

Lemma 1.3. *Die Verschiebungsfunktoren T_Ω^Γ sind exakt. T_Ω^Γ und T_Γ^Ω sind zueinander sowohl rechts- als auch linksadjungiert. Sie bilden daher projektive Objekte auf projektive Objekte ab.*

Lemma 1.4. *Seien $\Omega \rightarrow \Gamma$ zwei \mathcal{W} -Bahnen, $\mu \in \Gamma$. Dann existieren unter den $\lambda \in \Omega$ mit $\lambda_\Gamma = \mu$ ein maximales Gewicht μ_+ und ein minimales Gewicht μ_- .*

Lemma 1.5. [AJS94, 7.13] *Für Ω, Γ, μ wie in Lemma 1.4 gilt*

$$T_\Gamma^\Omega Q(\mu) \cong Q(\mu_-).$$

1.2 Deformierte Moduln

Sei $S = S(\mathfrak{h})$ die symmetrische Algebra über \mathfrak{h} . Zu jeder kommutativen noetherschen S -Algebra mit Strukturmorphismus $\pi : S \rightarrow A$ betrachten wir eine deformierte Version von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$.

Definition 1.4. Sei $U = U(\mathfrak{g})/(D^{[p]} - D^p | D \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R)$ und A eine kommutative noethersche S -Algebra mit Strukturmorphismus $\pi : S \rightarrow A$. Die Kategorie

$$\mathcal{C}_A = \left\{ M \in U\text{-Mod}_{X-A} \left| \begin{array}{l} M \text{ ist endlich erzeugt,} \\ Hm = m(\pi(H) + \nu(H)), \text{ falls} \\ H \in \mathfrak{h}, \nu \in X, m \in M_\nu \end{array} \right. \right\}$$

heißt *deformierte Darstellungskategorie*.

Setzen wir $A = \mathbb{K}$ mit π der Augmentation, so erhalten wir die ursprüngliche Kategorie $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ aus Abschnitt 1.1. Auch in der deformierten Version gibt es Standardobjekte, nämlich

$$Z_A(\lambda) = U \otimes_{U(\mathfrak{b})} (\mathbb{K}_\lambda \otimes A).$$

Ist A' eine kommutative noethersche A -Algebra, so gelten die folgenden zwei Lemmata, die für $A' = \mathbb{K}$ eine Verbindung zwischen der deformierten und der nicht deformierten Kategorie herstellen.

Lemma 1.6. *Es gilt für alle $\lambda \in X$:*

$$Z_A(\lambda) \otimes_A A' = Z_{A'}(\lambda).$$

Lemma 1.7. *[Soe95, Proposition 4.1.1] Sind $P, Q \in \mathcal{C}_A$ projektiv, so ist die natürliche Abbildung*

$$\mathcal{C}_A(P, Q) \otimes_A A' \rightarrow \mathcal{C}_{A'}(P \otimes_A A', Q \otimes_A A')$$

ein Isomorphismus.

Die projektiven Objekte in beiden Versionen entsprechen einander:

Lemma 1.8. *Ist $Q \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ projektiv, so gibt es ein projektives Objekt $Q_A \in \mathcal{C}_A$ mit*

$$Q_A \otimes_A \mathbb{K} = Q.$$

Für uns interessant ist insbesondere der Fall $A = \hat{S}$, die Vervollständigung von S am Augmentationsideal $\ker(\pi : S \rightarrow \mathbb{K})$. In diesem Falle gilt, analog zum nicht deformierten Fall,

$$\mathcal{C}_{\hat{S}} = \bigoplus_{\Omega} \mathcal{C}_{\hat{S}}(\Omega),$$

und wie dort definiert man Verschiebungsfunktoren T_{Ω}^{Γ} zwischen den Blöcken. Sie sind ebenfalls exakt und zueinander adjungiert, bilden also wiederum projektive Objekte auf projektive Objekte ab. Es gilt sogar:

Lemma 1.9. [Soe95, 4.1] *Das Diagramm von Funktoren*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\hat{S}}(\Omega) & \xrightarrow{T_{\Omega}^{\Gamma}} & \mathcal{C}_{\hat{S}}(\Gamma) \\ \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K} \downarrow & & \downarrow \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K} \\ \mathcal{C}_K(\Omega) & \xrightarrow{T_{\Omega}^{\Gamma}} & \mathcal{C}_K(\Gamma) \end{array}$$

kommutiert für alle Bahnen Ω und Γ , für die T_{Ω}^{Γ} existiert.

1.3 Kombinatorik

Andersen, Jantzen und Soergel konstruieren in [AJS94] Kombinatorik-Kategorien $\mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$, deren Objekte den Projektiven aus $\mathcal{C}_{\hat{S}}(\Omega)$ entsprechen, und kombinatorische Verschiebungsfunktoren $\mathcal{T}_{\Omega}^{\Gamma}$, die die Funktoren T_{Ω}^{Γ} abbilden.

Wähle zunächst zu jeder einfachen Wurzel α ein minimales $d_{\alpha} \in \{1, 2, 3\}$, so dass die Matrix $(d_{\alpha} \langle \beta, \alpha^{\vee} \rangle)_{\alpha, \beta \in R^{++}}$ symmetrisch ist. Liegt β im W -Orbit von $\alpha \in R^{++}$, so setze $d_{\beta} = d_{\alpha}$. Ist H_{β} das Bild von β^{\vee} in \mathfrak{h} , so setze $h_{\beta} = d_{\beta} H_{\beta}$.

Seien nun $S^{\emptyset} = \hat{S}[h_{\alpha}^{-1} | \alpha \in R^+]$ und $S^{\beta} = \hat{S}[h_{\alpha}^{-1} | \alpha \in R^+ \setminus \{\beta\}]$ für jede positive Wurzel β .

Definition 1.5. Ein Element \mathcal{M} der *Kombinatorikkategorie* $\mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$ bestehe aus:

- einer Familie $(\mathcal{M}(\lambda))_{\lambda \in \Omega}$ von endlich erzeugten S^{\emptyset} -Moduln, nur endlich viele ungleich 0, und
- für alle $\lambda \in \Omega$ und $\beta \in R^+$ einem endlich erzeugten S^{β} -Untermodul von $\mathcal{M}(\lambda)$, falls $\beta \uparrow \lambda = \lambda$, bzw. von $\mathcal{M}(\lambda) \oplus \mathcal{M}(\beta \uparrow \lambda)$, falls $\beta \uparrow \lambda \neq \lambda$. Außerdem gelte für alle $\lambda \in \Omega$ und alle $\beta \in R^+$ mit $\beta \uparrow \lambda \neq \lambda$: Ist $(x, y) \in \mathcal{M}(\lambda, \beta)$, so auch $(h_{\beta}, 0) \in \mathcal{M}(\lambda, \beta)$.

Ein Morphismus in $\mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$ ist eine Familie von S^0 -linearen Abbildungen

$$\varphi_\lambda : \mathcal{M}(\lambda) \rightarrow \mathcal{N}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega,$$

die die entsprechenden S^β -Untermoduln ineinander abbildet.

Definition 1.6. Sei $\mathcal{M} \in \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$. Die Menge

$$\text{tr } \mathcal{M} = \{\lambda \in \Omega \mid \mathcal{M}(\lambda) \neq 0\}$$

heiße *Träger von \mathcal{M}* .

Bezeichne $\mathcal{PC}_{\hat{S}}(\Omega)$ die volle Unterkategorie der Projektiven von $\mathcal{C}_{\hat{S}}(\Omega)$. Dies ist eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{FC}_{\hat{S}}(\Omega)$ von [AJS94, 9.3]. Wir wollen einige wesentliche Eigenschaften des dort definierten Kombinatorikfunktors $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\Omega : \mathcal{PC}_{\hat{S}}(\Omega) \rightarrow \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$ in einem Lemma zusammenfassen.

Lemma 1.10. *Sei Ω eine \mathcal{W} -Bahn.*

1. [Soe95, 4.2] Für $M \in \mathcal{PC}_{\hat{S}}(\Omega)$ und $\lambda \in \Omega$ gilt

$$(\mathbb{V}M)(\lambda) = \mathcal{C}_{S^0}(Z_{S^0}(\lambda), M \otimes_{\hat{S}} S^0).$$

2. [Soe95, 4.2] Sei $\nu \in pX - \rho$ ein Gewicht in einer speziellen Bahn Σ . Dann gilt für $\mathcal{Q}(\nu) = \mathbb{V}Q_{\hat{S}}(\nu)$:

$$\mathcal{Q}(\nu)(\mu) = \begin{cases} S^0, & \text{falls } \mu = \nu, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases},$$

$$\mathcal{Q}(\nu)(\mu, \beta) = \begin{cases} S^\beta, & \text{falls } \mu = \nu, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. [Soe95, 4.2.3] Sei p teilerfremd zu allen Einträgen der Cartan-Matrix von R , $M, N \in \mathcal{C}_{\hat{S}}(\Omega)$ seien projektiv. Dann induziert \mathbb{V} einen Isomorphismus

$$\mathcal{C}_{\hat{S}}(M, N) = \mathcal{PC}_{\hat{S}}(M, N) \rightarrow \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})(\mathbb{V}M, \mathbb{V}N).$$

Zusammen mit Lemma 1.7 liefert dies also für alle $\lambda, \lambda' \in \Omega$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Omega)(Q(\lambda), Q(\lambda')) \cong \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})(\mathbb{V}Q_{\hat{S}}(\lambda), \mathbb{V}Q_{\hat{S}}(\lambda')) \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K}.$$

Die Definition der kombinatorischen Verschiebungsfunktoren wollen wir etwas ausführlicher darstellen, da wir sie im folgenden explizit anwenden werden. Da das wesentliche Lemma (1.11) nur für diesen Fall bewiesen ist, sei ab sofort Ω immer eine reguläre \mathcal{W} -Bahn.

Sei Γ eine weitere \mathcal{W} -Bahn. Zu $\lambda \in \Omega$ bezeichne λ_Γ das Element von Γ , das im Abschluss des Alkovens von λ liegt. Die Abbildung $\alpha : \mathcal{H} \rightarrow R^+$ sei gegeben durch $\alpha(H_{\beta,n}) = \beta$. Zu einer positiven Wurzel $\beta \in R^+$ sei $\mathcal{H}(\beta) = \{H \in \mathcal{H} \mid s_\beta \alpha(H) \notin R^+\}$. Die Definition der kombinatorischen Verschiebung benutzt die Konstanten

$$a_\lambda^\beta = \prod_{\substack{H \in \mathcal{H}(\beta) \\ \lambda_\Gamma \in H, \lambda \in H^+}} h_{-\alpha(H)} \prod_{\substack{H \in \mathcal{H}(\beta) \\ \lambda_\Gamma \in H, \lambda \in H^-}} h_{\alpha(H)}^{-1}$$

und

$$b_\lambda^\beta = \left(a_\lambda^\beta\right)^{-1}.$$

Definition 1.7. Der kombinatorische Verschiebungsfunktor auf die Wand

$$\mathcal{T}_\Omega^\Gamma : \mathcal{K}(\Omega, \hat{S}) \rightarrow \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_\Omega^\Gamma \mathcal{M})(\mu) &= \bigoplus_{\lambda_\Gamma = \mu} \mathcal{M}(\lambda), \\ (\mathcal{T}_\Omega^\Gamma \mathcal{M})(\mu, \beta) &= \begin{cases} \bigoplus_{\lambda_\Gamma = \mu = (\beta \uparrow \lambda)_\Gamma} (b_\lambda^\beta \oplus \text{id}) \mathcal{M}(\lambda, \beta), & \text{falls } \beta \uparrow \mu = \mu, \\ \bigoplus_{\lambda_\Gamma = \mu} (b_\lambda^\beta \oplus \text{id}) \mathcal{M}(\lambda, \beta), & \text{falls } \beta \uparrow \mu \neq \mu. \end{cases} \end{aligned}$$

Definition 1.8. Der kombinatorische Verschiebungsfunktor aus der Wand

$$\mathcal{T}_\Gamma^\Omega : \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S}) \rightarrow \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_\Gamma^\Omega \mathcal{N})(\lambda) &= \mathcal{N}(\lambda_\Gamma), \\ (\mathcal{T}_\Gamma^\Omega \mathcal{N})(\lambda, \beta) &= \begin{cases} (a_\lambda^\beta, 1) \mathcal{N}(\lambda_\Gamma, \beta), & \text{falls } \beta \uparrow \lambda_\Gamma \neq \lambda_\Gamma, \\ \mathcal{N}(\lambda_\Gamma, \beta) \oplus \mathcal{N}(\lambda_\Gamma + p\beta, \beta), & \text{falls } (\beta \uparrow \lambda)_\Gamma = \lambda_\Gamma + p\beta, \\ \{(x + a_\lambda^\beta y, y) \mid x, y \in \mathcal{N}(\lambda_\Gamma, \beta)\}, & \text{falls } (\beta \uparrow \lambda)_\Gamma = \lambda_\Gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Lemma 1.11. [Soe95, Theorem 4.3.1] *Der Kombinatorikfunctor \mathbb{V} kann so gewählt werden, dass*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\Gamma^\Omega \mathbb{V}_\Gamma &\cong \mathbb{V}_\Omega \mathcal{T}_\Gamma^\Omega, \\ \mathcal{T}_\Omega^\Gamma \mathbb{V}_\Omega &\cong \mathbb{V}_\Gamma \mathcal{T}_\Omega^\Gamma\end{aligned}$$

für alle $\Gamma \rightarrow \Omega$ bzw. $\Omega \rightarrow \Gamma$ mit regulärem Ω .

Kapitel 2

Bestimmung der Algebra

2.1 Die $p\mathbb{Z}R$ -Operation und $p\mathbb{Z}R$ -Erzeuger

Auf allen Kategorien aus Kapitel 1 operiert die Gruppe $p\mathbb{Z}R$ durch einen Shiftfunktork:

$$\begin{aligned} [p\nu] : \mathcal{C}_A(\Gamma) &\rightarrow \mathcal{C}_A(\Gamma) \\ \text{bzw. } [p\nu] : \mathcal{C}_A &\rightarrow \mathcal{C}_A \end{aligned}$$

verschiebt die Graduierung

$$M[p\nu]_\mu = M_{\mu-p\nu}$$

und erhält die $U^{\text{res}}(\mathfrak{g})$ -Modul- bzw. U - A -Bimodulstruktur. Dabei beachte man, dass für alle $\nu \in \mathbb{Z}R$ das Differential $\overline{p\nu} = 0$ ist. Auf der kombinatorischen Seite verschiebt

$$[p\nu] : \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S}) \rightarrow \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$$

das kombinatorische Objekt um $p\nu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[p\nu](\lambda) &= \mathcal{M}(\lambda - p\nu), \\ \mathcal{M}[p\nu](\lambda, \beta) &= \mathcal{M}(\lambda - p\nu, \beta). \end{aligned}$$

Der $p\mathbb{Z}R$ -Shift vertauscht mit allen Verschiebungsfunktoren und dem Kombinatorikfunktork.

Für $M, N \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ sei

$$\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^\sharp(M, N) = \bigoplus_{p\nu \in p\mathbb{Z}R} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)(M[p\nu], N).$$

Ist $Q \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ ein projektives Objekt, so dass $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ von der Familie aller $Q[p\nu]$, $\nu \in \mathbb{Z}R$ erzeugt wird, so ist $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^{\sharp}(Q)^{\text{opp}}$ -Moduln. Wir werden im Rest dieses Kapitels für den Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ solche Objekte und die korrespondierenden Algebren $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^{\sharp}(Q)^{\text{opp}}$ für die semiregulären Bahnen explizit beschreiben.

2.2 Zerlegungslemma

Zunächst stellen wir einen Satz bereit, der es uns erlaubt, kombinatorische Objekte zu konstruieren, die den unzerlegbaren projektiven Moduln aus semiregulären Blöcken entsprechen.

Satz 2.1. *Sei Γ eine semireguläre und Ω eine reguläre Bahn. Ist $\mathcal{M} \in \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$ isomorph zu einem $\mathbb{V}_{\Gamma}M$, $M \in \mathcal{PC}_{\hat{S}}(\Gamma)$ und unzerlegbar, so ist auch $\mathcal{T}_{\Gamma}^{\Omega}\mathcal{M} \in \mathcal{K}(\Omega, \hat{S})$ unzerlegbar.*

Der Beweis dieses Satzes wird den Rest des Abschnitts ausmachen. Sei dazu zunächst \mathcal{M} ein beliebiges Objekt aus $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$ und $\mathcal{N} = \mathcal{T}_{\Gamma}^{\Omega}\mathcal{M}$ sein Bild unter der Verschiebung aus der Wand. Schließlich sei $\mathcal{P} = \mathcal{T}_{\Omega}^{\Gamma}\mathcal{N}$ das wieder in die Wand zurückgeschobene Objekt.

Die Formeln für die kombinatorischen Verschiebungsfunktoren führen zu der Darstellung

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mu) &= \mathcal{M}(\mu)_{-} \oplus \mathcal{M}(\mu)_{+}, \\ \mathcal{P}(\mu, \beta) &= \mathcal{M}(\mu, \beta)_{-} \oplus \mathcal{M}(\mu, \beta)_{+}, \text{ falls } \beta \neq \alpha(\mu), \\ \mathcal{P}(\mu, \alpha(\mu)) &= \{(h_{\alpha(\mu)}x + y, y) \mid x, y \in \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu))\}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichne $\mathcal{M}(\mu)_{-}$ bzw. $\mathcal{M}(\mu)_{+}$ das Bild von $\mathcal{M}(\mu_{-})$ bzw. $\mathcal{M}(\mu_{+})$ in $\mathcal{P}(\mu)$. Es ist

$$\mathcal{M}(\mu_{-}) = \mathcal{M}(\mu_{+}) = \mathcal{M}(\mu)$$

und

$$\mathcal{M}(\mu_{-}, \beta) = \mathcal{M}(\mu_{+}, \beta) = \mathcal{M}(\mu, \beta)$$

für alle $\beta \neq \alpha(\mu)$.

Auf $\mathcal{P}(\mu)$ operiert die Involution

$$\begin{aligned}\tau_{\mu} : \mathcal{M}(\mu)_{-} \oplus \mathcal{M}(\mu)_{+} &\rightarrow \mathcal{M}(\mu)_{-} \oplus \mathcal{M}(\mu)_{+}, \\ (x, y) &\mapsto (y, x).\end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Die Invarianten unter der durch $(\tau_\mu)_{\mu \in \Gamma}$ induzierten Involution τ auf \mathcal{P} (als S^0 -Modul) sind als Objekt von $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$ isomorph zu \mathcal{M} .*

Beweis. Da $\mathcal{M}(\mu)_- \cong \mathcal{M}(\mu)_+ \cong \mathcal{M}(\mu)$, sind die Invarianten in $\mathcal{P}(\mu)$ genau die $(m, m), m \in \mathcal{M}(\mu)$. Es bleibt nur zu zeigen: Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_\mu : \mathcal{M}(\mu) &\rightarrow \mathcal{P}(\mu)^\tau, \\ m &\mapsto (m, m) \end{aligned}$$

induzieren einen Morphismus φ von $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$, das bedeutet $\varphi \mathcal{M}(\mu, \beta) \subset \mathcal{P}(\mu, \beta)^\tau$ für alle μ, β .

1. Ist $\beta = \alpha(\mu)$ und $m \in \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu))$, so sieht man sofort, dass

$$\varphi(m) = (m, m) \in \{(h_{\alpha(\mu)}x + y, y) \mid x, y \in \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu))\}.$$

2. Ist $\beta \neq \alpha(\mu)$ und $(m, n) \in \mathcal{M}(\mu, \beta)$, so gilt ebenso offensichtlich

$$\varphi(m, n) = \begin{pmatrix} m & n \\ m & n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(\mu, \beta)^\tau.$$

Hier beachte man, dass es wegen der Symmetrie keine Rolle spielt, ob $(\beta \uparrow \mu)_- = \beta \uparrow \mu_-$ oder $(\beta \uparrow \mu)_- = \beta \uparrow \mu_+$.

□

Wir haben also in \mathcal{P} ein zu \mathcal{M} isomorphes Unterobjekt gefunden. Um es mit einem Komplement zu ergänzen, suchen wir nun ein geeignetes Unterobjekt von „Antiinvarianten“. Da hierbei die soeben erwähnte Symmetrie wegfällt, bereitet dies etwas mehr Mühe.

Lemma 2.3. *Sei $(a_\mu)_{\mu \in \Gamma}$ eine Menge von Konstanten aus S^0 , so dass gilt:*

1. $a_\mu \in h_{\alpha(\mu)} S^{\alpha(\mu)}$,
2. $a_\mu - a_{\beta \uparrow \mu} \in h_\beta S^\beta$, falls $s_\beta \alpha(\mu) \in R^+$,
3. $a_\mu + a_{\beta \uparrow \mu} \in h_\beta S^\beta$, falls $s_\beta \alpha(\mu) \in -R^+, \beta \neq \alpha(\mu)$.

Dann induziert die Familie von S^0 -linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_\mu : \mathcal{M}(\mu) &\rightarrow \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{M}(\mu)_- \oplus \mathcal{M}(\mu)_+, \\ m &\mapsto (a_\mu m, -a_\mu m) \end{aligned}$$

einen Monomorphismus in $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass ψ ein Morphismus ist, die Injektivität ist offensichtlich. Nachzurechnen ist also

$$\psi_\mu(\mathcal{M}(\mu, \beta)) \subseteq \mathcal{P}(\mu, \beta)$$

bzw.

$$(\psi_\mu \oplus \psi_{\beta \uparrow \mu})(\mathcal{M}(\mu, \beta)) \subseteq \mathcal{P}(\mu, \beta)$$

für alle μ, β .

1. Sei $\beta = \alpha(\mu)$. Dann gilt für das Bild eines $m \in \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu))$:

$$\begin{aligned} \psi_\mu(m) &= (a_\mu m, -a_\mu m) \\ &= -a_\mu(m, m) + 2a_\mu(m, 0) \\ &\in \{(h_{\alpha(\mu)}x + y, y) \mid x, y \in \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu))\} \\ &= \mathcal{I}_\Omega^\Gamma \mathcal{I}_\Gamma^\Omega \mathcal{M}(\mu, \alpha(\mu)) \end{aligned}$$

2. Sei nun $\beta \neq \alpha(\mu)$, $s_\beta \alpha(\mu) \in R^+$. Dann ist $(\beta \uparrow \mu)_- = \beta \uparrow \mu_-$ und man rechnet für $(m, n) \in \mathcal{M}(\mu, \beta)$:

$$\begin{aligned} (\psi_\mu \oplus \psi_{\beta \uparrow \mu})(m, n) &= \begin{pmatrix} -a_\mu m & -a_{\beta \uparrow \mu} n \\ a_\mu m & a_{\beta \uparrow \mu} n \end{pmatrix} \\ &= a_{\beta \uparrow \mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} + (a_\mu - a_{\beta \uparrow \mu}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - a_{\beta \uparrow \mu} \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (a_\mu - a_{\beta \uparrow \mu}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{M}(\mu, \beta)_- \oplus \mathcal{M}(\mu, \beta)_+ \end{aligned}$$

3. Ist $\beta \neq \alpha(\mu)$ und $s_\beta \alpha(\mu) \in R^-$, so folgt auf gleiche Weise:

$$\begin{aligned} (\psi_\mu \oplus \psi_{\beta \uparrow \mu})(m, n) &= \begin{pmatrix} -a_\mu m & a_{\beta \uparrow \mu} n \\ a_\mu m & -a_{\beta \uparrow \mu} n \end{pmatrix} \\ &= -a_{\beta \uparrow \mu} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} + (a_\mu + a_{\beta \uparrow \mu}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + a_{\beta \uparrow \mu} \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (a_\mu + a_{\beta \uparrow \mu}) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\in \mathcal{M}(\mu, \beta)_- \oplus \mathcal{M}(\mu, \beta)_+ \end{aligned}$$

Dass ψ ein Monomorphismus ist, ist klar. □

Eine mögliche Wahl ist

$$a_\mu = h_{\alpha(\mu)},$$

denn

$$\alpha_{\beta\uparrow\mu} = \begin{cases} s_\beta\alpha(\mu), & \text{falls } s_\beta\alpha(\mu) \in R^+, \\ -s_\beta\alpha(\mu), & \text{falls } s_\beta\alpha(\mu) \in -R^+, \end{cases}$$

diese Konstanten erfüllen daher

$$\begin{aligned} a_\mu - a_{\beta\uparrow\mu} &= h_{\alpha(\mu)} - h_{s_\beta\alpha(\mu)} \\ &= \langle \alpha(\mu), \beta^\vee \rangle h_\beta, & \text{falls } s_\beta\alpha(\mu) \in R^+, \\ a_\mu + a_{\beta\uparrow\mu} &= h_{\alpha(\mu)} + h_{-s_\beta\alpha(\mu)} \\ &= h_{\alpha(\mu)} - h_{s_\beta\alpha(\mu)} \\ &= \langle \alpha(\mu), \beta^\vee \rangle h_\beta, & \text{falls } s_\beta\alpha(\mu) \in -R^+. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

Korollar 2.4. *Das Unterobjekt $\psi(\mathcal{M}) \subset \mathcal{P}$ der Antiinvarianten unter τ ist ebenfalls isomorph zu \mathcal{M} .*

Unsere Wahl der a_μ haben wir in gewisser Weise minimal getroffen – schließlich galt es, ein Komplement zu $\varphi(\mathcal{M})$ zu finden. Dass uns dies gelungen ist, ist zeigt das nächste Lemma.

Lemma 2.5.

$$\mathcal{P} = \varphi(\mathcal{M}) \oplus \psi(\mathcal{M})$$

Beweis. Offensichtlich ist der Schnitt von $\varphi(\mathcal{M})$ und $\psi(\mathcal{M})$ trivial. Es bleibt also nur zu zeigen, dass die Unterobjekte in allen $\mathcal{P}(\mu)$ und $\mathcal{P}(\mu, \beta)$ Erzeuger über S^\emptyset bzw. S^β bereitstellen. Für die $\mathcal{P}(\mu)$ folgt dies sofort aus Dimensionsgründen. In den anderen Fällen rechnet man:

1. Ist $\beta = \alpha(\mu)$, so gilt für $(h_{\alpha(\mu)}x + y, y) \in \mathcal{P}(\mu, \alpha(\mu))$:

$$\begin{aligned} (h_{\alpha(\mu)}x + y, y) &= \left(y + \frac{1}{2}h_{\alpha(\mu)}x, y + \frac{1}{2}h_{\alpha(\mu)}x \right) + \left(h_{\alpha(\mu)}\frac{x}{2}, -h_{\alpha(\mu)}\frac{x}{2} \right) \\ &= \varphi \left(y + \frac{1}{2}h_{\alpha(\mu)}x \right) + \psi \left(\frac{1}{2}x \right) \end{aligned}$$

2. Ist $\beta \neq \alpha(\mu)$ und $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mu, \beta)_- \oplus \mathcal{M}(\mu, \beta)_+$, so errechnet man etwas aufwendiger:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \varphi \left(\frac{1}{2}(x, y) + \frac{1}{2}(z, w) \right) \\ &\quad - \psi \left(\frac{1}{2}h_{s_\beta\alpha(\mu)}^{-1}(x, y) - \langle \alpha(\mu), \beta^\vee \rangle h_{\alpha(\mu)}^{-1}h_{s_\beta\alpha(\mu)}^{-1}(h_\beta x, 0) \right) \\ &\quad + \psi \left(\frac{1}{2}h_{s_\beta\alpha(\mu)}^{-1}(z, w) - \langle \alpha(\mu), \beta^\vee \rangle h_{\alpha(\mu)}^{-1}h_{s_\beta\alpha(\mu)}^{-1}(h_\beta z, 0) \right) \end{aligned}$$

□

Zum Beweis von Satz 2.1 erfülle nun \mathcal{M} die dortigen Voraussetzungen. Aus der Unzerlegbarkeit folgt, dass die Zerlegung $\mathcal{P} = \varphi(\mathcal{M}) \oplus \psi(\mathcal{M})$ aus Lemma 2.5 die einzig mögliche ist. Angenommen, \mathcal{N} zerfiele als $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, so wäre auch $\mathcal{T}_\Omega^\Gamma \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{T}_\Omega^\Gamma \mathcal{N}_2$ eine Zerlegung von \mathcal{P} . O.B.d.A. gälte also

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{M}) &= \mathcal{T}_\Omega^\Gamma(\mathcal{N}_1), \\ \psi(\mathcal{M}) &= \mathcal{T}_\Omega^\Gamma(\mathcal{N}_2). \end{aligned}$$

Sei μ^{\min} ein minimales Element von $\text{tr}(\mathcal{M})$. Nach Konstruktion gilt

$$\mu^{\min} \in \text{tr} \varphi(\mathcal{M}) \cap \text{tr} \psi(\mathcal{M}),$$

damit folgte

$$\mu_-^{\min} \in \text{tr} \mathcal{N}_1 \cap \text{tr} \mathcal{N}_2$$

und insbesondere für den Rang als S^\emptyset -Modul

$$\text{rk}_{S^\emptyset} \mathcal{N}(\mu_-^{\min}) \geq 2.$$

Ist $\mathcal{M} \cong \mathbb{V}_\Gamma M$ mit unzerlegbarem projektivem M , so gilt mit dem ersten Teil von Lemma 1.10 im Widerspruch dazu jedoch

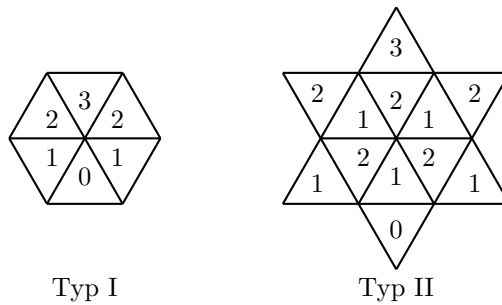
$$\text{rk}_{S^\emptyset} \mathcal{N}(\mu_-^{\min}) = \text{rk}_{S^\emptyset} \mathcal{M}(\mu^{\min}) = 1.$$

2.3 Ein Spezialfall der Lusztig-Vermutung

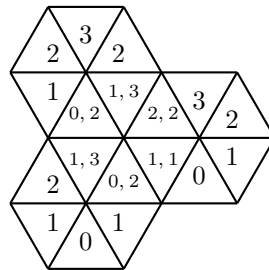
Gemäß einer Vermutung von Lusztig [Lus80] berechnen sich die $(Q(\mu) : Z(\lambda))$ nach einer Formel von Jantzen [Jan77] aus den periodischen Kazhdan-Lusztig-Polynomen (sehr übersichtlich dargestellt von Cline in [Cli87]). Erfreulicherweise ist diese Vermutung im hier vorliegenden Fall A_2 für $p \geq 5$

bereits von Lusztig selbst bewiesen (für den allgemeinen Fall A_n siehe auch die neuesten Arbeiten von Fiebig: [Fie06] und [Fie07]). Wir verwenden die Versionen der Pattern von Stroppel aus [Str97]. Dabei haben wir die Pattern an der horizontalen Achse gespiegelt, da wir bei den projektiven Objekten Tiefst- statt Höchstgewichte betrachten.

Satz 2.6. *Die unzerlegbaren periodischen KL-Pattern für A_2 und reguläre Gewichte sind:*



Schiebt man Typ II nochmals nach unten durch eine Wand, so zerfällt er in vier Objekte vom Typ I. Das resultierende Pattern ist:



2.4 Konstruktion der Objekte

Ab sofort sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$, \mathcal{W} also eine Spiegelungsgruppe vom Typ A_2 . Die einfachen Wurzeln seien α_1 und α_2 , $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ sei die dritte der positiven Wurzeln. Es seien $\nu_1 = -\rho, \nu_2, \nu_3$ die Repräsentanten der drei speziellen \mathcal{W} -Bahnen Σ_1, Σ_2 und Σ_3 im Abschluss $\bar{\nabla}$ des fundamentalen dominanten Alkovens ∇ . Wir wählen jeweils eine semireguläre Bahn Γ_i , die ∇ auf der α_i -Wand trifft, und eine reguläre Bahn Ω .

Sei im folgenden $\nu = \nu_i$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$. Da $\Sigma = \mathcal{W} \cdot \nu$ speziell ist,

gilt nach Lemma 1.10

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\nu)(\nu) &= S^0, \\ \mathcal{Q}(\nu)(\nu') &= 0, \quad \text{falls } \nu \neq \nu', \\ \mathcal{Q}(\nu)(\nu, \beta) &= S^\beta, \quad \beta \in R^+. \end{aligned}$$

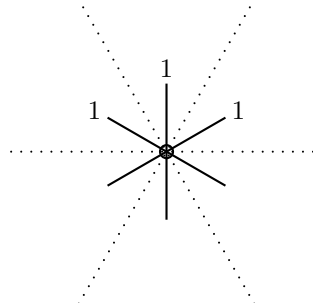


Abbildung 2.1: Ein spezielles Objekt

a	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x

Tabelle 2.1: Tabelle zu Abbildung 2.1

Abbildung 2.1 und Tabelle 2.1 veranschaulichen $\mathcal{Q}(\nu)$ im Bild. Diese und die folgenden Bilder und Tabellen sind wie folgt zu lesen:

- Die Wurzel α_1 zeigt stets nach rechts oben, α_2 nach links oben und $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ senkrecht nach oben. Wir schreiben S^i statt S^{α_i} , h_i statt h_{α_i} .
- Jeder Kreis an der Stelle λ steht für einen Summanden S^λ in $\mathcal{M}(\lambda)$; in diesem Falle ist es genau einer an der Stelle ν in der Bildmitte.
- Jeder durchgezogene Strich steht für ein $\mathcal{M}(\mu, \beta)$; dabei ist μ das Gewicht in der Mitte des Striches oder das an seinem unteren Ende. Für jede der drei positiven Wurzeln sind die $\mathcal{M}(\mu, \beta)$ getrennt durchnummeriert.

- Der entsprechende Eintrag in der Tabelle gibt den Untermodul $\mathcal{M}(\mu, \beta)$ an. Man erhält ihn, indem man x (sowie bei den späteren Objekten jeweils unabhängig voneinander auch y, z und w) das jeweilige S^β durchlaufen lässt. Dabei werden die Komponenten aufsteigend in Richtung β aufgezählt. Im Beispiel: $\mathcal{Q}(\nu)(\nu, \alpha_1) = \{x | x \in S^1\} = S^1$.
- Wir werden häufiger von den Identitäten

$$h_j^{\pm 1} S^i = S^i, \quad \text{falls } i \neq j$$

Gebrauch machen

- Die Rechnungen, die zu den Konstanten a_μ^λ in der kombinatorischen Verschiebung führen, werden weggelassen. Sie bestehen im wesentlichen aus Buchhaltung darüber, auf welcher Seite man Wände verlässt bzw. betritt.

Durch Anwendung von $\mathcal{T}_\Sigma^\Omega$ auf $\mathcal{Q}(\nu)$ erhalten wir ein unzerlegbares Objekt $\mathcal{Q}(\nu_-)$, das der projektiven Decke des einfachen Moduls zum Gewicht ν_- entspricht. Es hat die Form des KL-Patterns vom Typ I aus Abschnitt 2.3, weshalb wir ein solches Objekt im folgenden *vom Typ I* nennen wollen. Abbildung 2.2 und Tabelle 2.2 zeigen das Objekt in symbolischer Form.

Nun sei k so gewählt, dass $\Gamma = \Gamma_k$ den Abschluss des Alkovens von ν_- in einer Wand trifft, auf der ν nicht liegt. Wir wenden $\mathcal{T}_\Omega^\Gamma$ auf $\mathcal{Q}(\nu_-)$ an und erhalten ein Objekt $\mathcal{Q}_{3,\nu}$, abgebildet in Abbildung 2.3 und Tabelle 2.3.

Wenden wir den umgekehrten Funktor $\mathcal{T}_\Gamma^\Omega$ auf $\mathcal{Q}_{3,\nu}$ an, so ergibt sich ein Objekt \mathcal{Q}' , das nach KL-Theorie immer noch unzerlegbar ist – es handelt sich um ein Objekt vom Typ II – und $Q(\alpha_3 \downarrow \nu_-)$ entspricht. Deshalb ist nach Satz 2.1 auch $\mathcal{Q}_{3,\nu}$ unzerlegbar und entspricht $Q(\mu)$, wobei μ das Gewicht ist, in dem Γ den Abschluss des Alkovens von ν_- trifft. Der Index 3 erklärt sich dadurch, dass μ auf einer α_3 -Wand liegt. Das Objekt \mathcal{Q}' wird in Abbildung 2.4 und Tabelle 2.4 gezeigt.

Den Alkoven von $\alpha_3 \downarrow \nu_-$ können wir nach unten über zwei Wände, nämlich die zu α_1 und die zu α_2 , verlassen. Treffe Γ' o.B.d.A. die α_1 -Wand. Die Anwendung von $\mathcal{T}_{\Gamma'}^\Omega \mathcal{T}_\Omega^{\Gamma'}$ auf $\mathcal{Q}(\alpha_3 \downarrow \nu_-)$ ergibt ein projektives Objekt, das, wiederum nach KL-Theorie, in vier (z. T. im Grad verschobene) Kopien von Objekten vom Typ I zerfällt. Eine dieser Kopien, nämlich diejenige, in deren Träger $\alpha_1 \downarrow (\alpha_3 \downarrow \nu_-)$ liegt, entspricht der projektiven Decke $Q(\alpha_1 \downarrow (\alpha_3 \downarrow (\nu_-)))$. Nach Satz 2.1 muss dann $\mathcal{P} = \mathcal{T}_\Omega^{\Gamma'}$ entsprechend zerfallen. Das Objekt ist dargestellt in Abbildung 2.5 und Tabelle 2.5.

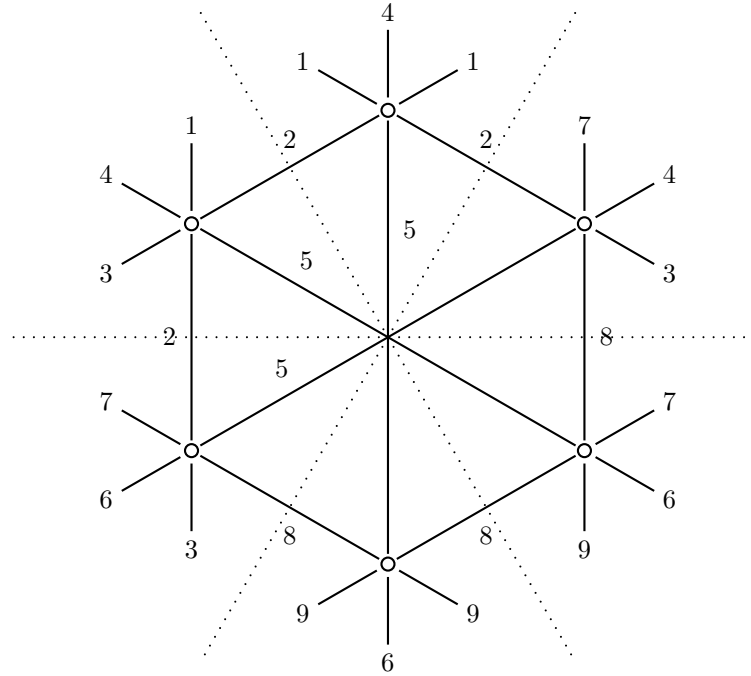


Abbildung 2.2: Reguläres Objekt vom Typ I

	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x
2	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x - h_1^{-1}h_2h_3^{-1}y, y)$
3	x	x	x
4	x	x	x
5	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_1^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}y, y)$
6	x	x	x
7	x	x	x
8	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x - h_1h_2^{-1}h_3^{-1}y, y)$
9	x	x	x

Tabelle 2.2: Tabelle zu Abbildung 2.2

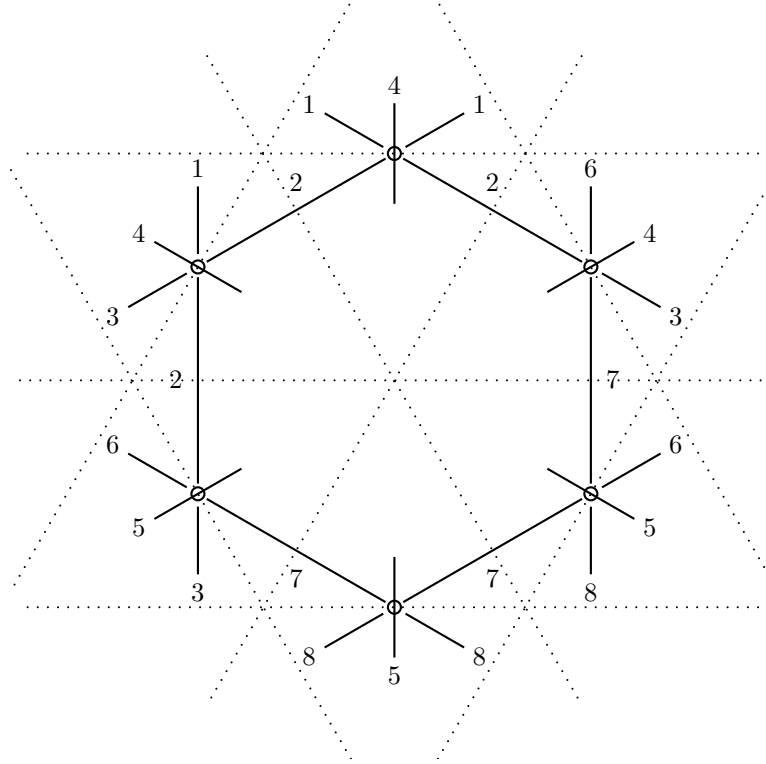


Abbildung 2.3: Das Objekt $\mathcal{Q}_{3,\nu}$

	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x
2	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_1^{-2}h_2h_3^{-1}y, y)$
3	x	x	x
4	h_1x	h_2x	h_3x
5	x	x	x
6	x	x	x
7	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_1h_2^{-2}h_3^{-1}y, y)$
8	x	x	x

Tabelle 2.3: Tabelle zu Abbildung 2.3

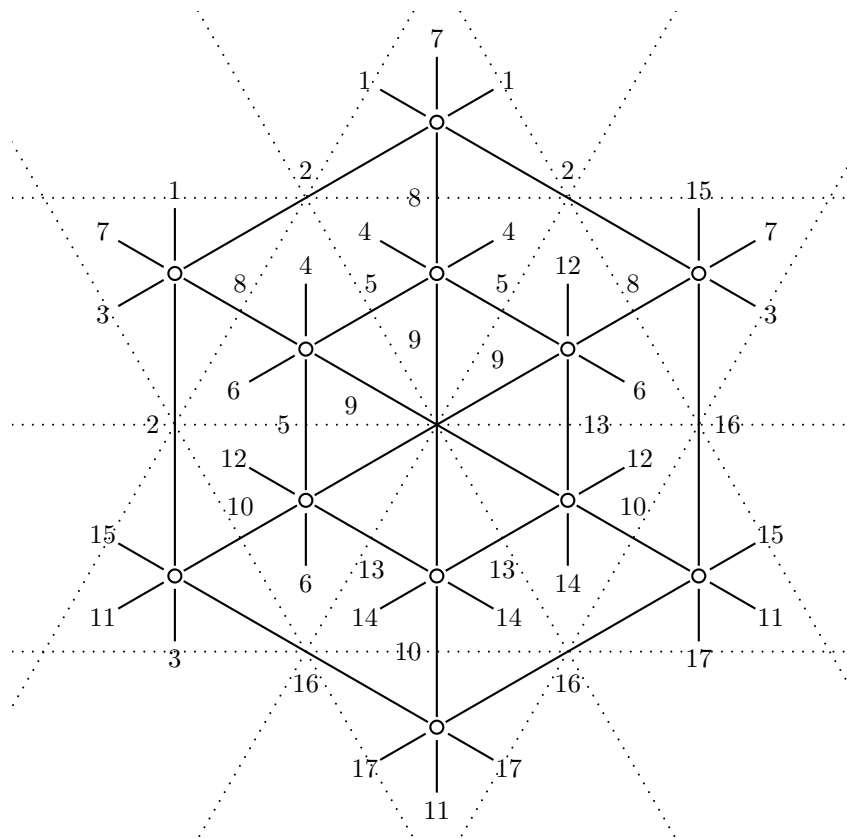


Abbildung 2.4: Das Objekt \mathcal{Q}' , regulär vom Typ II

	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x
2	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_1^{-3}h_2h_3^{-1}y, y)$
3	x	x	x
4	x	x	x
5	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-2}y, y)$	$(x - h_1^{-1}h_2h_3^{-1}y, y)$
6	x	x	x
7	h_1x	h_2x	h_3x
8	$(h_1x + y, h_1y)$	$(h_2x + y, h_2y)$	$(h_3x + y, h_3y)$
9	(x, h_1y)	(x, h_2y)	(x, h_3y)
10	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_3^{-1}y, y)$
11	x	x	x
12	x	x	x
13	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x - h_1h_2^{-1}h_3^{-1}y, y)$
14	x	x	x
15	x	x	x
16	$(x + h_1^{-1}y, y)$	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x + h_1h_2^{-3}h_3^{-1}y, y)$
17	x	x	x

Tabelle 2.4: Tabelle zu Abbildung 2.4

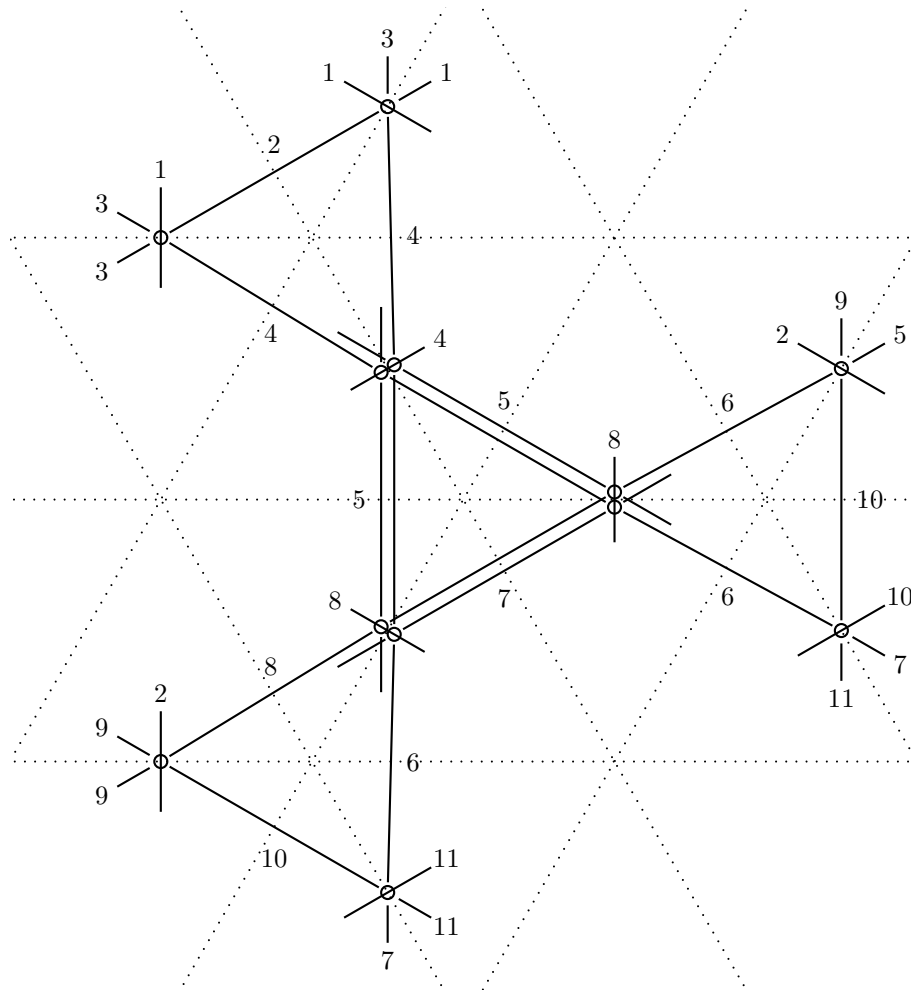


Abbildung 2.5: Das zerlegbare Objekt \mathcal{P}

	S^1	S^2	S^3
1	x	h_2x	h_3x
2	$(x + h_1^{-1}y, y)$	x	x
3	x	h_2x	h_3x
4	$(h_1x + y, y)$	$(h_2x + y, z, h_2y)$	$(h_1h_2^{-1}z, -h_1^{-1}h_3x - h_1^{-1}y, h_3y)$
5	h_1x	$(z, x + h_2^{-1}y, h_2w, y)$	$(h_2z, h_1h_2^{-1}x + h_1^{-1}h_3^{-1}y, y, h_3w)$
6	$(z, h_1x + y, h_1y)$	$(x + h_2^{-1}y, z, y)$	$(-h_1^{-1}x - h_1^{-1}h_3^{-1}y, y, z)$
7	$(z + h_1^{-1}w, x, w, h_1y)$	x	x
8	$(x + h_1^{-1}y, z, y)$	$(h_2x + y, y)$	$(-h_2h_3x - h_1y, y)$
9	x	x	1
10	h_1x	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(h_1h_2^{-1}x + h_1^2h_2^{-3}h_3^{-1}y, y)$
11	x	x	x

Tabelle 2.5: Tabelle zu Abbildung 2.5

Wir wählen an der Stelle, die in S^2 -Richtung mit „8“ bezeichnet ist, die S^0 -Basis $\{(1, 1), (h_2, -h_2)\}$. Wie in Lemma 2.5 erkennt man:

$$\{(h_2x + y, y) | x, y \in S^2\} \cong S^2(1, 1) \oplus S^2(h_2, -h_2).$$

Wir betrachten das Unterobjekt $\mathcal{Q}_{1,\nu} \subseteq \mathcal{T}_\Omega^{\Gamma'} \mathcal{Q}'$, das von den S^0 -Moduln an den zwei tiefsten Gewichten zusammen mit dem Erzeugnis von $(1, 1)$ an der eben bezeichneten Stelle gebildet wird. Abgebildet ist es in Abbildung 2.6 und Tabelle 2.6. Sein Bild unter dem Verschiebungsfunktor $\mathcal{T}_{\Gamma'}^\Omega$ ist regulär vom Typ I wie in Abbildung 2.2. Dabei handelt es sich aber genau um einen der vier Summanden, in den der große reguläre Projektive zerfällt. Damit ist $\mathcal{Q}_{1,\nu}$ das Bild des deformierten unzerlegbar Projektiven zum minimalen Element seines Trägers unter dem Kombinatorikfunktore.

Analog können wir im letzten Schritt statt α_1 auch α_2 wählen. Wir erhalten dann auf dieselbe Weise ein Objekt $\mathcal{Q}_{2,\nu}$, welches in Abbildung 2.7 und Tabelle 2.7 gezeigt wird.

Dieses Vorgehen verschafft uns einen Satz von Objekten \mathcal{Q}_{j,ν_i} für $i, j \in \{1, 2, 3\}$, die jede Wand in einem $p\mathbb{Z}R$ -Fundamentalebene abdecken.

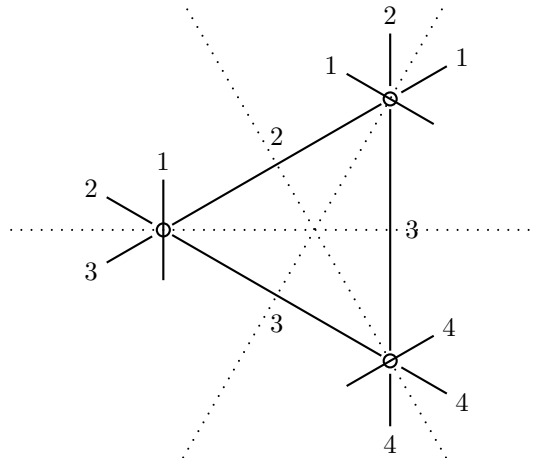


Abbildung 2.6: Das kombinatorische Objekt $\mathcal{Q}_{1,\nu}$

a	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x
2	$(x + h_1^{-1}y, y)$	x	x
3	x	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x - h_1^{-1}h_3^{-1}y, y)$
4	x	x	x

Tabelle 2.6: Tabelle zu Abbildung 2.6

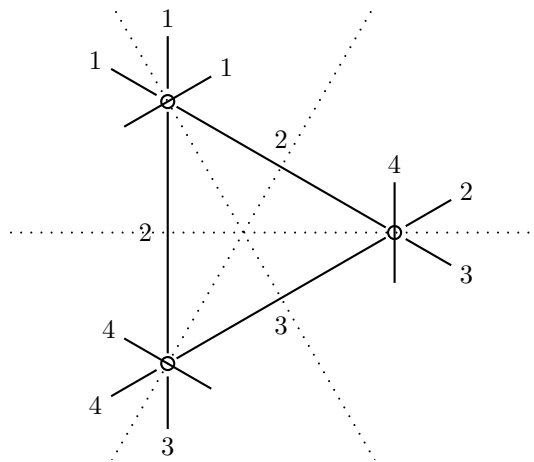


Abbildung 2.7: Das kombinatorische Objekt $\mathcal{Q}_{2,\nu}$

a	S^1	S^2	S^3
1	x	x	x
2	x	$(x + h_2^{-1}y, y)$	$(x - h_2^{-1}h_3^{-1}y, y)$
3	$(x + h_1^{-1}y, y)$	x	x
4	x	x	x

Tabelle 2.7: Tabelle zu Abbildung 2.7

Sortieren wir sie entsprechend den \mathcal{W} -Bahnen, in denen ihre Gewichte liegen, so erhalten wir drei Objekte der Form

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{1,\nu} \oplus \mathcal{Q}_{2,\nu'} \oplus \mathcal{Q}_{3,\nu''}$$

die jeweils einem $p\mathbb{Z}R$ -Erzeuger $Q = Q(\mu_1) \oplus Q(\mu_2) \oplus Q(\mu_3)$ eines der semi-regulären Blöcke $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma_i)$ entsprechen.

2.5 Der Köcher von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$

Sei Γ ein semiregulärer Orbit. Zur Bestimmung von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^\#(Q)$ betrachten wir zunächst das zu $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})$ gehörende Objekt aus Abschnitt 2.4. Seien \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' zwei seiner Summanden, die jeweils noch um ein Element von $p\mathbb{Z}R$ verschoben sind. Wir berechnen zunächst alle Morphismenräume $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(Q, Q')$ und die entsprechenden $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(Q, Q')$ und setzen sie dann zu der vollständigen Algebra zusammen.

Unter den Morphismenräumen $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ betrachten wir zunächst nur diejenigen, für die der Schnitt der Träger von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' zweielementig ist. Wir erhalten Räume von Morphismen

$$\begin{aligned} u_\mu^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \uparrow \mu), & \alpha_i \uparrow \mu &\neq \mu, i \in \{1, 2\}, \\ d_\mu^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \downarrow \mu), & \alpha_i \downarrow \mu &\neq \mu, i \in \{1, 2\}, \\ t_\mu^i &: \mu \rightarrow (\alpha_3 \uparrow (\alpha_i \uparrow \mu)), & \alpha_3 \uparrow \mu &= \mu, i \in \{1, 2\}, \\ b_\mu^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \downarrow (\alpha_3 \downarrow \mu)), & \alpha_i \uparrow \mu &= \mu, i \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Dabei werden die kombinatorischen Objekte durch das minimale Element ihres Trägers repräsentiert. Die Bezeichnungen u, d, t, b sollen für *up*, *down*, *top*, *bottom* stehen. Falls $\alpha_j \uparrow \mu = \mu$, schreiben wir u_j^i statt u_μ^i . Dabei wird aus dem Zusammenhang immer klar werden, welches der Gewichte mit dieser Eigenschaft gemeint sein soll.

Die Bedingungen $f(\mathcal{Q}(\mu, \beta)) \subset \mathcal{Q}'(\mu, \beta)$ an einen kombinatorischen Morphismus f führen zu einem Satz von Gleichungssystemen, deren Fundamentallösungen Erzeuger der Morphismenräume liefern. Angegeben ist im folgenden das Paar der Abbildungen

$$(\varphi_\mu : \mathcal{Q}(\mu) \rightarrow \mathcal{Q}'(\mu))_{\mu \in (\text{tr } \mathcal{Q} \cap \text{tr } \mathcal{Q}')} ,$$

wobei wie üblich das nach der Ordnung kleinere Gewicht zuerst genannt wird. Da alle $\mathcal{Q}(\mu)$ freie S^\emptyset -Moduln vom Rang 1 sind, wird dabei φ_μ durch $\varphi_\mu(1)$ repräsentiert.

$$\begin{array}{ll} u_1^2 = (1, 1), & u_2^1 = (1, 1), \\ u_3^1 = (-1, h_1^{-1}h_2) & u_3^2 = (-1, h_1h_2^{-1}), \\ d_1^2 = (h_2, h_2), & d_2^1 = (h_1, h_1), \\ d_3^1 = (h_1, h_3), & d_3^2 = (h_2, h_3), \\ t_3^1 = (h_1^{-1}, h_3^{-1}), & t_3^2 = (h_2^{-1}, h_3^{-1}), \\ b_1^1 = (h_1h_3, h_1h_3), & b_2^2 = (h_2h_3, h_2, h_3) \end{array}$$

Enthält der Schnitt der Träger von \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' nur ein Element, so rechnet man leicht nach, dass $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ von einer geeigneten Verknüpfung von Erzeugern von $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'')$ und $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(\mathcal{Q}'', \mathcal{Q}')$ erzeugt wird. Analoges gilt für die $\mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(\mathcal{Q}, \mathcal{Q})$.

Dabei gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{array}{ll} u_3^j u_i^j = d_3^j d_i^j = d_3^k b_i^j = t_3^k u_i^j = 0, & \\ u_1^2 t_3^1 = u_2^1 t_3^2, & u_3^i u_i^j = -t_3^j d_i^j, \\ d_i^j t_3^i = u_j^i u_3^i, & d_3^i u_i^j = t_3^j b_i^i, \\ b_j^j u_3^i = -d_i^j d_3^j, & u_3^i b_i^j = d_3^i d_i^j, \\ b_2^2 d_3^1 = b_1^1 d_3^2, & \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{l} d_3^j u_i^j - u_3^j d_i^j = h_j \text{id}_{\mathcal{Q}_i}, \\ t_3^i b_i^i + d_3^j u_i^j = h_3 \text{id}_{\mathcal{Q}_i}, \\ t_3^i b_i^i + u_3^j d_i^j = h_i \text{id}_{\mathcal{Q}_i}, \\ b_i^i t_3^i + d_i^j u_3^j + u_j^i d_3^i - d_j^i u_3^i = h_j \text{id}_{\mathcal{Q}_3}, \\ b_1^1 t_3^1 + b_2^2 t_3^2 + u_2^1 d_3^1 + u_1^2 d_3^2 = h_3 \text{id}_{\mathcal{Q}_3}, \end{array}$$

wobei i, j immer so gewählt seien, dass $\{i, j\} = \{1, 2\}$; k sei beliebig aus $\{1, 2\}$.

Satz 2.7. Die Algebra $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^{\sharp}(Q)^{opp}$ wird erzeugt von Elementen

$$\begin{aligned} u_{\mu}^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \uparrow \mu), & \alpha_i \uparrow \mu &\neq \mu, i \in \{1, 2\}, \\ d_{\mu}^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \downarrow \mu), & \alpha_i \downarrow \mu &\neq \mu, i \in \{1, 2\}, \\ t_{\mu}^i &: \mu \rightarrow (\alpha_3 \uparrow (\alpha_i \uparrow \mu)), & \alpha_3 \uparrow \mu &= \mu, i \in \{1, 2\}, \\ b_{\mu}^i &: \mu \rightarrow (\alpha_i \downarrow (\alpha_3 \downarrow \mu)), & \alpha_i \uparrow \mu &= \mu, i \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

mit den Relationen

$$\begin{aligned} u_i^j u_3^j &= d_i^j d_3^j = b_i^j d_3^k = u_i^j t_3^k = 0, \\ t_3^1 u_1^2 &= t_3^2 u_2^1, & u_i^j u_3^i &= -d_i^j t_3^j, \\ t_3^i d_i^j &= u_3^i u_j^i, & u_i^j d_3^i &= b_i^i t_3^j, \\ u_3^i b_j^j &= -d_3^j d_i^j, & b_i^i u_3^i &= d_i^j d_3^i, \\ d_3^1 b_2^2 &= d_3^2 b_1^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^j d_3^j - d_i^j u_3^j &= 0, \\ b_i^i t_3^i + u_i^j d_3^j &= 0, \\ b_i^i t_3^i + d_i^j u_3^j &= 0, \\ t_3^i b_i^i + u_3^j d_i^j + d_3^i u_j^i - u_3^i d_j^i &= 0, \\ t_3^1 b_1^1 + t_3^2 b_2^2 + d_3^1 u_2^1 + d_3^2 u_1^2 &= 0, \\ \{i, j\} = \{1, 2\}, k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Lemma 1.7 gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(Q_1, Q_2) &\cong \mathcal{C}_{\hat{S}}(Q_{\hat{S},1} \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K}, Q_{\hat{S},2} \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K}) \\ &\cong \mathcal{C}_{\hat{S}}(Q_{\hat{S},1}, Q_{\hat{S},2}) \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K} \\ &\cong \mathcal{K}(\Gamma, \hat{S})(Q_1, Q_2) \otimes_{\hat{S}} \mathbb{K} \end{aligned}$$

Damit erzeugen die Bilder der $u_{\mu}^{\alpha}, d_{\mu}^{\alpha}, t_{\mu}^{\alpha}, b_{\mu}^{\alpha}$ von oben $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(Q_1, Q_2)$ als \mathbb{K} -Algebra. Ebenso erfüllen sie die unter dem Basiswechsel $\hat{S} \rightarrow \mathbb{K}$ gebildeten Relationen – hier schon mit der opponierten Verknüpfung geschrieben. Es bleibt nun nur noch zu zeigen, dass der Basiswechsel keine weiteren Relationen auftreten lässt. Dazu berechnen wir die Dimensionen der Morphismenräume unter Verwendung der Rechnung im Beweis von [Soe95, Lemma

3.1.2]:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(Q(\mu), Q(\mu')) &= [Q(\mu') : L(\mu)] \\
&= \sum_{\lambda} (Q(\mu') : Z(\lambda)) [Z(\lambda) : L(\mu)] \\
&= \sum_{\lambda} (Q(\mu') : Z(\lambda)) (Q(\mu) : Z(\lambda)) \\
&= \sum_{\lambda} \dim_{\mathfrak{S}} \mathcal{Q}(\mu')(\lambda) \cdot \dim_{\mathfrak{S}} \mathcal{Q}(\mu)(\lambda) \\
&= |\operatorname{tr} \mathcal{Q}(\mu') \cap \operatorname{tr} \mathcal{Q}(\mu)|
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $M(\mu, \mu')$ die durch die obigen Elemente und Relationen erzeugte Unteralgebra in $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}^{\sharp}(Q)$, so rechnet man nach:

$$\dim_{\mathbb{K}} M(\mu, \mu') \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(Q(\mu), Q(\mu'))$$

Um Gleichheit zu erreichen, müssen die Bilder unter dem Basiswechsel also linear unabhängig bleiben. \square

Abbildung 2.8 veranschaulicht $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^{\sharp}(Q)^{\text{opp}}$ in Form eines Köchers mit Relationen. In den von den Pfeilen gebildeten Zellen bedeutet „=“, dass die beiden Wege um diese Zelle gleich sind, „(-1)“, dass sie sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Ein Summenzeichen bedeutet, dass alle im nachfolgenden Bild enthaltenen Paare von Hin- und Rückpfeil summiert werden. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Wände auf relevante Teilstücke gekürzt.

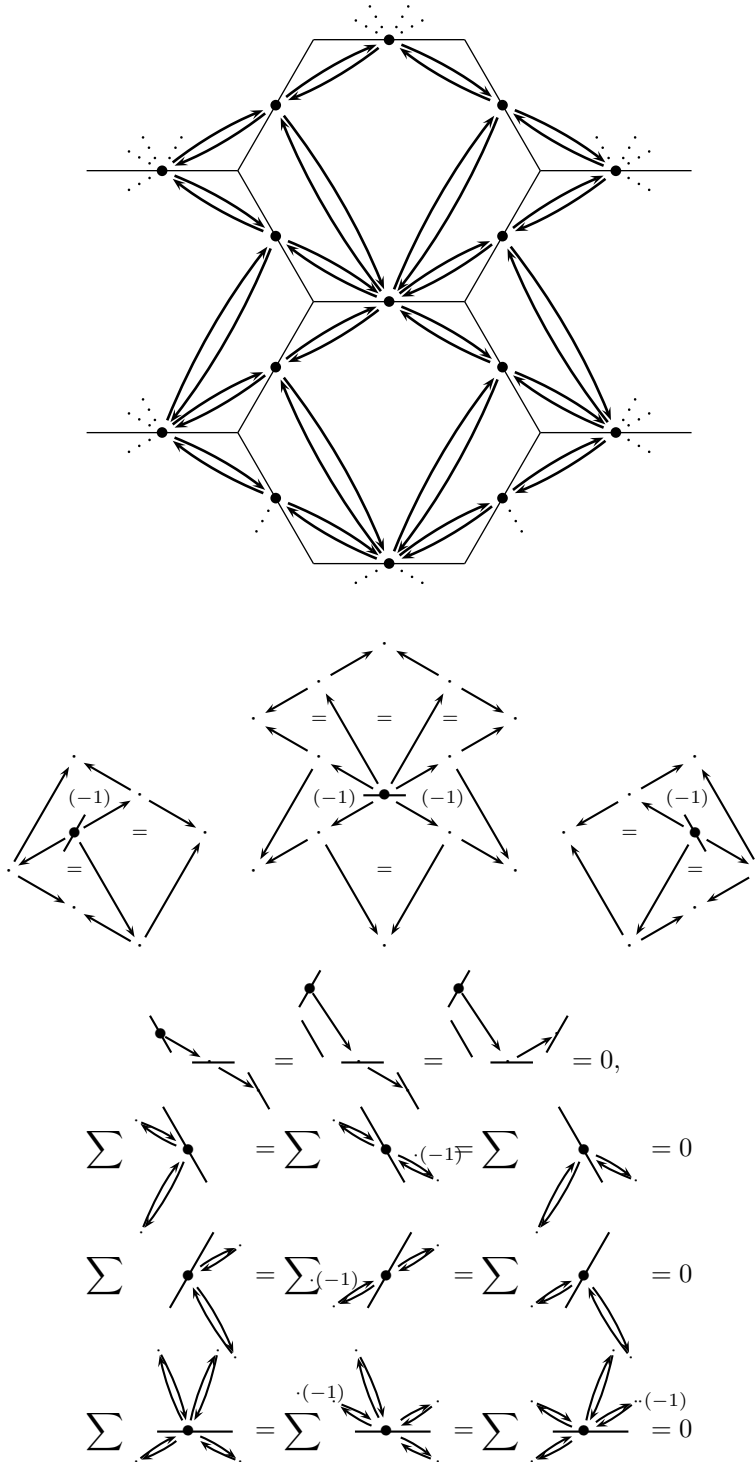


Abbildung 2.8: Der Köcher von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$

Kapitel 3

Koszulität

3.1 Graduierte Kategorien und ihre quadratischen Dualen

Jede Wegealgebra eines Köchers mit Relationen über \mathbb{K} trägt die Struktur einer *graduierten \mathbb{K} -Kategorie*. Ihre Objekte sind die Punkte des Köchers, die Morphismenräume sind das Erzeugnis der Wege zwischen den Punkten, graduiert nach der Weglänge.

Insbesondere liefert $A = \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)^{\sharp}(Q)^{\text{opp}}$ eine graduierte \mathbb{K} -Kategorie \mathcal{A} mit Morphismenräumen

$$\mathcal{A}(\lambda, \mu) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i(\lambda, \mu).$$

Ist M \mathbb{Z} -graduiert und $k \in \mathbb{Z}$, so bezeichnen wir mit $\langle k \rangle$ die Verschiebung der Graduierung um k , das heißt

$$M \langle k \rangle_i = M_{k+i}.$$

Die folgende Definition stammt von Mazorchuk, Ovsienko und Stroppel und bildet den Ausgangspunkt von [MOS06]:

Definition 3.1. Eine graduierte \mathbb{K} -Kategorie \mathcal{G} heißt *positiv graduiert*, falls gilt:

1. $\mathcal{G}_i(\lambda, \mu) = 0$ für alle Objekte $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$ und $i < 0$.
2. $\mathcal{G}_0(\lambda, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda \neq \mu, \\ \mathbb{K} \text{id}_{\lambda}, & \text{falls } \lambda = \mu. \end{cases}$

3. $\dim \mathcal{G}_i(\lambda, \mu) < \infty$ für alle $\lambda, \mu \in \mathcal{C}$ und alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Die Mengen $\{\mu \in \mathcal{C} \mid \mathcal{C}_i(\lambda, \mu) \neq 0\}$ und $\{\mu \in \mathcal{C} \mid \mathcal{C}_i(\mu, \lambda) \neq 0\}$ sind für jedes $\lambda \in \mathcal{C}$ und jedes $i \in \mathbb{N}$ endlich.

Eine positiv graduierte Kategorie in diesem Sinne besitzt noch ausreichend viele Endlichkeitseigenschaften, um die wesentlichen Aussagen aus der Theorie der endlichdimensionalen Algebren ins Unendlichdimensionale zu übertragen. Insbesondere ist die Kategorie $\mathcal{G}\text{-gmod}$ der lokal endlichdimensionalen graduierten \mathcal{G} -Moduln abelsch.

Lemma 3.1. [MOS06, 2.3, Lemma 4] Sei \mathcal{G} eine positiv graduierte Kategorie und $\lambda \in \mathcal{G}$. Das Objekt

$$P(\lambda) = \mathcal{G}(\lambda, \cdot)$$

ist unzerlegbar und projektiv in $\mathcal{G}\text{-gmod}$. Sein Quotient $L(\lambda)$ nach dem maximalen graduierten Untermodul ist einfach in $\mathcal{G}\text{-mod}$, wenn man die Graduierung vergisst. Jedes einfache Objekt von $\mathcal{G}\text{-gmod}$ ist isomorph zu einem $L(\lambda)\langle i \rangle$ und hat eine minimale projektive Auflöfung.

Die Kategorie \mathcal{A} ist, wie man leicht nachprüft, eine positiv graduierte Kategorie.

Definition 3.2. Eine positiv graduierte Kategorie \mathcal{G} heiße *Koszul*, falls jeder der einfachen graduierten \mathcal{G} -Moduln $L(\lambda)$ aus Lemma 3.1 eine graduierte projektive Auflöfung

$$\dots \rightarrow P^k \rightarrow \dots \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \rightarrow L(\lambda)$$

besitzt, so dass P^k von seinem homogenen Anteil P_k^k vom Grad k erzeugt wird.

Definition 3.3. Sei \mathcal{G} eine positiv graduierte Kategorie. \mathcal{G}_0 und \mathcal{G}_1 seien Kategorien mit denselben Objekten wie \mathcal{G} , aber den Morphismen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(\lambda, \mu) &= \mathcal{G}(\lambda, \mu)_0, \\ \mathcal{G}_1(\lambda, \mu) &= \mathcal{G}(\lambda, \mu)_1. \end{aligned}$$

Bezeichne \mathcal{F} den freien Tensor-Bimodul über \mathcal{G}_1 , das heißt

$$\mathcal{F}(\cdot, \cdot) = \mathcal{G}_0(\cdot, \cdot) \oplus \mathcal{G}_1(\cdot, \cdot)^* \oplus (\mathcal{G}_1(\cdot, \cdot)^* \otimes \mathcal{G}_1(\cdot, \cdot)^*) \oplus \dots$$

Die Multiplikationsabbildung

$$m_{\lambda, \mu}^\nu : \mathcal{G}(\nu, \mu)_1 \otimes \mathcal{G}(\lambda, \nu)_1 \rightarrow \mathcal{G}(\lambda, \mu)_2$$

liefert durch dualisieren eine Abbildung

$$(m_{\lambda,\mu}^\nu)^* : (\mathcal{G}(\lambda, \mu)_2)^* \rightarrow (\mathcal{G}(\nu, \mu)_1 \otimes \mathcal{G}(\lambda, \nu)_1)^* \cong \mathcal{G}_1(\lambda, \nu)^* \otimes \mathcal{G}_1(\nu, \mu)^*.$$

(An dieser Stelle geht die dritte Bedingung aus der Definition ein.) Sei \mathcal{J} der von den Bildern aller $(m_{\lambda,\mu}^\nu)^*$ erzeugte Unterbimodul von \mathcal{F} .

Die *quadratisch duale Kategorie* $\mathcal{G}^!$ ist nun die Kategorie mit denselben Objekten wie \mathcal{G} und den Morphismen

$$\mathcal{G}^!(\lambda, \mu) = \mathcal{F}(\lambda, \mu) / \mathcal{J}(\lambda, \mu).$$

Durch Bilden des quadratisch Dualen werden die Relationen in \mathcal{G} also durch orthogonale quadratische Relationen ersetzt.

Wir wollen die Definition sofort auf die Kategorie \mathcal{A} anwenden. Es gilt also für alle $\mu, \mu' \in \Gamma$ zu bestimmen, wohin Pfade der Länge 2 aus $\mathcal{A}(\mu, \mu')$ unter den Abbildungen $(m_{\mu,\mu'}^\nu)^*$ abgebildet werden. Zunächst identifizieren wir die Erzeuger $u_\mu^\alpha, d_\mu^\alpha, t_\mu^\alpha, b_\mu^\alpha$ von $\mathcal{A}_1(\cdot, \cdot)$ mit ihren Dualen. Durch Nachrechnen stellen wir anschließend fest:

Lemma 3.2. *Die Morphismen der quadratisch dualen Kategorie $\mathcal{A}^!$ werden erzeugt durch die $u_\mu^\alpha, d_\mu^\alpha, t_\mu^\alpha, b_\mu^\alpha \in \mathcal{A}_1^!(\cdot, \cdot)$ mit den Relationen:*

$$\begin{aligned} t_3^1 u_1^2 + t_3^2 u_2^1 &= 0, & u_i^j u_3^i - d_i^j t_3^j &= 0, \\ t_3^i d_i^j + u_3^i u_j^i &= 0, & u_i^j d_3^i + b_i^i t_3^j &= 0, \\ u_3^i b_j^j - d_3^j d_i^j &= 0, & b_i^i u_3^i + d_i^j d_3^i &= 0, \\ d_3^1 b_2^2 + d_3^2 b_1^1 &= 0, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} u_i^j d_3^j + d_i^j u_3^j - b_i^i t_3^i &= 0, \\ t_3^i b_i^i - d_3^j u_i^j &= 0, \\ d_3^i u_j^i - d_3^j u_i^j - u_3^i d_j^i &= 0. \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen seien dabei analog zu denen in Satz 2.7 gewählt. Insbesondere ist $k \in \{1, 2\}$ und für i, j gilt stets $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

In Abbildung 3.1 auf Seite 44 veranschaulichen wir $\mathcal{A}^!$ durch ihren Köcher.

Lemma 3.3. *Es gibt eine kanonische Äquivalenz*

$$(A^!)^! \cong \mathcal{A}.$$

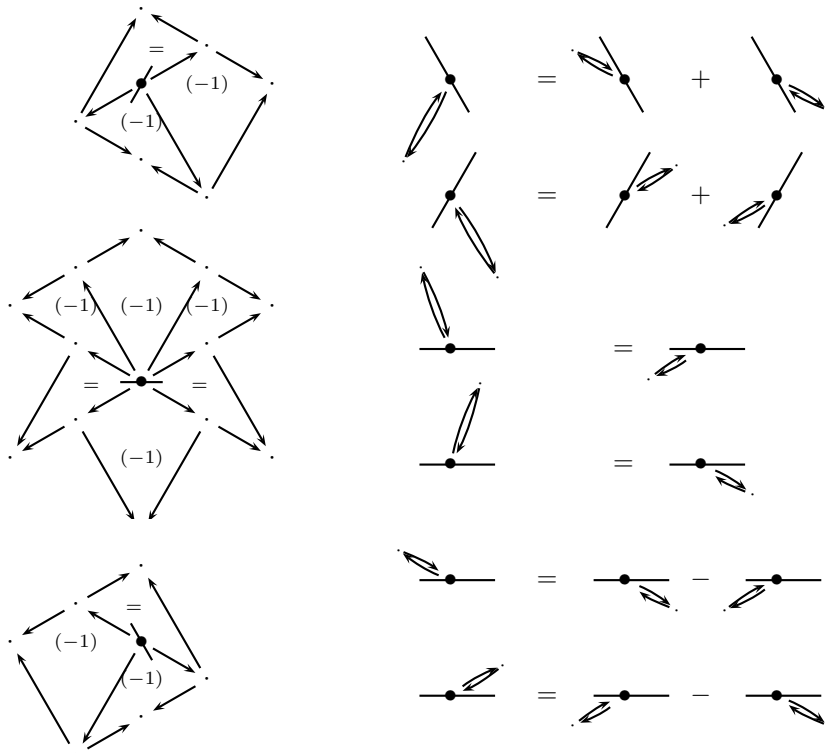
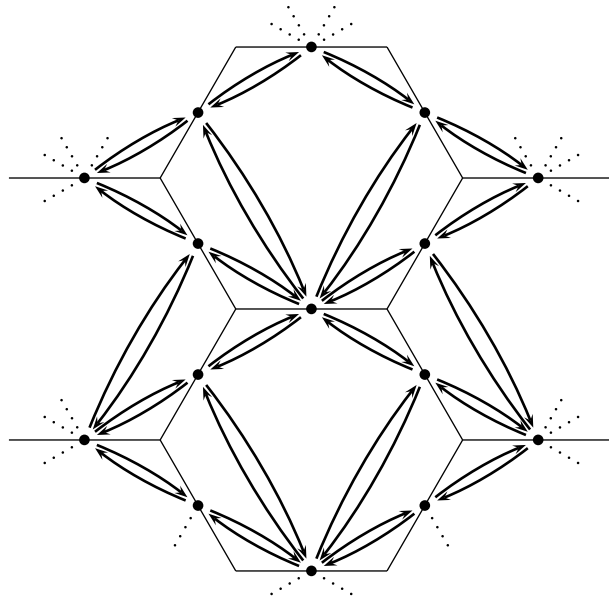


Abbildung 3.1: Die quadratisch duale Kategorie

Beweis. Da \mathcal{A} über \mathcal{A}_1 mit quadratischen Relationen erzeugt wird, liefert das nochmalige Dualisieren von $\mathcal{A}^!$ genau die erzeugenden Relationen von \mathcal{A} zurück. \square

Das folgende Lemma ergibt sich sofort aus der Gestalt der erzeugenden Relationen.

Lemma 3.4. *Ist a_1, \dots, a_r eine Folge von Pfeilen $a_i : s_i \rightarrow t_i$ in $\mathcal{A}_1^!$, so dass $s_i = t_{i+1}$ für alle $1 \leq i < r$, so ist*

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_r \in \mathcal{A}^!(s_r, t_1) \setminus \{0\}.$$

Nach Lemma 3.1 erhalten wir ein Erzeugendensystem der projektiven Decke von $L(\lambda)$, indem wir alle in λ beginnenden Pfade betrachten. Damit gilt sogar

Korollar 3.5. *Sei $a : \lambda \rightarrow \mu$ ein Pfeil in $\mathcal{A}^!$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \cdot a : P(\mu) &\rightarrow P(\lambda), \\ p &\mapsto p \cdot a \end{aligned}$$

zwischen den projektiven Decken $P(\lambda)$ und $P(\mu)$ eine Injektion.

Satz 3.6. *Die Kategorie $\mathcal{A}^!$ ist Koszul.*

Beweis. Sei $\lambda \in \Gamma$ und $I_k = I_k(\lambda)$ die Menge aller Punkte i , so dass es einen Pfad der Länge k von λ nach i gibt.

Wir zeigen per Induktion, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $h \in I_k$ eine natürliche Zahl N_h , und für alle $i \in I_{k-1}$, $h \in I_k$, alle $1 \leq m \leq N_h$, $1 \leq n \leq N_i$ ein $a_{hi}^{mn} \in \{0, \pm 1\}$ gibt, so dass für $N_h \neq 0$ nicht alle $a_{hi}^{mn} = 0$ sind und

$$\dots \xrightarrow{p^{k+1}} P^k \xrightarrow{p^k} \dots \xrightarrow{p^2} P^1 \xrightarrow{p^1} P^0 \xrightarrow{p^0} L(\lambda)$$

mit

$$P^k = \bigoplus_{h \in I_k} P(h)^{\oplus N_h} \langle k \rangle, \quad \text{für } k \geq 0,$$

$$p^0 : P(\lambda) \rightarrow L(\lambda) \quad \text{die kanonische Abbildung,}$$

$$p^k = \sum_{h \in I_k} \sum_{m=1}^{N_h} p_{h,m}^k, \quad \text{für } k > 0,$$

$$p_{h,m}^k = (\cdot a_{hi}^{mn}(i \rightarrow h))_{i \in I_{k-1}, n \leq N_i} : P(h) \langle k \rangle \rightarrow \bigoplus_{i \in I_{k-1}} P(i)^{\oplus N_i} \langle k-1 \rangle$$

eine minimale projektive Auflösung von $L(\lambda)$ ist.

Das erste Glied der Auflösung $P^0 = P(\lambda)$ erfüllt die Bedingung offensichtlich. Der Kern von $p^0 : P^0 \rightarrow L(\lambda)$ wird erzeugt von den Pfeilen $(\lambda \rightarrow h), h \in I_1$. Damit ist

$$P^1 = \bigoplus_{h \in I_1} P(h) \langle 1 \rangle,$$

$$p^1 = \sum_{h \in I_1} (\cdot(\lambda \rightarrow h))$$

von der gewünschten Form.

Sei nun $k > 1$. Der Kern der Abbildung p^{k-1} besteht nach Induktion aus den $(v_i^n)_{i \in I_{k-1}, n \leq N_i} \in P^{k-1}$, so dass

$$\sum_{i \in I_{k-1}} \sum_{n \leq N_i} v_i^n \cdot a_{ij}^{nl}(j \rightarrow i) = 0 \in P(j) \quad \text{für alle } j \in I_{k-2}, l \leq N_j.$$

Ist $\ker p^{k-1} = 0$, so können wir alle $N_h = 0$ wählen. Andernfalls beachten wir, dass die Relationen in $P(j)$ genau diejenigen in \mathcal{A}^1 sind, die von j ausgehende Pfade betreffen. Sie werden also von quadratischen Relationen aus Lemma 3.2 erzeugt. Wegen Lemma 3.5 sind die $p_{i,n}^{k-1}$ injektiv, denn jeweils mindestens eine der Konstanten a_{i*}^{n*} ist nicht Null. Daher müssen die erzeugenden Relationen an minimaler Stelle eingehen, also beginnend im Punkt j .

Somit wird $\ker(p^{k-1})$ erzeugt von endlich vielen Elementen der Form

$$(a_{hi}^{mn}(i \rightarrow h))_{i \in I_{k-1}, n \leq N_i, h \in I_k, m \leq N_h},$$

so dass $\sum_{i \in I_{k-1}} a_{hi}^{mn} a_{ij}^{nl}(j \rightarrow i \rightarrow h) = 0$ für alle $j \in I_{k-2}, l \leq N_j$. Da in den erzeugenden Relationen nur Konstanten aus $\{0, \pm 1\}$ auftreten, können auch die a_{hi}^{mn} aus $\{0, \pm 1\}$ gewählt werden. Somit erfüllen

$$P^k = \bigoplus_{h \in I_k} P(h)^{\oplus N_h} \langle k \rangle,$$

$$p_{h,m}^k = (\cdot a_{hi}^{mn}(i \rightarrow h))_{i \in I_{k-1}, n \leq N_i}$$

die gewünschten Bedingungen. □

Korollar 3.7. *Die Kategorien $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ und $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ können mit einer graduierten Struktur versehen werden, so dass sie Koszul-Kategorien sind.*

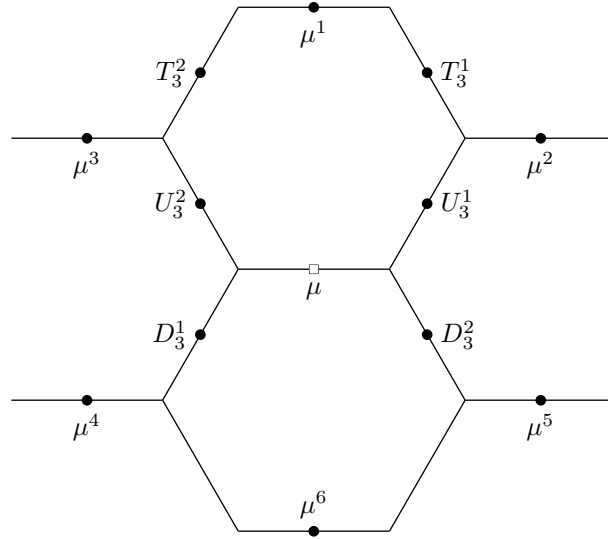


Abbildung 3.2: Bezeichnungen zu Abschnitt 3.2, Teil 1

Beweis. Mit $\mathcal{A}^!$ ist auch $(\mathcal{A}^!)^!$ Koszul [MOS06, Theorem 30]. Das ist nach Lemma 3.3 jedoch dasselbe wie \mathcal{A} .

Die Aussage für $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ folgt mit [AJS94, Lemma F.7] aus der Äquivalenz $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Gamma) \cong \mathcal{A}\text{-gmod}$.

Schließlich ist $\mathcal{C}_{\mathbb{K}} = \bigoplus_{\Omega} \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Omega)$. Die Existenz einer Koszul-Graduierung für die regulären Bahnen wird in [AJS94] bewiesen. Für die speziellen Bahnen Σ ist $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(\Sigma)$ halbeinfach und damit trivialerweise Koszul. Im Fall \mathfrak{sl}_3 verbleiben nur noch semireguläre Bahnen, für die Satz 3.6 gilt. Somit sind alle Summanden von $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ Koszul und damit auch $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ selbst. \square

3.2 Projektive Auflösungen konkret

Zum Abschluss wollen wir die projektiven Auflösungen aus Satz 3.6 noch explizit bestimmen. Wie in Kapitel 1 benutzen wir wieder die Bezeichnung μ_i für generische Elemente von Γ auf einer α_i -Wand. Für den Endpunkt eines von μ ausgehenden Pfades verwenden wir die entsprechenden Großbuchstaben zu den Bezeichnungen der verwendeten Erzeuger.

Im ersten betrachteten Fall liege $\mu = \mu_3$ auf einer α_3 -Wand.

1. Schritt Alles beginnt mit dem Kern der Abbildung

$$p^0 : P(\mu_3) \rightarrow \mu_3.$$

Er wird erzeugt von den sechs Pfeilen

$$\begin{array}{ll} t_3^1 : \mu_3 \rightarrow T_3^1, & t_3^2 : \mu_3 \rightarrow T_3^2, \\ u_3^1 : \mu_3 \rightarrow U_3^1, & u_3^2 : \mu_3 \rightarrow U_3^2, \\ d_3^1 : \mu_3 \rightarrow D_3^1, & d_3^2 : \mu_3 \rightarrow D_3^2. \end{array}$$

2. Schritt Nun heißt es, die sechs Moduln $T_3^1, T_3^2, U_3^1, U_3^2, D_3^1, D_3^2$ durch

$$\tilde{p}_\lambda^1 : P(\lambda) \rightarrow \lambda, \quad \lambda \in \{T_3^1, T_3^2, U_3^1, U_3^2, D_3^1, D_3^2\},$$

aufzulösen, die Abbildung zu

$$p_\lambda^1 : P(\lambda) \langle 1 \rangle \rightarrow P(\mu_3)$$

fortzusetzen und den Kern der Abbildung

$$p^1 = \bigoplus_{\lambda} p_\lambda^1 : \bigoplus_{\lambda} P(\lambda) \langle 1 \rangle \rightarrow P(\mu_3)$$

zu bestimmen. Als Erzeuger erhalten wir genau die erzeugenden Relationen von \mathcal{A}^1 aus Lemma 3.2. Damit wird $\ker p^1$ erzeugt von

$$\begin{array}{ll} b_{T_3^1}^1 - u_{D_3^2}^2, & \text{endend in } \mu^0 = \mu, \\ b_{T_3^2}^2 - u_{D_3^1}^1, & \text{endend in } \mu, \\ u_{D_3^1}^1 - u_{D_3^2}^2 - d_{U_3^1}^1, & \text{endend in } \mu, \\ u_{D_3^2}^2 - u_{D_3^1}^1 - d_{U_3^2}^2, & \text{endend in } \mu, \\ u_{T_3^1}^2 + u_{T_3^2}^1, & \text{endend in } \mu^1 = T_3^1 U_1^2, \\ d_{T_3^1}^2 + u_{U_3^1}^1, & \text{endend in } \mu^2 = U_3^1 U_2^1, \\ d_{T_3^2}^1 + u_{U_3^2}^2, & \text{endend in } \mu^3 = U_3^2 U_1^2, \\ b_{U_3^2}^1 - d_{D_3^1}^1, & \text{endend in } \mu^4 = D_3^1 D_2^1, \\ b_{U_3^1}^2 - d_{D_3^2}^2, & \text{endend in } \mu^5 = D_3^2 D_1^2, \\ b_{D_3^1}^2 + b_{D_3^2}^1, & \text{endend in } \mu^6 = D_3^1 B_2^2. \end{array}$$

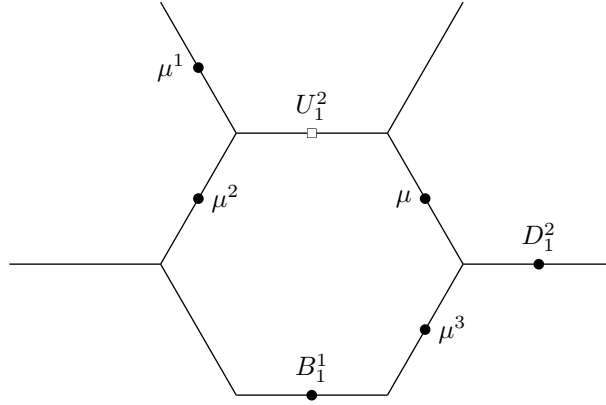


Abbildung 3.3: Bezeichnungen zu Abschnitt 3.2, Teil 2

3. Schritt Wir betrachten den Grad 1 von

$$p^2 : \left(P(\mu)^{\oplus 4} \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq 6} P(\mu^i) \right) \langle 2 \rangle \rightarrow \bigoplus_{\lambda} P(\lambda) \langle 1 \rangle.$$

Es handelt sich dabei um eine Abbildung von einem 60-dimensionalen in einen 84-dimensionalen Raum. Ihr Kern wird erzeugt von

$$\begin{aligned} d_{\mu^{0,3}}^1 - u_{\mu^4}^1 + t_{\mu^6}^2, & \quad \text{endend in } D_3^1, \\ d_{\mu^{0,4}}^2 - u_{\mu^5}^2 + t_{\mu^6}^1, & \quad \text{endend in } D_3^2. \end{aligned}$$

4. Schritt Die Bilder von $P(D_3^1)$ und $P(D_3^2)$ in $\bigoplus_i P(\mu^i)$ haben keine gemeinsamen Endpunkte mehr, so dass die projektive Auflösung abgeschlossen wird durch

$$p^3 : (P(D_3^1) \oplus P(D_3^2)) \langle 3 \rangle \rightarrow \bigoplus_i P(\mu^i) \langle 2 \rangle.$$

Als nächstes untersuchen wir den Fall $\mu = \mu_1$ auf einer α_1 -Wand.

1. Schritt Auch hier beginnen wir mit der projektiven Decke

$$p^0 : P(\mu_1) \rightarrow \mu_1.$$

Ihr Kern wird erzeugt von den Pfeilen

$$\begin{aligned} u_1^2 &: \mu_1 \rightarrow U_1^2, \\ d_1^2 &: \mu_1 \rightarrow D_1^2, \\ b_1^1 &: \mu_1 \rightarrow B_1^1. \end{aligned}$$

2. Schritt Als nächstes betrachten wir den Kern der Abbildung

$$p^1 : \bigoplus_{\lambda \in \{U_1^2, D_1^2, B_1^1\}} P(\lambda) \langle 1 \rangle \rightarrow P(\mu_1).$$

Auch hier liefern die erzeugenden Relationen Erzeuger:

$$\begin{aligned} d_{U_1^2}^2 + u_{D_1^2}^2 - t_{B_1^1}^1, & \quad \text{endend in } \mu^0 = \mu, \\ t_{D_1^2}^2 + u_{U_1^2}^1, & \quad \text{endend in } \mu^1 = U_3^1 U_1^2, \\ d_{U_1^2}^1 + t_{B_1^1}^2, & \quad \text{endend in } \mu^2 = D_3^2 U_1^2, \\ d_{D_1^2}^1 - u_{B_1^1}^1, & \quad \text{endend in } \mu^3 = D_3^1 D_1^2. \end{aligned}$$

3. Schritt Im Kern der Abbildung

$$p^2 : \bigoplus_{0 \leq i \leq 3} P(\mu^i) \langle 2 \rangle \rightarrow \bigoplus_{\lambda} P(\lambda) \langle 1 \rangle$$

findet sich als einzige erzeugende Relation nur noch

$$b_{\mu^2}^2 + b_{\mu}^1 + d_{\mu^3}^1, \quad \text{endend in } B_1^1.$$

4. Schritt Die Abbildung

$$p^3 : P(B_1^1) \langle 3 \rangle \rightarrow \bigoplus_{0 \leq i \leq 3} P(\mu^i) \langle 2 \rangle$$

ist injektiv.

Der letzte verbleibende Fall verläuft analog zum vorigen, man vertausche lediglich die einfachen Wurzeln α_1 und α_2 .

Literaturverzeichnis

- [AJS94] ANDERSEN, Henning H. ; JANTZEN, Jens C. ; SOERGEL, Wolfgang: Representations of quantum groups at a p th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p . In: *Astérisque* (1994), Nr. 220
- [And80] ANDERSEN, Henning H.: The strong linkage principle. In: *J. reine angew. Math.* 315 (1980), S. 53–59
- [BGG75] BERNŠTEĚN, Iosef N. ; GEL'FAND, Israel M. ; GEL'FAND, Serge I.: A certain category of \mathfrak{g} -modules. In: *Funkcional. Anal. i Priložen.* 10 (1975), Nr. 2, S. 1–8
- [BGG78] BERNSTEIN, Joseph ; GELFAND, Israel M. ; GELFAND, Serge I.: Algebraic vector bundles on P^n and problems of linear algebra. In: *Funct. Anal. App.* 12 (1978), Nr. 3, S. 66–67
- [BGS96] BEILINSON, Alexander ; GINZBURG, Victor ; SOERGEL, Wolfgang: Koszul duality patterns in representation theory. In: *J. Amer. Math. Soc.* 9 (1996), Nr. 2, S. 473–527
- [BMR02] BEZRUKAVNIKOV, Roman ; MIRKOVIĆ, Ivan ; RUMYNIN, Dmitriy: Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. In: *Preprint* (2002). [arXiv:math/0205144](https://arxiv.org/abs/math/0205144) [math.RT]. – erscheint in *Ann. Math.*
- [BMR06] BEZRUKAVNIKOV, Roman ; MIRKOVIĆ, Ivan ; RUMYNIN, Dmitriy: Singular localization and intertwining functors for reductive Lie algebras in prime characteristic. In: *Nagoya Math. J.* 184 (2006), S. 1–55
- [Cli87] CLINE, Ed: Simulating algebraic geometry with algebra. III. The Lusztig conjecture as a TG_1 -problem. In: *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)* Bd. 47.

- Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1987 (Proc. Sympos. Pure Math.), S. 149–161
- [Fie06] FIEBIG, Peter: Multiplicity one results in Kazhdan-Lusztig theory and equivariant intersection cohomology. In: *Preprint* (2006). [arXiv:math/0607501v2](#) [math.RT]
- [Fie07] FIEBIG, Peter: Sheaves on affine flag varieties, projective representations and Lusztig’s conjectures. In: *Preprint* (2007). [arXiv:math/07110871v1](#) [math.RT]
- [Jan77] JANTZEN, Jens C.: Über das Dekompositionsverhalten gewisser modularer Darstellungen halbeinfacher Gruppen und ihrer Lie-Algebren. In: *J. Algebra* 49 (1977), Nr. 2, S. 441–469
- [Jan87] JANTZEN, Jens C.: *Representations of Algebraic Groups*. Orlando, FA : Pure and applied mathematics (Academic Press), 1987
- [Lus80] LUSZTIG, George: Hecke algebras and Jantzen’s generic decomposition patterns. In: *Adv. in Math.* 37 (1980), Nr. 2, S. 121–164
- [Lus90a] LUSZTIG, George: Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra. In: *J. Amer. Math. Soc.* 3 (1990), Nr. 1, S. 257–296
- [Lus90b] LUSZTIG, George: Quantum groups at roots of 1. In: *Geom. Dedicata* 35 (1990), Nr. 1-3, S. 89–113
- [MOS06] MAZORCHUK, Volodymyr ; OVSIENKO, Serge ; STROPPEL, Catharina: Quadratic duals, Koszul dual functors, and applications. In: *U.U.D.M. Report 2006:5* (2006). [arXiv:math/0603475](#) [math.RT]. – erscheint in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [Pri70] PRIDY, Stewart B.: Koszul resolutions. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 152 (1970), S. 39–60
- [Soe95] SOERGEL, Wolfgang: Roots of unity and positive characteristic. In: *Representations of groups (Banff, AB, 1994)* Bd. 16. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1995 (CMS Conf. Proc.), S. 315–338
- [Str97] STROPPEL, Catharina: *Untersuchungen zu den parabolischen Kazhdan-Lusztig-Polynomen für affine Weyl-Gruppen*, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, Staatsexamensarbeit, 1997